



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 30 за 2009 г.



Колмычков В.В., Мажорова О.С.,
Федосеев Е.Э.

Численный метод решения
уравнений МГД

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колмычков В.В., Мажорова О.С., Федосеев Е.Э. Численный метод решения уравнений МГД // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2009. № 30. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2009-30>

Аннотация

Численный метод решения уравнений МГД

В.В.Колмычков, О.С.Мажорова, Е.Э. Федосеев

В работе описывается процесс построения численного метода решения системы уравнений магнитной гидродинамики в трёхмерном нестационарном случае. Жидкость считается вязкой, несжимаемой и электропроводящей. Расчётная область представляет собой прямоугольный параллелепипед.

Приводится описание построенной разностной схемы для уравнения магнитной индукции. Представлены результаты решения тестовых задач.

Abstract

Numerical Method for MHD Equations

V.V.Kolmychkov, O.S.Mazhorova, E.E.Fedoseev

The paper deals with numerical method for equation of hydromagnetics in 3D time-dependent case. The fluid is placed in a square box and assumed to be viscous, incompressible and conductive.

Resulting finite difference scheme is described. Solutions of sample problems are observed.

Содержание

1	Введение	4
2	Математическая постановка задачи.	5
3	Описание численного метода	9
4	Тестовые расчёты	14
4.1	Покоящаяся среда	14
4.2	Альфвеновская крутильная волна	15
4.3	Переход к полному давлению \tilde{p}	15
4.4	Выполнение условия бездивергентности магнитного поля . .	17
5	Заключение	18

1 Введение

Движение электропроводящих жидкостей и газов в присутствии магнитного поля изучается в различных областях науки, широко используется в технике и технологии. Оно играет важную роль в формировании астрофизических и геофизических явлений; лежит в основе работы многих технических устройств, например, магнитогидродинамических генераторов, плазменных ускорителей, двигателей. В современной полупроводниковой технологии электромагнитное поле используется для управления процессами тепло - массопереноса при получении объемных монокристаллов и полупроводниковых структур.

В самых общих предположениях движение электропроводящей среды в магнитном поле описывается уравнениями гидродинамики, в которые входят объемные силы и источники тепла, связанные с наличием электромагнитного поля, и уравнениями Максвелла. В последних учитывается изменение поля, обусловленное движением среды. Совместное решение полной системы уравнений Максвелла и уравнений гидродинамики является сложной задачей, которую при изучении конкретного физического явления, как правило, можно упростить, используя предварительные сведения о характере изучаемых процессов. Но и после этого численное исследование полученных моделей представляет значительные трудности и требует использования специальных алгоритмов, ориентированных на решение рассматриваемого класса задач.

Данная работа посвящена построению методов численного исследования задач динамики вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости. Рассматривается математическая модель, традиционно используемая при анализе конвективной устойчивости несжимаемой, неравномерно нагретой, проводящей жидкости в магнитном поле [1, 2]. Указанная модель строится на основе уравнений Максвелла в магнитогидродинамическом приближении, т.е. предполагается, что диэлектрическая и магнитная проницаемость

близки к единице, током смещения можно пренебречь по сравнению с током проводимости. Отсюда следует, что энергия электрического поля мала, по сравнению с энергией магнитного поля и среда является квазинейтральной [3–5]. Влияние движения жидкости на поле учитывается при записи закона Ома. Обратное влияние магнитного поля на движение, определяется силой Лоренца, входящей в уравнения Навье-Стокса. Они рассматриваются в приближении Буссинеска [1]. В уравнении энергии источники тепла, связанные с нагревом проводящей жидкости электрическими токами, не учитываются. Основное внимание в работе уделяется методу решения уравнения магнитной индукции, к которому, в рамках сделанных предположений, сводится система уравнений Максвелла. Уравнения движения решаются с помощью алгоритма, основанного на процедуре типа предиктор-корректор [6, 7]. Такой подход широко используется в вычислительной практике, в частности при моделировании конвективной устойчивости [8–10].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 06-01-00182.

2 Математическая постановка задачи.

В магнитогидродинамическом приближении система уравнений Максвелла имеет следующий вид [2, 3]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \quad (4)$$

Здесь \mathbf{H} и \mathbf{E} – напряженность магнитного и электрического поля соответственно, c – скорость света, t – время, \mathbf{J} – плотность электрического тока, которая связана с напряженностью электрического и магнитного по-

ля законом Ома:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}); \quad (5)$$

σ – электропроводность жидкости, \mathbf{V} – скорость ее движения, $\mathbf{V} \times \mathbf{H}$ – векторное произведение векторов \mathbf{V} и \mathbf{H} .

Из соотношения (5) следует, что $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}$, или, с учетом уравнения (1), $\mathbf{E} = \frac{c}{4\pi\sigma}\text{rot } \mathbf{H} - \frac{1}{c}\mathbf{V} \times \mathbf{H}$. Подставив это выражение в (2), получим уравнение для напряженности магнитного поля в движущейся проводящей среде.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \text{rot}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\text{rot } \mathbf{H}\right) \quad (6)$$

Величина $\nu_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$ характеризует диффузию магнитного поля в проводящей среде и называется магнитной вязкостью.

Условие соленоидальности магнитного поля (3) будет выполнено в любой момент времени, если оно выполнялось при $t = 0$. В этом нетрудно убедиться, применив к уравнению (2) операцию div .

Рассмотрим теперь систему уравнений гидродинамики. Она включает в себя уравнения Навье-Стокса в приближении Буссинеска, уравнение неразрывности и уравнение переноса тепла.

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{V} + \frac{\mathbf{F}}{\rho_0} \quad (7)$$

$$\text{div } \mathbf{V} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)T = \chi\Delta T \quad (9)$$

Здесь Δ – оператор Лапласа, ρ_0 – средняя плотность жидкости, p – давление, ν – коэффициент кинематической вязкости, \mathbf{F} – объемная плотность сторонних сил, T – температура, χ – коэффициент температуропроводности.

Сторонние силы в данном случае являются результатом действия поля силы тяжести \mathbf{F}_g и магнитного поля \mathbf{F}_m : $\mathbf{F} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_m$. В рамках приближения Буссинеска подъемная сила в неравномерно нагретой жидкости

обусловлена зависимостью плотности от температуры: $\mathbf{F}_g = g\rho_0\tilde{\beta}T\mathbf{e}_z$, где g – ускорение свободного падения, $\tilde{\beta}$ – коэффициент теплового расширения, \mathbf{e}_z – единичный вектор, направленный против силы тяжести.

Объемная плотность электромагнитных сил определяется величиной $\mathbf{F}_m = \frac{1}{c}(\mathbf{J} \times \mathbf{H})$ [3]. Подставляя сюда выражение для плотности тока (1), с помощью стандартных преобразований, получим:

$$\mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi}(\text{rot } \mathbf{H}) \times \mathbf{H} = -\frac{1}{8\pi}\nabla\mathbf{H}^2 + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H} \quad (10)$$

В выражении (10) первое слагаемое в правой части представляет собой плотность потенциальной силы. С точностью до множителя это градиент магнитной энергии.

Заметим, что наличие в уравнении (7) любой потенциальной силы влияет только на распределение давления в жидкости, и не влияет на поле скоростей. В самом деле, пусть функции \mathbf{V} , p являются решением системы уравнений (7)-(8). Для простоты будем считать, что краевые условия задачи не зависят от давления. Легко проверить, что уравнениям (7)-(8), в которых вместо \mathbf{F} стоит $\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \nabla S$, где S - произвольная дифференцируемая функция, удовлетворяют \mathbf{V} , $\tilde{p} = p + S$.

Учитывая полученные выражения для объемной плотности сторонних сил, уравнения движения (7) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = & -\frac{1}{\rho_0}\nabla\tilde{p} + \nu\Delta\mathbf{V} + \\ & + g\tilde{\beta}T\mathbf{e}_z + \frac{1}{4\pi\rho_0}(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\tilde{p} = p + p_m$, $p_m = \frac{1}{8\pi}\mathbf{H}^2$ - магнитное давление.

Таким образом, в рамках сделанных предположений движение вязкой, несжимаемой, неравномерно нагретой электропроводящей жидкости в присутствии магнитного поля описывается системой уравнений (11),(8),(9), (6).

Рассмотрим прямоугольную область $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq L_z\}$ с границей $\partial\Omega$. Предположим, что на всей

границе скорость жидкости обращается в нуль; на ее верхней и нижней части поддерживаются заданные значения температуры, а боковые стенки – теплоизолированы, т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{V}|_{\partial\Omega} &= \mathbf{0}, \\ T|_{z=0} &= T_0 + \theta, \quad T|_{z=L_z} = T_0, \\ \frac{\partial T}{\partial n}|_{x=0, x=L_x, y=0, y=L_y} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь значения температуры T_0 и $T_0 + \theta$ постоянны, $\theta > 0$, n - вектор внешней нормали к границе области.

Граничные условия для индукции магнитного поля имеют вид [3, 5]:

$$\mathbf{H}_\mu|_{\partial\Omega} = \mathbf{H}_\mu^0, \quad t > 0 \quad (13)$$

\mathbf{H}_μ , \mathbf{H}_μ^0 - касательные к границе компоненты соответствующих векторов, $\mathbf{H}_0 = \{H_x^0, H_y^0, H_z^0\}$ - напряженность внешнего магнитного поля. Будем считать, что внешнее поле постоянно.

Систему уравнений (11),(8),(9),(6) запишем в безразмерной форме, сохраняя для безразмерных величин введенные ранее обозначения:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = -\nabla p - \frac{Ha^2}{Pm} \nabla \left(\frac{\mathbf{H}^2}{2} \right) + \Delta \mathbf{V} + \quad (14)$$

$$+ \frac{Ra}{Pr} T \mathbf{e}_z + \frac{Ha^2}{Pm} (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V}\nabla T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{Pm} \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{H}) \quad (17)$$

В качестве масштаба измерения расстояния используется высота области L_z , масштаб измерения времени - $\frac{L_z^2}{\nu}$, скорости - $\frac{\nu}{L_z}$, давления - $\frac{\rho_0 \nu^2}{L_z^2}$. Напряженность магнитного поля нормируется на - H_0 - модуль вектора \mathbf{H}_0 ; безразмерная температура вводится по формуле $(T - T_0)/\theta$.

В систему (14)-(17) входят четыре безразмерные параметра: числа Рэлея $Ra = \frac{g \tilde{\beta} \theta L_z^3}{\nu \chi}$, Прандтля $Pr = \frac{\nu}{\chi}$, Гартмана $Ha = \frac{H_0 L_z}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_0 \nu}}$ и магнитное число Прандтля $Pm = \frac{4\pi\sigma\nu}{c^2}$.

Начальные условия в безразмерных переменных задаются следующим образом:

$$T = 1 - z, \quad \mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0/H_0 \quad (18)$$

3 Описание численного метода

Разностный алгоритм решения задачи (14)-(17),(12),(13),(18) строится на основе процедуры расщепления по физическим процессам. На каждом временном слое сначала из уравнений (14),(15) определяется поле скоростей. На этом этапе электромагнитные силы в уравнениях Навье-Стокса вычисляются по значениям магнитной индукции с предыдущего шага по времени. Затем, используя найденное поле скоростей, последовательно решаются уравнения теплопроводности (16) и магнитной индукции (17).

Для решения уравнений движения используется неявный алгоритм типа предиктор-корректор [6, 7]. Его подробное описание приведено в [8, 11]. Здесь отметим только, что алгоритм строится на разнесенных сетках. Давление задается в центрах разностных ячеек, компоненты вектора скорости – в центрах соответствующих граней. Схема обладает свойством энергетической нейтральности [12], т.е., как и в дифференциальном случае, конвективные члены не вносят вклад в баланс кинетической энергии.

Разностная схема для уравнения теплопроводности также описана в [8, 11]. Она гарантирует выполнение баланса тепловой энергии. На равномерной сетке алгоритм решения уравнений (14)-(16) имеет второй порядок точности по пространству и первый по времени.

Метод решения уравнения магнитной индукции

В результате выбранной процедуры расщепления переход на следующий временной слой в уравнении магнитной индукции (17) становится линейным. В покомпонентной записи уравнение для H_α , $\alpha = x, y, z$, содержит все три компоненты вектора \mathbf{H} . При использовании неявных разностных схем это приводит к необходимости совместного решения системы сеточных уравнений относительно вектора $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Соответствующая блочная матрица с размером блоков 3×3 имеет порядок $\mathcal{N} = 3N_x N_y N_z$, где N_α – число узлов сетки по направлению α .

Алгоритмически более простыми и экономичными, с точки зрения затрат оперативной памяти машины, представляются методы, в которых компоненты вектора \mathbf{H} определяются последовательно. Для построения такого метода преобразуем уравнение магнитной индукции к виду

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{Pm}\Delta\mathbf{H}. \quad (19)$$

Переход от уравнения (17) к уравнению (19) осуществляется с помощью стандартных формул векторного исчисления

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) &= -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H} + (\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V} - \mathbf{H}\text{div}\mathbf{V} + \mathbf{V}\text{div}\mathbf{H} \\ \text{rot}(\text{rot}\mathbf{H}) &= \nabla\text{div}\mathbf{H} - \Delta\mathbf{H} \end{aligned}$$

с учетом несжимаемости жидкости ($\text{div}\mathbf{V} = 0$) и бездивергентности магнитного поля ($\text{div}\mathbf{H} = 0$).

Дополним уравнение (19) граничными условиями

$$\mathbf{H}_\mu|_{\partial\Omega} = \mathbf{H}_\mu^0, \quad \frac{\partial \mathbf{H}_n}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0 \quad (20)$$

При постоянном внешнем магнитном поле второе условие в (20) вытекает из (3).

Алгоритм последовательного вычисления компонент напряженности магнитного поля построим на основе уравнения (19) с граничными условиями

(20). Рассмотрим итерационный процесс, в котором слагаемое $(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{V}$, содержащие все три компоненты вектора \mathbf{H} , берется с предыдущей итерации:

$$\frac{\mathbf{H}^{(m+1)} - \mathbf{H}^{(0)}}{\tau} = -(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{H}^{(m+1)} + (\mathbf{H}^{(m)}\nabla)\mathbf{V} + \frac{1}{Pm}\Delta\mathbf{H}^{(m+1)}. \quad (21)$$

здесь $m = 0, 1, 2, \dots$ - номер итерации, τ - шаг по времени, $\mathbf{H}^{(0)} = \mathbf{H}$ - значение напряженности магнитного поля на предыдущем временном слое. Условием окончания итераций является выполнение неравенства

$$\max_{\Omega} \left| \operatorname{div} \mathbf{H}^{(m+1)} \right| < \varepsilon_1 \quad (22)$$

или

$$\max_{\Omega} |\mathbf{H}^{(m+1)} - \mathbf{H}^{(m)}| < \varepsilon_2, \quad (23)$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – заданные константы. Предполагая, что \mathbf{H} и \mathbf{V} определены в одних и тех же узлах сетки, аппроксимируем пространственные производные в (21) с помощью разностных схем, ранее использовавшихся в уравнениях движения.

Тестовые расчёты показали, что итерационный процесс (21) сходится в норме (23). После 3-4 итераций достигается точность $\varepsilon_2 \approx 10^{-14}$, при этом значение, стоящее слева в неравенстве (22), остается на уровне $\varepsilon_1 \approx 10^{-2}$. Повысить точность выполнения условия (22) за счет модификации итерационного процесса и граничных условий авторам не удалось. По-видимому это связано с формой записи уравнения магнитной индукции (19), которая, вообще говоря, не гарантирует бездивергентность магнитного поля. Использование процедуры типа предиктор-корректор позволит, возможно, добиться более высокой точности в (22) [13], однако это требует дополнительных исследований.

Вычислительную процедуру, обеспечивающую бездивергентность магнитного поля, удастся построить на основе уравнения магнитной индукции в форме (17), если для разностных аналогов операторов div и rot выполняется соотношение $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \forall \mathbf{F}$. Следуя [5], построим сеточные аппроксимации div и rot , обладающие указанным свойством.

Дискретизация по пространству

Пусть $\bar{\Omega}_\alpha^h = \{\alpha_i = iL_\alpha/N_\alpha; i = 0, \dots, N_\alpha\}$, $\alpha = x, y, z$ – одномерная сетка по переменной α с шагами: $h_{i+1/2}^\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i$, $i = 0, \dots, N_\alpha - 1$.

Обозначим: $\alpha_{i-1/2} = (\alpha_{i-1} + \alpha_i)/2$, $i = 1, \dots, N_\alpha$; $\bar{h}_i^\alpha = (h_{i+1/2}^\alpha + h_{i-1/2}^\alpha)/2$, где $i = 1, \dots, N_\alpha - 1$.

Введем также разностную сетку $\Omega_\alpha^h = \{\alpha_{i-1/2}; i = 1, \dots, N_\alpha\}$

Будем рассматривать H_x на множестве $\Omega_{H_x}^h = \Omega_x^h \otimes \bar{\Omega}_y^h \otimes \bar{\Omega}_z^h$, H_y – на $\Omega_{H_y}^h = \bar{\Omega}_x^h \otimes \Omega_y^h \otimes \bar{\Omega}_z^h$, H_z – на $\Omega_{H_z}^h = \bar{\Omega}_x^h \otimes \bar{\Omega}_y^h \otimes \Omega_z^h$, скорость V_x на множестве $\Omega_{V_x}^h = \bar{\Omega}_x^h \otimes \Omega_y^h \otimes \Omega_z^h$, V_y – на $\Omega_{V_y}^h = \Omega_x^h \otimes \bar{\Omega}_y^h \otimes \Omega_z^h$, V_z – на $\Omega_{V_z}^h = \Omega_x^h \otimes \Omega_y^h \otimes \bar{\Omega}_z^h$ (рис.1)

Для функций, заданных на любом из множеств $\Omega_{H_\alpha}^h$ или $\Omega_{V_\alpha}^h$, определим операторы разностного дифференцирования по переменной β , $\beta = x, y, z$.

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\beta^h F(\beta_i) &= (F(\beta_{i+1/2}) - F(\beta_{i-1/2}))/\bar{h}_i^\beta \\ \partial_\beta^h F(\beta_{i+1/2}) &= (F(\beta_{i+1}) - F(\beta_i))/h_{i+1/2}^\beta\end{aligned}\tag{24}$$

В этих формулах указаны переменные, изменяющиеся под действием оператора дифференцирования.

Используя (24), построим разностную аппроксимацию дивергенции и ротора. Пусть вектор-функция $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ задана на $\Omega_H^h = (\Omega_{H_x}^h, \Omega_{H_y}^h, \Omega_{H_z}^h)$, а $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ на $\Omega_V^h = (\Omega_{V_x}^h, \Omega_{V_y}^h, \Omega_{V_z}^h)$. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{\text{Div}} \mathbf{A} &= (\bar{\partial}_x^h A_x + \bar{\partial}_y^h A_y + \bar{\partial}_z^h A_z) \in \bar{\Omega}_x^h \otimes \bar{\Omega}_y^h \otimes \bar{\Omega}_z^h \\ \text{Div} \mathbf{B} &= (\partial_x^h B_x + \partial_y^h B_y + \partial_z^h B_z) \in \Omega_x^h \otimes \Omega_y^h \otimes \Omega_z^h\end{aligned}\tag{25}$$

$$\begin{aligned}\text{Rot} \mathbf{A} &= \{\partial_y^h A_z - \partial_z^h A_y, \partial_z^h A_x - \partial_x^h A_z, \partial_x^h A_y - \partial_y^h A_x\} \in \Omega_V^h \\ \overline{\text{Rot}} \mathbf{B} &= \{\bar{\partial}_y^h B_z - \bar{\partial}_z^h B_y, \bar{\partial}_z^h B_x - \bar{\partial}_x^h B_z, \bar{\partial}_x^h B_y - \bar{\partial}_y^h B_x\} \in \Omega_H^h\end{aligned}\tag{26}$$

Для операторов (25), (26) выполняется разностный аналог соотношения $\text{div}(\text{rot} \mathbf{F}) = 0$:

$$\text{Div}(\text{Rot} \mathbf{A}) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\text{Div}}(\overline{\text{Rot}} \mathbf{B}) = \mathbf{0}\tag{27}$$

Эти равенства вытекают из коммутативности операторов ∂_α^h , ∂_β^h и $\overline{\partial}_\alpha^h$, $\overline{\partial}_\beta^h$, в чем нетрудно убедиться прямым вычислением. Например,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^h \partial_\beta^h A_\gamma &= \partial_\alpha^h (A_\gamma(\beta_{j+1}) - A_\gamma(\beta_j)) / h_{j+1/2}^\beta = \\ (A_\gamma(\alpha_{i+1}, \beta_{j+1}) - A_\gamma(\alpha_i, \beta_{j+1}) - A_\gamma(\alpha_{i+1}, \beta_j) + A_\gamma(\alpha_i, \beta_j)) / h_{j+1/2}^\beta h_{i+1/2}^\alpha &= \\ = \partial_\beta^h \partial_\alpha^h A_\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma = x, y, z; \quad \alpha \neq \beta \neq \gamma \end{aligned}$$

Запишем дифференциально-разностную схему для уравнения (17) в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \overline{\text{Rot}}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}) - \frac{1}{Pm} \overline{\text{Rot}}(\text{Rot} \mathbf{H}) \quad (28)$$

Как и в дифференциальном случае применение к уравнению (28) оператора $\overline{\text{Div}}$ приводит к равенству $\frac{\partial \overline{\text{Div}} \mathbf{H}}{\partial t} = 0$, т.е. $\overline{\text{Div}} \mathbf{H} = \mathbf{0}$ при $t \geq 0$.

Разностную операцию векторного умножения можно задавать различными способами, необходимо только, чтобы результат принадлежал области определения оператора $\overline{\text{Rot}}$. В данной работе скорость и напряженность магнитного поля интерполировались в точки, необходимые для вычисления векторного произведения, с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{I}}_\alpha^h F(\alpha_i) &= (F(\alpha_{i+1/2}) h_{i+1/2}^\alpha + F(\alpha_{i-1/2}) h_{i-1/2}^\alpha) / 2 h_i^\alpha \\ \mathcal{I}_\alpha^h F(\alpha_{i+1/2}) &= (F(\alpha_{i+1}) + F(\alpha_i)) / 2 \end{aligned} \quad (29)$$

Компоненты векторного произведения вычислялись по формулам

$$\begin{aligned} (\mathbf{V} \times \mathbf{H})_x(x_i, y_{j+1/2}, z_{k+1/2}) &= \mathcal{I}_y \overline{\mathcal{I}}_x V_y \cdot \mathcal{I}_y H_z - \mathcal{I}_z \overline{\mathcal{I}}_x V_z \cdot \mathcal{I}_z H_y \\ (\mathbf{V} \times \mathbf{H})_y(x_{i+1/2}, y_j, z_{k+1/2}) &= \mathcal{I}_z \overline{\mathcal{I}}_y V_z \cdot \mathcal{I}_z H_x - \mathcal{I}_x \overline{\mathcal{I}}_y V_x \cdot \mathcal{I}_x H_z \\ (\mathbf{V} \times \mathbf{H})_z(x_{i+1/2}, y_{j+1/2}, z_k) &= \mathcal{I}_x \overline{\mathcal{I}}_z V_x \cdot \mathcal{I}_x H_y - \mathcal{I}_y \overline{\mathcal{I}}_z V_y \cdot \mathcal{I}_y H_x \end{aligned}$$

Итоговая пространственная аппроксимация задачи имеет второй порядок точности на равномерной сетке и выполняется на 13-ти точечном шаблоне радиуса 1.

Дискретизация уравнения (28) по времени проводится на сетке $\Omega_\tau = \{t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, N\}$ с помощью двухслойной схемы с весами

$$\frac{\widehat{\mathbf{H}} - \mathbf{H}}{\tau} = \overline{\text{Rot}}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}^{(\delta)}) - \frac{1}{Pm} \overline{\text{Rot}}(\text{Rot} \mathbf{H}^{(\delta)}). \quad (30)$$

где $\widehat{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(t_{n+1})$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t_n)$, $\mathbf{H}^{(\delta)} = \delta\widehat{\mathbf{H}} + (1 - \delta)\mathbf{H}$, $\delta \in [0, 1]$.

Схема с весами имеет первый порядок по времени для $\delta \neq \frac{1}{2}$ и второй порядок при $\delta = \frac{1}{2}$. В расчетах преимущественно использовался вес по времени $\delta = \frac{1}{2}$, который помимо второго порядка аппроксимации обеспечивает выполнение разностных аналогов соотношений баланса электромагнитной энергии и баланса тепловой энергии [5]. Метод расщепления в целом имеет первый порядок по времени.

4 Тестовые расчёты

Проведем тестирование построенного разностного метода на задачах с известным аналитическим решением.

4.1 Покоящаяся среда

Пусть $\mathbf{V} \equiv \mathbf{0}$. Добавим в правую часть уравнения (17) слагаемое вида $\mathbf{f} = -\frac{2}{Pm}\{c_1, c_2, c_3\}$, где c_1, c_2, c_3 - произвольные константы.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{Pm} \text{rot}(\text{rot } \mathbf{H}) + \mathbf{f} \quad (31)$$

Это уравнение имеет стационарное решение $\mathbf{H}_f = \{c_1 z^2, c_2 x^2, c_3 y^2\}$. Получим его методом установления, задав на границе тангенциальные компоненты вектора \mathbf{H}_f . В качестве начальных условий выберем $\mathbf{H} = \mathbf{0}$.

Расчёт для безразмерных значений $L_x = L_y = 1$, $N_x = N_y = N_z = 16$, $\tau = 0.01$, $Pm = 2$, $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 3$ показал, что за время $t = 2$ во всей области Ω устанавливается искомое распределение \mathbf{H}_f . Абсолютная ошибка имеет порядок 10^{-10} , равный точности решения итерационным методом системы линейных алгебраических уравнений. Результат не зависит от шага сетки по пространству и времени. Это естественно, так как схема имеет второй порядок аппроксимации, а точное решение является полиномом второй степени от x, y, z .

4.2 Альфвеновская крутильная волна

Запишем уравнение магнитной индукции для случая бесконечно проводящей среды: $\sigma \rightarrow \infty$.

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{V} \times \mathbf{H}). \quad (32)$$

Пусть распределение скорости известно, и соответствует альфвеновской крутильной волне в невязкой жидкости [14]:

$$V_x = -D \cos \Phi, \quad V_y = -\frac{D}{\sqrt{2}} \sin \Phi, \quad V_z = \frac{D}{\sqrt{2}} \sin \Phi$$

где $D = \text{const}$, $\Phi = \kappa(y + z) - \omega t$, $\kappa = \frac{2\pi}{L_x/L_z}$, $\omega = \sqrt{2}\kappa$.

Нетрудно проверить, что вектор $\bar{\mathbf{H}} = (\bar{H}_x, \bar{H}_y, \bar{H}_z)$, где

$$\bar{H}_x = D \cos \Phi, \quad \bar{H}_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + D \sin \Phi), \quad \bar{H}_z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - D \sin \Phi) \quad (33)$$

удовлетворяет уравнению (32).

Рассмотрим уравнение (32) в области с $L_x=L_y=L_z=1$. Граничные условия для касательных компонент напряженности магнитного поля зададим из точного решения (33). В начальный момент времени $\mathbf{H}|_{t=0} = \bar{\mathbf{H}}|_{t=0}$. Для определения характера зависимости величины абсолютной погрешности решения уравнения (32) от значений шагов по времени и пространству, была проведена серия тестовых расчётов для $D = 1$ на различных сетках с $h_x=h_y=h_z$.

На рис.2, 3 представлена зависимость величины $\varepsilon = \frac{\max_{\Omega} |\mathbf{H} - \bar{\mathbf{H}}|}{\max_{\Omega} |\bar{\mathbf{H}}|}$ – относительной ошибки сеточного решения, от шагов сетки по времени и пространству. Данные приводятся на момент времени $t = 1$. Точность решения системы линейных алгебраических уравнений составляла 10^{-10} .

4.3 Переход к полному давлению \tilde{p}

Процедура расщепления по физическим процессам, используемая при решении системы уравнений (14)-(17), предполагает, что значение магнитного поля в уравнениях движения берется с предыдущего временного слоя.

В результате правая часть в уравнении сохранения импульса на $n + 1$ временном слое имеет вид: $\mathbf{F}^{n+1} = -\nabla(C\mathbf{H}^{n2}) + \mathbf{F}_m^n(\mathbf{H}^n) + \mathbf{F}_g^n(T^n)$, $C = Ha^2/2Pm$, $\mathbf{F}_m^n = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{H}^n\nabla)\mathbf{H}^n$.

Запишем разностный аналог системы уравнений (14)-(15) в следующей форме:

$$L_h(\mathbf{V}^{n+1}) = -\nabla_h \tilde{p}^{n+1} + \mathbf{F}_m^n + \mathbf{F}_g^n \quad (34)$$

$$\tilde{p}^{n+1} = p^{n+1} + C\mathbf{H}^{n2} \quad (35)$$

$$\text{Div}\mathbf{V}^{n+1} = 0 \quad (36)$$

где L_h - сеточный оператор. Как и в дифференциальном случае, наличие в (34) любой потенциальной силы влияет только на давление и не влияет на поле скоростей. Однако способ решения системы уравнений (34)-(36) может нарушать это свойство. В самом деле, рассмотрим вариант метода предиктор-корректор, используемый в данной работе. Сначала по полю давления \tilde{p} вычисляется предиктор скорости $\bar{\mathbf{V}}$:

$$L_h(\bar{\mathbf{V}}) = -\nabla_h \tilde{p}^n + \mathbf{F}_m^n + \mathbf{F}_g^n \quad (37)$$

Затем находится поправка для давления и скорость на верхнем временном слое:

$$\Delta_h(\delta p^{n+1}) = \text{Div}\bar{\mathbf{V}}/\tau, \delta p^{n+1} = \tilde{p}^{n+1} - \tilde{p}^n \quad (38)$$

$$\mathbf{V}^{n+1} = \bar{\mathbf{V}} - \tau\nabla_h(\delta p^{n+1}) \quad (39)$$

Пусть для простоты $\mathbf{V}^n = 0$, $F_m^n = F_g^n = 0$. Добавим в правую часть уравнения (37) величину $(1 - \alpha)\nabla_h \tilde{p}^n$. Тогда $\bar{\mathbf{V}}$, δp^{n+1} , \mathbf{V}^{n+1} умножатся на α , т.е. скорость зависит от значения давления на предыдущем временном слое, и, следовательно, $(\mathbf{V}^{n+1}, \tilde{p}^{n+1})$ не является решением (34). Найденные значения можно рассматривать как один шаг итерационного процесса, организованного на основе уравнений (37) -(39) с начальным приближением \tilde{p}^n .

Значение полного давления в уравнении (37) можно вычислить, оставаясь в рамках простейшей процедуры расщепления по физическим процессам: из (35) $\tilde{p}^n = \tilde{p}_A^n = p^n + CH^{n-1}2$. Вместе с тем, при вычислении \tilde{p}^n можно использовать только что найденное на n -ом слое распределение магнитного поля, тогда $\tilde{p}^n = \tilde{p}_B^n = p^n + CH^{n2}$. Сравним поля скоростей \mathbf{V}_A и \mathbf{V}_B , полученные методом предиктор-корректор (37)- (39) с использованием \tilde{p}_A и \tilde{p}_B соответственно.

Расчет проводился в области с $L_x=L_y=8, L_z=1$ на разностной сетке по пространству $32 \times 32 \times 16$ шагом по времени $\tau = 5 \cdot 10^{-3}$ при следующих значениях безразмерных параметров: $Ra = 6000, Ha = 10, Pr = 1, Pm = 0.5$. Начальные данные $\mathbf{V} = 0, \mathbf{H}^0 = \{0, 0, 1\}$, на границе $\mathbf{H}_\mu = \mathbf{H}_\mu^0$

Различие скоростей, полученных в расчетах с $\tilde{p}^n = \tilde{p}_A^n$ и $\tilde{p}^n = \tilde{p}_B^n$, иллюстрирует рис. 4, где изображены графики функций $\delta_\beta(t) = \frac{\max_\Omega |V_{A\beta} - V_{B\beta}|}{\max_\Omega |V_{A\beta}|}$, $\beta = x, y, z$. На рис.5 показаны линии уровня поля скоростей в плоскости $z = 0.5$ на момент времени $t = 10$. Результаты расчетов показывают, что структура течения в обоих случаях практически одинаковая и относительная разница скоростей не превосходит 10%.

Приведем еще один пример, демонстрирующий влияние потенциальной силы на поле скоростей при использовании процедуры предиктор-корректор. Добавим в уравнения движения силу $\mathbf{F}_{fic} = 5\nabla(\mathbf{H}^n)^3$ и сравним поле скоростей, вычисленное с учетом \mathbf{F}_{fic} ($\tilde{p}^n = \tilde{p}_A^n$) с \mathbf{V}_A . В данном случае величина $\delta_\beta(t)$ увеличилась на порядок (рис.6), однако структура течения практически не изменилась (рис.7).

4.4 Выполнение условия бездивергентности магнитного поля

Построение разностного алгоритма для определения индукции на основе уравнения (28) и использование согласованной аппроксимации операторов rot и div гарантирует на разностном уровне выполнение условия $\text{Div}\mathbf{H} = 0$ в любой момент времени, если $\text{Div}\mathbf{H}|_{t=0} = 0$. В реальных расчетах это усло-

вие выполняется с точностью до ошибок округления, кроме того на каждом временном слое распределение напряженности магнитного поля находится в результате решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом.

Точность выполнения условия бездивергентности магнитного поля в нестационарных задачах иллюстрируют рис. 8-11. Результаты получены при решении задачи (14)-(18) для различных значений Ra и Ha . Во всех расчётах внешнее магнитное поле направлено вертикально вверх, $L_x = L_y = 8$, $N_x = N_y = 32$, $N_z = 16$, $\tau = 10^{-3}$, $Pr = 1$, $Pm = 0.5$, точность решения системы линейных алгебраических уравнений $\varepsilon_m = 10^{-11}$.

Проведенные расчеты показывают, что условие $\text{Div}\mathbf{H} = 0$ с хорошей точностью выполняется на больших интервалах времени, не происходит накопление ошибок.

5 Заключение

В работе построен алгоритм численного решения трёхмерных нестационарных уравнений движения вязкой, несжимаемой, электропроводящей жидкости, основанный на расщеплении по физическим процессам. Метод обеспечивает выполнение условия бездивергентности магнитного поля и имеет второй порядок аппроксимации по пространству и первый по времени. Приведены результаты тестовых расчётов.

Изучено влияние внешних потенциальных сил в уравнении движения на поле скоростей. Показано, что способ вычисления полного давления не влияет на структуру получаемых в расчётах течений.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить Михаила Павловича Галанина за полезные консультации.

Список литературы

- [1] Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости*. М.: Наука, 1972.
- [2] Chandrasekhar S. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford: Clarendon Press, 1961.
- [3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика*, том VIII - Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 стр.
- [4] Куликовский А.Г., Любимов Г.А. *Магнитная гидродинамика*. Логос, 2005. 326 стр.
- [5] Галанин М.П., Попов Ю.П. *Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование*. Наука, 1995. 320 стр.
- [6] Белоцерковский О.М. *Численное моделирование в механике сплошных сред*. М.: Физматлит, 1994.
- [7] Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкости*. М.: Мир, 1991. Т.1. 502 с.; Т.2. 552 с.
- [8] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. Анализ алгоритмов решения трехмерных уравнений Навье-Стокса в естественных переменных. *Дифференц. уравнения*, 42(7), 932–942, 2006.
- [9] Kolmychkov V.V., Mazhorova O.S., Popov Y.P., Bontoux P., Ganaoui M.El. Identification of the convective instability in a multi-component solution by 3D simulations. *Comptes Rendus Mecanique*, 333(10), 739–745, 2005.
- [10] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П., Федосеев Е.Э. *О численном моделировании конвекции Рэлея-Бенара*, М: ИПМат. РАН, 2006, № 7, 25 стр.

- [11] Колмычков В.В., Мажорова О.С., Попов Ю.П. *К расчету уравнений Навье-Стокса в естественных переменных*, М: ИПМат. РАН, 2001, № 60, 39 стр.
- [12] Моисеенко Б.Д., Фрязинов И.В. Консервативные разностные схемы для уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных Эйлера. *Ж. вычисл. математики и мат. физики*, 21(5), 1180–1191, 1981.
- [13] F.G. Fuchs, K.H. Karlsen, S. Mishra, N.H. Risebo. *Stable upwind schemes for the magnetic induction equation*, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 2007, № 29.
- [14] R.C. Cross. Propagation of torsional Alfvén waves in an inhomogeneous plasma. *Plasma Phys. Control. Fusion*, 30, 1213–1226, 1988.

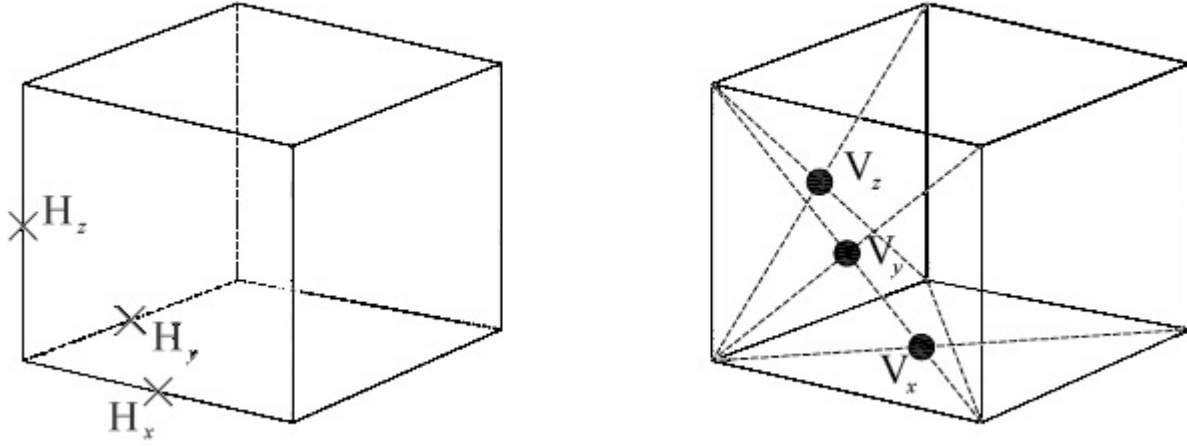


Рис. 1: Сеточные функции

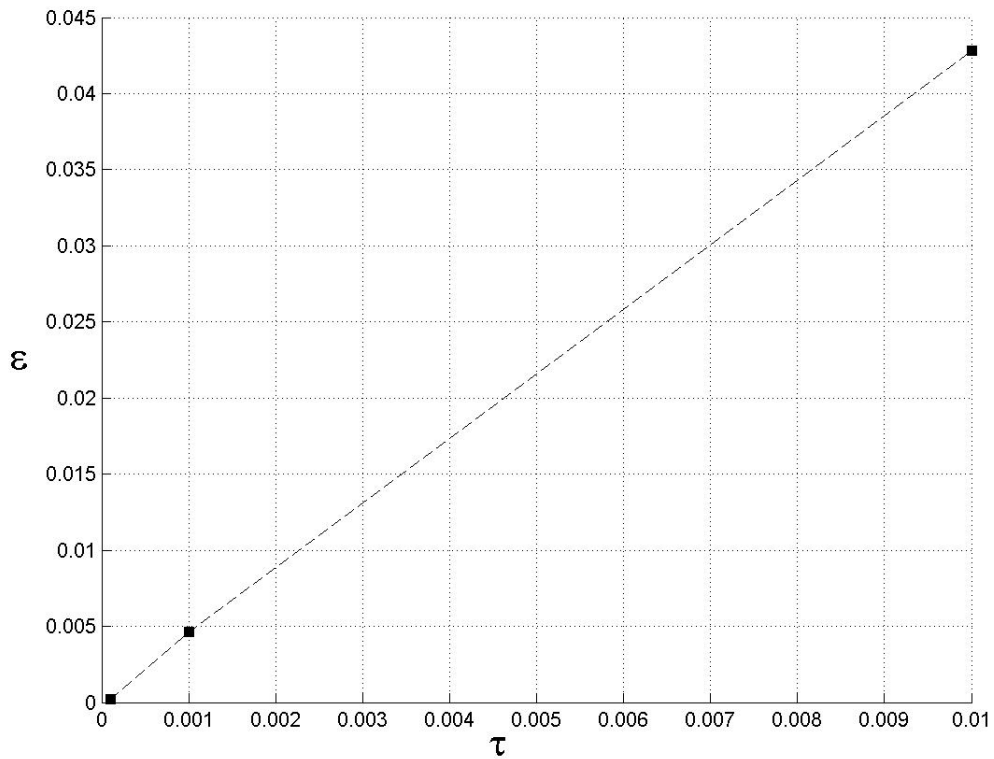


Рис. 2: Зависимость относительной ошибки разностного решения от шага по времени на сетке с $h_x = h_y = h_z = 2 \cdot 10^{-2}$

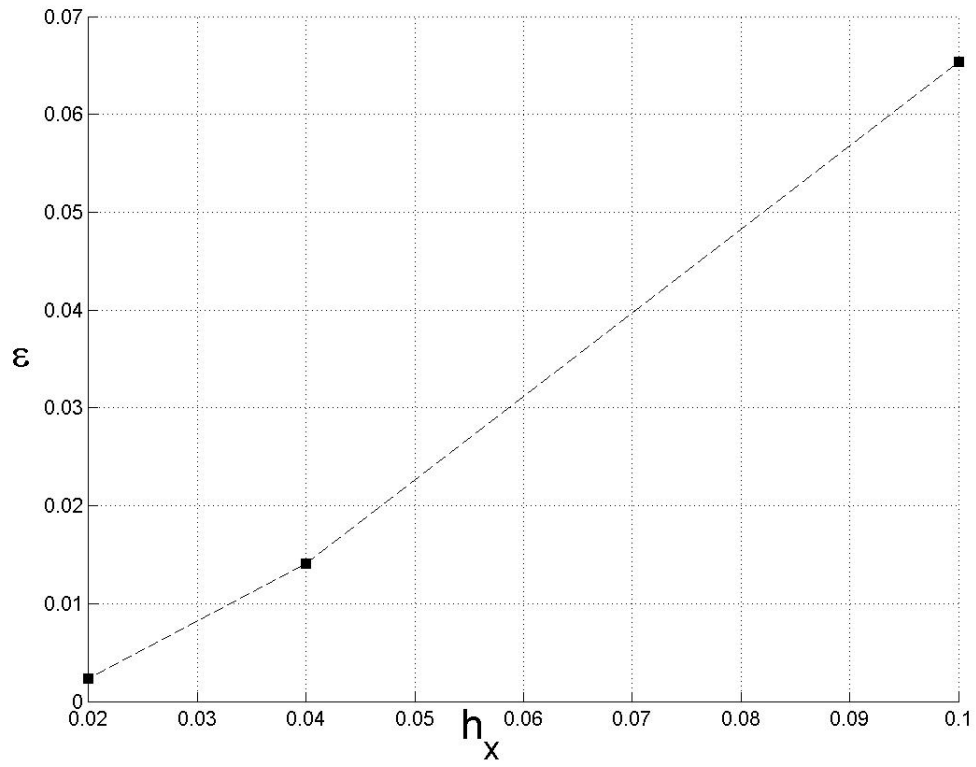


Рис. 3: Зависимость относительной ошибки разностного решения от шага по пространству, шаг по времени $\tau = 10^{-3}$

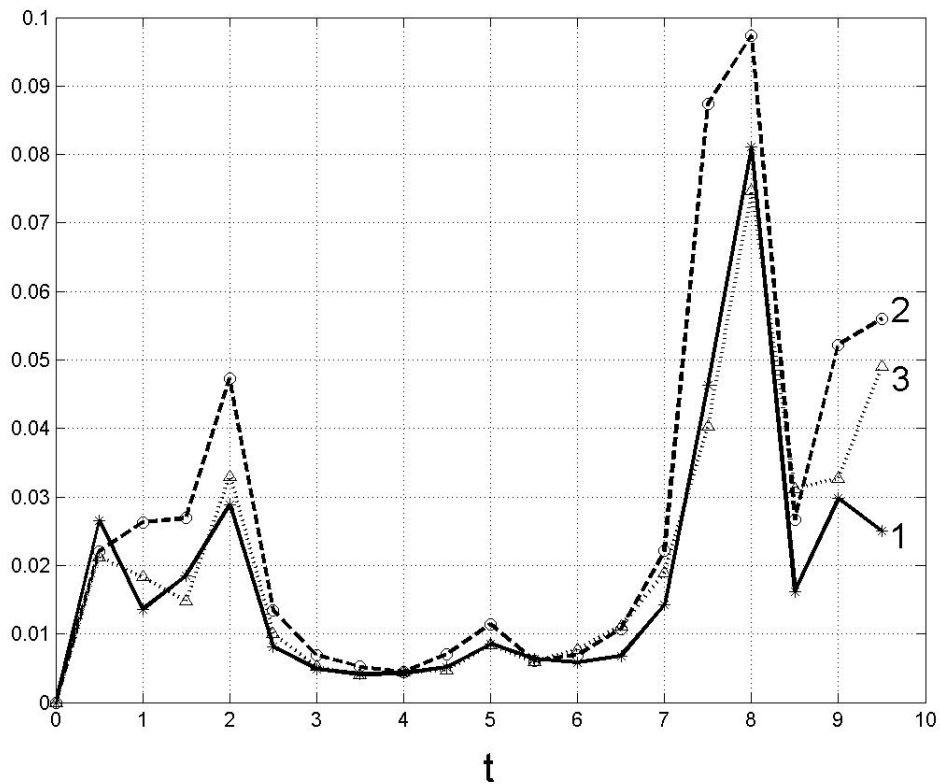


Рис. 4: Графики функции $\delta_\beta(t)$; $1-\beta = x$, $2-\beta = y$, $3-\beta = z$.

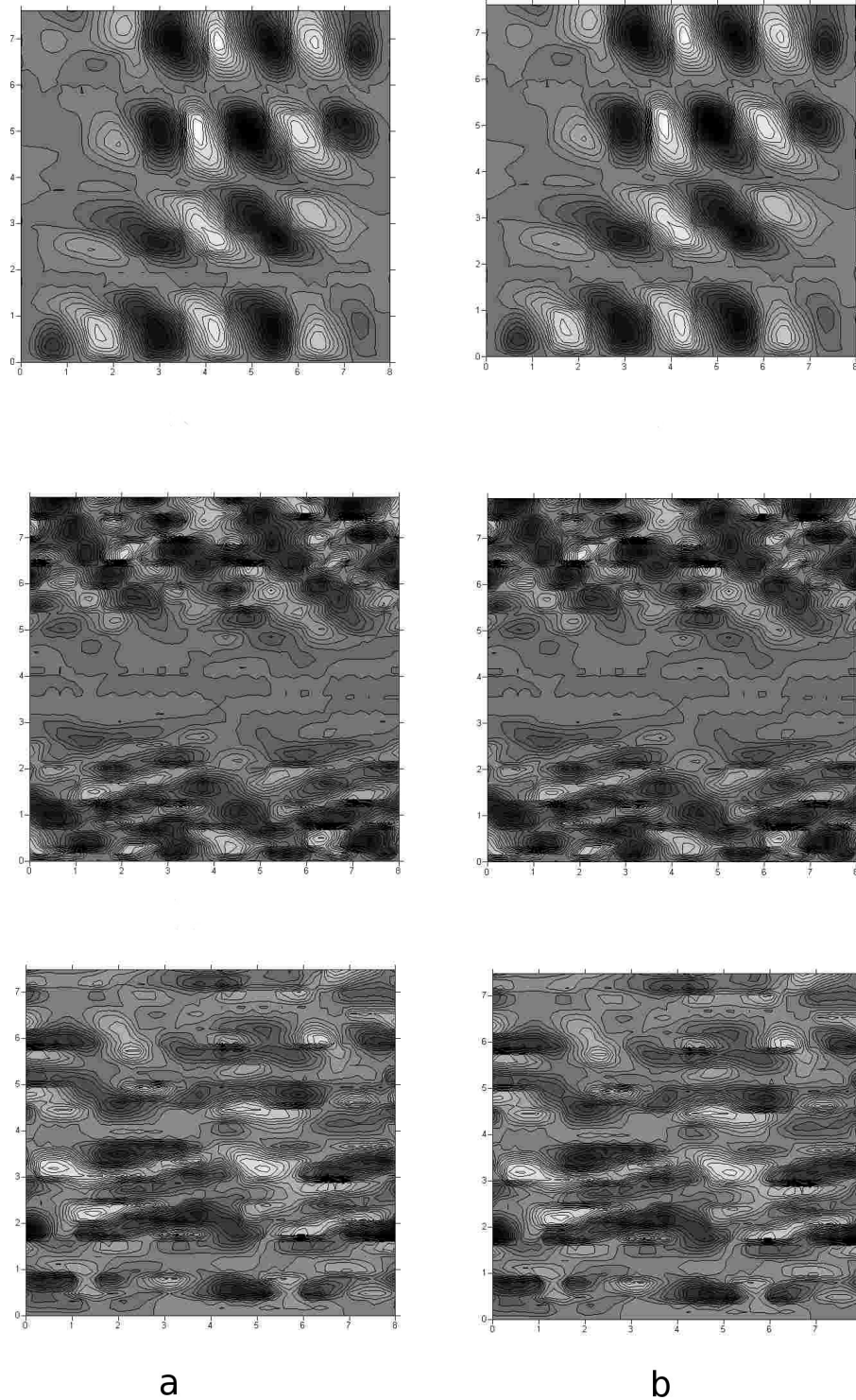


Рис. 5: Линии уровня компонент вектора скорости в плоскости $z = 0.5$ в момент времени $t = 10$ при различном выборе сеточного полного давления; $a - \tilde{p}^n = \tilde{p}_A^n$, $b - \tilde{p}^n = \tilde{p}_B^n$.

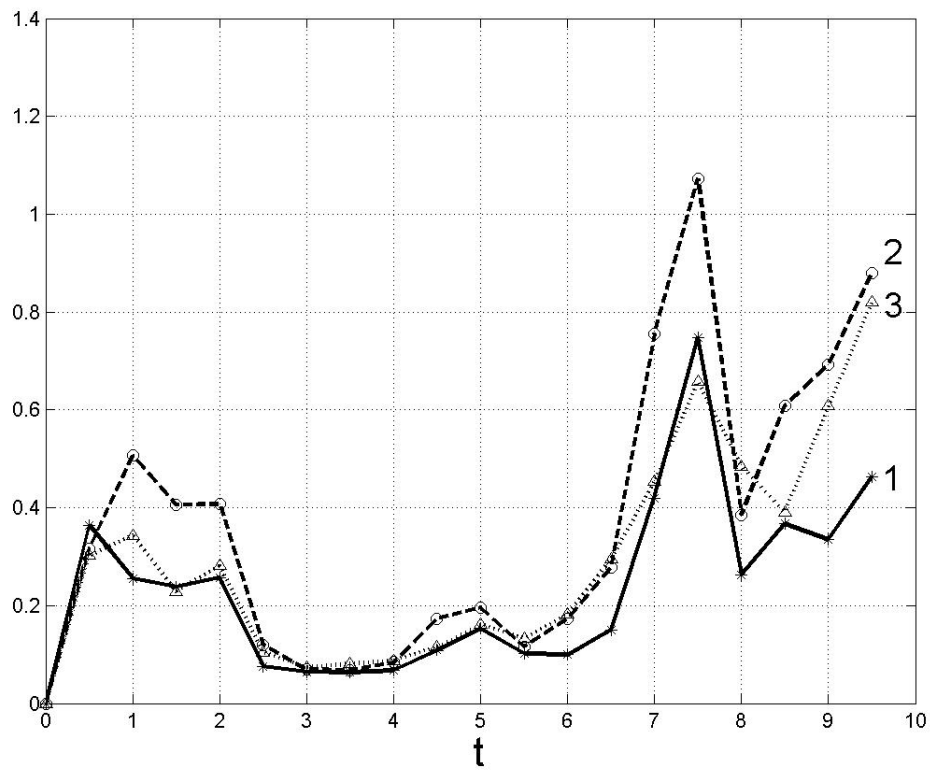


Рис. 6: Графики функции $\delta_\beta(t)$; расчет с дополнительной потенциальной силой. 1- $\beta = x$, 2- $\beta = y$, 3- $\beta = z$.

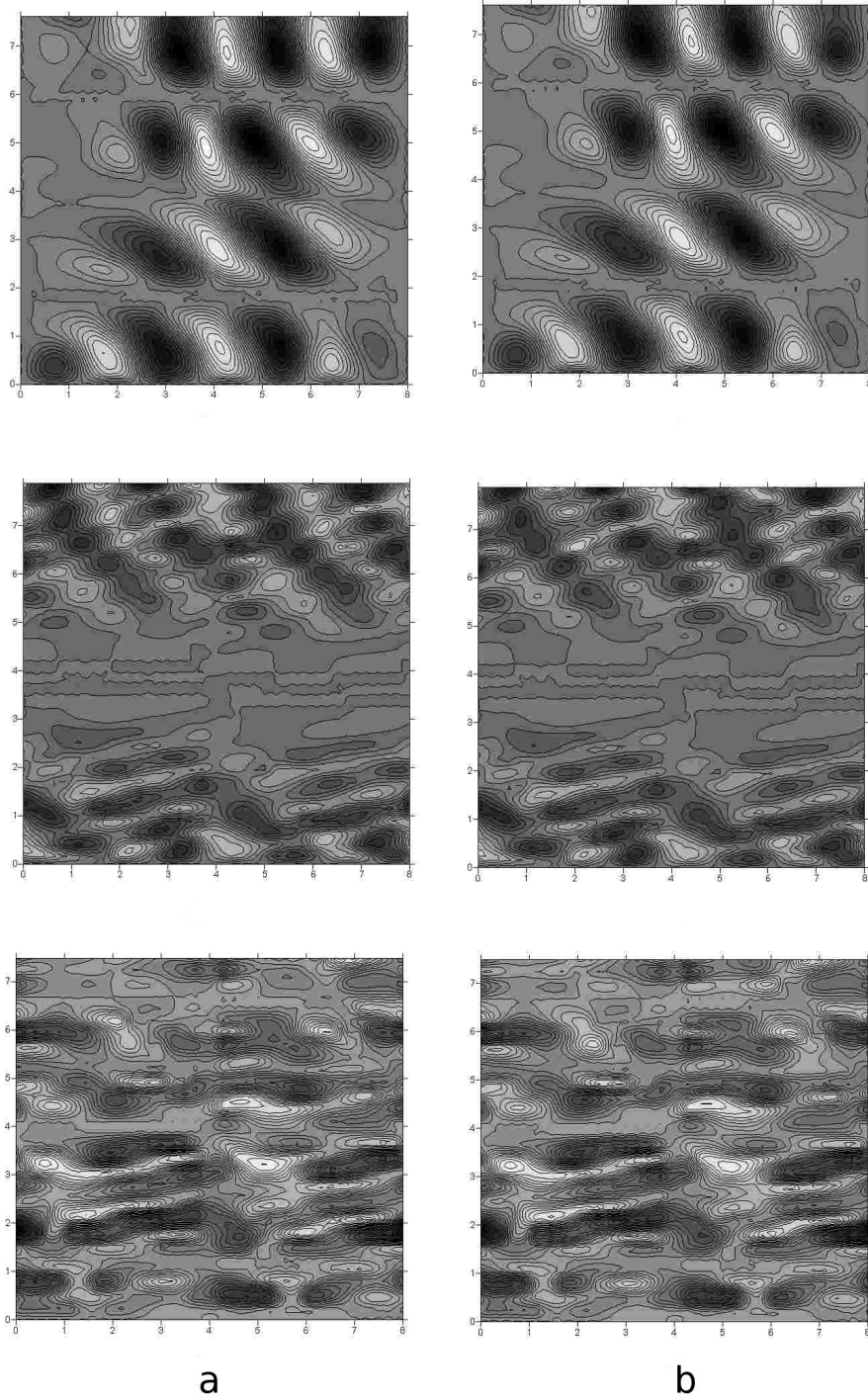


Рис. 7: Линии уровня компонент вектора скорости в плоскости $z = 0.5$ в момент времени $t = 10$ при различном выборе сеточного полного давления; $a - \tilde{p}^n = \tilde{p}_A^n$, $b -$ расчет с \mathbf{F}_{fic} .

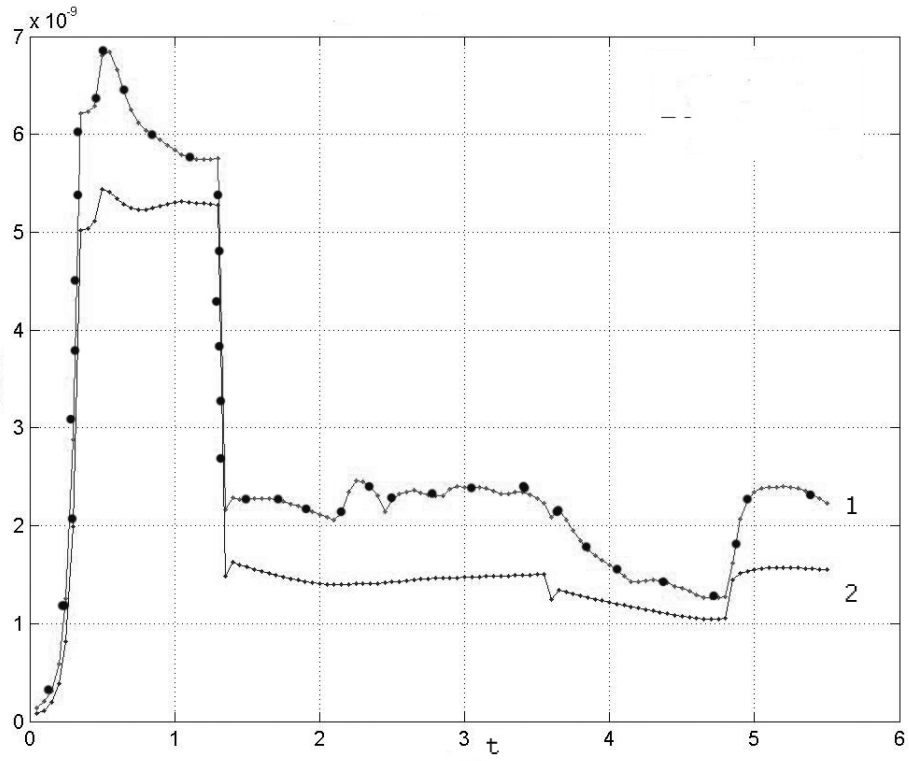


Рис. 8: Точность выполнения условия $\text{Div}\mathbf{H}(t) = 0$. 1 - $\max_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)|$,
 2 - $10 \cdot \int_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)| \frac{dV}{V}$, $\text{Ha}=2$, $\text{Ra}=6000$.

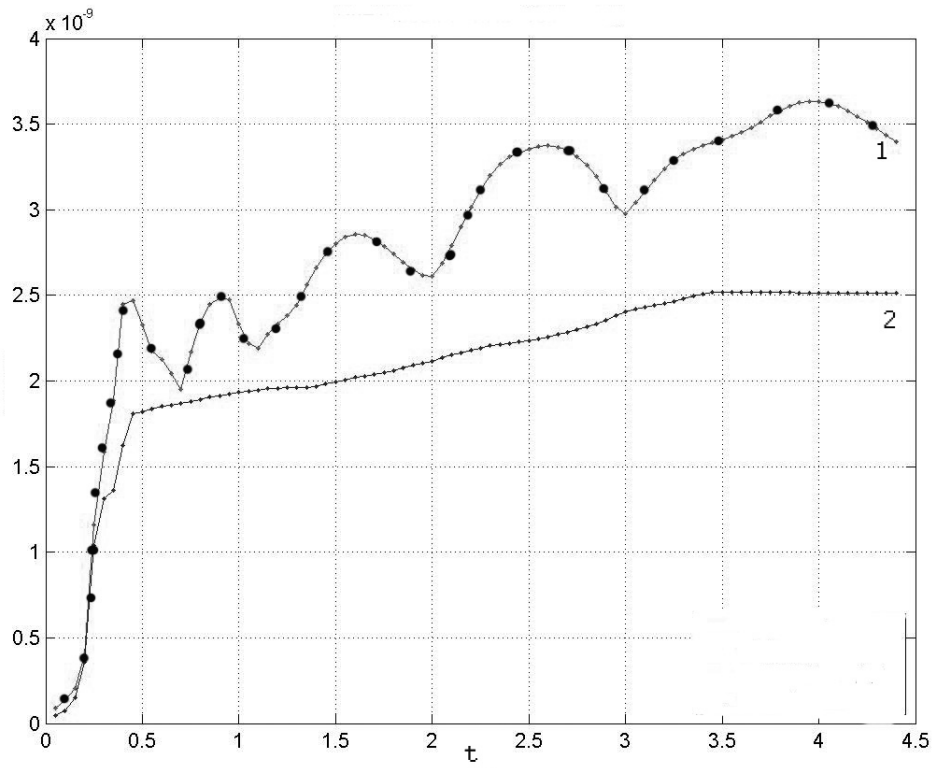


Рис. 9: Точность выполнения условия $\text{Div}\mathbf{H}(t) = 0$. 1 - $\max_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)|$,
 2 - $10 \cdot \int_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)| \frac{dV}{V}$, $\text{Ha}=10$, $\text{Ra}=10000$.

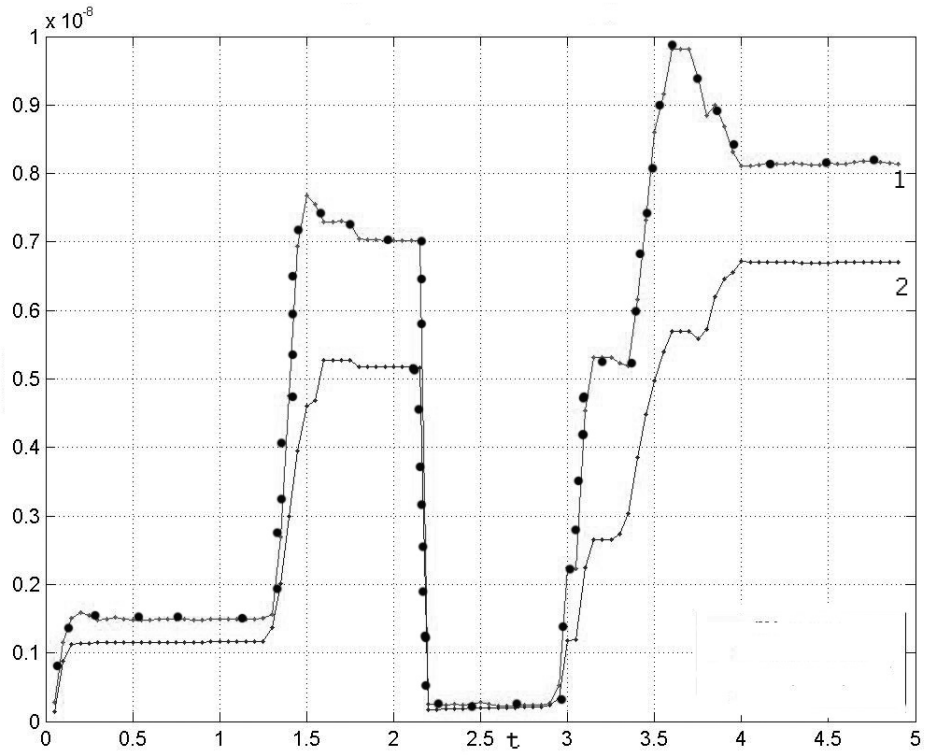


Рис. 10: Точность выполнения условия $\text{Div}\mathbf{H}(t) = 0$. 1 - $\max_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)|$,
 2 - $10 \cdot \int_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)| \frac{dV}{V}$, $\text{Ha}=10$, $\text{Ra}=20000$.

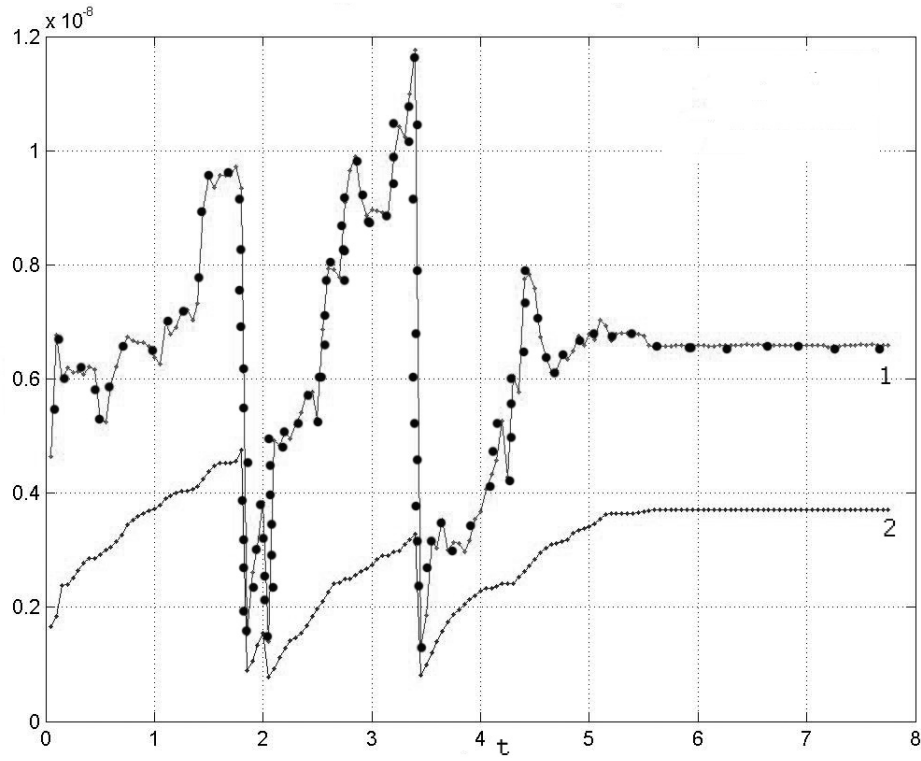


Рис. 11: Точность выполнения условия $\text{Div}\mathbf{H}(t) = 0$. 1 - $\max_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)|$,
 2 - $10 \cdot \int_{\Omega} |\text{Div}\mathbf{H}(t)| \frac{dV}{V}$, $\text{Ha}=50$, $\text{Ra}=80000$.