



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 38 за 2010 г.



Бахолдин И.Б.

Методика численного
исследования
магнитозвуковых
уединенных волн в плазме

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бахолдин И.Б. Методика численного исследования магнитозвуковых уединенных волн в плазме // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 38. 22 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-38>

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Бахолдин И.Б.

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ
МАГНИТОЗВУКОВЫХ УЕДИНЕННЫХ ВОЛН
В ПЛАЗМЕ

Москва-2010

УДК 517.958:537.84+517.958:53+519.63

Бахолдин И.Б. Методика численного исследования магнито-звуковых уединенных волн в плазме

Приводятся уравнения электронной магнитной гидродинамики с учетом нелинейности, дисперсии и диссипации, обусловленной трением между ионами и электронами. Делается преобразование этих уравнений к виду удобному для построения численной схемы. Проводятся расчеты взаимодействия магнитозвуковых уединенных волн, распространяющихся в одном направлении, в отсутствие диссипации. Обнаружено, что в этом случае уединенные волны ведут себя как солитоны, т.е. после взаимодействия амплитуды остаются такими же как и до взаимодействия. Затем проводятся расчеты взаимодействия уединенных волн, движущихся в разных направлениях. В этом случае наблюдаются излученные волны, приводящие к уменьшению амплитуд. Рассчитывается распад уединенной волны за счет диссипации. В случае слабой диссипации решение интерпретируется как распад, аналогичный решению задачи о распаде произвольного разрыва, где имеется структура типа комбинации разрыва и уединенной волны. Рассчитывается также распад уединенной волны за счет дисперсии. В этом случае решение также можно интерпретировать как решение с разрывом. Далее исследуется распад за счет совместного воздействия диссипации и дисперсии.

Bakholdin I.B. Methods of numerical investigation of magnetosonic solitary waves in plasma

Equations of electron magnetic hydrodynamics with nonlinearity, dispersion and dissipation caused by interaction between ions and electrons are given. These equations are transformed in form convenient for numerical modelling. Calculations of interactions of solitary waves moving in the same direction are fulfilled. It is found that in this case behavior of solitary waves is similar to behavior of solitons. Amplitudes of waves are not changed after interaction. Calculations of interactions of solitary waves moving in different directions are fulfilled also. It is found that in this case additional waves are observed after interaction and amplitudes of solitary waves are not the same as before interaction. Decay of solitary wave caused by dissipation is investigated. In the case of low dissipation the solution is treated as solution similar to solution of arbitrary shock split. It contains structure treated as combination of solitary wave and shock structure. Decay of solitary wave caused by dispersion is investigated also. The solution is also treated as solution with combined solitary-shock structure. At least decay of solitary wave caused by dispersion and dissipation is investigated.

Содержание

1	Введение	3
2	Преобразование системы уравнений к виду, оптимальному для построения численной схемы	6
3	Численный метод	8
4	Дисперсионное соотношение и уединенные волны	11
5	Особенности программной реализации	13
6	Взаимодействие уединенных волн, движущихся в одном направлении	14
7	Взаимодействие уединенных волн, движущихся в различных направлениях	15
8	Распад уединенной волны за счет диссипации	16
9	Распад уединенной волны за счет дисперсии	19
10	Распад уединенной волны за счет дисперсии и диссипации	20
11	Заключение	20

1 Введение

Уравнения холодной плазмы и плазмы с горячими электронами со сложной дисперсией и нелинейностью в рамках модели электронной магнитной гидродинамики исследовались в работах [1]-[7]. В работе [1] были выведены уравнения холодной плазмы, уравнения, описывающие одномерные движения, и обобщенное уравнение Кортевега–де Вриза с производной пятого порядка (но без производной третьего порядка), описывающее волны в особом случае. В работах [2]-[6] было аналитически исследовано существование решений в виде уединенных волн. Были найдены приближенные решения в виде уединенных волн в приближении, аналогичном приближению уравнения Кортевега–де Вриза, и было доказано, что в случае волн малой амплитуды при $\theta > \theta_c$ существуют и точные решения типа уединенных волн, θ здесь угол, характеризующий наклон вектора магнитного поля, θ_c - критическое значение этого угла. Существование и отсутствие уединенных волн исследовано численно [3]-[7]:

в случае, для которого доказано существование, из приближенных начальных данных типа уединенной волны со временем действительно формируется уединенная волна, а в случае, когда доказать существование не удастся, начальные данные типа уединенных волн со временем распадаются. Задачей настоящей работы является исследование того, являются ли рассматриваемые уединенные волны солитонами, т.е. меняют ли они свои амплитуды после взаимодействия между собой, а также исследование влияния диссипации на распад уединенных волн. Отметим, что здесь рассматриваются плоские волны, для которых вектор магнитного поля наклонен по отношению к направлению распространения волн. Первоначально исследовались волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля, см. например [9].

Уравнения электронной магнитной гидродинамики с учетом диссипации выводятся по методике работы [1] на основе уравнений движения электронов и ионов с учетом трения между ними [8] и уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_i - n_e)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{v}_i) = 0$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \mathbf{v}_e) = 0$$

$$m_i n_i \frac{d^{(i)} \mathbf{v}_i}{dt} = e n_i \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) \right] + R_{ie} n_e n_i (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

$$m_e n_e \frac{d^{(e)} \mathbf{v}_e}{dt} = -e n_e \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} (\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}) \right] - R_{ie} n_e n_i (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{B} вектора электрического и магнитного поля, \mathbf{v}_e , \mathbf{v}_i - скорости электронов и ионов, n_i , n_e концентрации электронов и ионов, m_i , m_e - их массы, $d^{i,e}/dt = \partial/\partial t + \mathbf{v}_{i,e} \cdot \nabla$ - полные производные; коэффициент трения R_{ie} в данной модели будем считать постоянным, эта величина зависит от температуры электронного газа, в более детальных моделях такая зависимость может учитываться.

Перейдем к безразмерным переменным:

$$x' = L/x, t' = \omega_0/t, \mathbf{v}'_{i,e} = \mathbf{v}_{i,e}/V_A, n'_{i,e} = n_{i,e}/n_0, \mathbf{B}' = \mathbf{B}/B_0, \mathbf{E}' = \mathbf{E}'/B_0$$

Здесь L - пространственный масштаб, \mathbf{B}_0 - невозмущенное магнитное поле, n_0 - невозмущенная плотность, $V_A = B_0[4\pi n_0(m_i + m_e)]^{-1/2}$ - альфвеновская скорость, $\omega_0 = V_A L^{-1}$ - характерная частота явления. Штрихи далее опустим.

Введем обозначения:

$$\omega_p = \sqrt{4\pi n_0 e^2 / m_e}, \omega_0 = V_A L^{-1}, \omega_{i,e} = B_0 e / (m_{i,e} c), R_{i,e} = \omega_{i,e} / \omega_0$$

Здесь ω_p - лангмюровская частота, $\omega_{i,e}$ - циклотронная частота ионов и электронов.

Будем считать $\omega_0 \ll \omega_p$, тогда плазму можно считать квазинейтральной: $n_e \approx n_i = n$. Пренебрежем током смещения.

Введем $\varepsilon = R_i e n_0 (R_i^{-1} + R_e^{-1}) / (\omega_e m_e)$.

Тогда замкнутая система уравнений для ионной жидкости примет вид:

$$0 = \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \mathbf{v}_i),$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{(i)} \mathbf{v}_i}{dt} = & R_e^{-1} \frac{d^{(i)}}{dt} (n_i^{-1} \text{rot} \mathbf{B}) + R_e^{-1} n_i^{-1} \text{rot} \mathbf{B} \text{grad} \mathbf{v}_i - \\ & (R_i^{-1} + R_e^{-1}) (n_i^{-1} \text{rot} \mathbf{B}) \text{grad} (n_i^{-1} \text{rot} \mathbf{B}) + n_i^{-1} \text{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -R_i^{-1} \text{rot} \frac{d^{(i)} \mathbf{v}_i}{dt} + \text{rot}(\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) - \varepsilon \text{rot} \text{rot} \mathbf{B}$$

Пусть $B_x = \text{const}$. Рассмотрим плоские волны, распространяющиеся вдоль оси x . Получим систему:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{dt} &= -n \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{du}{dt} &= -\frac{n^{-1} \partial (B_y^2 + B_z^2)}{2 \partial x} \\ \frac{dv}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_z}{\partial x} \right) \\ \frac{dw}{dt} &= n^{-1} B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + R_e^{-1} \frac{d}{dt} \left(n^{-1} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\frac{dB_y}{dt} = B_x \frac{\partial v}{\partial x} - B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dw}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{dB_z}{dt} = B_x \frac{\partial w}{\partial x} - B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \frac{dv}{dt} + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2}$$

где B_x, B_y, B_z - пространственные компоненты \mathbf{B} ; u, v, w - пространственные компоненты \mathbf{v}_i .

Отметим, что данная система обладает сложной дисперсией, при рассмотрении ее стационарных решений после интегрирования приходится исследовать динамическую систему четвертого порядка, исследованию таких систем в значительной части посвящена работа [7]. Более простой вариант уравнений можно получить, если считать $B_z = 0$, тогда соответствующая динамическая система будет иметь второй порядок.

2 Преобразование системы уравнений к виду, оптимальному для построения численной схемы

Приведем систему (1.1) к форме законов сохранения и включим некоторые дополнительные члены:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial(nu)}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial(nu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right) &= \varepsilon_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial(nv)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \frac{dB_z}{dt} \right) &= \varepsilon_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \frac{\partial(nw)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \frac{dB_y}{dt} \right) &= \varepsilon_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_y - B_x v - R_i^{-1} \frac{dw}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u B_z - B_x w + R_i^{-1} \frac{dv}{dt} \right) &= \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Приведение к форме законов сохранения нужно для получения консервативных вычислительных схем, что существенно для дальнейших расчетов уединенных волн.

В данную систему уравнений для общности включен дополнительный член $b^2 n_x$, соответствующей модели плазмы с горячими электронами [4], [5]. В отличие от модели холодной плазмы, модель плазмы с горячими электронами учитывает давление и в этом смысле она аналогична газодинамическим уравнениям. Холодную плазму предлагается считать как горячую с малыми

значениями b . При расчетах с $b = 0$ при некоторых начальных данных замечены аварийные остановки расчета. Однозначно нельзя сказать, связано ли это только с особенностями численной схемы, которая не допускает расчета разрывных решений, в то время как, модель холодной плазмы, выведенная в предыдущем разделе, формально допускает наличие разрывов n , или же это связано с некорректностью модели, т.е. неизвестно, всегда ли существует обобщенное решение, определенное как предельное решение при $b \rightarrow 0$. Альтернативой является включение в первое уравнение диффузного члена $\varepsilon_n n_{xx}$, при этом возможен расчет с аппроксимацией всех приведенных ниже уравнений по схеме типа "крест", но при такой добавке уединенных волн нет.

Дополнительные вязкие члены с малыми величинами $\varepsilon_u, \varepsilon_v, \varepsilon_w$ включены для сравнительной оценки возможного влияния обычной, газодинамической вязкости.

Далее преобразуем систему уравнений (2.1), используя (1.1) так, чтобы в каждом уравнении содержались временные производные только от одной неизвестной.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial un}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial nu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ nu^2 + \frac{B_y^2 + B_z^2}{2} + b^2 n \right\} = \varepsilon_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial nv}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + nuv - B_x B_y + R_e^{-1} \left[B_x \frac{\partial w}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. B_z \frac{\partial u}{\partial x} - R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right] \right\} = \varepsilon_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial nw}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + nuw - B_x B_z - R_e^{-1} \left[B_x \frac{\partial v}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. B_y \frac{\partial u}{\partial x} + R_i^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} + u \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right] \right\} = \varepsilon_w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} n^{-1} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x \partial t} + u B_y - B_x v - R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \right. \right. \\ \left. \left. R_e^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial B_y}{\partial x} + u \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) \right] - \varepsilon \frac{\partial B_y}{\partial x} \right\} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -R_i^{-1} R_e^{-1} n^{-1} \frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t} + u B_z - B_x w + R_i^{-1} n^{-1} \left[B_x \frac{\partial B_y}{\partial x} - R_e^{-1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial B_z}{\partial x} + u \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \right) \right] - \varepsilon \frac{\partial B_z}{\partial x} \right\} = 0$$

В связи с тем, что включение газодинамической вязкости носит тестовый характер, при этом преобразовании оставлены не все члены с нею связанные, только главные.

3 Численный метод

Построим для данной системы уравнений численную схему. В первом уравнении производные первого порядка аппроксимируются так

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{f_k^{n+1} - f_k^n}{\Delta t}, \quad f := n$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{f_{k+1}^{n+1} - f_{k-1}^{n+1} + f_{k+1}^n - f_{k-1}^n}{4\Delta x}, \quad f := nu$$

В остальных уравнениях производные первого порядка аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \rightarrow \frac{f_k^{n+1} - f_k^{n-1}}{2\Delta t}, \quad f := nu, nv, nw, B_y, B_z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow \frac{f_{k+1}^n - f_{k-1}^n}{2\Delta x}, \quad f := nu^2, B_y^2, B_z^2, nuv, B_y, nuw, B_z, uB_y, uB_z$$

Недиссипативные члены с производными второго порядка, а также аналогичные комбинации из произведений, аппроксимировались так

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \frac{f_{k+1}^n + f_{k-1}^n - 2f_k^n}{\Delta x^2}, \quad f := w, v$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{(g_{k+1}^n + g_k^n)(f_{k+1}^n - f_k^n) - (g_k^n + g_{k-1}^n)(f_k^n - f_{k-1}^n)}{2\Delta x^2},$$

$$(f, g) := (B_y, u), (B_z, u)$$

Диссипативные члены с производными второго порядка аппроксимировались так:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \rightarrow \frac{f_{k+1}^{n-1} + f_{k-1}^{n-1} - 2f_k^{n-1}}{\Delta x^2}, \quad f := B_y, B_z, [u], [v], [w]$$

Для аппроксимации этих членов пригодны и другие шаблоны: чисто неявная аппроксимация, неявная, центрированная по времени, ромб (схема Дюфорта-Франкеля).

Производные третьего порядка, а также аналогичные комбинации из произведений аппроксимируются так:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \rightarrow \frac{f_{k+2}^n - 2f_{k+1}^n + 2f_{k-1}^n - f_{k-2}^n}{2\Delta x^3}, \quad f := B_y, B_z$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \rightarrow \frac{(g_{k+1}^n + g_k^n)(f_{k+2}^n + f_k^n - 2f_k^n) - (g_k^n + g_{k-1}^n)(f_k^n + f_{k-2}^n - 2f_{k-1}^n)}{4\Delta x^3},$$

$$(f, g) := (B_y, u), (B_z, u), (v, u), (w, u)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \rightarrow \frac{(g_{k+1}^n - g_k^n)(f_{k+1}^n - f_k^n) - (g_k^n - g_{k-1}^n)(f_k^n - f_{k-1}^n)}{\Delta x^3},$$

$$(f, g) := (B_y, u), (B_z, u), (v, u), (w, u)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial t} \rightarrow \frac{(f_{k+1}^{n+1} + f_{k-1}^{n+1} - 2f_k^{n+1}) - (f_{k+1}^{n-1} + f_{k-1}^{n-1} - 2f_k^{n-1})}{2\Delta x^2 \Delta t},$$

$$f := v, w$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right) \rightarrow [(g_{k+1}^n + g_k^n)(f_{k+1}^{n+1} - f_k^{n+1}) - (g_k^n + g_{k-1}^n)(f_k^{n+1} - f_{k-1}^{n+1})] -$$

$$(g_{k+1}^n + g_k^n)(f_{k+1}^{n-1} - f_k^{n-1}) + (g_k^n + g_{k-1}^n)(f_k^{n-1} - f_{k-1}^{n-1}) / (4\Delta x^2 \Delta t),$$

$$(f, g) := (B_y, n^{-1}), (B_z, n^{-1})$$

Таким образом, построена консервативная схема с аппроксимацией второго порядка и с центральными разностями по пространству и по времени для всех недиссипативных членов исследуемой системы уравнений, что позволяет предполагать, что при отсутствии диссипативных членов схема сама не вносит диссипативных эффектов. Для первого уравнения схема двухслойная для остальных - трехслойная. Расчет производится в следующем порядке. Вначале по нижнему и среднему слою вычисляется значение ni для верхнего слоя. Затем вычисляются значения n для верхнего слоя на основе значения n а среднем слое, а также значений ni на среднем и верхнем слое. Затем вычисляется значение u на верхнем слое на основе значений n и ni . Следовательно, первые два уравнения в сумме аппроксимированы явной схемой, хотя аппроксимация первого уравнения формально составлена по шаблону для неявной схемы. Далее находятся значения v, w, B_y, B_z . Из-за наличия

смешанных пространственно-временных производных последние четыре уравнения аппроксимированы неявной схемой, но значения v , w , B_y , B_z на верхнем слое находятся независимо друг от друга. Соответствующие системы линейных уравнений с неизвестными сеточными значениями достаточно просты, они решаются методом прогонки, т.е. скорость выполнения расчета такая же, как и в случае явной схемы; пригоден также метод Ньютона, но он менее эффективен.

При расчетах удобно выбирать L таким, что $\omega_0 = \sqrt{\omega_e \omega_i}$, тогда

$$R_e = R_i^{-1} = \sqrt{m_i/m_e}$$

В связи со сложным строением схемы необходимое для устойчивости соотношение между пространственными и временными шагами определяется экспериментально. В системах уравнений, содержащих пространственные производные различных порядков, обычно наибольшие ограничения на временной шаг дают старшие производные. Поэтому, в связи с тем, что в последних четырех уравнениях содержится комбинация $f_t - u f_{xxx}$ ($R_i R_e = 1$), $f := v, w, B_y, B_z$, в качестве предварительной оценки можно ориентироваться на аналитический результат, который несложно получить спектральным методом для трехслойной схемы типа "крест", примененной к уравнению $f_t + a f_{xxx} = 0$: $\Delta t < c/|a|\Delta x^3$, $c \approx 0.3849$, $a = \max(|u|)$.

Действительно, имеем численную схему

$$\frac{f_k^{n+1} - f_k^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{f_{k+2}^n - f_{k-2}^n + 2f_{k+1}^n - 2f_{k-1}^n}{2\Delta x^3} = 0 \quad (3.2)$$

Делаем подстановку $f_k^n = f_0 q^n \exp ik\varphi$, получаем

$$\begin{aligned} \frac{q - q^{-1}}{2\Delta t} + a \frac{2i \sin 2\varphi - 4i \sin \varphi}{2\Delta x^3} &= 0 \\ q^2 + 2ia(\sin 2\varphi - 2 \sin \varphi) \frac{\Delta t}{\Delta x^3} q + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Условие устойчивости совпадает с условием бездиссипативности схемы: $|q| = 1$. Для обратимых по пространству и времени численных схем, к которым относится схема (3.2), если существует собственное значение q , то существует и антисимметричное значение $-q$. Поэтому наличие диссипативных собственных значений означает и наличие неустойчивых значений. Заметим, что приведенная выше численная схема для расчета ионной жидкости свойством обратимости по времени не обладает. Условие $|q| = 1$ совпадает с условием положительности дискриминанта уравнения (3.3):

$$-a^2(\sin 2\varphi - 2 \sin \varphi)^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x^3} \right)^2 + 1 > 0$$

Строим график функции $(\sin 2\varphi - 2 \sin \varphi)^2$ и находим, что ее максимальное значение приблизительно равно 6.75, откуда и получаем указанную выше оценку. Применение же такого метода к схеме расчета ионной жидкости приведет к необходимости исследования корней полинома одиннадцатого порядка, что затруднительно.

Численный эксперимент показывает, что временной шаг можно брать и большим, чем максимальное значение, которое дает приведенная выше оценка.

Заметим, что данная схема отличается от схемы, использовавшейся в [4], [5], [7] тем, что аппроксимация первого уравнения осуществлена по двухслойной схеме, это повышает устойчивость и позволяет частично устранить проблемы, связанные с нелинейной неустойчивостью трехслойной схемы для уравнений газодинамического типа при расчетах близких к стационарным, описанные в [10]. Подобного рода неустойчивость в некоторых случаях наблюдалась также при расчетах структур бездиссипативных разрывов обобщенного нелинейного уравнения Шредингера по схеме типа "крест" [13], проблема решалась искусственным увеличением скорости движения структуры. Данная схема позволяет проводить расчеты бегущих магнитозвуковых волн. Но в случае перехода к волнам близким к стационарным, что достигается изменением скорости u для невозмущенного состояния, с течением времени в задачах взаимодействия уединенных волн (но не в задачах расчета одной уединенной волны) наблюдается медленно развивающаяся неустойчивость. Развитие этой неустойчивости замедляется, но не исключается совсем, если второе уравнение аппроксимируется по неявной трехслойной схеме. Для блока из двух первых неявно аппроксимируемых уравнений удастся построить быстро сходящийся итерационный алгоритм, основанный на методе Ньютона, однако для решения описанных ниже задач взаимодействия быстрых магнитозвуковых уединенных волн приведенной выше схемы оказывается достаточно. Поскольку работает она быстрее, чем схема с неявностью во втором уравнении, то расчеты проводились по ней.

4 Дисперсионное соотношение и уединенные волны

Пусть переменные $n, u, v, w, B_x, B_y, B_z$ в состоянии покоя равны 1, 0, 0, 0, $\cos \theta, \sin \theta, 0$. Тогда дисперсионное уравнение для линейных волн в отсутствие диссипации имеет вид [4], [5].

$$(R_e R_i + k^2)^2 V^6 - \{R_e^2 R_i^2 + R_e^2 R_i^2 \cos^2 \theta + R_e R_i [1 + \cos^2 \theta (\rho + 1)] k^2 + (R_e R_i + k^2)^2 b^2\} V^4 + \cos^2 \theta [R_e^2 R_i^2 + 2R_e^2 R_i^2 b^2 + R_e R_i (\rho + 2) b^2 k^2] V^2 - R_e^2 R_i^2 \cos^4 \theta b^2 = 0$$

$$V = \omega/k, \quad \rho = \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_i}} - \sqrt{\frac{R_i}{R_e}} \right)^2$$

Здесь k - волновое число, ω - циклическая частота, V - фазовая скорость волны. Имеются быстрые магнитозвуковые, альфвеновские и медленные магнитозвуковые волны, бегущие вправо и влево, т.е. всего имеется шесть различных типов волн. При переходе к чисто газодинамической модели медленные магнитозвуковые волны превращаются в акустические, остальные исчезают. При $b = 0$ дисперсионные ветви медленных магнитозвуковых волн, бегущих вправо и влево, сливаются, скорость этих волн становится равной нулю, т.е. у них нет дисперсии. С этим и связаны проблемы расчета при $b = 0$, обсуждавшиеся в предыдущем разделе.

Нас будут интересовать в основном быстрые магнитозвуковые волны, с которыми ассоциированы уединенные волны. Существует некоторое критическое значение $\theta = \theta_c$ определяемое из уравнения

$$b^2 = (\rho^{-1} + 1)[(\rho + 1) \cos^2 \theta - 1]$$

от которого зависит существование или отсутствие решения в виде уединенной волны. При $\theta > \theta_c$ ветвь быстрых магнитозвуковых волн не имеет точки перегиба вне начала координат, поэтому прямая $V = \omega/k$, соответствующая уединенным волнам, движущимся со скоростью V , не пересекает дисперсионную ветвь вне начала координат, в соответствии с теорией здесь существует уединенная волна (доказано для случая малой амплитуды). При $\theta < \theta_c$ такая точка перегиба есть и соответствующая прямая пересекает дисперсионную ветвь, можно ожидать, что точного решения в виде уединенной волны не будет.

В качестве исходных данных для расчетов уединенных волн брались приближенные решения для случая малой амплитуды [4], [5], описываемые соотношениями:

$$\begin{aligned} V_+ &= \sqrt{(1 + b^2 + \sqrt{(1 + b^2)^2 - 4b^2 \cos^2 \theta})/2} \\ \Delta &= (V_+^2 - \cos^2 \theta - \rho \cos^2 \theta)/(V_+^2 - \cos^2 \theta) \\ c_1 &= 2(\cos^2 \theta/V_+^3 + V_+ \sin^2 \theta/(V_+^2 - b^2)^2)/R_e^{-1}/R_i^{-1}/\Delta \\ c_2 &= (\cos^2 \theta/V_+^2 + 0.5 + V_+^2 \sin^2 \theta/(V_+^2 - b^2)^2)/R_i^{-1}/R_e^{-1}/\Delta/(V_+^2 - b^2) \\ a_0 &= 1.5\mu c_1/c_2 \cosh^{-2}(\sqrt{|\mu c_1|}/2x) \\ a_1 &= da_0/dx \\ B_y &= \sin \theta + a_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_z &= (R_i^{-1} - R_e^{-1}) \cos \theta / V_+ / (1 - \cos^2 \theta / V_+^2) a_1 \\
v &= -a_0 \cos \theta / V_+ \\
w &= (R_e^{-1} - R_i^{-1} \cos^2 \theta / V_+^2) / (1 - \cos^2 \theta / V_+^2) a_1 \\
u &= a_0 \sin \theta / (V_+ - b^2 / V_+) \\
n^{-1} &= 1 - u / V_+
\end{aligned}$$

Здесь V_+ - скорость длинных быстрых магнитозвуковых волн, бегущих вправо. Скорость уединенной волны, бегущей вправо, равна $V_+ + \mu$, $\mu > 0$. Чтобы получить волну, бегущую влево, нужно в последних пяти формулах заменить V_+ на $-V_+$. Тогда скорость уединенной волны, бегущей влево, равна $-V_+ - \mu$.

При $\theta < \theta_c$ указанные выше формулы тоже приближенно описывают уединенные волны, но при $\mu < 0$. Точного решения виде уединенной волны в этом случае не существует. Такие начальные данные со временем распадаются, образуя коротковолновый хвост. Амплитуда волн в таком хвосте в случае уединенных волн малой амплитуды экспоненциально мала, поэтому этот эффект можно обнаружить только либо в случае сильной нелинейности, либо при θ близком к θ_c . Длина излучаемой короткой волны определяется значением k в точке пересечения прямой, соответствующей фазовой скорости, и дисперсионной кривой, что позволяет контролировать правильность расчета. Аналогичные приближенные решения (точного решения не существует) в случае плазмы с горячими электронами есть и у медленных магнитозвуковых волн, они описываются при $\mu > 0$ теми же соотношениями, но вместо V_+ используется V_- , определяемая формулой:

$$V_- = \sqrt{(1 + b^2 - \sqrt{(1 + b^2)^2 - 4b^2 \cos^2 \theta}) / 2}$$

Прямая, соответствующая фазовой скорости, в этом случае всегда пересекает альфвеновскую ветвь, распад таких волн рассматривался в [5].

5 Особенности программной реализации

Приведенные выше формулы берутся за основу для начальных данных расчетов уединенных волн. На границах расчетной области ставятся жесткие граничные условия: $n_1^n = 1$, $n_2^n = 1$, Комплекс программ, как и в случае [13], оборудован средствами, позволяющими в процессе расчета по мере необходимости отрезать фрагмент расчетной области или добавить фрагмент с однородными данными. Используя эти возможности и наблюдая графики решений в процессе расчета, удастся избежать влияния отражения от границ в исследуемой области и сокращать время расчета, выполняя его только в области, где

в текущий момент времени находится уединенная волна. Программный комплекс позволяет также склеивать фрагменты расчетной области, полученные из нескольких расчетов.

Расчеты проводятся для водородной плазмы, $R_e^{-1} = 0.02341352$.

6 Взаимодействие уединенных волн, движущихся в одном направлении

Расчет проводится в отсутствие диссипации при $\theta > \theta_c$. В связи с тем, что приведенные выше формулы верны только для уединенных волн малых амплитуд, а интерес представляет как раз случай больших амплитуд, поскольку волны малой амплитуды очевидно должны мало чем отличаться от солитонов уравнения Кортевега-де Вриза, расчет проводится в следующем порядке. Вначале каждая уединенная волна рассчитывается отдельно. Рассчитывается эволюция начальных данных, приведенных выше, до тех пор пока не сформируется решение в виде установившейся бегущей уединенной волны. Затем данные, полученные в результате двух этих расчетов, склеиваются так, чтобы уединенная волна меньшей амплитуды располагалась впереди. При этом волны, излученные в процессе установления, удаляются. Далее выполняется расчет взаимодействия двух волн. Оказывается, что после такого взаимодействия амплитуды волн не меняются, не обнаруживается каких-либо излучений. Сам процесс аналогичен взаимодействию уединенных волн, для уравнения Кортевега-де Вриза [11]: волны сближаются, а затем начинают обмениваться энергией, в результате чего амплитуда задней волны становится равной амплитуде передней волны, а амплитуда передней волны - амплитуде задней. На рис.1 показаны графики $\Delta n = n - 1$ в различные последовательные моменты времени (кривые 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 соответствуют $t = 0, 100, 200, 300, 350, 400, 500, 600$, отсчет времени идет от момента склейки данных). На рис.2а показаны амплитуды уединенных волн, определенные по величине u (максимальные ее значения), в зависимости от времени. На рис.2б показаны траектории гребней волн на плоскости x, t , для наглядности данный рисунок выполнен в системе координат наблюдателя, движущейся со скоростью $V_+ \approx 1.026$. Заметим, что эти траектории не пересекаются, уединенные волны сначала приближаются друг к другу, а затем, после обмена энергией, разбегаются. В приведенном расчете исходные значения μ равны 0.25 и 0.2, $b^2 = 0.1$, $\theta = 1.555$. Заметим, что согласно рис.1 превышение величины плотности над невозмущенным единичным уровнем на гребне первой и второй уединенной волны составляет порядка 80% и 60% соответственно, т.е. исследуется сильно нелинейный процесс.

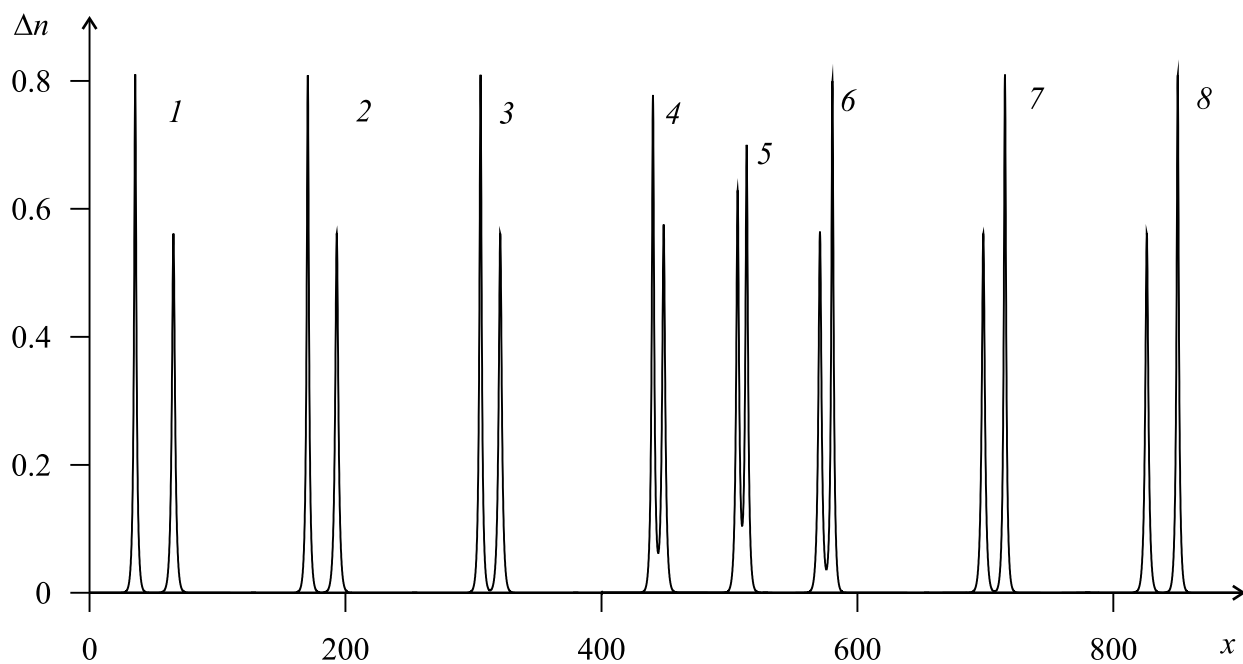


Рис. 1

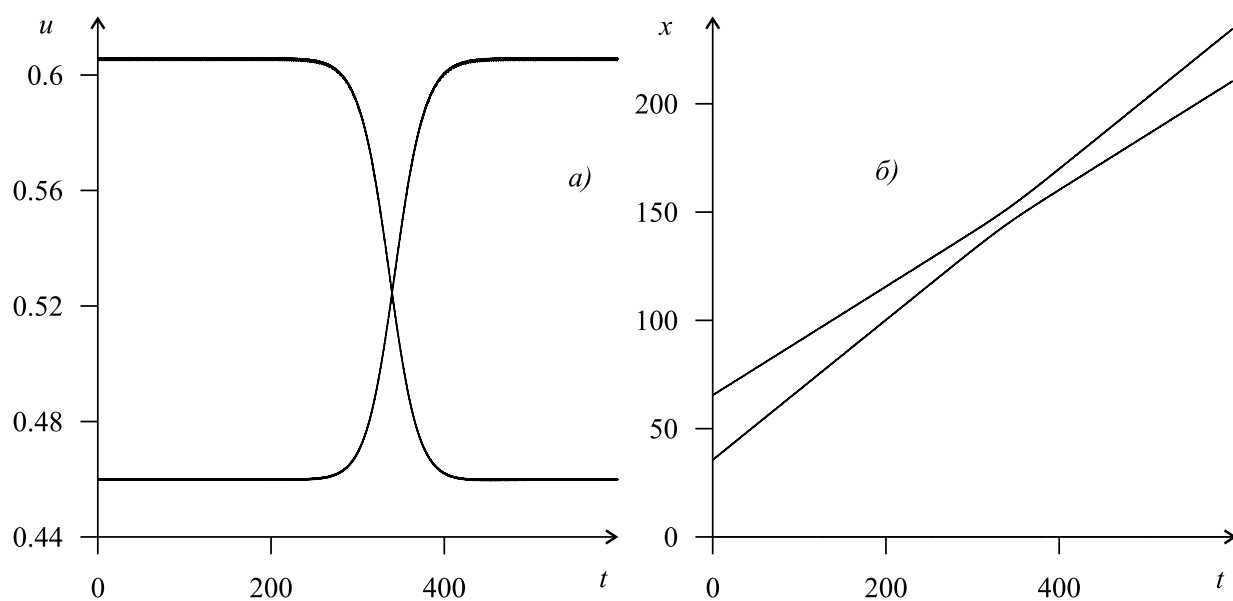


Рис. 2

Проводился также расчет взаимодействия трех уединенных волн так, что они сталкиваются почти одновременно: волны взаимодействуют как солитоны. Рис.3 иллюстрирует расчет при $\mu_{1,2,3} = 0.1; 0.15; 0.2$, $b^2 = 0.01$, $\theta = 1.555$.

7 Взаимодействие уединенных волн, движущихся в различных направлениях

Расчет проводится при $\theta > \theta_c$ аналогично предыдущему, но здесь одна волна как бы проходит сквозь другую. После взаимодействия наблюдаются излучен-

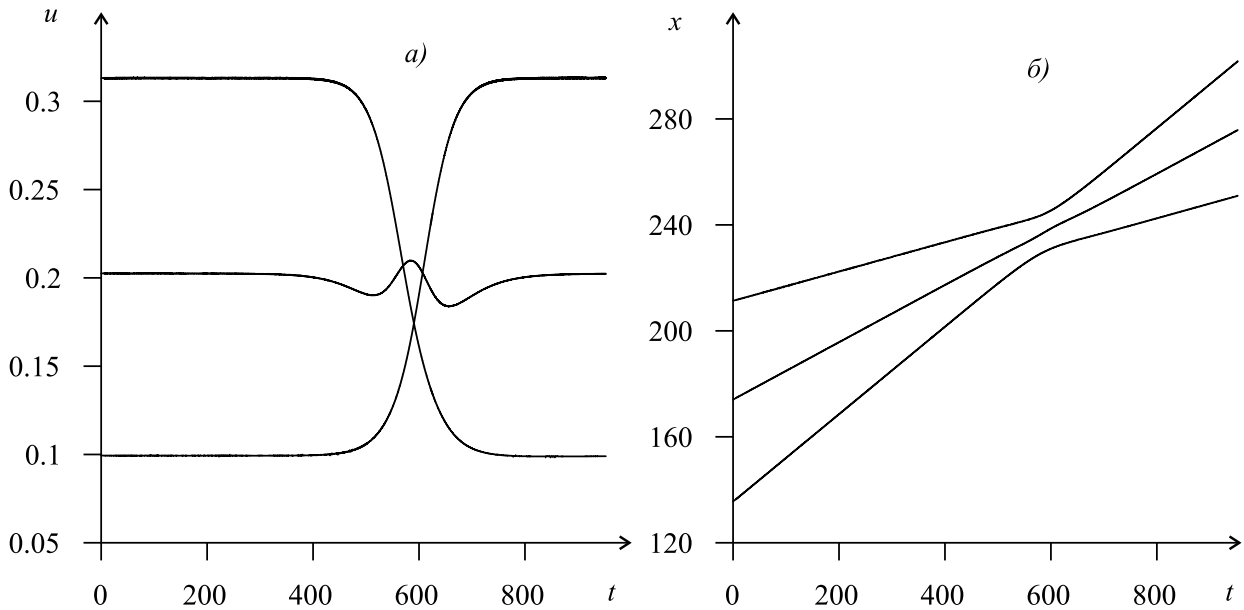


Рис. 3

ные волны, см. рис.4. Однако изменение амплитуд волн после взаимодействия для данных значений параметров ($\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.2$, $b^2 = 0.1$, $\theta = 1.555$) незначительное, см. рис.5, где показана зависимость от времени максимальных и минимальных значений u , отсчет времени, как и в предыдущем случае, ведется от момента склейки данных. Это связано с тем, что наблюдаемые на рис.4 излученные в результате взаимодействия волны имеют заметную амплитуду только для n , для u она невелика, а возмущения только плотности из-за малости параметра b^2 приводят лишь к незначительным потерям энергии. Уменьшение амплитуд хорошо заметно сразу после взаимодействия, но затем амплитуды частично восстанавливаются. В связи с тем, что абсолютная скорость уединенных волн больше скорости любых линейных волн, полный захват энергии излученных волн невозможен. Сравнение рис.5 и рис.2а показывает, что при взаимодействии разнонаправленных волн в отличие от взаимодействия однонаправленных процесс носит необратимый характер.

8 Распад уединенной волны за счет диссипации

Расчет проводится при $\theta > \theta_c$. Сначала рассчитывается уединенная волна без диссипации. После установления и удаления излученных при установлении волн включается диссипация. При слабой диссипации образуются решения, которые можно интерпретировать как решения, в которых имеются комбинации уединенной волны и структуры разрыва. На рис.6 показан типичный график по истечении продолжительного времени, $t = 600$, отсчет времени ведется с момента включения диссипации. Это решение при макроскопиче-

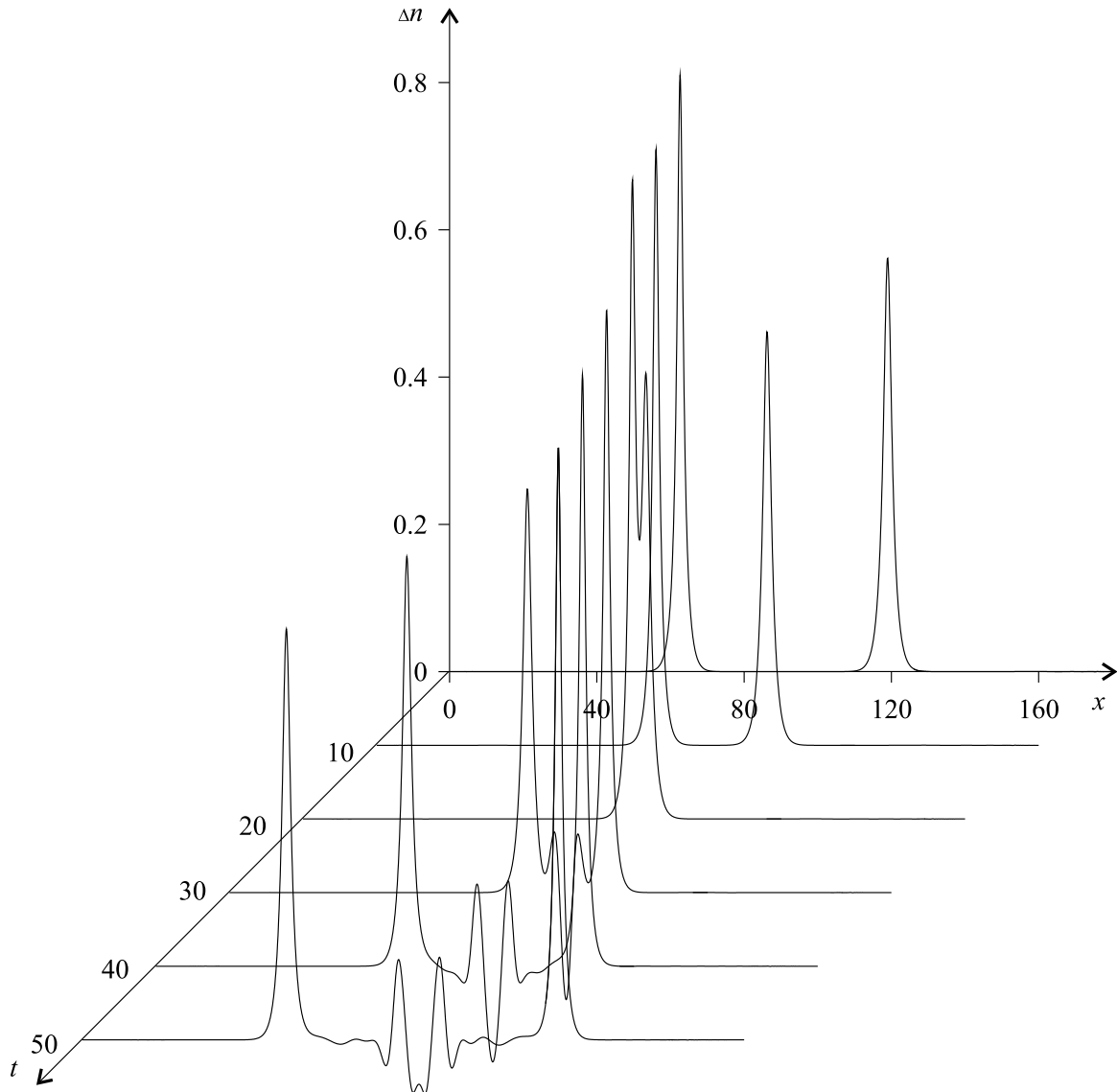


Рис. 4

ском описании напоминает решение задачи о распаде произвольного разрыва, в связи с чем здесь и применен термин "распад уединенной волны". На рис.5 вертикальными прямыми произведена разбивка на зоны распада уединенной волны, аналогичные зонам, возникающим при распаде разрыва: зона 1 - область до разрыва, 2 - область за разрывом, 3 - структура разрыва 4 - центрированная простая волна, стартовое значение $\mu = 0.2$, $b^2 = 0.1$, $\theta = 1.555$, $\varepsilon = 0.02$. Ранее такой подход применительно к решениям обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза был предложен в [12]. При малых значениях ε величина разрыва не велика, распад происходит медленно, аналитически его можно описать следующим образом. Пусть имеется закон сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} P + \frac{\partial}{\partial x} Q = 0$$

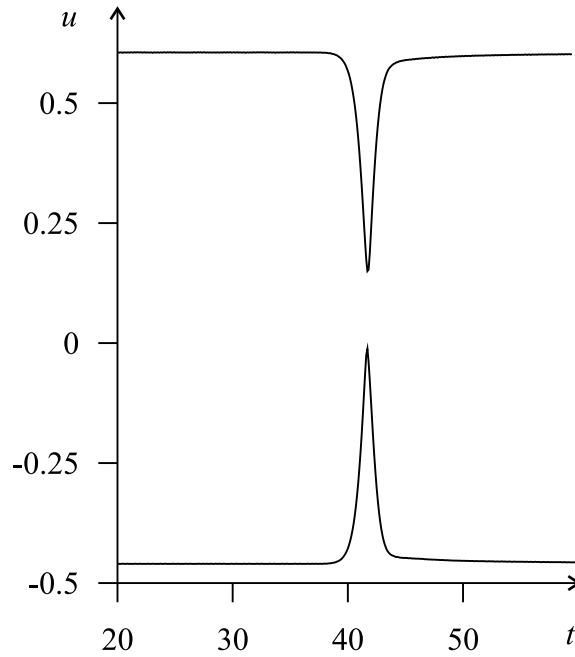


Рис. 5

Тогда из него можно вывести уравнение баланса

$$(P_2 - P_1)V - (Q_2 - Q_1) = dP_s/dt, \quad P := n, nu, nv, nw, B_y, B_z$$

Здесь 1 и 2 - значения величин справа и слева от разрыва, P_s - запасенное уединенной волной количество соответствующей величины. Система из шести уравнений дополняется законом изменения энергии \mathcal{E} , который очевидно должен выполняться для исследуемой системы уравнений, поскольку он выполнялся для системы уравнений Максвелла и уравнений движения ионов и электронов, использованных при ее выводе

$$(P_{\mathcal{E}2} - P_{\mathcal{E}1})V - (Q_{\mathcal{E}2} - Q_{\mathcal{E}1}) = d\mathcal{E}_s/dt - S$$

здесь S — потери энергии за единицу времени в зоне уединенной волны за счет диссипации (энергия не сохраняется). В случае уединенных волн малой амплитуды величины P_s , где $P := n, nu, nv, nw, B_y, B_z$, \mathcal{E}_s и S можно вычислить, воспользовавшись приведенными выше формулами, описывающими уединенную волну, методика описана в работе [12], они будут функциями от величины μ . С учетом того, что $V = V_+ + \mu$, имеющих уравнений достаточно, чтобы описать эволюцию амплитуды уединенной волны и параметров разрыва при таком процессе, решив систему из обыкновенных дифференциальных уравнений.

Исследовался также распад за счет слабых вязких эффектов газодинамического типа. Принципиальных отличий в картине распада обнаружено не было.

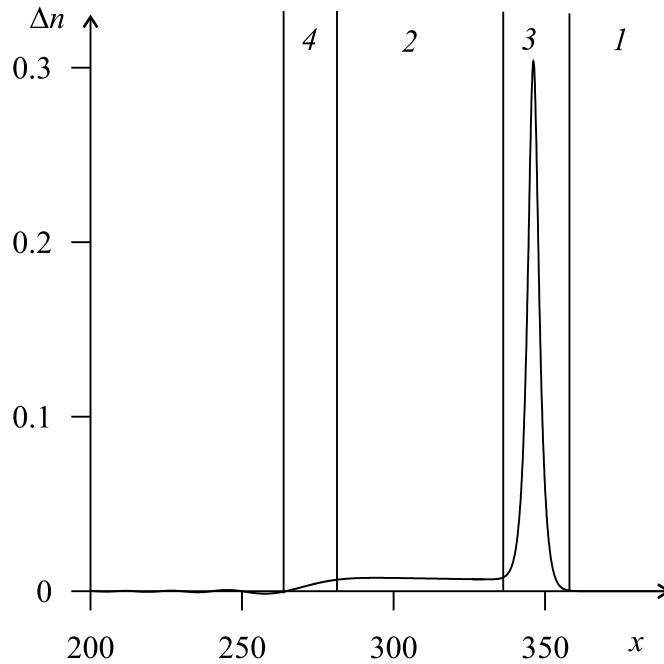


Рис. 6

9 Распад уединенной волны за счет дисперсии

Расчет проводится при $\theta < \theta_c$. Этот расчет здесь приводится для сравнения с предыдущим. При малой амплитуде уединенной волны процесс распада протекает медленно и в некоторых чертах повторяет процесс распада за счет диссипации. Брались приведенные выше начальные данные, с течением времени образуется коротковолновый хвост и длинноволновое излучение. На рис.7 показан типичный график по истечении продолжительного времени, $t = 600$, стартовое значение $\mu = -0.05$, $b^2 = 0.1$, $\theta = 1.535$. Это решение тоже можно рассматривать как решение с разрывом, но описание его сложнее, чем в предыдущем случае. Структура разрыва здесь разделяет две волновые зоны: 1 - волновая зона до разрыва, 2 - волновая зона за разрывом, 3 - структура разрыва, 4 - центрированная простая волна огибающей коротких волн. Волновые зоны расширяются со временем. Аналогичный процесс исследовался для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза в работе [12], где показывалось, что из-за наличия закона сохранения энергии невозможен распад только с коротковолновым излучением и неизбежно излучение длинных волн, фазовая скорость которых не совпадает со скоростью уединенной волны. Причем в случае малых амплитуд амплитуда длинноволнового нестационарного излучения становится существенно большей, чем коротковолнового. Это очевидно верно и в данном случае, пример расчета, где амплитуда длинных волн существенно больше амплитуды коротких, приведен в [5] для медленных магнитозвуковых волн.

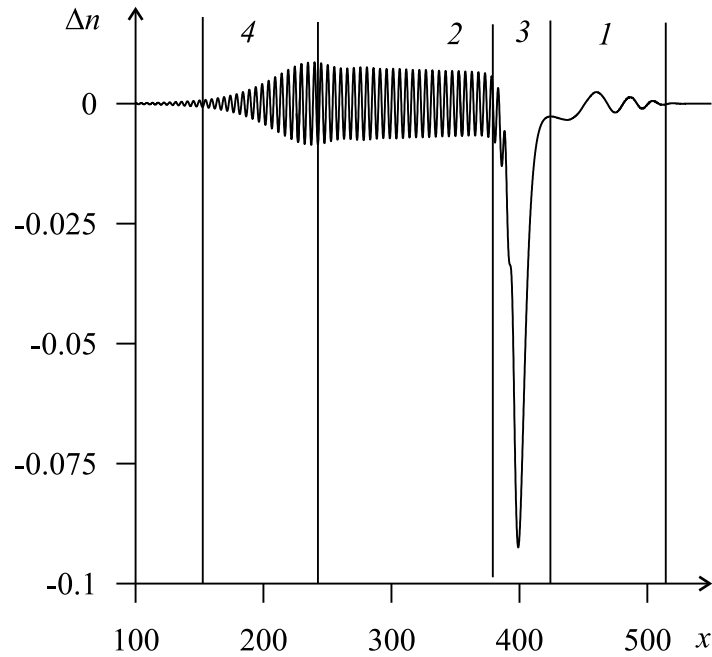


Рис. 7

10 Распад уединенной волны за счет дисперсии и диссипации

Расчет проводится при $\theta < \theta_c$. На рис.8 показаны результаты расчета, когда распад происходит одновременно за счет дисперсии и диссипации, *1* - волновая зона до разрыва, *2* - волновая зона за разрывом, *3* - структура разрыва, $\mu = -0.05$, $b^2 = 0.1$, $\theta = 1.535$, $\varepsilon = 0.01$, $t = 600$. Различие между бездиссипативным и слабодиссипативным случаем состоит в том, что в первом случае волновая зона *2* расширяются со временем, а во втором - нет. Здесь просматривается полная аналогия между работами [14] и [15], где рассматривался распад разрыва для обобщенного уравнения Кортевега-де Вриза без диссипации и со слабой диссипацией, в первом случае находились автомодельные решения усредненных уравнений, а во втором - стационарные решения усредненных уравнений. Существенно, что диссипация влияет преимущественно на короткие волны в зоне *2* и значительно меньше - на длинные в зоне *1*.

11 Заключение

Проведено исследование различных типов взаимодействия магнитозвуковых уединенных волн. Установлено, что однонаправленные уединенные волны взаимодействуют как солитоны, а при взаимодействии разнонаправленных волн возникают излучения. Заметим, что при исследовании изотропной модели

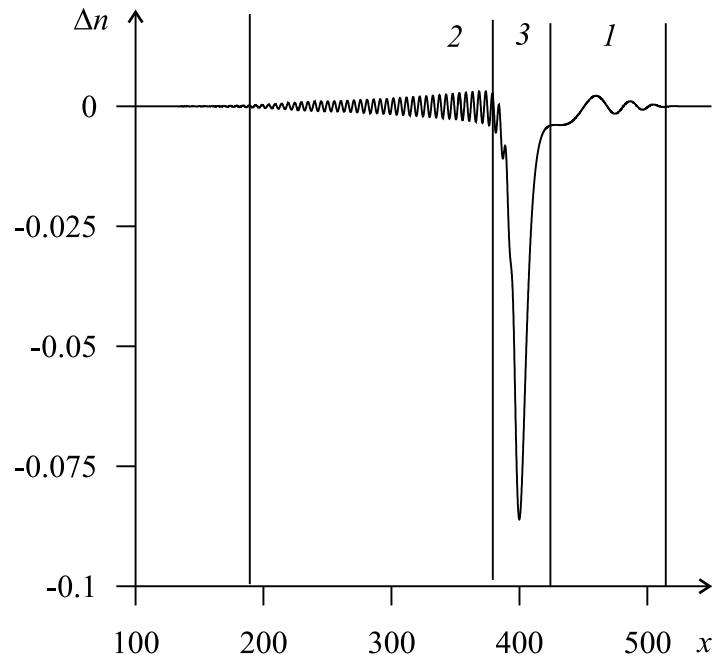


Рис. 8

композитного материала [7] было обнаружено, что уединенные волны, поляризованные в разных плоскостях, меняют амплитуды после взаимодействия, в то время как волны, поляризованные в одной плоскости, ведут себя как солитоны, но в последнем случае модель сводится к разновидности уравнений Буссинеска. Возможно исследуемая здесь система уравнений частично интегрируемая.

Проведено исследование эволюции начальных данных типа уединенных волн при наличии диссипации а также в случае, когда теория предсказывает отсутствие точного решения в виде уединенной волны из-за наличия дисперсии высокого порядка. Проведено также исследование при наличии обоих факторов, разрушающих уединенную волну. Установлено, что во всех случаях, если процесс медленно текущий, с макроскопической точки зрения его можно интерпретировать как решение с комбинацией уединенной волны и разрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00125-а) и Президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4810.2010.1).

Список литературы

- [1] Kakutani T., Ono H. Weak non-linear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma // J. Phys. Soc. Japan. 1969. V. 26. P. 1305–1318.
- [2] Il'ichev A. Steady waves in a cold plasma // J. Plasma Physics. 1996. V. 55, Pt. 2. P. 181–194.

- [3] Bakholdin I., Il'ichev A. Solitary-wave decay in a cold plasma // J. Plasma Phys. 1998. V. 60, Pt. 3. P. 569–580.
- [4] Bakholdin I., Il'ichev A., Zharkov A. Steady magnetoacoustic waves and decay of solitonic structures in finite beta plasma// J. Plasma Physics. 2002. v.67. pt.1. pp.1-26.
- [5] Бахолдин И.Б., Жарков А.А., Ильичев А.Т. Неустойчивость солитонов и фронтов в изотропной безстолкновительной квази-нейтральной плазме с изотермическим давлением// ЖЕТФ. 2000. т.118. вып.1(7). с.125-141.
- [6] Ильичев А. Т. Уединенные волны в моделях гидромеханики. — М.: Физматлит, 2003. — 256 с.
- [7] Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. — М.: Физматлит, 2004. — 318 с.
- [8] Кингсепп А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. М.:Изд. МФТИ. 1996. 208с.
- [9] Non-linear hydromagnetic waves propagating along the magnetic field in a cold collision-free plasma// J. Phys. Soc. Japan - 1966. - V.21. - P.385-398.
- [10] Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 616 с.
- [11] Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. — М.: Мир, 1985. — 472 с.
- [12] Бахолдин И.Б. Задача о распаде уединенных волн и разрывы// Изв. РАН МЖГ. 2005. №6. с. 122-139.
- [13] Бахолдин И. Б. Волновые разрывы, описываемые модифицированным уравнением Шредингера // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38, № 8. - С. 1331–1350.
- [14] Бахолдин И.Б. Скачок с излучением в моделях, описываемых обобщенным уравнением Кортвега-де Вриза// Прикл. матем. механ. - 2001. - Т. 65. - вып. 1. - С. 59-68.
- [15] Бахолдин И.Б. Методы исследования структур диссипативных и бездиссипативных разрывов в системах с дисперсией// Журн. выч. матем. и матем. физики. — 2005. — Т. 45. № 2. — С. 330–343.