



Никитин А.А., Плющенко Б.Д.

Влияние скважины на
работу пьезокерамического
стержневого прибора
акустического воздействия.
Часть I

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Никитин А.А., Плющенко Б.Д. Влияние скважины на работу пьезокерамического стержневого прибора акустического воздействия. Часть I // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 27. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-27>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША

А.А. Никитин, Б.Д. Плющенко

ВЛИЯНИЕ СКВАЖИНЫ НА РАБОТУ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СТЕРЖНЕВОГО
ПРИБОРА АКУСТИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ
ЧАСТЬ I

МОСКВА 2009

А.А. Никитин, МГУ им. М.В. Ломоносова, геологический факультет
Б.Д. Плющенко, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

**Влияние скважины на работу пьезокерамического
стержневого прибора акустического воздействия. Часть I**

Аннотация. Влияние заполненной жидкостью скважины на работу ультразвукового пьезокерамического излучателя исследуется путем численного моделирования в рамках следующей модели: два одинаковых пьезокерамических стержня круглого сечения, расположенных на одной оси на фиксированном расстоянии друг от друга, вмонтированы несмежными концами в две абсолютно жесткие трубы того же самого сечения. Под действием приложенного к ним переменного электрического напряжения их смежные концы совершают противофазные колебания в аксиальном направлении. Это прибор центрирован в скважине круглого сечения, пробуренной в однородной упругой среде. Достаточно использовать одномерное приближение для описания распространения упругих колебаний в стержне, что позволяет получить искомое решение в квадратурах при заданном механическом импедансе этого излучателя. Значение этого импеданса как функция частоты определяется из численного решения прямой задачи о распространении акустических волн в вышеупомянутой среде, при задании скорости концов стержней в виде временной функции с достаточно большой спектральной шириной. Предложенный подход позволяет приближенно оценить оптимальные параметры такого излучателя в задачах высокочастотного акустического воздействия и акустического каротажа.

A.A. Nikitin, Moscow State University, Geological Faculty

B.D. Plyushchenkov, Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS

**Action of well on operation of the piezoceramic
rod ultrasonic emitter. Part I**

Abstract. The effect of the fluid-filled borehole on operation of a piezoceramic ultrasonic emitter is explored by numerical modeling within the framework of following model. Two identical piezoceramic rods of round cut, disposed coaxially on given distance from each other, are built in adjacent ends of the two absolutely rigid tubes of the same cut. When the variable voltage is applied to ends of the rods, the adjacent ends perform anti-phase oscillations in axial direction. This device is centered in fluid-filled borehole of round cut drilled in a homogeneous elastic medium. It is enough to use the one-dimensional approximation for description of distribution of elastic oscillations in the rod, that allows receiving the desired solution in quadratures at the given mechanical impedance of this emitter. The values of this impedance as function of frequency are determined from numerical solution of the direct problem about acoustic waves distribution in the above-mentioned medium giving the rod end velocity as the temporal function with enough big of spectrum width. The proposed approach allows approximate determining optimum parameters of such emitter in acoustic logging and bed stimulation problems.

Введение

В последнее время, в связи с неутешительным прогнозом по динамике мировых запасов углеводородов наблюдается перенос акцента с вовлечения в разработку новых месторождений на повышение рентабельности эксплуатации и, следовательно, увеличения срока службы уже существующих скважин, которых на сегодня более двух миллионов в Мире.

Это достигается различными способами, среди которых особое место занимают методы акустического воздействия, основанные на передаче акустической энергии из скважины в пласт в целом с помощью низкочастотных излучателей (от нескольких до сотен Гц) или в призабойную часть пласта с помощью высокочастотных преобразователей (от нескольких до десятков кГц) (Горбачев Ю.И. и др., 2002).

Широкое распространение из-за коэффициента успешности, избирательности воздействия, дешевизны, быстроты обработки, экологичности и т.д. получил метод высокочастотного акустического воздействия (ВАВ) (Горбачев Ю.И. и др., 2002). Технология ВАВ основывается на очистке призабойной зоны пласта, радиус которой установлен экспериментально и составляет около 1 метра. Механизм засорения призабойной части пласта сложный, его изучение продолжается, так как физика этого явления еще до конца не понята.

В методе ВАВ используются разнообразные конструкции антенн в виде набора расположенных вдоль скважины цилиндрических или стержневых электроакустических излучателей, работающих в пульсирующем режиме на основе магнитострикционного или пьезоэлектрического эффекта. На сегодня при проведении спуско-подъемных операций через насосно-компрессорные трубы (НКТ) применяют только конструкции на основе стержневых преобразователей, расположенных соосно скважине. Это вызвано следующими причинами:

1) По требованию ГОСТа при работах через НКТ диаметр прибора не должен превышать 40–42 мм, причем длина прибора вообще не критична. Следует добавить, что по соображениям техники безопасности работы при поднятых НКТ нежелательны даже в остановленной скважине.

2) В отличие от цилиндрических излучателей основное достоинство стержневых преобразователей состоит в том, что их собственные частотные характеристики зависят главным образом от длины стержней, а не от их диаметра.

Отметим, что в последнее время наметилась тенденция к применению пьезокерамических преобразователей из-за возможности получения большей амплитуды колебания излучающей поверхности.

Как правило, прибор на основе стержневых пьезокерамических преобразователей представляет собой антенну следующей конструкции. Несколько одинаковых цилиндрических стержней-излучателей расположены соосно на

равном расстоянии между собой. Соосно с ними по обе стороны этой конструкции на половине этого расстояния от внешних торцов крайних стержней расположены торцы жесткого корпуса прибора цилиндрической формы, в который входит модуль электроники, крепежный блок, гидродинамический компенсатор и т.п. Середину каждого из стержней жестко связывают с корпусом прибора. Все излучатели и корпус прибора имеют одинаковый диаметр около 40 мм. Каждый стержень состоит из одинаковых пьезокерамических “таблеток” (с толщиной много меньше диаметра), торцы которых покрыты тонким электропроводным слоем. Эти “таблетки” сжаты в осевом направлении и поляризованы так, что осевые компоненты матрицы пьезоэлектрических постоянных соседних “таблеток” отличаются знаком¹. Одинаковое переменное напряжение прикладывается к торцам каждой “таблетки” для возбуждения продольных колебаний по длине стержня. Соответственно, излучающей поверхностью являются торцы каждого из стержней, и смежные торцы двух соседних стержней совершают противофазные (навстречу друг другу) колебания в аксиальном направлении.

Мотивацией данной работы послужила потребность в оптимизации параметров таких приборов.

Для решения этой задачи необходимо: во-первых, построить, по возможности, более простую модель функционирования излучателя, в рамках которой излучатель и влияние внешней среды описываются минимальным числом параметров; во-вторых, выбрать модель среды, окружающую излучатель, не превышающую по точности модель излучателя; в-третьих, сформулировать требования, предъявляемые к создаваемому излучателем акустическому полю (они могут различаться для различных применений излучателя), и, в-четвертых, разработать численную методику исследования работы пьезокерамических излучателей выше описанного типа в безграничной водной среде (бассейн) и в скважине². Рассмотрение случая модели прибор-бассейн служит опорной базой для проведения сравнительного анализа со случаем модели прибор-скважина с целью лучшего понимания влияния скважины на работу прибора.

В первом приближении изучение работы прибора ВАВ можно связать с рассмотрением двухстержневого опозитного пьезокерамического составного излучателя в рамках следующей модели. Два одинаковых пьезокерамических составных стержня круглого сечения, конструкция которых описана выше, расположенные на одной оси на фиксированном расстоянии друг от друга

¹В промышленных приборах ВАВ используются пьезокерамические материалы с физическими параметрами, близкими к ЦТС-19.

²Математическому моделированию работы в скважине цилиндрического излучателя бесконечной длины посвящены работы (Бушер М.К. и др., 2001, 2003).

(оппозитное расположение), вмонтированы несмежными концами в две абсолютно жесткие трубы того же самого сечения. Если переменное напряжение приложено к торцам “таблеток”, составляющих стержни, то смежные концы совершают противофазные колебания в аксиальном направлении. Так как обычно длины возбуждаемых волн в пьезокерамических стержнях существенно больше толщины составляющих их “таблеток”, то будем полагать, что стержни совершают колебания только в продольном (осевом) направлении, а смещение в радиальном направлении точек цилиндрической поверхности излучателей равно нулю (одномерное приближение). Таким образом, при расчете распространения акустических волн, создаваемых прибором, его боковую поверхность будем считать абсолютно жесткой.

Использование одномерного приближения дает возможность получить решение уравнений, описывающих распространения упругих колебаний в стержне (в изотермическом приближении) в квадратурах при заданном механическом импедансе этого излучателя. Из этого решения легко определить оптимальную длину стержней, т.е. при которой амплитуда колебательной скорости излучающего торца будет максимальной, для заданной частоты приложенного напряжения.

Значение этого импеданса, как функции частоты, можно получить из численного решения прямой задачи о распространении акустических волн, возбуждаемых прибором, расположенным в бассейне или центрированном в заполненной жидкостью скважине круглого сечения, пробуренной в однородной упругой среде, если задать скорости точек торцов стержней в виде отличающихся знаком временных функций с достаточно большой спектральной шириной. Мы рассматриваем жидкость как сжимаемую и невязкую. Для исследования влияния среды на работу излучателя выбор более сложной модели для окружающей его среды было бы превышением точности для выбранной изотермической модели работы излучателя.

Требования, предъявляемые к создаваемому излучателем акустическому полю при ВАВ, можно сформулировать следующим образом. Желательно придать переносу акустической энергии преимущественно радиальное направление для обеспечения глубины воздействия на пласт, что позволит с большей интенсивностью воздействовать на “засоренные” участки коллектора. Исследование направленности распространения акустической энергии можно провести с помощью численных расчетов прямой задачи, описывающей распространение акустических возмущений, создаваемых рассматриваемым излучателем в бассейне или в заполненной жидкостью скважине и окружающей ее породе, в зависимости от частоты колебаний излучающих торцов стержней и зазора между ними.

На основе этих расчетов можно составить атлас диаграмм направленности

средней по времени плотности кинетической энергии³. С помощью этого атласа можно приближенно выбрать с точки зрения предъявляемых требований о переносе акустической энергии вовне от прибора оптимальную величину зазора между стержнями на заданной частоте, а рассчитанные значения механического импеданса для таких значений зазора и частоты позволяют, как указывалось выше, определить оптимальную длину стержня⁴.

Предлагаемая работа излагается в следующей последовательности.

В §1 сформулирована полная математическая постановка задачи математического моделирования выбранной конструкции высокочастотного двух-стержневого оппозитного пьезокерамического составного излучателя, центрированного в заполненной буровым раствором скважине круглого сечения с радиусом r_b , пробуренной в неоднородной упругой среде. Ее частным случаем является задача, когда прибор погружен в бесконечную жидкость.

Рассмотрена аксиально-симметричная постановка задачи в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) ($\partial/\partial\phi=0$). Ось OZ проходит через ось симметрии скважины и ось симметрии прибора, начало координат — в точке, расположенной на оси OZ в центре зазора величины a между стержнями.

При расчете распространения акустических возмущений, создаваемых прибором, считаем, что стержни являются полубесконечными цилиндрами радиуса r_d с абсолютно жесткой боковой поверхностью, точки торцов которых колеблются вдоль оси OZ навстречу друг другу по некоторому временному закону. Для моделирования упругих колебаний в пьезокерамическом составном стержне длины L используются одномерные линейные уравнения гиперболического типа, определяющие продольные колебания в нем при продольном пьезоэффекте и приложенном к торцам “таблеток” одинаковом переменном напряжении заданной частоты f и амплитуды U_{max} . Краевыми условиями этой задачи являются: неизвестная временная функция смещения торца стержня и отсутствие смещения на торце, вмонтированном в абсолютно жесткую трубу. Неизвестная функция, описывающая временное поведение колебания торцов, ищется совместным решением задач распространения упругих колебаний вне и внутри прибора. Отсчет времени начинается с момента возникновения разницы потенциалов на торцах “таблеток”.

В §2 изложен описанный выше метод решения поставленной задачи.

В §3 описываются результаты математического моделирования в случае прибора, погруженного в безграничную жидкость.

³Призабойная зона пласта, как указывалось выше, имеет радиус около 1 метра. Данное расстояние не является для диапазона низких частот дальней зоной. Поэтому, термин “диаграмма направленности” мы используем за неимением лучшего.

⁴Концептуально предложенный подход может быть использован и для нахождения оптимальных параметров рассматриваемого прибора в задаче акустического каротажа.

Полученные из численного расчета частотные зависимости вещественной и мнимой части механического импеданса изучаются в зависимости от размера зазора между стержневыми преобразователями при фиксации остальных параметрах модели.

При условии, что прилагаемое к пьезокерамическим “таблеткам” электрическое напряжение гармоническое и произведение амплитуды напряжения на количество “таблеток” постоянно, с помощью аналитического решения, описывающего амплитуду колебательной скорости излучающих торцов стержней, и рассчитанных значений механического импеданса как функции частоты определяются для фиксированной частоты оптимальные параметры прибора: длина стержней и зазор между ними, на которых амплитуда скорости излучающих торцов будет максимальной.

С целью лучшего представления работы излучателя в окрестности оптимального набора параметров строятся два характерных набора неоптимальных параметров (длина стержней и зазор между ними). Учитывая, что на практике в приборах существует система подстройки частоты электрического напряжения, для излучателя с построенными характерными неоптимальными параметрами, соответствующими произвольной частоте, для этих размеров излучателя определяется оптимальная частота излучения (режим “оптимума” излучателя), т.е. на которой амплитуда колебательной скорости излучающих торцов будет наибольшей. Показывается, что обеспечить этот режим “оптимума” можно, если ограничиться незначительной подстройкой частоты напряжения, подаваемого на пьезокерамические “таблетки”.

Проводится сравнение частотных зависимостей максимальных относительных удлинений стержней, полученных для прибора с оптимальными параметрами и излучателя с характерными неоптимальными параметрами, работающего в режиме “оптимума”. Устанавливается, что среди оптимальных параметров существует резонанс, когда отношение диаметра стержней к длине волны в жидкости равно ≈ 1.22 .

Составленный атлас диаграмм направленности средней по времени плотности кинетической энергии позволяет установить, что при оптимальных параметрах прибора действительно обеспечивается преимущественный перенос акустической энергии в радиальном направлении.

В §4 изложены результаты математического моделирования для прибора, погруженного и скважину.

Результаты численного расчета частотных зависимостей вещественной и мнимой частей механического импеданса даются и анализируются в сравнении с результатами, полученными в бассейне, в зависимости от размера зазора между стержневыми преобразователями при фиксации остальных параметрах модели.

Как и в случае прибор-бассейн, определяются для заданной частоты излучения оптимальные параметры прибора. Учитывая, что на практике в каждом конкретном случае подбирать скважинные оптимальные параметры излучателя — сложная задача, установленная в целом близость решений для скважины и безграничной жидкости подсказывает, что целесообразнее использовать в скважине излучатель с параметрами, оптимальными для бассейна.

Для таких размеров излучателя, аналогично модели прибор-бассейн показывается, что ограничившись незначительной подстройкой частоты напряжения, подаваемого на пьезокерамические “таблетки”, можно обеспечить режим “оптимума”. Устанавливается, что частотные зависимости максимальных относительных удлинений стержней излучателя, работающего со скважинными оптимальными параметрами и в режиме “оптимума” с оптимальными параметрами для бассейна, практически совпадают и что среди оптимальных параметров для скважины как в случае прибор-бассейн существует резонанс, когда отношение диаметра стержней к длине волны в жидкости равно ≈ 1.22 .

Проводится сравнение частотных зависимостей максимальных относительных удлинений стержней, полученных для прибора, работающего в режиме “оптимума”, с оптимальными и характерными неоптимальными параметрами для бассейна.

Составленный атлас диаграмм направленности плотности кинетической энергии за единицу времени, позволяет установить, что на оптимальных параметрах практически обеспечивается максимальный перенос энергии в радиальном направлении. Изучение атласа также показывает, что в случае частоты, близкой к критической частоте круглой, заполненной жидкостью трубы с идеальными стенками, в которую центрировано погружен абсолютно жесткий бесконечной длины цилиндр, обеспечивается самая наибольшая передача акустической энергии в пласт в радиальном направлении.

Завершается работа заключением, в котором сделаны основные теоретические и практические выводы.

В Приложение приведено решение одномерной задачи, описывающее распространение колебаний в рассматриваемом пьезокерамическом стержневом преобразователе. Описывается аналитический способ ее решения, основанный на спектральном методе. Решение имеет громоздкий вид и, следовательно, неудобный для применения. Посредством численного моделирования установлено, что в случае, когда толщина “таблеток” не превосходит $1/10$ длины звуковой волны в материале пьезокерамики математическую постановку задачи можно упростить и свести к новой задаче, решение которой практически не будет отличаться от искомого. Выписывается решение в квадратурах новой задачи, имеющее простой и наглядный вид.

Из-за большого количества графического материала работа представляется в двух частях. Данная часть состоит из §1, §2, §3 и Приложения.

Авторы выражают благодарность Горбачеву Ю.И., профессору кафедры сейсмометрии и геоакустики геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова, за постановку задачи и помощь в работе.

§1. Постановка задачи

Рассмотрим прибор акустического воздействия в виде двух полубесконечных, круглых, соосных штырей радиуса r_d ($d_d = 2r_d$ — диаметр штырей), которые торцевыми сторонами обращены друг к другу (Рис.1). Расстояние между торцами обозначим через a . Каждый штырь представляет собой жесткое соединение пьезокерамического стержневого преобразователя длины L и полубесконечной абсолютно жесткой штанги. Пьезокерамический стержень состоит из Q скленных одинаковых пьезокерамических “таблеток”, толщины которых много меньше его диаметра d_d . “Таблетки” поляризованы так, что для соседних таблеток осевые компоненты матрицы пьезоэлектрических постоянных отличаются знаком. Торцы “таблеток” покрыты тонким электропроводным слоем, электрически изолированным от окружающей пьезокерамической стержень среды. Одинаковое переменное напряжение $U(t)$ ($U(0) = U'(0) = 0$) приложено к торцам “таблеток”, причем электропроводные слои рядом расположенных “таблеток” объединены в одну клемму и, соответственно, мгновенные значения напряжения, приложенные к соседним “таблеткам” отличаются знаком. Предполагаем, что приложенное напряжение возбуждает в стержне акустические волны, характерная длина которых существенно больше толщины “таблетки”. Это позволяет при рассмотрении в нем электромеханических колебаний воспользоваться одномерным приближением, и считать цилиндрические поверхности стержней абсолютно жесткими. Прибор погружен в скважину радиуса r_b ($d_b = 2r_b$ — диаметр скважины) и центрирован в ней. Относительно упругой среды, окружающей скважину, предполагаем, что она изотропна и однородна, и все электромеханические процессы рассматриваем в изотермическом приближении.

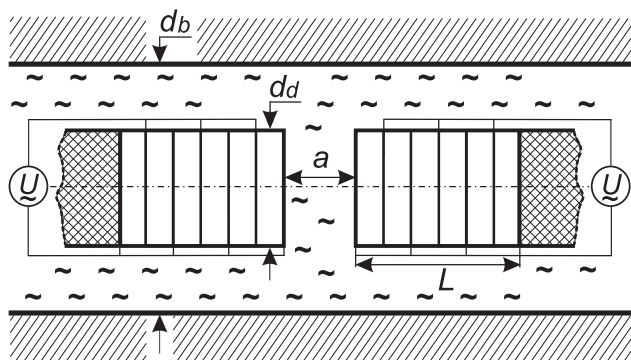


Рис.1 Модель двухстержневого оппозитного пьезокерамического составного излучателя, расположенного соосно скважине.

Воспользуемся аксиальной симметрией модели и сформулируем задачу о распространении акустических колебаний вне прибора (в скважинной жидкости и окружающей скважину упругой средой) в цилиндрических координатах (r, ϕ, z) ($\partial/\partial\phi = 0$), с осью OZ , совмещенной с осью симметрии скважины и прибора. Начало координат O зададим в центре зазора между стержнями.

Уравнения, описывающие распространение акустических возмущений в упругой среде (скважинную жидкость можно рассматривать как частный случай упругой среды со сдвиговым модулем $\mu = 0$), имеют вид:

$$\rho \frac{\partial v^r}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{rr}) - \frac{\sigma^{\phi\phi}}{r} + \frac{\partial \sigma^{zr}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v^z}{\partial t} = \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma^{rz}); \quad (2)$$

$$\frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v^r}{\partial r} + \lambda \frac{v^r}{r} + \lambda \frac{\partial v^z}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma^{\phi\phi}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v^r}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{v^r}{r} + \lambda \frac{\partial v^z}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v^r}{\partial r} + \lambda \frac{v^r}{r} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v^z}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial v^r}{\partial z} + \frac{\partial v^z}{\partial r} \right). \quad (6)$$

Здесь: t — время; $v^r(t, r, z)$ и $v^z(t, r, z)$ — r и z компоненты скорости смещения точек среды; $\sigma^{rr}(t, r, z)$, $\sigma^{\phi\phi}(t, r, z)$, $\sigma^{zz}(t, r, z)$ и $\sigma^{rz}(t, r, z)$ — ненулевые компоненты волнового тензора напряжений; $\lambda(r, z)$ и $\mu(r, z)$ — модули Ляме среды и $\rho(r, z)$ — плотность среды. Величины λ , μ , ρ могут быть кусочно-постоянными, т.е. допускающими разрывы 1-го рода, функциями пространственных переменных, и условия непрерывности на разрывах вытекают из требования конечности входящих в уравнения производных.

Так как цилиндрические поверхности штырей по условию являются абсолютно жесткими, и в силу аксиальной симметрией, потребуем:

$$v^r|_{\{r=r_d, |z| > (a/2)\}} = 0 \quad \text{и} \quad v^r|_{\{r=0, |z| < a/2\}} = 0. \quad (7)$$

О граничных условиях на торцах пьезокерамических стержней будет сказано ниже.

Начальные условия для скоростей и компонент напряжений положим нулевыми:

$$v^r|_{t=0} = v^z|_{t=0} = 0, \quad \sigma^{rr}|_{t=0} = \sigma^{\phi\phi}|_{t=0} = \sigma^{zz}|_{t=0} = \sigma^{rz}|_{t=0} = 0. \quad (8)$$

Перейдем задаче о распространении электромеханических колебаний в пьезокерамических стержневых преобразователях. В силу симметрии модели постановку задачи, без ограничения общности, проведем на штыре, уходящим в отрицательную бесконечность, который назовем нижним. Через z_q ($q = 0, \dots, Q$) обозначим координаты торцов “таблеток”, так что $z_0 = -L$ будет соответствовать месту жесткого соединения стержня с полубесконечной штангой, а $z_Q = -a/2$ — торцу стержня, соприкасающемуся со скважинной жидкостью.

Движение точек стержня внутри каждой “таблетки” описывается уравнением движения:

$$\rho_{st} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial T_3}{\partial z}, \quad (9)$$

где $\tilde{u}(t, z)$ — смещение элементарного объема в z -направлении, ρ_{st} — плотность материала пьезокерамики, а (zz) — компонента тензора напряжений $T_3(t, z)$ определяется приведенными ниже уравнениями пьезоэффекта и определением электрического напряжения, приложенного к торцам таблеток:

$$T_3 = c_{33}^D \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - (-1)^{(q+1)} \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^S} D_3, \quad D_3 = \varepsilon_{33}^S E_3 + (-1)^{(q+1)} e_{33} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z},$$

$$(-1)^{(q+1)} U(t) = \int_{z_q}^{z_{q+1}} E_3(t, x) dx, \quad z \in (z_q, z_{q+1}), \quad q = 0, \dots, Q-1, \quad (10)$$

где, следуя обозначениям принятым в (Свердлин Г.М., 1976):

$E_3(t, z)$ и $D_3(t, z)$ — значения z -компонент векторов напряженности электрического поля и электрической индукции;

$c_{33}^D = 1/(s_{33}^E(1 - \alpha_{33}))$ — осевой модуль упругости в кристалле при разомкнутых электродах, α_{33} — энергетический коэффициент электромеханической связи (КЭМС), s_{33}^E — осевой модуль податливости в отсутствие электрического поля в пьезоэлектрике (в одномерном приближении $(s_{33}^E)^{-1}$ равен модулю Юнга);

$e_{33} = d_{33}/s_{33}^E$ — осевая компонента матрицы пьезоэлектрических постоянных кристалла, а d_{33} — осевая компонента матрицы пьезоэлектрических модулей, определяющей деформации возникающие в свободном (от напряжений) кристалле при заданной напряженности электрического поля в нем;

ε_{33}^S — осевая компонента тензора диэлектрической проницаемости заторможенного кристалла ($\tilde{u} = \text{const}$). $\varepsilon_{33}^S = \varepsilon_{33}^T(1 - \alpha_{33})$, где ε_{33}^T осевая компонента тензора диэлектрической проницаемости при отсутствии в пьезоэлектрике упругих напряжений.

Уравнения (10) можно свести к одному уравнению, если воспользоваться условием, что толщина таблеток $L/Q \ll r_d$, дающим основание считать, что внутри таблетки $\partial D_3/\partial z \approx 0$, т.е. $D_3 \approx \text{const}$. Тогда, после несложных преобразований получим:

$$T_3 = c_{33}^D \frac{\partial \tilde{u}}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S (L/Q)} (\tilde{u}|_{z_{q+1}} - \tilde{u}|_{z_q}) - \frac{e_{33}}{(L/Q)} U(t), \quad z \in (z_q, z_{q+1}),$$

$$q = 0, \dots, Q-1, \quad (11)$$

Для однообразия постановок этой задачи и задачи о распространении механических возмущений вне стержня определим $\tilde{v} = \partial \tilde{u}/\partial t$ и перепишем уравнения (9), (11) в виде:

$$\rho_{st} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial T_3}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = c_{33}^D \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^S (L/Q)} (\tilde{v}|_{z_{q+1}} - \tilde{v}|_{z_q}) - \frac{e_{33}}{(L/Q)} \frac{\partial U}{\partial t},$$

$$z \in (z_q, z_{q+1}), \quad q = 0, \dots, Q-1. \quad (13)$$

В местах склеек “таблеток”, естественно, потребовать выполнение условий непрерывности напряжений и скоростей:

$$[\tilde{v}]|_{z=z_q} = 0, \quad [T_3]|_{z=z_q} = 0, \quad q = 1, \dots, Q-1. \quad (14)$$

Так как нижний конец стержня жестко соединен со штырем, то имеем:

$$\tilde{v}|_{z=z_0} = 0. \quad (15)$$

На торце, излучающем в скважинную жидкость, для состыковки двумерной модели, описывающей распространение этих возмущений вне прибора, и одномерной внутри, естественно потребовать равенства z -компоненты скорости всех точек жидкости на поверхности торца скорости торца излучателя в одномерной модели

$$v^z|_{\{r \in (0, r_d), z = -a/2\}} = \tilde{v}|_{z = -a/2}, \quad (16)$$

и равенство среднего напряжения, действующего со стороны окружающей жидкости на торец, и внутреннего напряжения на конце торца

$$\frac{2\pi}{S} \int_0^{r_d} r \sigma^{zz}|_{z = -a/2} dr = T_3|_{z = -a/2}, \quad (17)$$

где $S = \pi r_d^2$ — площадь поверхности торца.

Аналогичные уравнения и условия справедливы для верхнего штока.

Начальные условия для смещений и напряжений, также полагаем нулевыми:

$$\tilde{v}|_{t=0} = 0, \quad T_3|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Уравнения (1)–(6), (12)–(13) вместе с граничными (7), (14)–(17) и начальными (8), (18) условиями составляют полную математическую постановку задачи, которая, очевидно, является линейной.

§2. Метод решения

Как указывалось выше, полная математическая постановка задачи содержит в себе сочетание одномерной и двумерной моделей, решения которых стыкуются непосредственно на излучающих торцах пьезокерамических стержней. А именно, неизвестная функция, описывающая временное поведение колебания излучающих торцов ищется совместным решением задач распространение упругих колебаний вне прибора и электроакустических внутри. Это отражено в краевых условиях (16) и (17). Данная особенность позволяет разбить решение полной задачи на решения двух с помощью подхода, основанного на знании механического импеданса для излучающих торцов, отражающего частотно зависимую механическую реакцию или нагрузку окружающей среды на акустическое излучение прибором. Изложим этот метод.

Рассмотрим сначала понятие механического импеданса, применительно к изучаемому прибору, содержащее в себе способ его построения. В двумерной задаче о распространение упругих возмущений вне прибора, состоящую из уравнений (1)–(6) с граничными (7) и начальными (8) условиями, в качестве граничных условий на торцах стержней (16) положим произвольную временную функцию $v_T(t)$:

$$v^z(t)|_{\{r \in (0, r_d), z = \pm a/2\}} = \mp v_T(t), \quad (19)$$

модуль Фурье спектра которой $v_T^{\mathcal{F}}(f)$ (f — частота) отличен всюду от нуля. Например, δ -функцию: $v_T(t) = \delta_+(t)$. Как и раньше, ограничимся рассмотрением нижнего стержня. Решая задачу, определим давление на поверхности торца, $P(t, r) = -\sigma_{zz}(t, r, -a/2)$, $r \in (0, r_d)$, по которому рассчитаем усилие, действующее на торец со стороны окружающей скважинной жидкости:

$$F(t) = 2\pi \int_0^{r_d} P(t, r) r dr. \quad (20)$$

Вычисляя Фурье преобразование функций $F(t)$ и $v_T(t)$, строим их отношение:

$$Z(f) \equiv \frac{F^{\mathcal{F}}(f)}{v_T^{\mathcal{F}}(f)} = R(f) + i X(f), \quad (21)$$

— называемое механическим импедансом или полным механическим сопротивлением, которое в общем случае является комплекснозначной функцией. Разделяя комплексный механический импеданс на вещественную и мнимую части, получают механическое активное $R(f)$ и реактивное $X(f)$ сопротивления. Активное сопротивление $R(f) \geq 0$, оно играет важную роль в гидроакустике, определяя значение излучаемой акустической мощности. Реактивное сопротивление часто представляют в виде $X(f) = \omega m(f)$ ($\omega = 2\pi f$), где величина m имеет размерность массы и отражает инерционные свойства излучателя, поэтому ее обычно называют соколеблющейся или присоединенной “массой” (слово масса взято в кавычки, так как m может принимать и отрицательные значения). Отметим “универсальность” понятия импеданса применительно к нашей модели, в том смысле, что его значения не зависят от внутренней конструкции излучателей.

Обозначив теперь через $\check{Z}(t)$ Фурье прообраз $Z(f)$ и принимая краевое условие (17), имеем:

$$T_3|_{z=-a/2} = -\frac{1}{S} \int_0^t \check{Z}(t-\tau) \tilde{v}(\tau, -a/2) d\tau \quad (23)$$

Таким образом, одномерная задача о механических колебаниях в пьезокерамическом стержне состоит из уравнений гиперболического типа (12), (13) с граничными (14), (15) и начальными (18) условиями плюс граничным условием (23) типа свертки. Решив эту задачу, определим искомое значение $\tilde{v}(t, -a/2)$ для полной задачи. Что, соответственно, дает возможность перейти к отысканию решения двумерной задачи о распространении механических колебаний вне излучателя, подставив в ее граничное условие (16): $v_T(t) = \tilde{v}(t, -a/2)$. Найдя решение для нее, завершим построение решения полной задачи.

Такой подход обладает следующими преимуществами:

Во-первых, с помощью спектрального метода одномерная задача разрешима в квадратурах (см. Приложение). Следовательно, несложно, например, проанализировать зависимость амплитуды колебательной скорости излучающего торца стержней от длины пьезокерамических стержней при заданной частоте электрического напряжения, приложенного к “таблеткам”, и тем самым найти наилучшую (оптимальную) длину, на которой амплитуда скорости была бы наибольшей и т.п.;

Во-вторых, линейность поставленной задачи позволяет для заданной полосы спектра частот колебаний стержней с граничным условием (16) в виде $v_T(t) = \sin(2\pi ft)$ изучить массив решений двумерной задачи, который характеризует распространение акустических возмущений в среде, окружаю-

щей прибор, вне зависимости от внутреннего устройства излучателя.

В работах (Плющенко Б.Д. и др., 1997; Plyushchenkov et al. 2000) предложена явная полностью консервативная конечно-разностная схема, аппроксимирующая уравнения Био (М.А. Biot, 1962), для численного моделирования акустического каротажа скважин в неоднородной пористой флюидонасыщенной упругой среде в аксиально-симметричной ситуации. Для нахождения решения задачи о распространении упругих возмущений вне прибора (уравнения (1)–(6) с граничными условиями: (7) на боковой поверхности стержней и (19) на их смежных торцах, и начальными условиями (8)) мы разработали экономичный код, реализующий эту схему для этого частного случая.

Метод численного расчета механического импеданса

Для нахождения механических импедансов излучающих торцов пьезокерамических стержневых излучателей в заданном интервале частот $[f_1, f_2]$ мы выбрали функцию $v_T(t)$, задающую скорость торцов, такую, что модуль ее Фурье спектра примерно равен 1 в заданном интервале частот и $v_T(t \leq 0) = 0$. В качестве прообраза, позволяющим построить такую функцию $v_T(t)$ мы использовали предложенную в (J.H. Rosenbaum, 1974) функцию:

$$\mathcal{R}(t) = -t_l^2 \cdot \frac{\sin\left(2\pi \frac{k+l}{2}t\right) \cos\left(2\pi \frac{l-k}{2}t\right)}{t(t^2 - (t_l)^2)} + t_u^2 \cdot \frac{\sin\left(2\pi \frac{n+m}{2}t\right) \cos\left(2\pi \frac{n-m}{2}t\right)}{t(t^2 - (t_u)^2)},$$

где $k < l < m < n$, $t_l = 0.5/(l - k)$, $t_u = 0.5/(n - m)$. Функция $\mathcal{R}(t)$ симметрична и убывает как минимум с третьим порядком на бесконечности. Фурье спектр для нее имеет компактный носитель $[k, n]$ и его значения определяются следующим выражением:

$$\mathcal{R}^{\mathcal{F}}(f) = \begin{cases} (1 - \cos(2\pi(f - k)t_l))/2, & k \leq f \leq l \\ 1, & l \leq f \leq m \\ (1 + \cos(2\pi(f - m)t_u))/2, & m \leq f \leq n \end{cases}$$

Определим $v_T(t) = \mathcal{R}(t - t_0)$ для $t > 0$, т.е. сдвинем $\mathcal{R}(t)$ по оси t вправо на некоторое $t_0 > 0$, такое что $\mathcal{R}(-t_0) = 0$ и $|v_T(\varepsilon)| \ll \mathcal{R}_0$, где ε — координата ближайшей к нулю точки экстремума v_T . Положив $l = f_1$, $m = f_2$ и подбирая параметры k и n можно получить импульс, имеющий в заданном интервале частот модуль Фурье спектра почти равный 1. Такое значение спектра позволяет минимизировать погрешность вычислений, а быстрое убывание функции на бесконечности — легко контролировать необходимое для расчетов время. В частности, при расчетах импеданса для $f \in [\approx 0, 100]$ кГц

мы использовали $t_0 = 0.667747476$ мс, $k = 0.1838$ кГц, $l = 1$ кГц, $m = 102$ кГц, $n = 102.8$ кГц⁵.

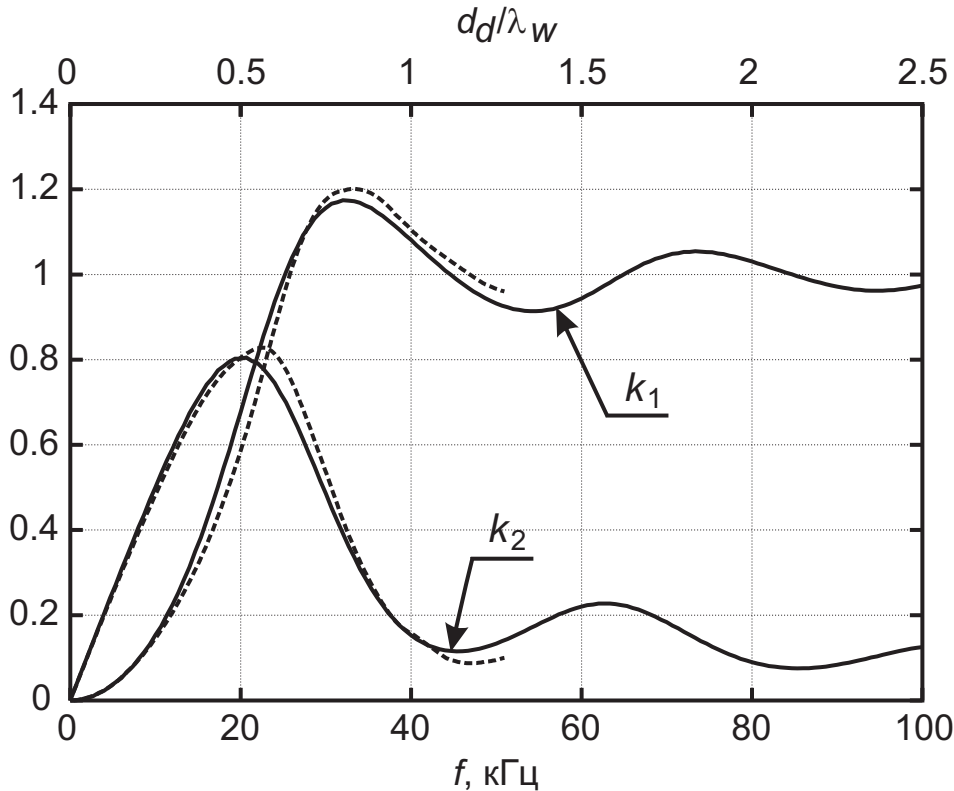


Рис.2 Графики частотных зависимостей k_1 и k_2 для одностержневого излучателя (сплошная линия) и односторонне-излучающей поршневой мембраны (пунктирная линия).

Тестирование предложенного метода определения импеданса было проведено для тех типов излучателей для импеданса которых имеются точные или приближенные аналитические выражения. Хорошее совпадение результатов свидетельствует о качестве предложенного подхода. Как пример, на Рис.2 представлены результаты расчета частотных зависимостей безразмерных коэффициентов пропорциональности k_1 для активного и k_2 для реактивного сопротивлений импеданса одностержневого излучателя в бассейне:

$$R(f) = k_1(f)\rho_f c_f S \quad \text{и} \quad X(f) = k_2(f)\rho_f c_f S, \quad (24)$$

в сравнение с приближенными аналитическими выражениями для односторонне-излучающей поршневой мембраны (Гутин Л.Я., 1937; Тюрин А.М. и др, 1972). Параметры жидкости задавались следующими: $\rho_f = 1.2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ —

⁵Отметим, что описанный метод, основанный на разностном решении прямой задачи о распространение акустических волн при задании скорости колебания диафрагмы излучателя в виде временной функции с достаточно широкой спектральной полосой, позволяет численно определять Z и в случае произвольного, компактного гидроакустического излучателя (общее понятие механического импеданса в гидроакустике дано, например, в (Свердлин Г.М., 1976)).

плотность жидкости, $c_f = 1.6 \cdot 10^5$ см/с — скорость распространения волны в жидкости, $r_d = 2$ см — радиус стержня. Несложно понять, что коэффициенты k_1 и k_2 можно представить в зависимости от безразмерной частоты d_d/λ_f ($d_d = 2r_d$, $\lambda_f = c_f/f$ — длина волны частоты f). В этом случае $k_1(f) = k_1(d_d/\lambda_f)$ и $k_2(f) = k_2(d_d/\lambda_f)$, поэтому на Рис.2 дополнительно приведена верхняя ось абсцисс, по которой откладывается d_d/λ_f .

§3. Результаты численного моделирования для бассейна

При решение полной задачи знание механического импеданса является ключевым моментом. Поэтому в п.3.1 мы проанализируем частотные зависимости Z , полученные с помощью разностного кода, при различных значениях величины зазора a . Далее в п.3.2 при условии, что электрическое напряжение, приложенное к пьезокерамическим “таблеткам”, является гармоническим ($U(t) = U_{\max} \sin(2\pi ft)$) и вне зависимости от количества “таблеток” $QU_{\max} \equiv U_Q = \text{const}$, с помощью аналитического решения, описывающего распространение акустических колебаний в стержне (см. Приложение), и рассчитанных значений механического импеданса, определим как функции частоты оптимальные параметры прибора, а именно, длину стержней и зазор между ними, на которых амплитуда колебательной скорости излучающих торцов является максимальной. На основе оптимальных параметров построим характерные неоптимальные параметры излучателя. Для таких параметров, соответствующих произвольной частоте, определим оптимальную частоту излучения (режим “оптимума”), т.е. на которой амплитуда скорости излучающих торцов будет наибольшей. Проведем сравнение максимальных относительных удлинений стержней для прибора, работающего с оптимальными параметрами, и прибора с характерными неоптимальными параметрами, работающего в режиме “оптимума”. И в п.3.3 проанализируем атлас диаграмм направленности средней по времени плотности кинетической энергии в зависимости от величины зазора, полученный с помощью разностного кода, решая задачи о распространении звуковых колебаний вне излучателя с гармоничными краевыми условиями (16) на торцам стержней при различных частотах. Анализ атласа позволяет утверждать, что оптимальные параметры излучателя обеспечивают максимум передачи акустической энергии в радиальном направлении.

При численном моделировании использовались следующие параметры. Радиус излучателя $r_d = 2$ см. Плотность $\rho_w = 1.2$ г · см⁻³ и скорость распространения продольной волны $c_w = 1.6 \cdot 10^5$ см/с — характерные для скважинной жидкости. При расчетах распространения механических возмущений в стержнях использовался материал пьезокерамики ЦТС-19, широко используемый на практике. Его параметры (Свердлин Г.М., 1976): $\rho_{st} = 7.33$ г · см⁻³,

$s_{33}^E = 1.6 \cdot 10^{-12}$ см²/дин, $d_{33} = 1.089 \cdot 10^{-5}$ (ед. заряда СГСЕ)/дин и $\varkappa_{33} = 0.6$.

Отметим, что результаты для модели прибор-бассейн носят не только методологический характер. Они служат основной базой для проведения сравнительного анализа с результатами расчетов модели прибор-скважина для лучшего понимания влияния скважины на работу пьезокерамического стержневого излучателя. Эти результаты могут также представлять интерес для разработчиков подобной аппаратуры в гидроакустике.

3.1 Значения механического импеданса

Численное построение $Z(f; a)$ было выполнено для большого количества значений зазора a от 1 см до 32 см с переменным шагом, возрастающим с ростом a , в интервале изменения $f \in [\approx 0, 100]$ кГц, выбранном по теоретическим соображениям.

Вычисленные значения действительной и мнимой части Z при фиксированном a мы представляем аналогично одностержневому излучателю в виде (21) и (24). Как и для одностержневого излучателя, безразмерные коэффициенты k_1 и k_2 можно также представить в зависимости от безразмерной частоты d_d/λ_f при различных значениях величины зазора a , выраженной в $d_d = 2r_d$, т.е. безразмерного зазора a/d_d . Тем самым будем полагать, что

$$Z = Z(f; a) = Z(d_d/\lambda_w; a/d_d). \quad (25)$$

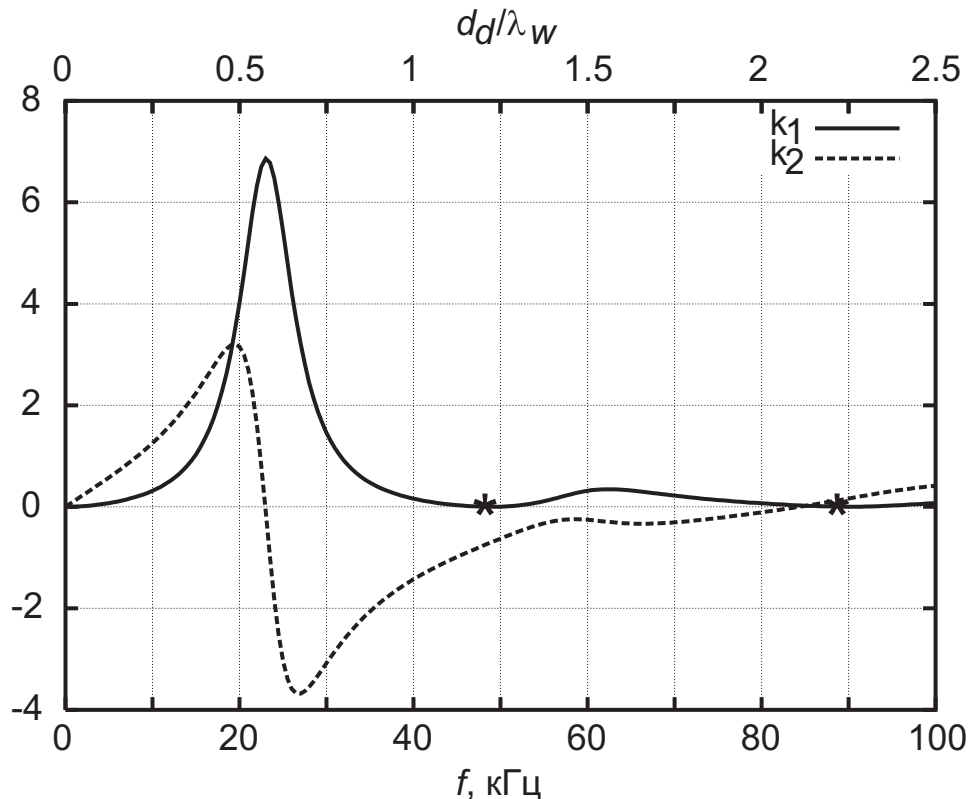


Рис.3 Графики частотных зависимостей k_1 и k_2 при $d_d = 4$ см и $a = 1$ см ($a/d_d = 0.25$).

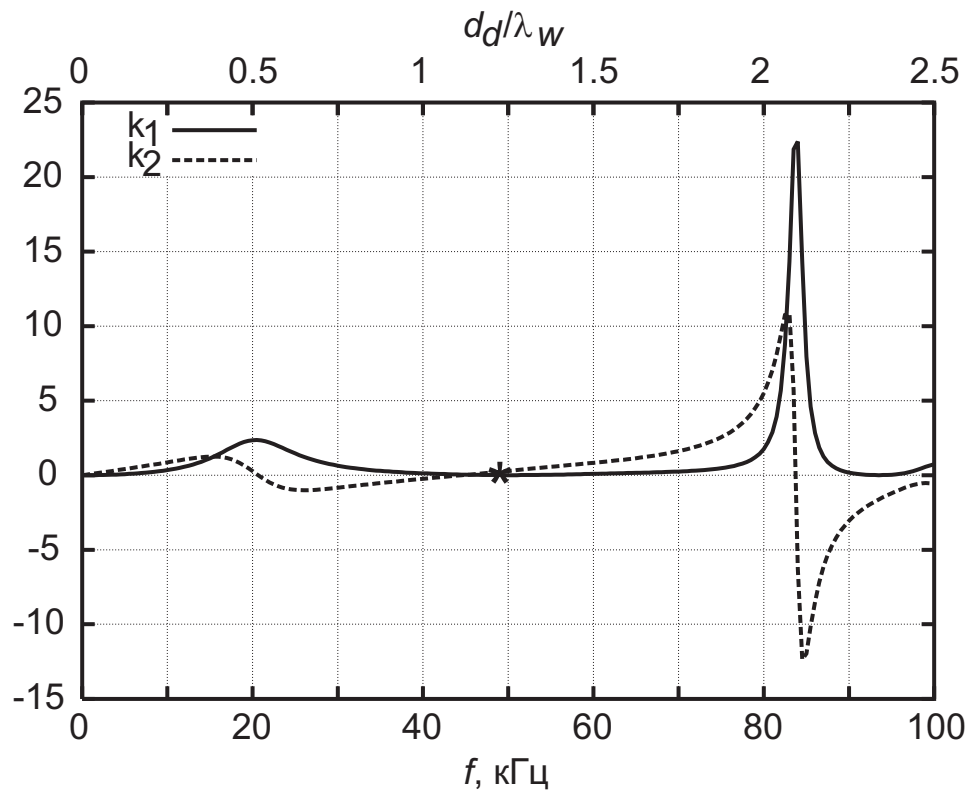


Рис.4 Графики частотных зависимостей k_1 и k_2 при $d_d = 4$ см и $a = 2$ см ($a/d_d = 0.5$).

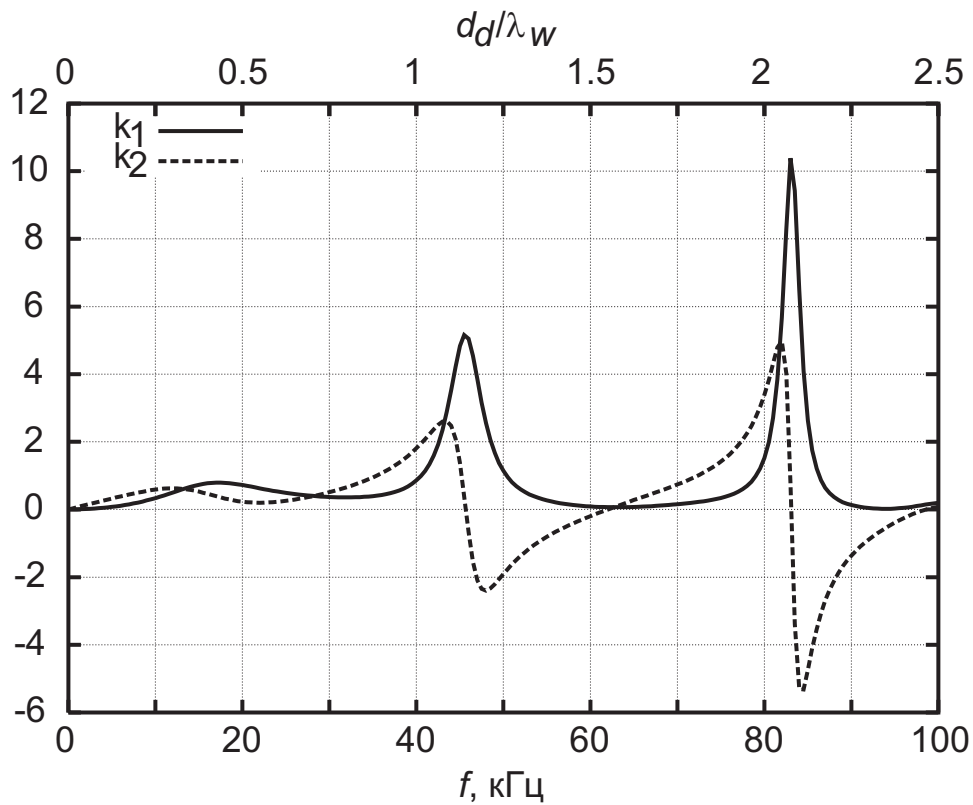


Рис.5 Графики частотных зависимостей k_1 и k_2 при $d_d = 4$ см и $a = 4$ см ($a/d_d = 1.0$).

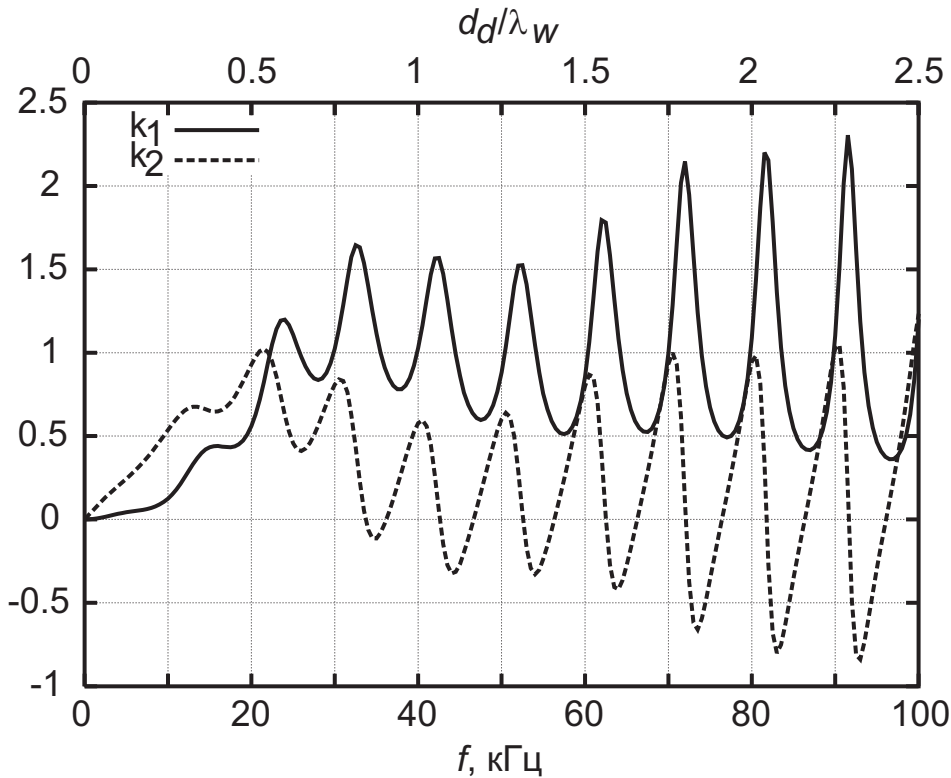


Рис.6 Графики частотных зависимостей k_1 и k_2 при $d_d = 4$ см и $a = 16$ см ($a/d_d = 4.0$).

На Рис.3–6 изображены графики функций $k_1(f)$ и $k_2(f)$ при $a = 1, 2, 4$ и 16 см ($d_d = 4$ см), которые соответствуют графикам функций $k_1(d_d/\lambda_w)$ и $k_2(d_d/\lambda_w)$ при $a/d_d = 0.25, 0.5, 1$ и 4 . Выбор таких значений зазора определился нашим желанием наиболее компактно графически представить основные закономерности поведения функции Z :

- 1) Коэффициент k_1 всегда положителен в силу того, что вещественная часть импеданса определяет излучаемую стержнями акустическую мощность. Функция k_2 , связанная с присоединенной “массой” в отличие от k_2 для одностержневого излучателя, может принимать отрицательные значения;
- 2) Очевидно, в случае $d_d/\lambda_w \ll 1$ частотные зависимости коэффициентов k_1 и k_2 с точностью до множителя должны совпадать с частотными зависимостями активного и реактивного сопротивлений массы одиночного точечного излучателя, для которого $k_1 \sim (d_d/\lambda_w)^2$ и $k_2 \sim (d_d/\lambda_w)$. Из приведенных рисунков видно, что это действительно имеет место;
- 3) Поведение функций k_1 и k_2 с ростом частоты, при фиксированном зазоре, в целом носит попеременно возрастающий и убывающий характер. Причем с ростом зазора количество экстремумов в рассматриваемом диапазоне возрастает и кривые коэффициентов начинают все больше приближаться к кривым для одностержневого излучателя (сравните, Рис.2 и Рис.6), так как с ростом зазора акустическое поле, создаваемое каким-либо из преобразователей, должно все меньше влиять на противоположный излучатель;

4) Для $d_d/\lambda_w \geq 1$ кривые k_1 характеризуются наличием ярко выраженных локальных максимумов. На Рис.3 такие максимумы отсутствуют, т.к. они существуют для больших, чем $2.5 d_d/\lambda_w$ значений. На Рис.4 ($a/d_d = 0.5$) виден один такой максимум при $d_d/\lambda_w \approx 2.1$, на Рис.5 ($a/d_d = 1$) видно уже два максимума, при $d_d/\lambda_w \approx 1.15$ и $d_d/\lambda_w \approx 2.08$, а на Рис.6 — целый набор максимумов. Можно убедиться, что эти максимумы соответствуют значениям a примерно кратным λ_w и что с увеличением площади торцов или d_d/λ_w при заданном a/d_d значения этих максимумов возрастают, а величины зазоров, отвечающие им, все более приближаются по кратности к λ_w . Значения k_2 обращаются точно или почти точно в ноль во всех точках максимумов k_1 , а минимальные значения коэффициент k_1 принимает в районе середины между локальными максимумами.

Такой характер поведения кривых можно объяснить следующим образом.

Пусть $d_d/\lambda_w \geq 1$, тогда для одностержневой излучателя из Рис.2 следует, что $k_1 \approx 1$ и $k_2 \approx 0$ и, следовательно, излучатель создает практически направленное излучение на таких частотах, т.е. отношение давления к колебательной скорости поршня становится примерно таким же, как в плоской волне. Поэтому мы не совершим большой ошибки, если для таких значений d_d/λ_w заменим излучающие торцы стержней плоскостями, т.е. задачу нахождения Z сведем к решению одномерной задачи о нахождение волнового поля между двумя плоскостями, расположенными параллельно друг другу на расстоянии a и колеблющихся навстречу друг другу по временному закону $v_T(t) = \sin(2\pi ft)$. Решение этой задачи хорошо известно (Владимиров и др., 1982). Из него следует, что резонансные решения отвечают зазорам, кратным λ_w , для которых мнимая часть импеданса обращается в ноль. Если учесть конечность площади торцов, то на основе свойств этого решения можно на качественном уровне объяснить вышеописанные особенности поведения k_1 и k_2 ;

5) На Рис.3 звездочкой отмечены два аргумента: $(d_d/\lambda_w)_1 \approx 1.22$ и $(d_d/\lambda_w)_2 \approx 2.23$. На Рис.4 — один аргумент $(d_d/\lambda_w)_1 \approx 1.22$. На них, исключая аргументы $d_d/\lambda_w \approx 0$, активное сопротивление излучения принимает наименьшие, практически нулевые значения. Расчеты показали, что существуют аналогичные аргументы: $(d_d/\lambda_w)_1 \approx 1.22$ при $a/d_d \in (0.25, \approx 0.6]$ и $(d_d/\lambda_w)_2 \approx 2.23$ при $a/d_d \in (0.25, \approx 0.375]$. Однако с ростом величины зазора (в пределах указанных) значения $k_1(d_d/\lambda_w)_{1,2}$ возрастают, они растут и далее с увеличением зазора до тех пор, пока при a примерно кратном λ_w функция $k_1(d_d/\lambda_w)_{1,2}$, как отмечено выше, не будет иметь локальный максимум. Расчеты также показали, что $k_1((d_d/\lambda_w)_1) < k_1((d_d/\lambda_w)_2)$ при $a/d_d \in [0.25, \approx 0.375]$.

Пристальный интерес к положениям минимумов действительной части импеданса связан с тем, что, как будет показано в п. 3.2, наибольшая амплитуда колебательной скорости торцов стержней обратно пропорциональна k_1 .

3.2 Оптимальные параметры излучателя

В Приложении построено приближенное аналитическое решение, сформулированной в §2 задачи о распространении механических возмущений в стержневом составном пьезокерамическом преобразователе при известном значении механического импеданса $Z(f; a)$. Там же установлено, что если толщины таблеток не превышают $\lambda_{st}/10$, где $\lambda_{st} = c_{st}/f$ и c_{st} — скорость продольной волны в материале пьезокерамики, то построенное приближенное аналитическое решение будет практически приемлемо для решения исходной задачи. Из этого решения следует, что под действием переменного напряжения $U(t) = U_{\max} \sin(\omega t)$ ($\omega = 2\pi f$), приложенного к таблеткам, составляющими стержни, амплитуда скорости $\tilde{V}(f; L, a)$ колеблющихся навстречу друг другу торцов стержней равна:

$$\tilde{V} = \frac{e_{33}}{L} \frac{QU_{\max}}{\sqrt{(\operatorname{Re}(Z(f; a)/S))^2 + (\operatorname{Im}(Z(f; a)/S) - \rho_{st}c_{st} \operatorname{ctg}(\omega L/c_{st}))^2}} \quad (26)$$

где: L — длина стержней, a — зазор между ними, Q — количество образующих стержень таблеток. Или в безразмерном представлении $\tilde{V} = \tilde{V}(\hat{f}; \hat{L}, \hat{a})$:

$$\frac{\tilde{V}}{c_{st}} = \frac{\rho_{st}}{\rho_w} \cdot \frac{\hat{f}}{\hat{L}} \cdot \frac{d_{33}QU_{\max}}{d_d \sqrt{k_1(\hat{f}; \hat{a})^2 + (k_2(\hat{f}; \hat{a}) - \frac{\rho_{st}c_{st}}{\rho_w c_w} \operatorname{ctg}(2\pi \hat{L}))^2}}, \quad (26')$$

где $\hat{f} = d_d/\lambda_w$, $\hat{a} = a/d_d$ и $\hat{L} = L/\lambda_{st}$

Очевидно, чем больше значение амплитуды скорости торцов, тем больше энергии будет прибор излучать в окружающую среду. Поэтому естественно определить при заданной частоте f излучения оптимальные параметры прибора L и a , т.е. на которых \tilde{V} будет максимальна.

Выполнив двухмерную интерполяцию полученных значений $Z(f; a)$, оптимальные параметры излучателя были рассчитаны по формуле (26) простым перебором значений L и a для частот f от 5 кГц до 55 кГц с шагом 0,2 кГц при условии постоянства величины $U_Q(f) \equiv Q(f)U_{\max}(f)$. Если дополнительно $Q(f) = \operatorname{const}$, то это условие эквивалентно постоянству энергии.

Оказалось, что для определения оптимальных параметров с хорошей точностью можно использовать более простой алгоритм. Опишем его.

Зафиксируем значение f и для каждого значения a из исследуемого диапазона значений определим длину $L = L^a(f)$ при помощи следующего уравнения:

$$\operatorname{Im}(Z(f; a)/S) = \rho_{st}c_{st} \operatorname{ctg}(2\pi fL/c_{st}). \quad (27)$$

Как видно из (26), выполнение условия (27) естественно было-бы потребовать для достижения максимума $\tilde{V}(f; L, a)$.

Уравнение (27) обладает бесконечным множеством решений, поэтому обозначим через $L_1^a(f)$ наименьшую длину, через $L_2^a(f)$ следующую за ней и т.д. Очевидно, что $L_n^a = L_1^a + (n-1)\lambda_{st}/2$, $n = 1, 2, \dots$; если $n < m$, то $\tilde{V}(f; L_n^a, a) > \tilde{V}(f; L_m^a, a)$; следовательно, среди длин L_n^a , $n = 1, 2, \dots$, скорость торцов будет наибольшей при $L = L_1^a$.

Заметим: 1) если $\text{Im}(Z(f; a)) = 0$, то $L_n^a = L_n \equiv (2n-1)\lambda_{st}/4$, $n = 1, 2, \dots$ совпадают с резонансными длинами одноствержневого пьезокерамического излучателя в отсутствии внешней нагрузки на его излучающий торец; 2) длины $L = n\lambda_{st}/2$, $n = 1, 2, \dots$ будут наихудшими, так как из (26) следует, что на них амплитуда $\tilde{V} \approx 0$.

Тогда для каждого набора $\{L_n^a(f), a\}$, $n = 1, 2, \dots$, имеем:

$$\tilde{V}(f; L_n^a(f), a) = e_{33}SU_Q / (L_n^a(f) \text{Re}Z(f; a)). \quad (28)$$

Откуда, определяем зазоры $a = a_n^*(f)$, $n = 1, 2, \dots$, на которых знаменатель в выражении (28) принимает наименьшее значения, а амплитуда скорости торцов, соответственно, максимальные ⁶.

Расчеты показали, что относительное отличие $a_1^*(f)$ от $a_n^*(f)$, $n = 2, 3, \dots$ не превосходит 1%, т.е. положив $a^*(f) = a_1^*(f)$, практически можно считать, что $a_n^*(f) = a^*(f)$.

Таким образом, оптимальные параметры для заданной частоты f будут представлять набор: $\{L_n^{a^*}, a^*\}$, $n = 1, 2, \dots$, где $a^* = a_1^*$, $L_n^{a^*} = L_1^{a^*} + (n-1)\lambda_{st}/2$. Определив какой-либо элемент набор оптимальных параметров, легко построить другой.

Перейдем к обсуждению результатов, рассчитанных при $d_d = 4$ см и указанных в начале §3 параметров жидкости и материала пьезокерамики. Эти результаты несложно перенести на случай стержней произвольного радиуса при неизменности физических постоянных жидкости и материала пьезокерамики, если воспользоваться безразмерными представлениями Z в виде (25) и, соответственно, \tilde{V} в виде (26'). Поэтому все графики частотных зависимостей представленных ниже величин дополнительно снабжаются верхней осью абсцисс, по которой откладывается d_d/λ_w , и при необходимости правой осью ординат.

На Рис.7 изображена частотная зависимость $L_1^{a^*}$ (жирная линия), выраженной в λ_{st} .

⁶При создании прибора с целью наибольшей передачи акустической энергии в радиальном направлении зазоры $a > \lambda_w$ не будут представлять практического интереса, так как в этом случае исследование атласа диаграмм направленности излучателя показало, что диаграммы будут "многолепестковыми".

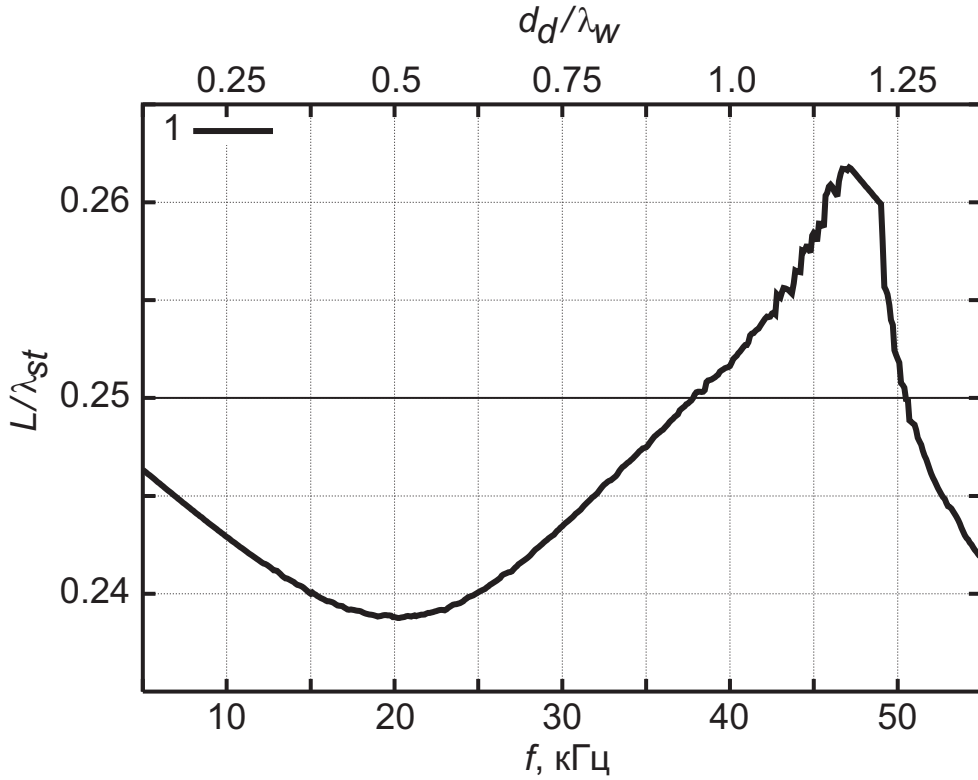


Рис.7 График частотной зависимости длины стержней $L_1^{a^*}$ (1) из оптимальных параметров излучателя.

Из рисунка следует, что относительное отличие $L_n^{a^*}$ от L_n меньше 5%. Следовательно, на практике длину стержней необходимо выбирать близкую к резонансной длине ненагруженного одностержневого излучателя.

Очевидно, что с ростом частоты длина $L_1^{a^*}$ уменьшается. Так, при $d_d = 4$ см и $f = 50$ кГц из Рис.7 можно определить, что $L_1^{a^*} \approx 1,5$ см (для ЦТС-19 $c_{st} \approx 2.92 \cdot 10^5$ см/с). Поэтому для таких и более высоких частот для практического использования могут представлять интерес вторые оптимальные параметры излучателя.

На Рис.8 представлена частотная зависимость a^* , выраженная в λ_w (жирная линия 1). Рисунок убеждает, что диапазон изменения a^*/λ_w достаточно широк.

С целью лучшего понимания работы прибора построим следующие неоптимальные параметры, воспользовавшись близостью $L_n^{a^*}$ к L_n (Рис.7). Положим для начала $L = L_1$. При заданной частоте f для такой длины $L_1(f)$ можно определить наилучший зазор $a(f)$, на котором амплитуда скорости $\tilde{V}(f; L_1(f), a(f))$ будет максимальной. Обозначим его через $\bar{a}(f)$. Из уравнения (26) следует, что и при $L = L_n$, $n = 2, 3, \dots$, зазор \bar{a} будет наилучшим, так как $\text{ctg}(2\pi f L_n / c_{st}) = 0$.

Параметры $\{L_n, \bar{a}\}$, $n = 1, 2, \dots$ будем называть 1-ми неоптимальными параметрами излучателя.

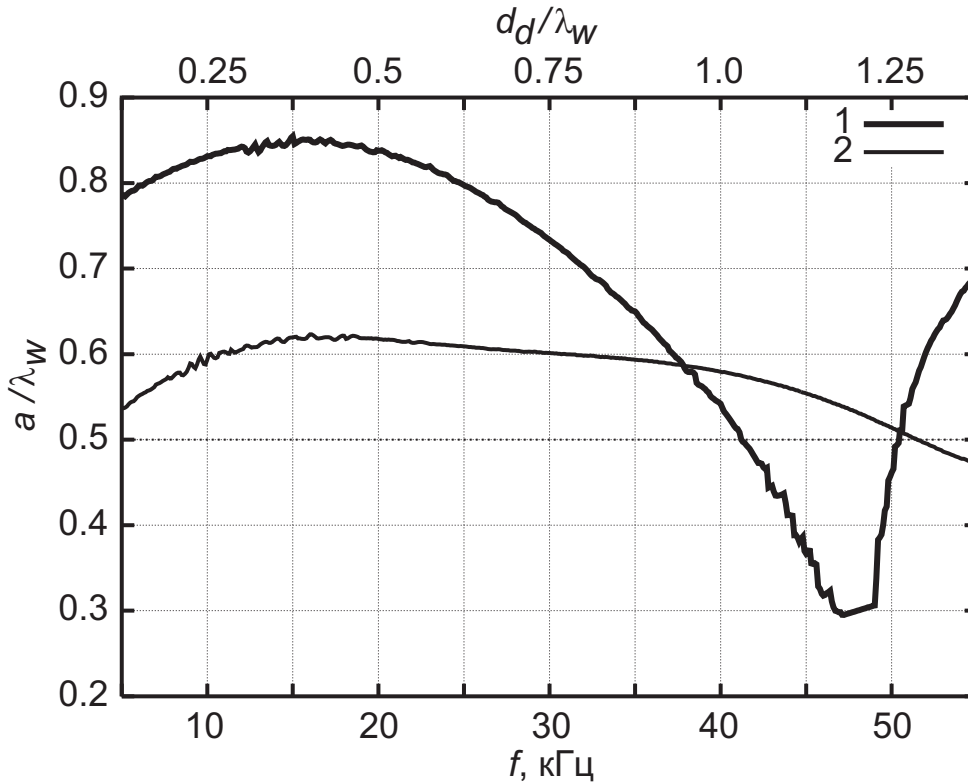


Рис.8 Графики частотных зависимостей значений зазоров: a^* — из оптимальных параметров излучателя (1) и наилучшего зазора \bar{a} (2), соответствующего $L = L_1 = 0.25\lambda_{st}$.

На Рис.8 представлена частотная зависимость \bar{a} , выраженная в λ_w (сплошная линия 2). Отметим, что из (26) следует: значения \bar{a}/λ_w не зависят ни от типа материала пьезокерамики, ни от параметров скважинной жидкости.

Рис.8 показывает, что значения \bar{a} в целом близки к $0.5\lambda_w$. Учитывая эту близость, рассмотрим ниже также параметры прибора $\{L_n, a = 0.5\lambda_w\}$, $n = 1, 2, \dots$, которые назовем 2-ми неоптимальными.

На практике, как правило, генератор электрического напряжения, входящий в конструкцию прибора, обладает системой подстройки частоты излучения в некотором интервале первоначально заданной частоты⁷. Поэтому для излучателя с построенными характерными неоптимальными параметрами L и a , соответствующими заданной частоте f , для этих размеров была определена оптимальная частота излучения $\tilde{f} = \tilde{f}(f)$, т.е. на которой амплитуда скорости торцов максимальна (режим “оптимума” излучателя)⁸. А именно, если подставить значения $L(f)$ и $a(f)$ в выражение (26), то в случае произвольной частоты излучения f' получим: $\tilde{V}(f') = \tilde{V}(f', L(f), a(f))$. Тогда

⁷Подстройку частоты можно реализовать, например, если подавать на “таблетки” электрическое напряжение с временной зависимостью такой, что ее модуль Фурье спектра будет постоянен в этом некотором интервале первоначально заданной частоты.

⁸Формально можно говорить и о работе прибора с оптимальными параметрами в режиме “оптимума”, если положить $\tilde{f}(f) = f$.

простым простым перебором f' можно определить ту оптимальную частоту $f' = \tilde{f}(f)$, на которой $\tilde{V}(f')$ будет наибольшей.

На Рис.9 представлены частотные зависимости $\tilde{f}(f) - f$ для излучателя с первыми (сплошная линия) и вторыми (пунктирная линия) неоптимальными параметрами (через d_d/λ_w обозначена безразмерная оптимальная частота, соответствующая первоначально заданной безразмерной частоте d_d/λ_w).

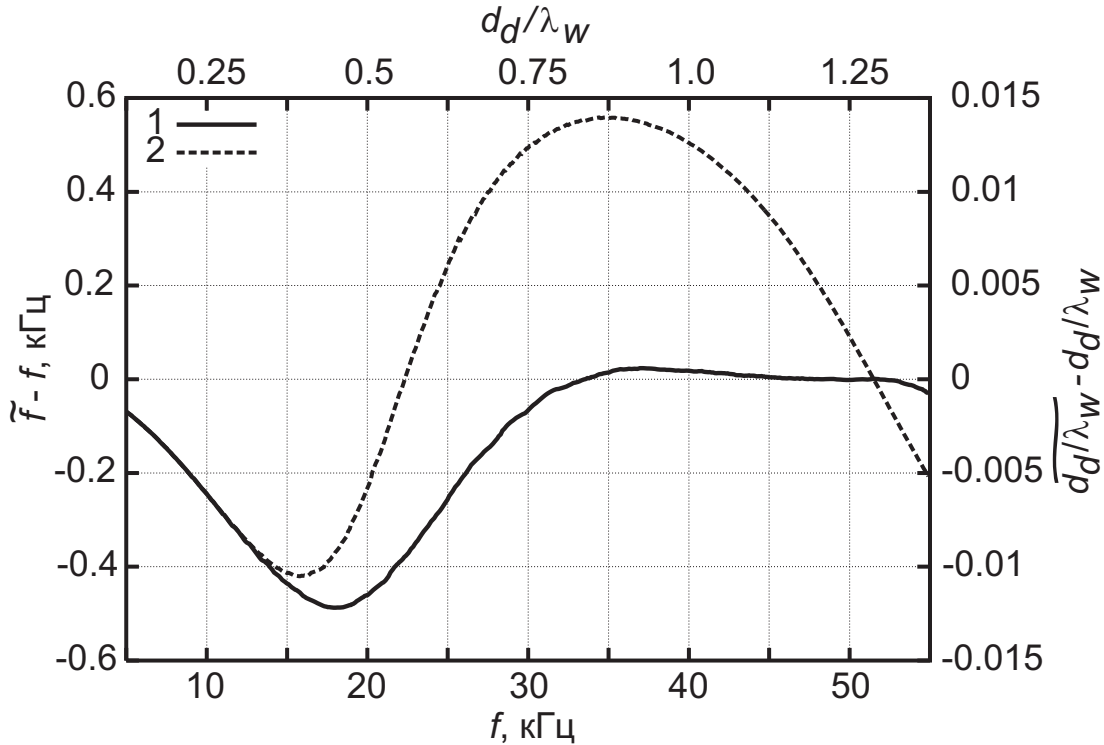


Рис.9 Графики функций $\tilde{f}(f) - f$, где $\tilde{f}(f)$ — оптимальная частота излучения для характерных неоптимальных параметров прибора, соответствующих частоте f : $\{L_1, \tilde{a}\}$ (1) и $\{L_1, a = 0.5\lambda_w\}$ (2).

Из Рис.9 можно определить, что при $d_d=4$ см относительное отличие $\tilde{f} - f$ от f не превосходит 3%. Таким образом, достаточно незначительно подстраивать частоту напряжения, чтобы добиться “оптимума” в случае характерных неоптимальных параметров излучателя.

Обозначим через A амплитуду смещения торцов стержней на частоте f . Тогда в случае гармонического напряжения, подаваемого на пьезокерамические “таблетки”, максимальное относительное удлинение каждого стержня равно $A/L = \tilde{V}(f; L, a)/(2\pi fL)$. Положим $U_Q(f) = 1$ вольт и сравним при различных частотах f значения A/L для оптимальных параметров со значениями $A/L = \tilde{V}(\tilde{f}(f); L, a)/(2\pi \tilde{f}(f)L)$ в случае характерных неоптимальных параметров излучателя, работающего в режиме “оптимума”.

На Рис.10 приведены частотные зависимости логарифма максимальных относительных удлинений стержней для оптимальных параметров $\{L_1^*, a^*\}$

(жирная линия) и для характерных неоптимальных параметров излучателя, работающего в режиме “оптимума”: $\{L_1, \tilde{a}\}$ (сплошная линия) и $\{L_1, a = 0,5\lambda_w\}$ (пунктирная линия).

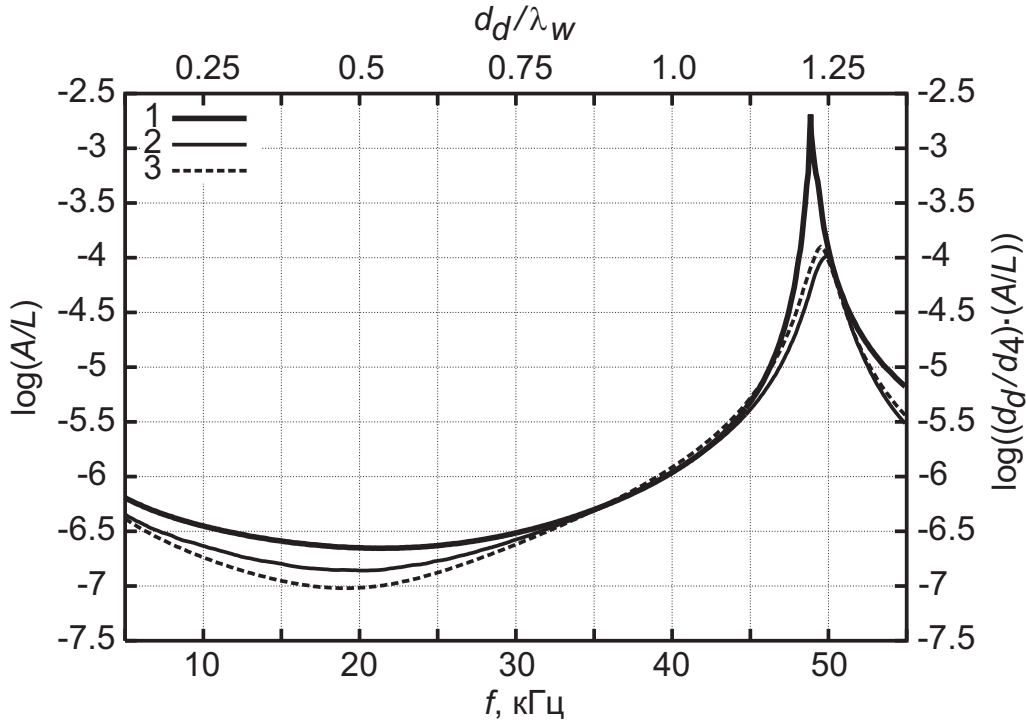


Рис.10 Графики частотных зависимостей $\log(A/L)$ ($d_4 = 4$ см) для излучателя с оптимальными параметрами $\{L_1^{a^*}, a^*\}$ (1) и в случае излучателя с характерными неоптимальными параметрами $\{L_1, \tilde{a}\}$ (2) и $\{L_1, a = 0,5\lambda_w\}$ (3), работающего в режиме “оптимума”.

На рисунке в окрестности $f = 40$ кГц можно заметить, что функция $\log(A/L)$ для оптимальных параметров по сравнению со 2-ми неоптимальными принимает чуть меньшие значения. Это объясняется тем, что для неоптимальных параметров значения $\log(A/L)$ приводятся в зависимости от частоты f , а не частоты $\tilde{f}(f)$. Как установлено, добиться режима “оптимума” можно, если незначительно подстроить частоту электрического напряжения. Вместе с этим вид графиков убеждает, что они практически не изменятся, если их привести в зависимости от \tilde{f} . Поэтому такое представление результатов и было выбрано нами.

С помощью Рис.10 несложно определить значения A/L для других наборов оптимальных $\{L_n^{a^*}, a^*\}$ и характерных неоптимальных $\{L_n, \tilde{a}\}$, $\{L_n, a = 0,5\lambda_w\}$ параметров излучателя. Так как, $L_n^{a^*} \approx L_n \equiv (2n - 1)\lambda_{st}/4$, то имеем: $\log(A/L_n^{a^*}) \approx \log(A/L_n) = \log(A/L_1) - \log(2n - 1)$, $n = 2, 3, \dots$

Таким образом, данные графики позволяют лучше представить работу излучателя в окрестности оптимального набора параметров.

Из Рис.10 видно, что для оптимальных параметров излучателя существует частотный резонанс, когда $d_d/\lambda_w \approx 1,22$, т.е. на том аргументе, на котором

активное сопротивление излучения принимает наименьшие значения (п.3.1). Из рисунка также следует, что для излучателя, работающего в режиме “оптимума” с характерными неоптимальными параметрами, самое максимальное относительное удлинение стержней, похожее на резонанс, имеет место, как следствие построения таких параметров, тоже в окрестности $d_d/\lambda_w \approx 1.22$ (при d_d/λ_w немногим более 1.22).

Можно рассчитать, что в случае параметров $\{L_1^{a^*}, a^*\}$ и $d_d = 4$ см на резонансной частоте, равной ≈ 48.8 кГц, амплитуда смещения излучающих торцов будет составлять при $U_Q = 1$ вольт около 30 мкм! Такое большое значение амплитуды смещения при малом напряжении объясняется выбором физико-математической модели, не учитывающей диссипацию акустической энергии, имеющей место в реальности.

Подчеркнем, что используемая физико-математическая модель пьезокерамического излучателя является достаточно простой. Поэтому, практические значения как оптимальных параметров прибора, так и резонансной частоты для каждого типа прибора будут несколько отличаться от полученных.

3.3 Атлас диаграмм направленности

С целью представления о направленности распространения акустической энергии в зависимости от различных значений f , a и d_d был составлен атлас диаграмм направленности средней по времени плотности кинетической энергии. В их качестве использовались те линии уровней равных значений средней по времени плотности кинетической энергии, для каждой из которых расстояние от оси z до наиболее удаленной в радиальном направлении точки равно $10\lambda_w$ (несложно показать, что такие линии уровней, действительно, можно принять в качестве диаграмм направленности излучателя).

При построении диаграмм направленности колебательная скорость излучающих торцов задавалась функцией $v_T(t) = (1 - \exp(-20\pi ft)) \cdot \sin(2\pi ft)$. Частоты излучения полагались следующие: 10, 20, 30 и 40 кГц, которые соответствуют отношениям $d_d/\lambda_w = 0.25, 0.5, 0.75$ и 1. Поскольку представляют интерес диаграммы в районе отношения $d_d/\lambda_w \approx 1, 22$ (п.3.1 и п.3.2), вычисления также были проведены для частот 45, 48, 49, 50 и 55 кГц, т.е. для $d_d/\lambda_w = 1.125; 1.2; 1.225; 1.25$ и 1.375. Для каждой частоты зазор a перебирался от $0.125\lambda_w$ до $1.5\lambda_w$ с шагом $0.125\lambda_w$, а также полагался равным $a = a^*$, т.е. из оптимальных параметров излучателя (Рис.8). Диаграммы были построены в виде от безразмерных отношений d_d/λ_w и a/λ_w .

Таким образом, в атлас были отображены наиболее характерные диаграммы направленности. Несмотря на это, его размер получился большим. Поэтому изучение атласа представляет собой самостоятельную задачу и мы проиллюстрируем основной результат, полученный из анализа атласа.

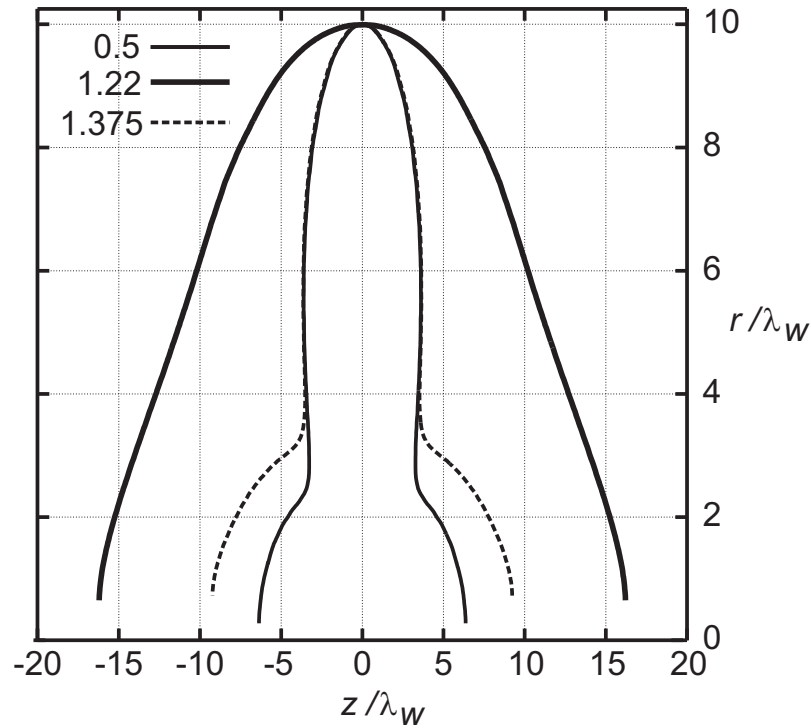


Рис.11 Диаграммы направленности излучателя при $d_d/\lambda_w = 0.5, 1.22, 1.375$ и зазорах $a = a^*$.

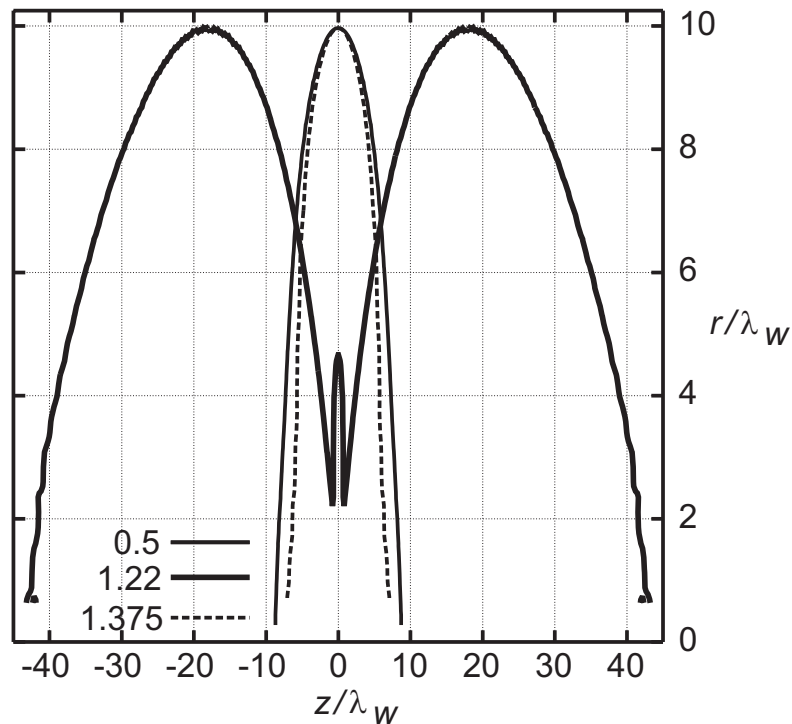


Рис.12 Диаграммы направленности излучателя при $d_d/\lambda_w = 0.5, 1.22, 1.375$ и зазорах $a = 0.5\lambda_w$.

На Рис.11–12 показаны диаграммы направленности при $d_d/\lambda_w = 0.5, 1.22, 1.375$ для зазора $a = a^*$ и, соответственно, для зазора $a = 0.5\lambda_w$. Рис.11 иллюстрирует, что в случае $a = a^*$ диаграммы всегда суть “однолепестковые”. Причем с ростом частоты, начиная с низких, диаграмма расширяется в осевом

направлении до достижения резонансной частоты $d_d/\lambda_w \approx 1.22$, после которой происходит ее сжатие. Рис.12 иллюстрирует, что для $a = 0.5\lambda_w$ диаграммы при d_d/λ_w , близким к 1.22, будут “трехлепестковыми” (возможно с фактическим отсутствием центрального лепестка) и по мере отклонения от величины 1.22 диаграммы быстро становятся “однолепестковыми”. Сравнение обоих рисунков показывает, что в случае оптимальных параметров диаграммы имеют практически самый “ножевидный” вид, следовательно, обеспечивается максимум передачи акустической энергии в радиальном направлении.

Литература

1. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики, М., Наука, 1982.
2. Бушер М.К., Михайлов А.В., Попов В.П. О проектировании скважинных акустических излучателей. Журнал “Геофизика”, 2001, №3.
3. Бушер М.К., Горбачев Ю.И., Михайлов А.В., Попов В.П. Оценка эффективности скважинных пьезокерамических излучателей. Журнал “Геофизика”, 2003, №4.
4. Горбачев Ю.И., Иванова Н.И., Никитин А.А., Колесников Т.В., Ориентлихерман Э.И. Акустические методы повышения нефтеотдачи пластов и интенсификации добычи нефти. Журнал “Нефтяное хозяйство”, 2002, №5, с.с. 87–91.
5. Гутин Л.Я. О звуковом поле поршневых излучателей. ЖТФ, 1937, Т.VII, вып.10.
6. Плющенко Б.Д., Пергамент А.Х., Петренко Ф.А., Турчанинов В.И. Численное моделирование акустического каротажа скважин. М., Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 1997, N70.
7. Рябенский В.С. Введение в вычислительную математику. М., Наука, 1994.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. М., Наука, 1975.
9. Самарский А.А. Теория разностных схем. М., Наука, 1983.
10. Свердлин Г.М. Прикладная гидроакустика. Л., Судостроение, 1976.
11. Тюрин А.М. и др. Гидроакустические измерения в океанологии. Л., Судостроение, 1972.
12. M.A. Biot, “Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media,” J. Appl. Phys., 33, 4, 1482-1498 (1962).
13. B.D. Plyushchenkov, and V.I. Turchaninov, “Acoustic logging modeling by refined Biot’s equations,” Int. J. Mod. Phys. C, 11, 2, 365-396 (2000).
14. J.H. Rosenbaum, “Synthetic microseismograms: Logging in porous formations,” Geophysics, 39, 14-32 (1974).

Приложение. Решение задачи о распространении механических колебаний в стержневом преобразователе при заданном механическом импедансе

Напомним, что задача о распространении механических возмущений в стержневом составном пьезокерамическом преобразователе при известном значении механического импеданса $Z(f)$ была сформулирована в §2 (на примере нижнего излучателя, входящего в прибор). Она представляет собой систему одномерных уравнений (12), (13) с граничными условиями в местах склеек “таблеток” (14), на нижнем (15) и верхнем (23) концах преобразователя и с начальными нулевыми условиями (18).

Очевидно, аналитическое представление решения этой задачи можно построить, если применить Фурье преобразования по времени к этим уравнениям и граничным условиям. В этом случае Фурье образы неизвестных будут удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Легко показать, что Фурье образ скорости для q -ой “таблетки” можно представить в виде $\tilde{v}^{\mathcal{F}} = A_q \exp(-i\omega z/c) + B_q \exp(+i\omega z/c)$, где $c = \sqrt{c_{33}^D/\rho_{st}}$, а A_q и B_q ($q = 0, \dots, Q - 1$) являются решением системы линейных уравнений, являющихся граничными условиями в местах склеек “таблеток” (14), на нижнем (15) и верхнем (23) концах преобразователя для Фурье образов скорости и напряжения $T_3^{\mathcal{F}}$. Причем соотношение (23) для них, очевидно, имеет вид:

$$T_3^{\mathcal{F}}|_{z=-a/2} = -\frac{1}{S} Z(f) \tilde{v}^{\mathcal{F}}|_{z=-a/2}.$$

Нахождение решения этой системы для произвольного числа таблеток - не тривиальная задача. Ясно, что даже если удалось бы получить это решение, то оно имело бы весьма громоздкий вид, неудобный для последующего анализа. Поэтому мы построили не точное, а приближенное аналитическое решение поставленной задачи. Для построения такого решения мы использовали следующий прием.

Так как мы изначально предполагаем, что приложенное электрическое напряжение возбуждает в стержне волны, характерная длина которых существенно больше толщины “таблеток”, то вид уравнения (13) наталкивает на дальнейшее упрощение математического описания механических возмущений в излучателе. Действительно, если L/Q — толщина “таблетки”, то, очевидно, имеет место следующее утверждение:

$$\frac{(\tilde{v}|_{z_{q+1}} - \tilde{v}|_{z_q})}{(L/Q)} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} + O(L/Q), \quad z \in (z_q, z_{q+1}), \quad q = 0, \dots, Q - 1.$$

Проводя соответствующие преобразования в уравнении (13) для каждой “таблетки”, учитывая соотношение $c_{33}^D - e_{33}^2/\varepsilon_{33}^S = 1/s_{33}^E$ (Свердлин Г.М., 1976),

пренебрегая малой величиной $O(L/Q)$ и используя граничные условия в местах склеек “таблеток”, получим более простую постановку задачи, решение которой приближенно описывает распространение акустических колебаний в составном стержне, как в однородном:

$$\rho_{st} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = \frac{\partial T_3}{\partial z}, \quad \frac{\partial T_3}{\partial t} = \frac{1}{s_{33}^E} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial z} - \frac{e_{33} Q \dot{U}(t)}{L};$$

$$\tilde{v}|_{z=0} = 0, \quad T_3|_{z=L} = -\frac{1}{S} \int_0^t \check{Z}(t-\tau) \tilde{v}(t, L) d\tau; \quad \tilde{v}|_{t=0} = 0, \quad T_3|_{t=0} = 0.$$

Отметим, что в новой модели скорость продольных волн выражается через модуль Юнга $E_{33} = 1/s_{33}^E$, что характерно для тонкого стержня, поперечные размеры которого во много раз меньше длины волны, возбуждаемой в нем, и равна $c_{st} = \sqrt{E_{33}/\rho_{st}}$. В материале пьезокерамики ЦТС-19 скорость $c_{st} \approx 2.92 \cdot 10^5$ см/с.

Используя описанный выше подход, легко получить решение новой задачи. Приведем ответ при $U(t) = U_{\max} \exp(i\omega t)$, $\omega = 2\pi f$, для Фурье образа функции колебательной скорости, через которую несложно выразить остальные необходимые величины:

$$\tilde{v}^{\mathcal{F}} = \frac{e_{33}}{L} \frac{QU_{\max}}{(\operatorname{Re}(Z/S) + i(\operatorname{Im}(Z/S) - \rho_{st} c_{st} \operatorname{ctg}(\omega L/c_{st})))} \frac{\sin(\omega z/c_{st})}{\sin(\omega L/c_{st})}.$$

Для оценки максимальной толщины таблеток, выражаемой в длинах волн, при которой решения исходной и новой задач будут совпадать с приемлемой точностью, был проведен численный эксперимент. Для нахождения решения исходной задачи использовался код, реализующий конечно-разностную схему типа “крест” (Самарский А.А., Попов Ю.П., 1975).

В численном эксперименте, задавая $U(t) = (1 - \exp(-10\omega t)) \sin(\omega t)$ и различные частоты колебания напряжения, полагая $5 \div 10$ узлов сетки на толщину таблетки при решении основной задачи, варьируя толщину таблеток и длину стержня, было установлено, что толщина таблеток не должна превышать $\lambda_{st}/10$, чтобы решения обеих задач отличались по амплитуде и фазе не более, чем на 2–3%. Такой разницей разумно пренебречь, и использовать для получения аналитического решения новую постановку задачи. Следует добавить, что волновой размер “таблеток” в $\lambda_{st}/10$ на частоте $f = 55$ кГц (максимальная из изучаемых в работе частот при оптимизации излучателя), соответствует метрическому размеру ≈ 40 мм, который вполне приемлем для создания стержневых излучателей.