



Страховская Л.Г.

Численное моделирование
двухфазных течений с
движущимся интерфейсом
методом конечных
суперэлементов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. Численное моделирование двухфазных течений с движущимся интерфейсом методом конечных суперэлементов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 83. 12 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-83>



**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Л.Г. Страховская

**Численное моделирование
двухфазных течений с
движущимся интерфейсом
методом конечных
суперэлементов**

Препринт №

Москва

Л.Г. Страховская

Численное моделирование двухфазных течений с движущимся интерфейсом методом конечных суперэлементов.

Аннотация

В данной работе численное моделирование двухфазных течений вязкой несжимаемой жидкости без перемешивания с движущимся интерфейсом осуществляется методом конечных суперэлементов (МКСЭ). Для определения положения границы раздела фаз используется метод функции уровня (level set method). Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе и противоположные по знаку значения в областях разных фаз, что позволяет описывать изменение положения интерфейса. Обсуждаются расчеты двухфазного течения в плоском канале.

L.G. Strakhovskaya

Numerical simulation of two-phase flows with the moving interface by the finite superelements method.

Abstract

The numerical simulation of the two-phase flows of the viscous incompressible fluid without the mixing with the moving interface is based on the finite superelements method (FSEM). The position of the phase boundary is achieved by the level set method. The level function satisfies the equation of transfer, has the zero level on the interface and values in the fields of different phases opposite on the sign, which makes it possible to describe a change of the interface position. The calculations of two-phase flow in the flat duct and in the channel over a backward-facing step are made.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-01-00299)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1. Постановка задачи.....	3
2. Вычислительный алгоритм	5
3. Построение суперэлемента.....	6
4. Результаты расчетов	9
Заключение.....	10
Список литературы	11

Введение

Разрабатывается численная модель двухфазного течения вязкой несжимаемой жидкости без перемешивания на основе метода конечных суперэлементов Р.П. Федоренко [1,2,3]. Расчет двухфазных течений представляет интерес, как с практической, так и с вычислительной точки зрения. Целью ставится расчет задач фильтрации, пока используются простейшие модели. Работа продолжает исследования, начатые в [4,5], рассматривается одножидкостный (one-fluid) подход, две фазы жидкости описываются одной системой уравнений Навье-Стокса, а различие свойств учитывается в разрыве коэффициентов уравнений на границе раздела фаз (интерфейсе). Положение движущегося интерфейса определяется методом функции уровня (level set method), который в настоящее время наиболее привлекателен [6]. Функция уровня удовлетворяет уравнению переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе и противоположные по знаку значения в областях разных фаз, что позволяет описывать изменение положения интерфейса и, тем самым, определять значения плотности и вязкости. В формулировке задачи учтен эффект поверхностного натяжения. Выполнены предварительные расчеты течения двухфазной жидкости в плоском канале.

1. Постановка задачи

Рассматриваются уравнения Навье-Стокса для двух несмешивающихся и несжимаемых жидкостей в двумерной области

$$\Omega = \Omega_1^t \cup \Omega_2^t \subset \square^n, \quad \Omega_1^t \cap \Omega_2^t = \Gamma^t,$$

таким образом, область состоит из двух изменяющихся во времени подобластей с разными значениями плотности и вязкости

$$\begin{aligned} \rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i &= -\nabla p_i + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i + \rho_i \mathbf{g} \\ \nabla \cdot \mathbf{u}_i &= 0 \end{aligned}, \quad (1)$$

где индекс $i=1,2$ - номер подобласти (среды), \mathbf{u}_i - вектор скорости,

ρ_i - плотность, p_i - давление, μ_i - коэффициент динамической вязкости,

$\boldsymbol{\tau}_i = \mu_i (\nabla \mathbf{u}_i + \nabla \mathbf{u}_i^T)$ - тензор вязких напряжений, \mathbf{g} - вектор

ускорения свободного падения.

Задаются начальные условия

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}_0(x, y),$$

краевые условия Дирихле на основной части внешней границы $\partial\Omega' \subset \partial\Omega$

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega'} = \mathbf{u}_0(x, y)|_{\partial\Omega'}$$

и условия Неймана на выходной части границы $\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\mathbf{n}}|_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega'} = 0$.

На границе раздела сред (интерфейсе) Γ^t

должны выполняться условия динамического равновесия

$$[\mathbf{u}]|_{\Gamma^t} = 0, \quad (\boldsymbol{\tau}_1 - \boldsymbol{\tau}_2)\mathbf{n} = (p_1 - p_2 + \sigma_0 k)\mathbf{n}$$

σ_0 - коэффициент поверхностного натяжения,

k - кривизна поверхности Γ^t , \mathbf{n} - внешняя нормаль к Γ^t

по отношению к Ω_1

Положение интерфейса однозначно определяется по функции уровня [6]

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}, t) < 0, & \mathbf{x} \in \Omega_1^t, \\ \phi(\mathbf{x}, t) > 0, & \mathbf{x} \in \Omega_2^t \\ \phi(\mathbf{x}, t) = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma^t \end{cases}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \quad k = \nabla \cdot \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$$

Граница раздела сред Γ^t движется со скоростью частиц жидкости,

система (1) дополняется уравнением переноса функции уровня

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\phi = 0 \tag{2}$$

Начальные данные:

$$\phi(\mathbf{x}, 0) = 4xy(1 - y)$$

Краевое условие:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} (0, y, t) \right] = 0$$

2. Вычислительный алгоритм

Расчеты задачи (1),(2) проводились с некоторыми ограничениями: сила тяжести не учитывалась, плотность выбиралась одинаковой $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, условие на интерфейсе не использовалось, но суперэлементный базис в треугольной ячейке строился с учетом разрыва коэффициента вязкости, если интерфейс пересекал ячейку.

1. В области Ω вводится треугольная, в общем случае, неструктурированная сетка.
2. Предполагая известными все величины на n -ом временном слое, делается шаг по времени τ и рассчитывается функция уровня:

$$\phi^{n+1} = \phi^n - \tau \mathbf{u}^n \cdot \nabla \phi^n$$

3. Нестационарная система (1) решается по неявной схеме

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\tau} + (\mathbf{u}^{n+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} + \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_i^{n+1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0,$$

здесь $\boldsymbol{\tau}_i^{n+1}$ - безразмерный тензор вязких напряжений, а

$$\varepsilon = \begin{cases} \mu_1 / \rho, & x, y \in \Omega_1^{n+1}, \\ \mu_2 / \rho, & x, y \in \Omega_2^{n+1} \end{cases} \quad - \text{коэффициент кинематической вязкости.}$$

Для решения нелинейной задачи на верхнем слое строится итерационный процесс, используется линеаризация:

$$(\mathbf{u}^{m+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{m+1} \approx (\mathbf{u}^m \cdot \nabla) \mathbf{u}^{m+1}$$

В соответствии с [7] полученную линеаризованную дифференциальную систему уравнений запишем в виде:

$$L(\varepsilon) \mathbf{u}^{m+1} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} = \mathbf{f}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{u}^{m+1} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial x} + u^m u + \frac{1}{\rho} p \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial x} + u^m v \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} + v^m u \\ -\varepsilon \frac{\partial v}{\partial y} + v^m v + \frac{1}{\rho} p \\ v \end{pmatrix} \quad (4)$$

4. Система (3) решается методом конечных суперэлементов, который отличается от МКЭ способом построения пробных (базисных) функций. Слабое решение определяется из уравнений

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{f}, \mathbf{w}), \quad \text{где}$$

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = - \int_{\omega} (\mathbf{f}_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{f}_2 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y}) d\omega + \int_{\partial \omega} (\mathbf{f}_1 n_x + \mathbf{f}_2 n_y) \mathbf{w} ds, \quad (5)$$

здесь $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ - произвольная гладкая вектор-функция с носителем

$\omega \subset \Omega$ без требования обращения в ноль на $\partial \omega$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ - внешняя

нормаль к $\partial \omega$.

3. Построение суперэлемента

В каждой треугольной ячейке T строятся векторные базисные функции,

которые должны удовлетворять системе (3). На ∂T задаются краевые условия:

линейные, квадратичные,

$$L(\varepsilon)\varphi_j = 0, \quad \varphi_j \Big|_{\partial T} = \tilde{\varphi}_j, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$L(\varepsilon)\varphi_0 = \mathbf{f}, \quad \varphi_0 \Big|_{\partial T} = 0 \quad (6)$$

$$\mathbf{u}^{m+1}(x, y) = \sum_j u_j^{m+1} \varphi_j$$

Все сложности, связанные с переходом из одной среды во вторую, спрятаны в построение суперэлемента.

Рассмотрим треугольную ячейку T с вершинами (1,3,4), через которую проходит интерфейс. Надо знать положение точек пересечения M и N . Чтобы определить положение точки N функция уровня ϕ продолжается внутрь четырехугольника (1,2,3,4) по значениям в вершинах двух соседних треугольников. На интерфейсе $\phi \Big|_{\Gamma'} = 0$, точка N определяется пересечением Γ' с ребром 1-3. Аналогично определяется положение точки M .

Внутри T интерфейс аппроксимируется отрезком прямой, который делит T на две части с разными средами.

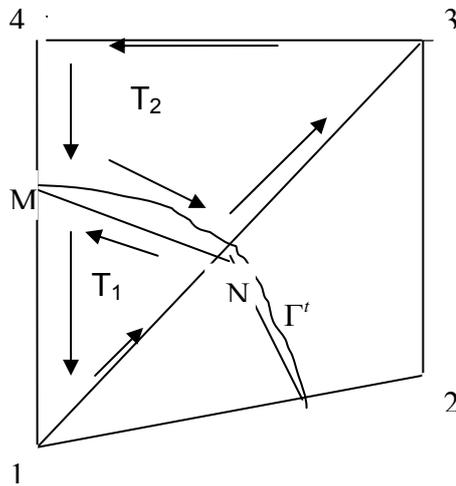


Рис.1 $T = T_1 \cup T_2$

Уравнения (6) решаются непрерывным методом Галеркина, используется линейно-независимая система функций Ψ_k , обращающихся в ноль на границе T .

$$\varphi_j(x, y) = \sum_k a_{jk} \psi_k \quad (7)$$

В соответствии с (5)

$$\begin{aligned} B(\varphi_j, \psi_k) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, J \\ B(\varphi_0, \psi_k) &= (\mathbf{f}, \psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, K \end{aligned} \quad ,$$

где

$$\begin{aligned} B(\varphi_j, \psi_k) &= \\ &- \int_{T_1} (\mathbf{f}_1(\varepsilon_1, \varphi_j) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \mathbf{f}_2(\varepsilon_1, \varphi_j) \frac{\partial \psi_k}{\partial y}) dT \\ &- \int_{T_2} (\mathbf{f}_1(\varepsilon_2, \varphi_j) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + \mathbf{f}_2(\varepsilon_2, \varphi_j) \frac{\partial \psi_k}{\partial y}) dT \\ &+ \int_{\Gamma'} (\mathbf{f}_1(\varepsilon_1, \varphi_j) n_x + \mathbf{f}_2(\varepsilon_1, \varphi_j) n_y) \psi_k ds \\ &- \int_{\Gamma'} (\mathbf{f}_1(\varepsilon_2, \varphi_j) n_x + \mathbf{f}_2(\varepsilon_2, \varphi_j) n_y) \psi_k ds \end{aligned} \quad (8)$$

Два последних интеграла в (8) следует заменить условием динамического равновесия на интерфейсе. В данной работе это условие не использовалось, а в каждой части треугольника брались свои значения коэффициента вязкости.

На рис.2 представлена компонента одной из базисных функций в ячейке, которую пересекает интерфейс.

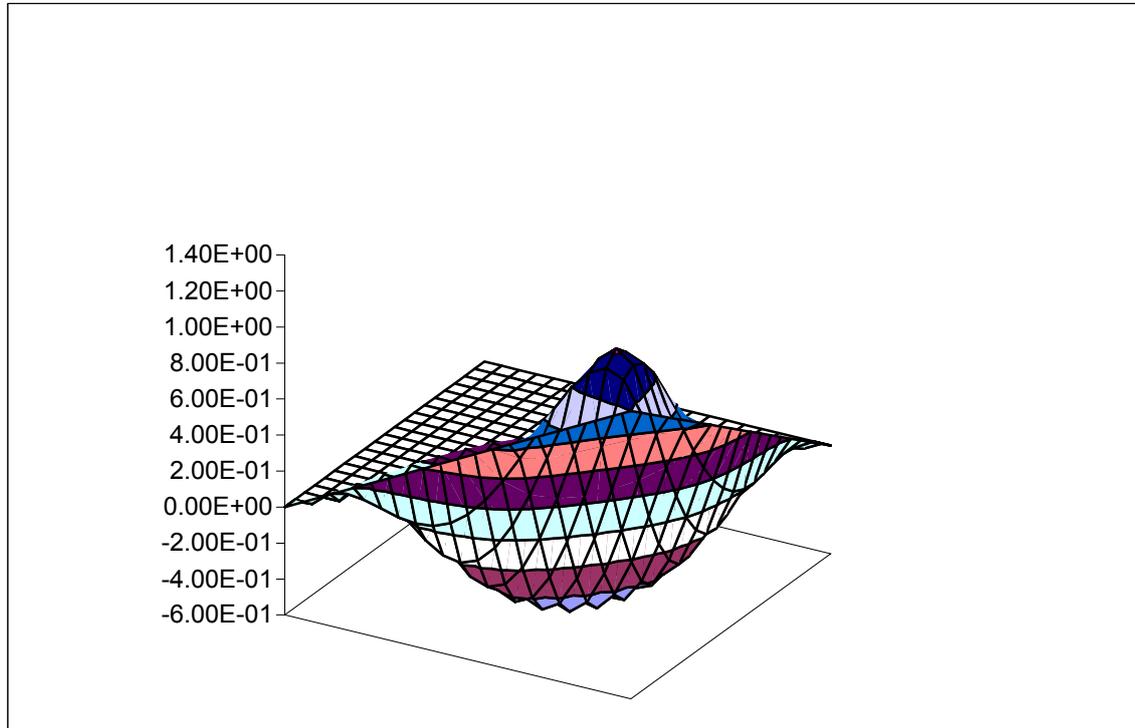


Рис.2

4. Результаты расчетов

Для моделирования двухфазного течения без перемешивания с меняющимся интерфейсом использовалась задача о течении в плоском канале.

Область $\Omega = \Omega_1' \cup \Omega_2' = \{(x, y) : 0 \leq x < 14, 0 \leq y \leq 1\}$.

В начальный момент времени $t = 0$ положение интерфейса $\Gamma' : x = 0$,

в канале присутствует установившееся течение жидкости с вязкостью ε_2 .

Краевые условия: на левой границе втекания задается скорость

$$u(0, y) = 4y(1-y); \quad v = 0.$$

На верхней и нижней границе ставятся условия прилипания:

$$u = v = 0.$$

На правой границе вытекания ставится естественное краевое условие

$$-\varepsilon \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} + p \mathbf{n} = 0.$$

На рисунках 3 (а,б,в) представлены три варианта расчета течения на один и тот же момент времени $t=12$, отличающихся значениями кинематической вязкости во втекающей среде,

$$\varepsilon_1 = 20, 10, 5; \quad \varepsilon_2 = 10; \quad \rho = 1 \quad . \quad .$$

Прямоугольная сетка 28×8 , каждая ячейка разделена диагональю на два треугольника, всего 448 элементов. Изображена функция уровня ϕ .

Видно, что форма течения зависит от вязкости среды, профиль интерфейса при втекающей жидкости с меньшей вязкостью более затупленный.

По высоте канала расположено всего 8 счетных узлов, но построение векторного суперэлементного базиса как решения уравнений Навье-Стокса позволяет учитывать поведение решения внутри треугольной ячейки, и повышает точность. В формуле (7) использовалось 6 – 15 bubble функций.

Заключение

Данная работа является примером использования метода конечных суперэлементов в расчете задач гидродинамики, которые представляют как практический, так и вычислительный интерес.

Численные эксперименты подтверждают преимущество МКСЭ при расчете неоднородных сред, возможность использования пространственных сеток с крупным шагом.

Специальное построение трехкомпонентных (две скорости и давление) векторных «базисных» функций как решения линеаризованной системы Навье-Стокса позволяет использовать общую сетку для скорости и давления.

Таким образом, МКСЭ можно отнести к стабилизированным методам.

Отметим отличия работы от публикуемых материалов [8,9] по применению метода функции уровня: сетка не перестраивается, реинициализация (пока?) не делается, используются прямые методы.

Список литературы

1. Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко. Об одной специальной разностной схеме. // Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск.1976. Т.7. № 4. С. 149-163.
2. Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко. Об одном варианте метода конечных элементов. // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №4. С. 950-960.
3. Р.П. Федоренко. Введение в вычислительную физику. М.: Изд-во МФТИ, 1994.
4. Страховская Л.Г., Р.П. Федоренко. Расчёт диффузии в многосвязной области методом конечных суперэлементов. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. 1987, №171, С.26
5. Д.С. Милютин, Л.Г. Страховская. Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, №81, 2009, С.12
6. Osher S.J., Fedkiw R.P. Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces. N.Y. Springer, 2003. 273 p.
7. Страховская Л.Г. Об одном варианте МКСЭ для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости.// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009, том 49, №1, с. 123-136.
8. Рукавишников А.В. Обобщенная постановка задачи течения двухфазной жидкости с непрерывно изменяющимся интерфейсом. // Математическое моделирование. 2008. Т. 20, № 3. С. 3-8.
9. Л.Б. Директор, И.Л. Майков. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости. // Механика жидкости и газа. 2009. №5. С. 101-109

На рисунках 3а, 3б, 3в изображена функция уровня ϕ для разных течений

$$\varepsilon_1 = 20, 10, 5; \quad \varepsilon_2 = 10; \quad \rho = 1$$

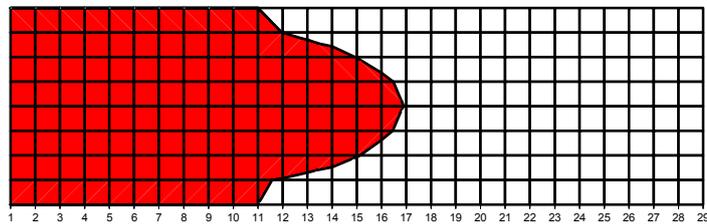
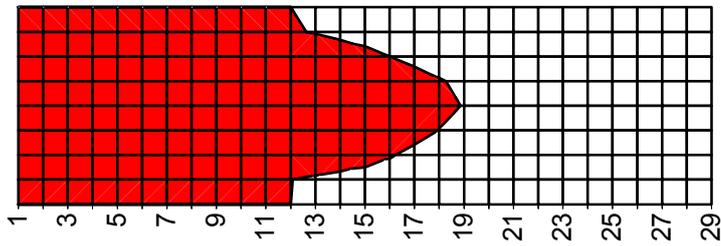
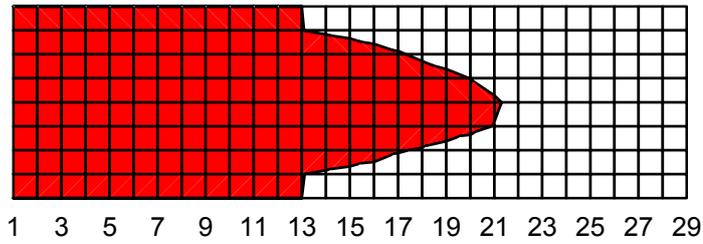


Рис.3а,б,в