



Кузьмина Д.Е., [Сазонов В.В.](#)

Периодические движения
спутника-гиростата
относительно центра масс
под действием
гравитационного момента

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Кузьмина Д.Е., Сазонов В.В. Периодические движения спутника-гиростата относительно центра масс под действием гравитационного момента // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 68. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-68>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Д.Е. Кузьмина, В.В. Сазонов

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА-ГИРОСТАТА
ОТНОСИТЕЛЬНО ЦЕНТРА МАСС ПОД ДЕЙСТВИЕМ
ГРАВИТАЦИОННОГО МОМЕНТА**

Москва - 2010

Аннотация

Исследованы периодические движения оси симметрии модельного спутника Земли, которые похожи на движения продольных осей орбитальной станции *Мир* в 1999 — 2001 гг. и спутника *Фотон М-3* в 2007 г. Движения этих космических аппаратов представляли собой слабо возмущенную регулярную прецессию Эйлера с вектором кинетического момента движения относительно центра масс, близким к плоскости орбиты. Направление этого вектора во время движения практически не менялось. Модельный спутник представляет собой осесимметричный гиростат с гиростатическим моментом, направленным по оси симметрии. Спутник движется по круговой орбите и испытывает действие гравитационного момента. Движение оси симметрии такого спутника относительно абсолютного пространства описывается системой дифференциальных уравнений четвертого порядка с периодическими коэффициентами. Аналитическими и численными методами построены периодические решения этой системы, обладающие специальными свойствами симметрии.

D.Yu. Kuzmina, V.V. Sazonov. Periodic motion of a satellite-gyrostат relative to its mass center under action of a gravitational torque. We investigated the mode of satellite uncontrolled attitude motion in which an axially symmetric satellite rotated around its symmetry axis corresponding to the minimal moment of inertia whereas that axis made periodic oscillations in absolute space. We assumed the satellite orbit was circular, the satellite had inner kinetic momentum (i.e. it was a gyrostат) directed along the symmetry axis, and the satellite was affected by the gravitational torque. We studied periodic motions of the satellite symmetry axis using analytical and numerical methods. Those motions look like the attitude motion of the satellite *Foton M-3* in 2007 and some motions of the orbital station *Mir* in 1999 — 2000.

1. Вращательное движение орбитальной станции *Мир* и спутника *Фотон М-3*. В 1999 г. в связи с прекращением непрерывного пребывания экипажа на орбитальной станции *Мир* возникла необходимость проведения ее длительного неуправляемого полета при минимальных затратах топлива и достаточно большом энергопотреблении с солнечных батарей. Для решения этой задачи, как правило, использовался режим вращательного движения, начавшийся с двухосной закрутки станции вокруг ее продольной и поперечной осей с угловыми скоростями 0.15 град./с [1, 2]. Начальная ориентация станции при этом была произвольной.

Во время неуправляемого полета вращательное движение станции контролировалось по измерениям вектора напряженности магнитного поля Земли. Измерения выполнялись бортовым трехосным магнитометром. Обычно каждые сутки проводился один сеанс измерений продолжительностью около 90 мин. Фактическое вращательное движение станции на временном отрезке, содержащем полученные данные, реконструировалось с помощью стандартных методик [1]. Данные обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения станции относительно центра масс. В результате обработки оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Интегрирование уравнений движения позволяло экстраполировать найденное движение за пределы обрабатываемого отрезка. Измерения магнитного поля Земли и их обработка составили основу мониторинга неуправляемого движения станции. Мониторинг позволил экспериментально исследовать эволюцию этого движения на длительных интервалах времени. Некоторые результаты исследования опубликованы в [1, 2].

Одна из целей проведенного исследования состояла в обнаружении устойчивых финальных режимов, к которым в процессе эволюции стремились неуправляемые движения, начинавшиеся после двухосных закруток, а также в обнаружении режимов, которые хотя и не были финальными, но сохранялись в течение продолжительного времени — не менее нескольких суток. Интересным примером движения последнего типа может служить движение, близкое к регулярной прецессии Эйлера. Оно возникло в результате попытки придать станции точное вращение вокруг ее продольной оси, лежащей в плоскости орбиты. Солнце в то время располагалось недалеко от этой плоскости, и судя по результатам математического моделирования, такое движение должно было обеспечить высокий энергопотребление в течение по меньшей мере нескольких суток. Из-за погрешностей закрутки было реализовано движение, похожее на регулярную прецессию Эйлера. Отрезки этого движения, близкие к его началу и концу, показаны на взятых из [2] рис. 1 — 3. Поясним смысл использованных на этих рисунках обозначений.

Для описания вращательного движения станции используются две правые декартовы системы координат. Система $x_1x_2x_3$ образована главными

центральноными осями инерции станции. Оси x_1 и x_2 отвечают соответственно ее минимальному и максимальному моментам инерции. Ось x_1 близка к продольной оси станции и направлена от базового блока к модулю *Квант*, ось x_2 примерно перпендикулярна оси вращения солнечных батарей базового блока.

Система $Z_1Z_2Z_3$ связана с перигеем орбиты станции. При реконструкции вращательного движения эта орбита считалась кеплеровой и неизменной в абсолютном пространстве, следовательно, в рассматриваемом приближении система $Z_1Z_2Z_3$ инерциальна. Оси Z_3 и Z_2 направлены соответственно по вектору Лапласа и вектору кинетического момента орбитального движения.

Положение системы координат $x_1x_2x_3$ относительно системы $Z_1Z_2Z_3$ задается углами γ , δ и β . Углы вводятся так, что система $Z_1Z_2Z_3$ может быть переведена в систему $x_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси Z_2 , 2) на угол β вокруг новой оси Z_3 , 3) на угол γ вокруг новой оси Z_1 , совпадающей с осью x_1 . Введенные углы имеют прозрачный геометрический смысл: β — угол между осью x_1 и плоскостью орбиты Z_1Z_3 , причем $\beta > 0$, если эта ось лежит в полупространстве $Z_2 > 0$; δ — угол между осью $(-Z_3)$ и проекцией оси x_1 на плоскость Z_1Z_3 , положительное направление отсчета этого угла согласовано с направлением оси Z_2 . Таким образом, углы δ и β задают направление оси x_1 в системе координат $Z_1Z_2Z_3$, угол γ задает поворот станции вокруг этой оси.

Компоненты абсолютной угловой скорости станции в системе координат $x_1x_2x_3$ обозначим ω_i , компоненты вектора напряженности магнитного поля Земли в той же системе обозначим h_i ($i = 1, 2, 3$). Компоненты h_i относим к точке, в которой в данный момент времени находится центр масс станции. Такое допущение оправдано, поскольку размеры станции малы по сравнению с расстоянием, на котором магнитное поле Земли испытывает заметное изменение.

Графики зависимости от времени введенных углов приведены в левых частях рис. 1, 2. Аналогичные графики зависимости от времени компонент угловой скорости изображены в средних частях рисунков. Правые части рисунков содержат графики зависимости от времени компонент напряженности магнитного поля. Маркеры рядом с графиками компонент h_i указывают данные измерений, а сами эти графики рассчитаны с использованием аналитической модели магнитного поля Земли. Из рисунков видно, что измерения охватывают только первые 90 мин на каждом представленном отрезке движения, движение на остальной части отрезка — результат экстраполяции. На рис. 3 для этих отрезков изображены проекции орта оси x_1 на плоскости, которые неподвижны в инерциальном пространстве и ортогональны среднему значению вектора кинетического момента спутника на соответствующем отрезке.

Судя по рисункам, движение оси x_1 происходило почти по круговому

конусу, ось которого практически не эволюционировала. Поскольку распределение масс станции было близко к осесимметричному с осью симметрии x_1 , такое движение естественно интерпретировать как регулярную прецессию твердого тела в случае Эйлера. Однако имеются и доводы против. Ось x_1 была осью минимального момента инерции станции, поэтому можно было ожидать, что со временем вследствие диссипации энергии бортовыми устройствами угол нутации будет увеличиваться и станция опрокинется. Однако за двое суток характер движения практически не изменился. Причина, по видимому, заключалась в том, что угловая скорость станции была не достаточно велика и на ее движении существенно сказались влияние внешних моментов.

Аналогичное движение наблюдалось и у спутника *Фотон М-3* в сентябре 2007 г. Этот спутник также совершал неуправляемый полет, и реконструкция его движения выполнялась по измерениям магнитного поля Земли [3]. В отличие от станции *Мир* магнитные измерения на *Фотоне М-3* проводились в течение всего полета и позволили реконструировать его движение достаточно детально. Реконструкция выполнялась по той же схеме, что и в случае станции *Мир*, но с использованием более сложных уравнений движения. Пример реконструкции приведен на рис. 4, 5. Обозначения на рис. 4 совпадают с введенными ранее, только маркеры в правой части этого рисунка имеют другую форму, и система координат $Z_1Z_2Z_3$ определена несколько иначе. В случае *Фотона М-3* ось Z_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось Z_3 лежит в плоскости экватора и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты спутника. Угловая скорость системы $Z_1Z_2Z_3$ не превышает 5 град./сут. Кривые на рис. 5 суть проекции годографа орта оси x_1 на плоскость орбиты Z_1Z_3 и на плоскость Z_1Z_2 .

Распределение масс *Фотона М-3* также было близко к осесимметричному с осью симметрии x_1 , поэтому и движение на рис. 4, 5 можно интерпретировать как регулярную прецессию Эйлера. В случае *Фотона М-3* имела место эволюция прецессии — кинетический момент спутника медленно возрастал [3]. Кроме того, в начале формирования регулярной прецессии *Фотон М-3* представлял собой гиростат с гиростатическим моментом, направленным примерно вдоль оси x_1 и создаваемым центрифугой. Именно к этой части полета относится отрезок времени на рис. 4, 5. Через несколько минут после окончания этого отрезка центрифуга была выключена.

Итак, у двух значительно отличающихся друг от друга спутников (отношение осевого момента инерции к экваториальному у станции *Мир* составляло 0.66, а у *Фотона М-3* — 0.26; масса станции была более 100 т, масса *Фотона М-3* — несколько менее 7 т) вращательные движения оказались похожими и довольно специальными. Ниже существование таких движений объясняется в рамках достаточно простой модели. Спутник считается осесимметрич-

ным гиростатом с гиростатическим моментом, направленным вдоль оси симметрии. В частности, гиростатический момент может быть равным нулю. Орбита спутника — круговая и неизменна в абсолютном пространстве. На спутник действует гравитационный момент. Разыскиваются периодические движения оси симметрии спутника в абсолютном пространстве, похожие на движение оси x_1 станции *Мир* и спутника *Фотон М-3*.

Отметим существенные стороны выбранной постановки задачи. Во-первых, периодические движения рассматриваются в абсолютном пространстве. В случае круговой орбиты более естественно рассматривать периодические движения относительно орбитальной системы координат. Уравнения движения спутника, записанные в этой системе, автономны, и период их решений заранее не фиксируется. В такой ситуации периодические решения уравнений движения образуют однопараметрические семейства (произвольный сдвиг по времени не учитываем). При отыскании периодических движений в абсолютном пространстве приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями, правые части которых явно содержат время и имеют по нему заданный период. Периодические решения таких уравнений являются изолированными.

Во-вторых, ниже рассматриваются только периодические движения оси симметрии спутника. На первый взгляд это — существенное сужение постановки задачи. Однако периодические движения в определенном смысле плотны во множестве всех представляющих интерес движений. В частности, почти любое движение указанного выше типа можно на фиксированном отрезке времени с любой заданной точностью аппроксимировать периодическим движением с достаточно большим периодом. Непериодические движения предполагается исследовать впоследствии.

2. Уравнения движения оси симметрии спутника. Рассмотрим спутник, представляющий собой осесимметричный гиростат, центр масс которого движется по неизменной круговой орбите вокруг неподвижного притягивающего центра. Гиростатический момент спутника — постоянный и направлен вдоль его оси материальной симметрии. Для описания вращательного движения спутника введём две правые декартовы системы координат. Инерциальная система $Z_1Z_2Z_3$ связана с орбитой спутника: ось Z_2 перпендикулярна ее плоскости. Система $x_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Ось x_1 — ось материальной симметрии спутника.

Положение системы $x_1x_2x_3$ относительно системы $Z_1Z_2Z_3$ зададим введенными выше углами γ , δ и β . Матрицу перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $Z_1Z_2Z_3$ обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, a_{ij} — косинус угла между осями Z_i и x_j ,

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{21} &= \sin \beta, \\ a_{12} &= \cos \delta \sin \gamma + \sin \delta \sin \beta \cos \gamma, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{13} &= \cos \delta \cos \gamma - \sin \delta \sin \beta \sin \gamma, & a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, \\
a_{32} &= -\sin \delta \sin \gamma + \cos \delta \sin \beta \cos \gamma, \\
a_{33} &= -\sin \delta \cos \gamma - \cos \delta \sin \beta \sin \gamma.
\end{aligned}$$

Дифференцирование по времени t будем обозначать точкой. Полагаем, что в момент $t = 0$ радиус-вектор спутника относительно притягивающего центра направлен вдоль оси Z_2 .

Компоненты абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $x_1x_2x_3$ обозначим ω_1 , ω_2 и ω_3 . С угловыми скоростями $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$ и $\dot{\beta}$ они связаны соотношениями

$$\omega_1 = \dot{\delta}a_{21} + \dot{\gamma}, \quad \omega_2 = \dot{\delta}a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma, \quad \omega_3 = \dot{\delta}a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma.$$

Введём новые переменные

$$\Omega_2 = \omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma, \quad \Omega_3 = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma.$$

Величины Ω_2 и Ω_3 представляют собой проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Резаля, которые получаются из осей x_2 и x_3 при $\gamma = 0$. С использованием новых переменных производные $\dot{\gamma}$, $\dot{\delta}$ и $\dot{\beta}$ можно представить следующим образом

$$\dot{\gamma} = \omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{\delta} = \frac{\Omega_2}{\cos \beta}, \quad \dot{\beta} = \Omega_3. \quad (1)$$

Динамические уравнения Эйлера для спутника-гиростата, испытывающего действие гравитационного момента, имеют вид

$$I_1 \dot{\omega}_1 = 0, \quad I_2 \dot{\omega}_2 + [(I_1 - I_2)\omega_1 + G]\omega_3 = 3\omega_0^2(I_1 - I_2)l_1l_3, \quad (2)$$

$$I_2 \dot{\omega}_3 - [(I_1 - I_2)\omega_1 + G]\omega_2 = -3\omega_0^2(I_1 - I_2)l_1l_2.$$

Здесь I_1 — момент инерции спутника относительно оси x_1 , I_2 — момент инерции относительно оси x_2 и оси x_3 , G — гиростатический момент, ω_0 — угловая скорость движения по орбите, $l_j = a_{1j} \sin \omega_0 t + a_{3j} \cos \omega_0 t$ ($j = 1, 2, 3$) — компоненты орта геоцентрического радиуса-вектора спутника в системе $x_1x_2x_3$. Выражения для компонент l_j можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned}
l_1 &= -\cos(\delta - \omega_0 t) \cos \beta, \\
l_2 &= -\sin(\delta - \omega_0 t) \sin \gamma + \cos(\delta - \omega_0 t) \sin \beta \cos \gamma, \\
l_3 &= -\sin(\delta - \omega_0 t) \cos \gamma - \cos(\delta - \omega_0 t) \sin \beta \sin \gamma.
\end{aligned}$$

В уравнениях (2) удобно от переменных ω_2 , ω_3 к переменным Ω_2 , Ω_3 . Чтобы выполнить такую замену, возьмем линейные комбинации второго и

третьего уравнений (2) с коэффициентами $\cos \gamma$, $-\sin \gamma$ и $\sin \gamma$, $\cos \gamma$. Учитывая соотношения

$$\dot{\omega}_2 \cos \gamma - \dot{\omega}_3 \sin \gamma = \dot{\Omega}_2 + \dot{\gamma} \Omega_3 = \dot{\Omega}_2 + (\omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_3,$$

$$\dot{\omega}_2 \sin \gamma + \dot{\omega}_3 \cos \gamma = \dot{\Omega}_3 - \dot{\gamma} \Omega_2 = \dot{\Omega}_3 - (\omega_1 - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_2$$

(здесь использовано первое уравнение (1)), получим

$$\dot{\Omega}_2 = -(h - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_3 - 3\omega_0^2(1 - \lambda) \cos(\delta - \omega_0 t) \sin(\delta - \omega_0 t) \cos \beta,$$

$$\dot{\Omega}_3 = (h - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_2 - 3\omega_0^2(1 - \lambda) \cos^2(\delta - \omega_0 t) \sin \beta \cos \beta, \quad (3)$$

$$h = \frac{I_1 \omega_1 + G}{I_2}, \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}.$$

В силу первого уравнения $\omega_1 = \text{const}$, поэтому ниже величина h рассматривается как параметр наряду с параметром λ . Далее будем изучать не движения спутника, а движения одной лишь его оси x_1 . Такие движения описываются системой, образованной последними двумя уравнениями (1) и уравнениями (3). Эта система не содержит угла γ и является замкнутой. В силу сказанного уравнение для γ в дальнейшем не рассматривается.

В системе, описывающей движение оси x_1 , перейдем к безразмерным переменным и параметрам. Введем безразмерное время $\omega_0 t$, безразмерные угловые скорости $\omega_0^{-1} \Omega_2$, $\omega_0^{-1} \Omega_3$ и безразмерный параметр $\omega_0^{-1} h$. За безразмерными величинами сохраним прежние обозначения. В результате получим систему

$$\dot{\delta} = \frac{\Omega_2}{\cos \beta}, \quad \dot{\beta} = \Omega_3,$$

$$\dot{\Omega}_2 = -(h - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_3 - 3(1 - \lambda) \cos(\delta - t) \sin(\delta - t) \cos \beta, \quad (4)$$

$$\dot{\Omega}_3 = (h - \Omega_2 \operatorname{tg} \beta) \Omega_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2(\delta - t) \cos \beta \sin \beta.$$

Поскольку $2I_2 > I_1 > 0$ (первое неравенство — "неравенство треугольника" для моментов инерции спутника), физически допустимые значения параметра λ лежат в интервале $0 < \lambda < 2$.

Укажем некоторые свойства уравнений (4). Правые части этих уравнений периодически зависят от времени с периодом π . Эти уравнения допускают первый интеграл (обобщенный интеграл энергии)

$$H = \frac{1}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_3^2) - \Omega_2 \cos \beta - h \sin \beta - \frac{3}{2}(1 - \lambda) \cos^2(\delta - t) \cos^2 \beta$$

и инвариантны относительно замены переменных

$$t \rightarrow -t, \quad \delta \rightarrow -\delta, \quad \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3. \quad (5)$$

Уравнения (4) выдерживают также преобразование

$$h \rightarrow -h, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad \Omega_3 \rightarrow -\Omega_3. \quad (6)$$

3. Постановка задачи о периодических движениях. Порождающие решения. Пусть m — натуральное число. Рассмотрим задачу об отыскании πm -периодических решений системы (4). В общем случае поиск таких решений приводит к необходимости решать для системы (4) периодическую краевую задачу

$$\delta(0) = \delta(\pi m), \quad \beta(0) = \beta(\pi m), \quad \Omega_2(0) = \Omega_2(\pi m), \quad \Omega_3(0) = \Omega_3(\pi m).$$

Однако свойство этой системы выдерживать преобразование (5) позволяет искать ее πm -периодические решения специального вида, определяемые краевыми условиями

$$\delta(0) = \Omega_3(0) = \delta\left(\frac{\pi m}{2}\right) = \Omega_3\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 0. \quad (7)$$

Всякое решение задачи (4), (7) можно продолжить на всю действительную ось как решение системы (4) с помощью соотношений

$$\delta(-t) = -\delta(t), \quad \beta(-t) = \beta(t), \quad \Omega_2(-t) = \Omega_2(t), \quad \Omega_3(-t) = -\Omega_3(t)$$

и условий πm -периодичности. Периодические решения системы (4), определяемые краевыми условиями (7), называются симметричными.

При $\lambda = 1$ уравнения (4) допускают три первых интеграла

$$\begin{aligned} K_1 &= -h \sin \delta \cos \beta + \Omega_2 \sin \delta \sin \beta + \Omega_3 \cos \delta, \\ K_2 &= h \sin \beta + \Omega_2 \cos \beta, \\ K_3 &= -h \cos \delta \cos \beta + \Omega_2 \cos \delta \sin \beta - \Omega_3 \sin \delta \end{aligned} \quad (8)$$

и является интегрируемыми. Величины K_i пропорциональны компонентам собственного кинетического момента спутника в системе $Z_1 Z_2 Z_3$. Существование выписанных первых интегралов обусловлено тем обстоятельством, что на спутник с шаровым тензором инерции гравитационный момент не действует (в обычно рассматриваемом приближении).

Решения уравнений (4) в случае $\lambda = 1$ будем использовать в качестве порождающих при отыскании решений краевой задачи (4), (7). Согласно (7) порождающие решения должны иметь $K_1 = 0$. Чтобы выписать эти решения в явном виде, рассмотрим направляющие косинусы a_{j1} ($j = 1, 2, 3$) оси x_1 в системе $Z_1 Z_2 Z_3$ и дифференциальные уравнения Пуассона для них. Уравнения выведем так. Из соотношений (8) при $K_1 = 0$ найдем

$$\Omega_2 = K_2 \cos \beta + K_3 \cos \delta \sin \beta, \quad \Omega_3 = -K_3 \sin \delta. \quad (9)$$

Подставив эти выражения в последние два уравнения (1), получим

$$\dot{\delta} = K_2 + K_3 \cos \delta \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{\beta} = -K_3 \sin \delta.$$

Дифференцируя по времени формулы для величин a_{j1} из п. 2 с учетом последних соотношений, имеем

$$\dot{a}_{11} = K_2 a_{31} - K_3 a_{21}, \quad \dot{a}_{21} = K_3 a_{11} \quad \dot{a}_{31} = -K_2 a_{11}.$$

Выписанные дифференциальные уравнения — линейные с постоянными коэффициентами. Их решение, удовлетворяющее условиям $a_{11}(0) = 0$ (следует из (7)) и $a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$, имеет вид

$$a_{11} = A \sin \omega_p t, \quad a_{21} = \frac{hK_2}{\omega_p^2} - \frac{AK_3}{\omega_p} \cos \omega_p t, \quad a_{31} = \frac{hK_3}{\omega_p^2} + \frac{AK_2}{\omega_p} \cos \omega_p t,$$

$$\omega_p = \sqrt{K_2^2 + K_3^2}, \quad A = \pm \sqrt{1 - \frac{h^2}{\omega_p^2}}.$$

Введем постоянные углы θ и φ с помощью соотношений

$$K_2 = \omega_p \sin \theta, \quad K_3 = \omega_p \cos \theta, \quad h = \omega_p \cos \varphi, \quad A = \sin \varphi.$$

Тогда полученное решение можно представить следующим образом

$$\begin{aligned} a_{11} &= \sin \varphi \sin \omega_p t, \\ a_{21} &= \cos \varphi \sin \theta - \sin \varphi \cos \theta \cos \omega_p t, \\ a_{31} &= \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \theta \cos \omega_p t. \end{aligned}$$

Смысл введенных углов: θ — угол между вектором кинетического момента спутника и осью Z_3 , φ — угол полураствора конуса, по которому ось x_1 движется вокруг вектора кинетического момента спутника. Разрешив полученные выражения для a_{j1} относительно δ и β и воспользовавшись формулами (9), получим искомое решение системы (4) в случае $\lambda = 1$.

Система (4) имеет особенность при $\cos \beta = 0$. Эта особенность не существенна для достижения поставленной в п. 1 цели, но усложняет аккуратные формулировки некоторых приводимых ниже утверждений. Кроме того, формулы пересчета величин a_{j1} в углы δ и β также имеют особенность при $\cos \beta = 0$, т. е. при $|a_{21}| = 1$. Чтобы не иметь дела с этой особенностью, ниже полагаем $|\sin(\theta \pm \varphi)| < 1$. Это неравенство означает, что ось Z_2 не лежит на конусе, по которому движется ось x_1 .

Найденное решение системы (4) при $\lambda = 1$ удовлетворяет условиям (7), относящимся к точке $t = 0$, и зависит от двух произвольных постоянных: ω_p и θ . Чтобы удовлетворить условиям (7), относящимся к точке $t = \pi t/2$,

следует взять $\omega_p = 2k/m$, где k — натуральное число. Для удобства числа k и m будем считать взаимно простыми. Параметр θ остается произвольным. Полученное решение задачи (4), (7) обозначим

$$\delta = \delta_0(t, \theta), \quad \beta = \beta_0(t, \theta), \quad \Omega_2 = \Omega_{20}(t, \theta), \quad \Omega_3 = \Omega_{30}(t, \theta). \quad (10)$$

Введем малый параметр $\varepsilon = 1 - \lambda$ и будем искать решения краевой задачи (4), (7), определенные при достаточно малом $|\varepsilon|$ и совпадающие при $\varepsilon = 0$ с каким-либо решением (10). Сначала проверим, применима ли в данном случае теорема Пуанкаре [4]. Систему (4), линеаризованную при $\varepsilon = 0$ в окрестности решения (10), обозначим

$$\dot{y} = A(t, \theta)y, \quad y = (\Delta\delta, \Delta\beta, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3)^T. \quad (11)$$

Явный вид этой системы не понадобится. Рассмотрим для системы (11) краевую задачу (ср. (7))

$$\Delta\delta(0) = \Delta\Omega_3(0) = \Delta\delta\left(\frac{\pi m}{2}\right) = \Delta\Omega_3\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 0. \quad (12)$$

Легко видеть, что такая задача допускает нетривиальное решение

$$y = \left(\frac{\partial\delta_0(t, \theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial\beta_0(t, \theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial\Omega_{20}(t, \theta)}{\partial\theta}, \frac{\partial\Omega_{30}(t, \theta)}{\partial\theta} \right)^T \equiv \Phi(t, \theta).$$

Следовательно, основное условие теоремы Пуанкаре в рассматриваемой задаче не выполнено. В этой задаче имеет место критический случай.

4. Построение симметричных периодических решений методом Хельдера. Приведем несколько вспомогательных утверждений. Используя явный вид общего решения системы (4) при $\lambda = 1$, можно доказать, что в случае $\cos\varphi \sin\varphi \neq 0$ задача (11), (12) имеет единственное (с точностью до множителя) нетривиальное решение $y = \Phi(t, \theta)$. Ось x_1 при $\sin\varphi = 0$ параллельна вектору кинетического момента спутника, а при $\cos\varphi = 0$ перпендикулярна ему. Эти случаи требуют отдельного анализа, которым здесь заниматься не будем. Ниже полагаем, что в порождающем решении $\cos\varphi \sin\varphi \neq 0$.

Наряду с задачей (11), (12) рассмотрим сопряженную ей задачу

$$\begin{aligned} \dot{\psi} + \psi A(t, \theta) &= 0, \quad \psi = (\psi_\delta, \psi_\beta, \psi_{\Omega_2}, \psi_{\Omega_3}), \\ \psi_\beta(0) = \psi_{\Omega_2}(0) = \psi_\beta\left(\frac{\pi m}{2}\right) &= \psi_{\Omega_2}\left(\frac{\pi m}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Эта задача также имеет единственное нетривиальное решение, и его можно взять в виде

$$\psi = \left(\frac{\partial K_1}{\partial\delta}, \frac{\partial K_1}{\partial\beta}, \frac{\partial K_1}{\partial\Omega_2}, \frac{\partial K_1}{\partial\Omega_3} \right).$$

Частные производные первой функции (8) здесь вычисляются на решении (10). Явная форма выписанного решения

$$\psi = [\omega_p \cos \theta, \omega_p \sin \theta \sin \delta_0(t, \theta), \sin \delta_0(t, \theta) \sin \beta_0(t, \theta), \cos \delta_0(t, \theta)] \equiv \Psi(t, \theta).$$

Поясним способ использования функций $\Phi(t, \theta)$ и $\Psi(t, \theta)$. Рассмотрим краевую задачу (12) для линейной неоднородной системы (ср. (11))

$$\dot{y} = A(t, \theta)y + F(t).$$

Эта задача разрешима в том и только в том случае, когда

$$\int_0^{\pi m/2} \Psi(t, \theta)F(t) dt = 0.$$

Если выписанное условие выполнено, то рассматриваемая задача имеет единственное решение, удовлетворяющее условию

$$\int_0^{\pi m/2} \Phi^T(t, \theta)y dt = 0.$$

Вернемся к системе (4). Замена переменных

$$\begin{aligned} \Delta\delta &= \delta - \delta_0(t, \theta), & \Delta\beta &= \beta - \beta_0(t, \theta), \\ \Delta\Omega_2 &= \Omega_2 - \Omega_{20}(t, \theta), & \Delta\Omega_3 &= \Omega_3 - \Omega_{30}(t, \theta) \end{aligned}$$

переводит эту систему в систему

$$\dot{y} = A(t, \theta)y + f(t, y, \theta, \varepsilon), \quad (13)$$

$$y = (\Delta\delta, \Delta\beta, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3)^T, \quad f(t, y, \theta, \varepsilon) = O(y^T y + |\varepsilon|).$$

Задача теперь состоит в отыскании решений краевой задачи (12) для системы (13), определенных при достаточно малом $|\varepsilon|$ и совпадающих при $\varepsilon = 0$ в нуль. Для решения этой задачи воспользуемся методом, предложенным Хёльдером [5] и развитым впоследствии Льюисом [6], Хейлом [7] и др.

Рассмотрим краевую задачу (12) для вспомогательной системы

$$\dot{y} = A(t, \theta)y + f(t, y, \theta, \varepsilon) - \Psi^T(t, \theta)p, \quad \int_0^{\pi m/2} \Phi^T(t, \theta)y dt = 0. \quad (14)$$

Здесь y — неизвестная функция, p — неизвестная постоянная. Доказывается, что при достаточно малом $|\varepsilon|$ задача (12), (14) имеет единственное решение

$y = y_*(t, \theta, \varepsilon)$, $p = p_*(\theta, \varepsilon)$, гладким образом зависящее от θ и ε и удовлетворяющее условию $y_*(t, \theta, 0) \equiv 0$, $p_*(\theta, 0) = 0$.

Уравнение относительно θ

$$p_*(\theta, \varepsilon) = 0 \quad (15)$$

называется бифуркационным. Пусть $\theta = \vartheta(\varepsilon)$ — корень этого уравнения, гладким образом зависящий от ε . Тогда $y = y_*[t, \vartheta(\varepsilon), \varepsilon]$ — решение системы (13), переходящее при $\varepsilon = 0$ в нуль. Можно доказать, что для любого решения задачи (4), (7), существующего при достаточно малом $|\varepsilon|$ и переходящего при $\varepsilon = 0$ в решение (10) с $\theta = \theta_0$, существует функция $\theta = \vartheta(\varepsilon)$ такая, что $\vartheta(0) = \theta_0$, $p_*[\vartheta(\varepsilon), \varepsilon] \equiv 0$ и разность этого решения задачи (4), (7) и решения (10) при $\theta = \vartheta(\varepsilon)$ равна $y_*[t, \vartheta(\varepsilon), \varepsilon]$.

В действительности все встретившиеся выше функции аналитически зависят от всех своих аргументов, поэтому решение вспомогательной краевой задачи (12), (14) представимо рядами

$$y_*(t, \theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(t, \theta), \quad p_*(\theta, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n p_n(\theta).$$

Способ вычисления коэффициентов этих рядов аналогичен способу вычисления рядов, представляющих периодические решения в теореме Пуанкаре. Продемонстрируем его на примере вычисления коэффициентов $y_1(t, \theta)$, $p_1(\theta)$. Подстановка выписанных рядов в соотношения (14) и выделение в них членов $\sim \varepsilon$ дает

$$\dot{y}_1 = A(t, \theta)y_1 + \frac{\partial f(t, 0, \theta, 0)}{\partial \varepsilon} - \Psi^T(t, \theta)p_1, \quad \int_0^{\pi m/2} \Phi^T(t, \theta)y_1 dt = 0,$$

причем функция y_1 должна удовлетворять краевым условиям (12). Чтобы краевая задача, определяющая эту функцию, была разрешима, необходимо выполнение условия (см. выше)

$$\int_0^{\pi m/2} \Psi(t, \theta) \left[\frac{\partial f(t, 0, \theta, 0)}{\partial \varepsilon} - \Psi^T(t, \theta)p_1 \right] dt = 0.$$

Отсюда находим

$$p_1(\theta) = \left(\int_0^{\pi m/2} \Psi(t, \theta)\Psi^T(t, \theta) dt \right)^{-1} \int_0^{\pi m/2} \Psi(t, \theta) \frac{\partial f(t, 0, \theta, 0)}{\partial \varepsilon} dt.$$

Интегральное соотношение для y_1 обеспечивает выбор этой функции единственным образом.

Непосредственный подсчет дает

$$\Psi(t, \theta) \frac{\partial f(t, 0, \theta, 0)}{\partial \varepsilon} = \frac{3}{2} a_{21} a_{31} (1 + \cos 2t) + \frac{3}{2} a_{11} a_{21} \sin 2t.$$

Вычисление функции $p_1(\theta)$ не представляет труда, но задачу можно еще более упростить, если заметить, что случаи $\omega_p = \pm 1$ и $\omega_p = \pm 2$ не представляют интереса для интерпретации наблюдений, описанных в п. 1. Указанные значения ω_p слишком малы по абсолютной величине. При $|\omega_p| > 2$ имеем (с точностью до отличного от нуля множителя)

$$p_1(\theta) = \sin \theta \cos \theta (3 \cos^2 \varphi - 1).$$

Уравнение (15) можно в данном случае преобразовать к виду $p_1(\theta) = O(\varepsilon)$. Если $\cos^2 \varphi \neq 1/3$, то уравнение (15) имеет два представляющих интерес корня $\vartheta_1(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ и $\vartheta_2(\varepsilon) = \pi + O(\varepsilon)$. Изучение случая $\cos^2 \varphi = 1/3$ требует расчета $p_2(\theta)$ и, возможно, коэффициентов $p_k(\theta)$ при $k > 2$.

5. Численное построение периодических решений. Численное построение решений краевой задачи (4), (7) проводилось методом продолжения по параметру. Параметрами служили λ и h . Ниже для определенности будем говорить о λ . В начале расчетов решения всегда продолжались по этому параметру. Используемый вариант метода продолжения описан в [5]. Он основан на решении краевых задач (4), (7) методом стрельбы. При этом начальные условия $\beta(0)$, $\Omega_2(0)$ и параметр λ считались неизвестными, краевые условия (7) в точке $t = \pi m/2$ служили уравнениями для их определения. Поскольку неизвестных здесь на единицу больше, чем уравнений, удобно считать, что уравнения задают кривую L в пространстве $R^3[\beta(0), \Omega_2(0), \lambda]$. Построение кривой выполнялось с помощью процесса "прогноз-коррекция". Прогноз — шаг в направлении касательной к L . Шаг по касательной — это линейный прогноз. В алгоритме используются два прогноза: квадратичный и третьего порядка. Последний используется для фактического прогноза, а квадратичный — для выбора шага прогноза по критерию локальной погрешности. Коррекция — это решение задачи методом стрельбы с использованием прогнозной точки как начального приближения. Здесь используется метод Ньютона, причем каждый шаг выполняется в направлении, перпендикулярном к L . Для успешной работы алгоритма продолжения по параметру необходимо, чтобы почти во всех точках кривой L матрица

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \beta(T)}{\partial \beta(0)} & \frac{\partial \beta(T)}{\partial \Omega_2(0)} & \frac{\partial \beta(T)}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \Omega_2(T)}{\partial \beta(0)} & \frac{\partial \Omega_2(T)}{\partial \Omega_2(0)} & \frac{\partial \Omega_2(T)}{\partial \lambda} \end{array} \right\|, \quad T = \frac{\pi m}{2} \quad (16)$$

имела полный ранг. Для вычисления этой матрицы интегрируются уравнения в вариациях.

В качестве начальной точки при вычислении кривой L удобно было бы использовать ее точку

$$\beta(0) = \arcsin \sqrt{1 - \left(\frac{mh}{2k}\right)^2}, \quad \Omega_2(0) = -\frac{2k}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{mh}{2k}\right)^2}, \quad \lambda = 1,$$

отвечающую порождающему решению (10). Но в этой точке матрица (16) имеет неполный ранг. В качестве начальной точки принималась точка, задаваемая выписанными соотношениями для $\beta(0)$, $\Omega_2(0)$ и $\lambda = 0.99$. Работа алгоритма продолжения начиналась с этапа коррекции. Полученные с помощью продолжения по λ решения продолжались по параметру h . В силу инвариантности уравнений (4) относительно преобразования (6) решения этой задачи достаточно вычислить при $h \geq 0$.

Примеры продолжения порождающего решения по параметрам λ и h в случае $m = 1$, $k = 4$ приведены на рис. 6, 7 и в левых частях рис. 8 — 10. Здесь результаты продолжения представлены графиками зависимости ненулевых начальных условий решения краевой задачи от одного из этих параметров при фиксированном значении другого. Примеры найденных периодических решений приведены на рис. 11 — 13. Решения построены на отрезке $0 \leq t \leq \pi$ и представлены графиками зависимости от времени переменных уравнений (2) — (4), компонент вектора кинетического момента в системе $Z_1 Z_2 Z_3$ и проекциями годографа орта оси x_1 на плоскость $Z_1 Z_2$. Вид найденных периодических движений оси x_1 похож на движения продольной оси реальных спутников, описанных в п. 1.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений вычислялись их мультипликаторы — собственные числа матрицы монодромии соответствующей линеаризованной системы. Используя инвариантность исходной системы (4) и исследуемых решений относительно преобразования (5), можно доказать, что характеристическое уравнение этой матрицы — возвратное [7]. Представим его в виде

$$(\rho^2 - A_1 \rho + 1)(\rho^2 - A_2 \rho + 1), \quad (17)$$

где A_1 и A_2 — коэффициенты. Если A_1, A_2 действительны и $|A_1| \leq 2$, $|A_2| \leq 2$, то все корни характеристического уравнения лежат на окружности $|\rho| = 1$ и выполнены необходимые условия устойчивости исследуемого решения. В противном случае это решение неустойчиво.

В процессе продолжения по параметру решений краевой задачи в каждой вычисленной точке кривых, задающих эти решения в трехмерных пространствах начальных условий и параметра, вычислялись указанная матрица монодромии, ее собственные числа (мультипликаторы периодического

решения) и коэффициенты A_1 , A_2 в уравнении (17). Вычисление собственных чисел и коэффициентов проводилось независимо. Собственные числа находились с помощью стандартных программ линейной алгебры, коэффициенты A_1 , A_2 вычислялись по следу матрицы монодромии и сумме ее диагональных миноров второго порядка. Результаты расчетов коэффициентов A_1 , A_2 двумя способами находились в практически точном соответствии между собой. Примеры расчетов этих коэффициентов для построенных решений приведены в правых частях рис. 8 — 10. Оказалось, что эти коэффициенты действительны, а их абсолютные величины или меньше 2 или незначительно превосходят это значение. Таким образом, найденные решения устойчивы или слабо неустойчивы.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00467).

Литература

- [1] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции *Мир*. Космические исследования, 2001, т. 39, № 1, с. 27-42.
- [2] Бабкин Е.В., Беляев М.Ю., Ефимов Н.И., Сазонов В.В., Стажков В.М. Неуправляемое вращательное движение орбитальной станции *Мир* в последние месяцы ее полета. Космические исследования, 2003, т. 41, № 3, с. 285-294.
- [3] Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли. Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН № 80, 2008; Космические исследования, 2010, т. 48, № 3, с. 252-265.
- [4] Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., ГИТТЛ, 1956.
- [5] Holder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Math. Zeitschr., 1929, B.31, S.197-257.
- [6] Lewis D.C. On the Role of First Integrals in the Perturbation of Periodic Solutions. Ann. Math., 1956, vol. 63, p. 535-548.

- [7] Hale J.K. Ordinary Differential Equations. New-York, Wiley-Interscience, 1969.
- [8] Сарычев В.А., Сазонов В.В., Мельник Н.В. Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс. Космические исследования, 1980, т. 18, № 5, с. 659-677.

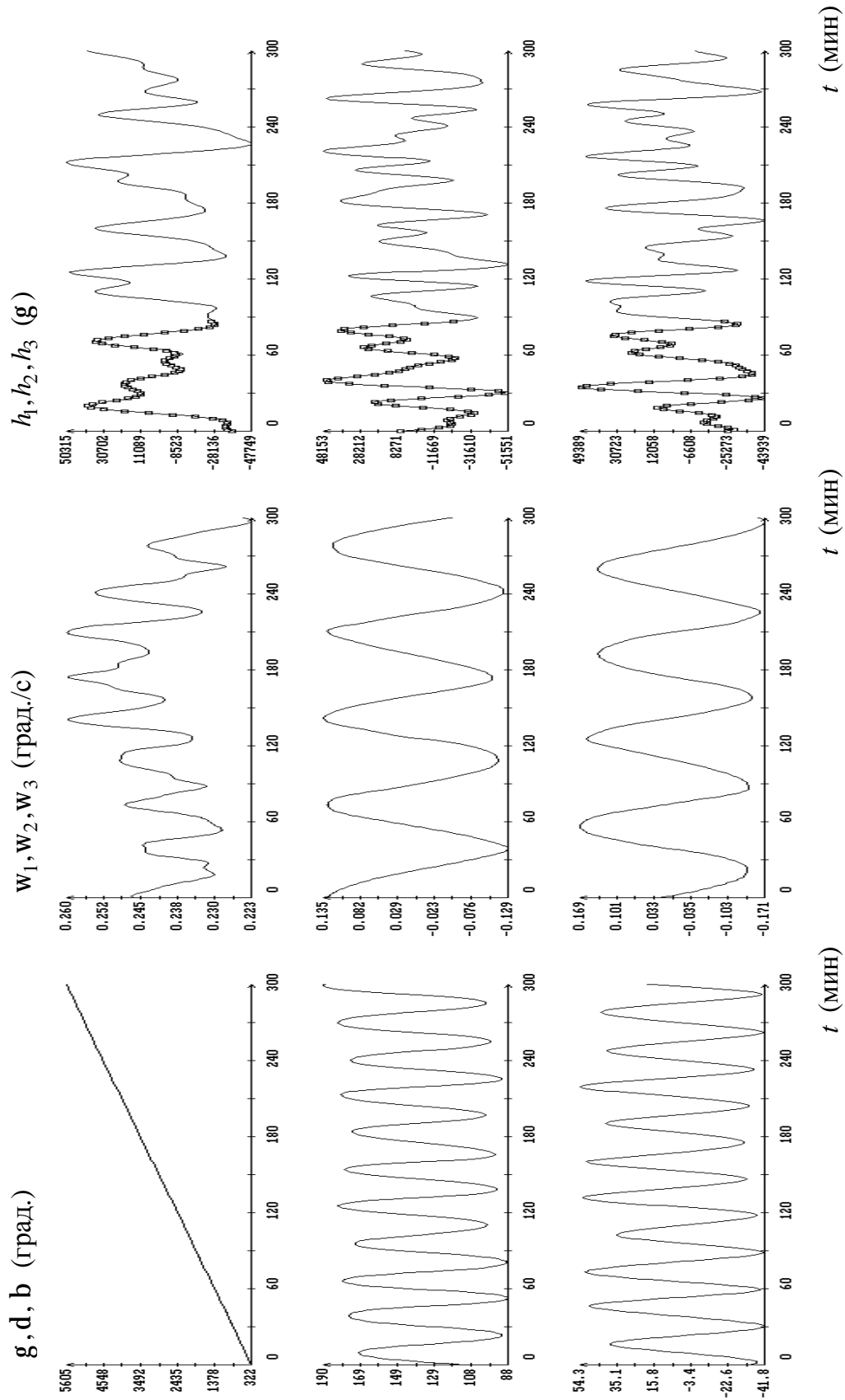


Рис. 1. Движение станции *Mir*, близкое регулярной прецессии Эйлера, момент $t = 0$ на графиках соответствует 02:15:46 ДМВ 17.02.2001.

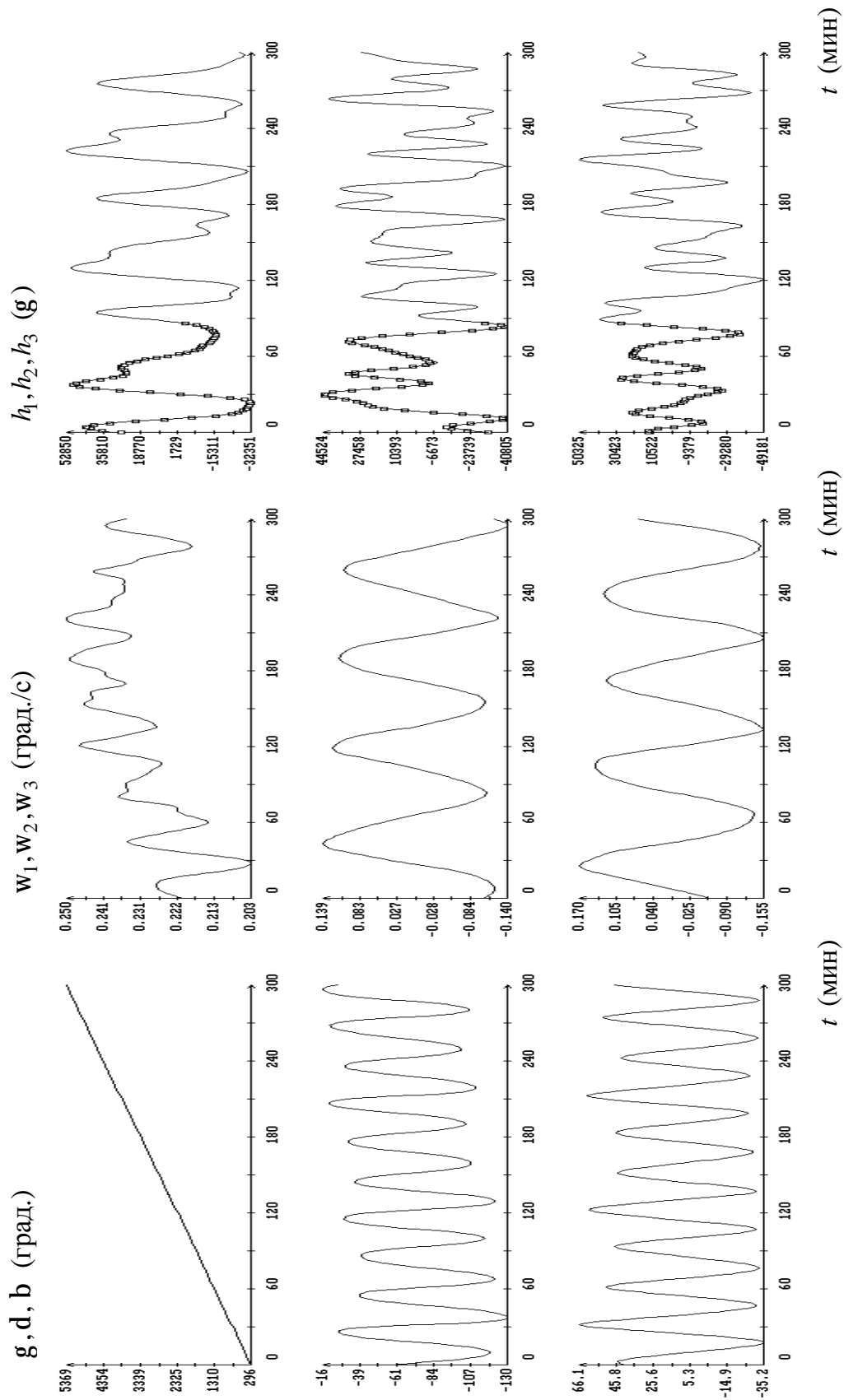


Рис. 2. Движение станции *Mir*, близкое регулярной прецессии Эйлера, момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:46:04 ДМВ 19.02.2001.

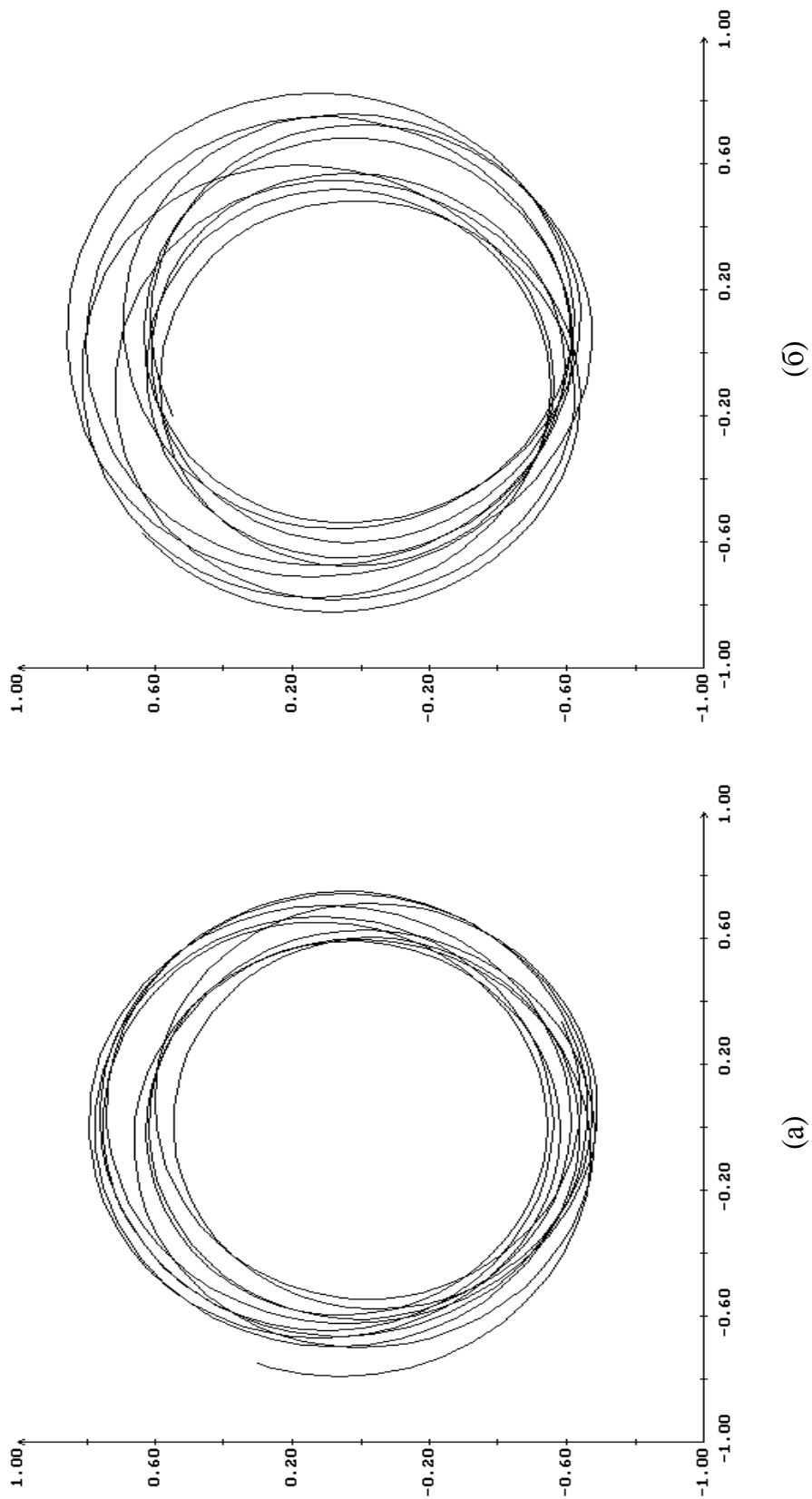


Рис. 3. Проекция годографа оси x_1 на плоскость, перпендикулярную вектору кинетического момента вращательного движения: (а) в движении 17.02.2001, (б) в движении 19.02.2001.

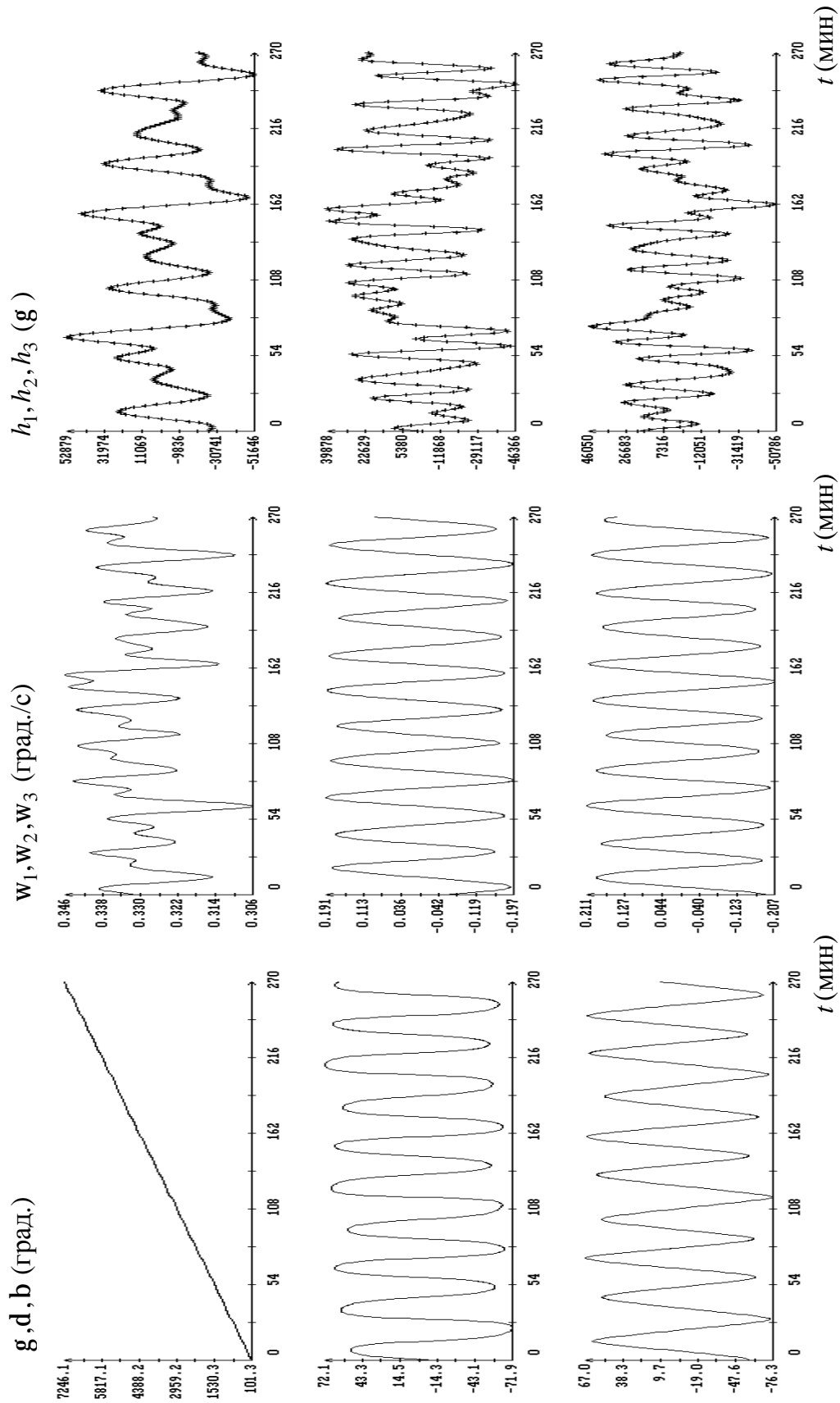


Рис. 4. Движение спутника *Фотон М-3*, близкое регулярной прецессии Эйлера, момент $t = 0$ на графиках соответствует 09:52:17 ДМВ 20.09.2007.

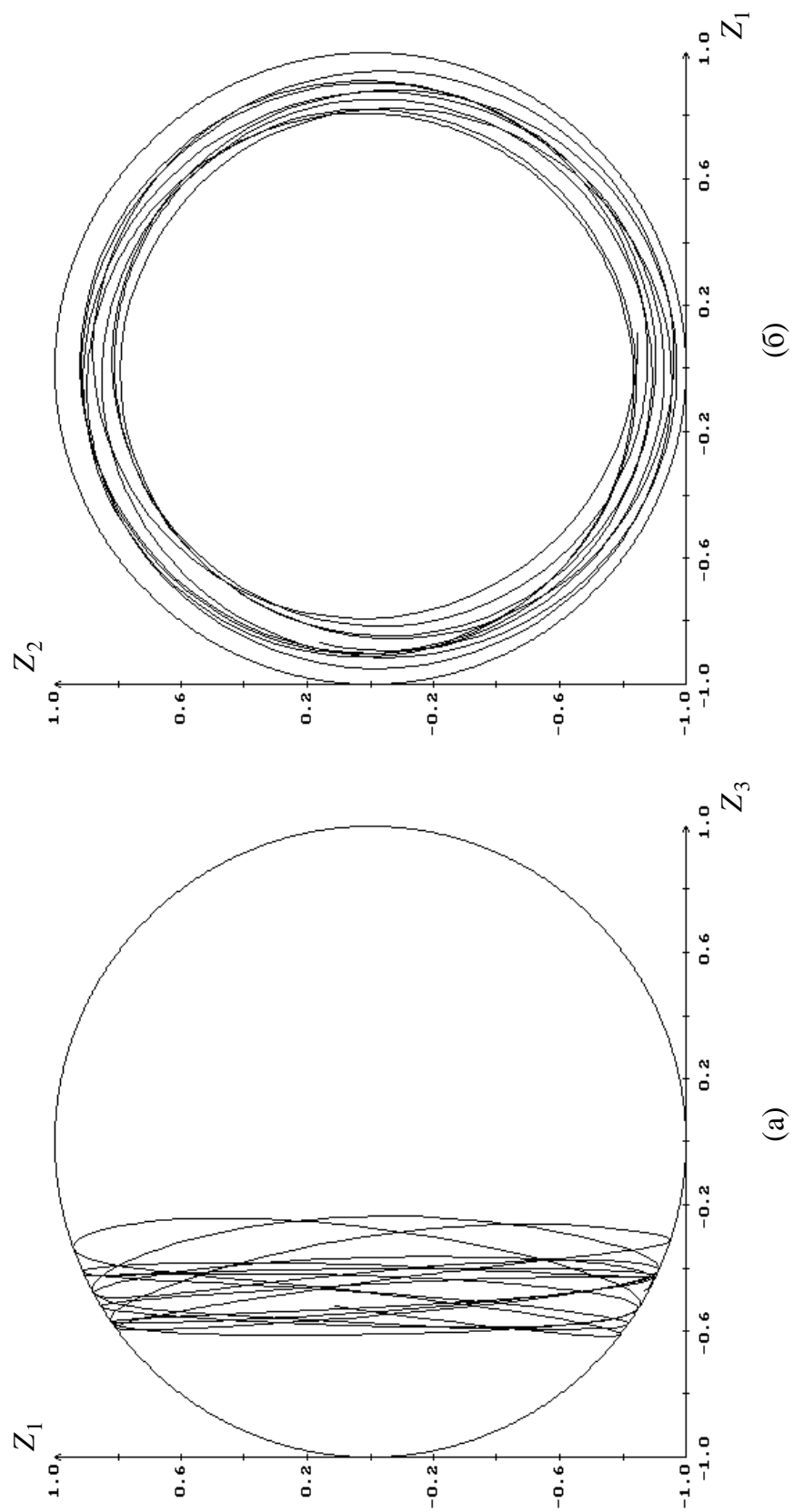


Рис. 5. Движение спутника *Фотон М-3*, проекция годографа орбиты оси x_1 на плоскость $(a) Z_1 Z_3$ (плоскость орбиты), $(б) Z_1 Z_2$.

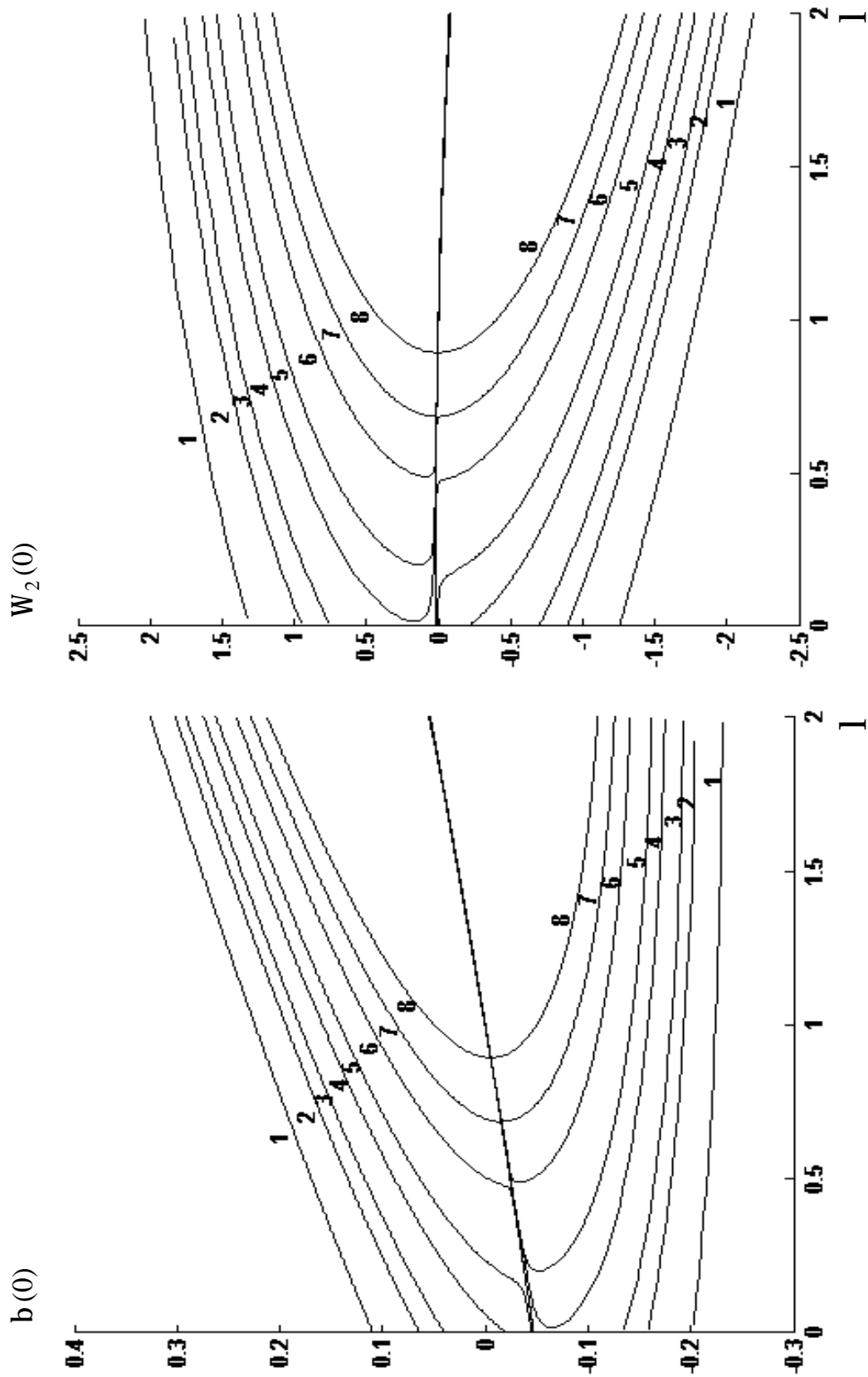


Рис. 6. Зависимость начальных условий периодических решений от l при 1) $h = 7.8$, 2) $h = 7.85$, 3) $h = 7.87$, 4) $h = 7.9$, 5) $h = 7.92$, 6) $h = 7.95$, 7) $h = 7.97$, 8) $h = 7.99$.

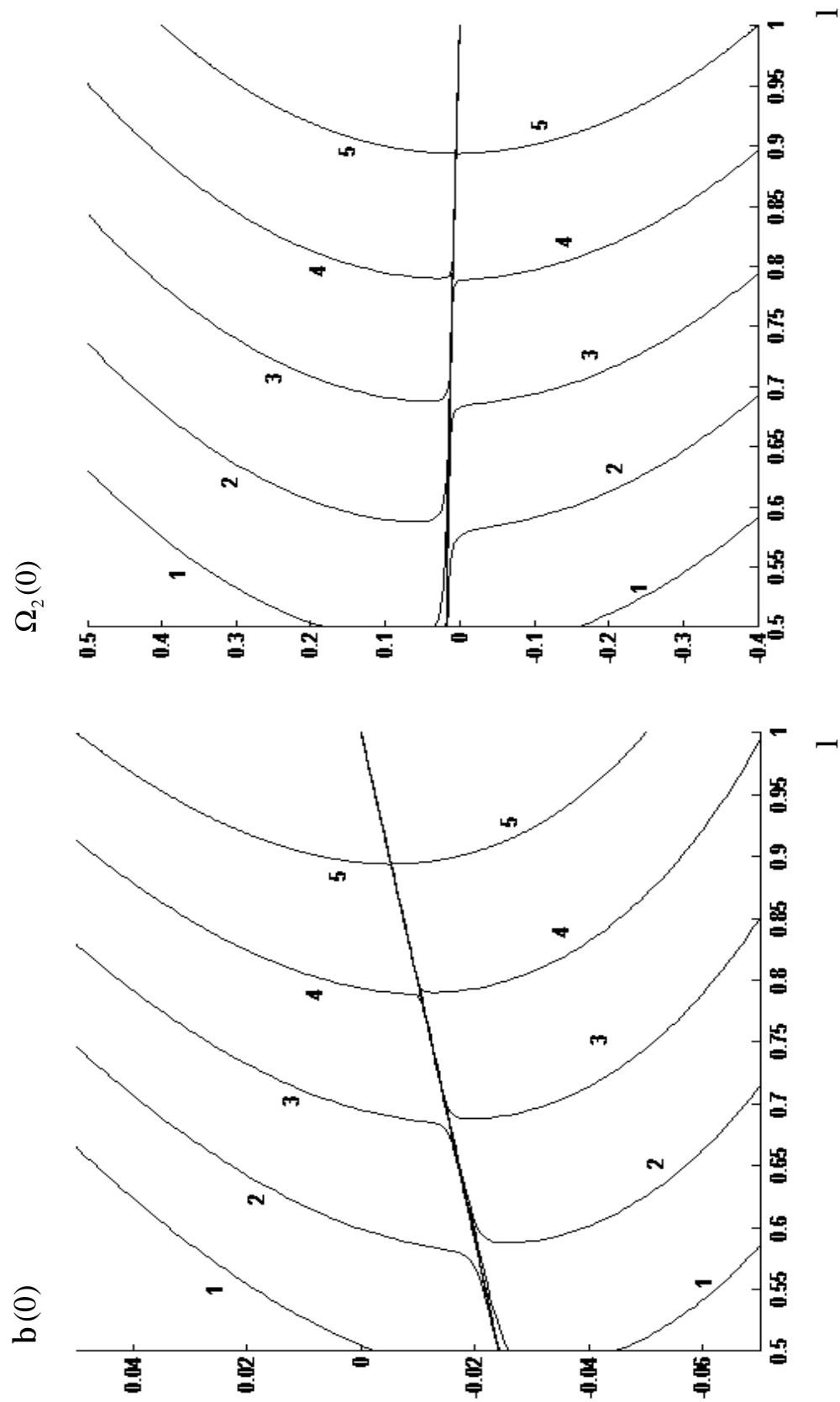


Рис. 7. Зависимость начальных условий периодических решений от I при 1) $h = 7.95$, 2) $h = 7.96$, 3) $h = 7.97$, 4) $h = 7.98$, 5) $h = 7.99$.

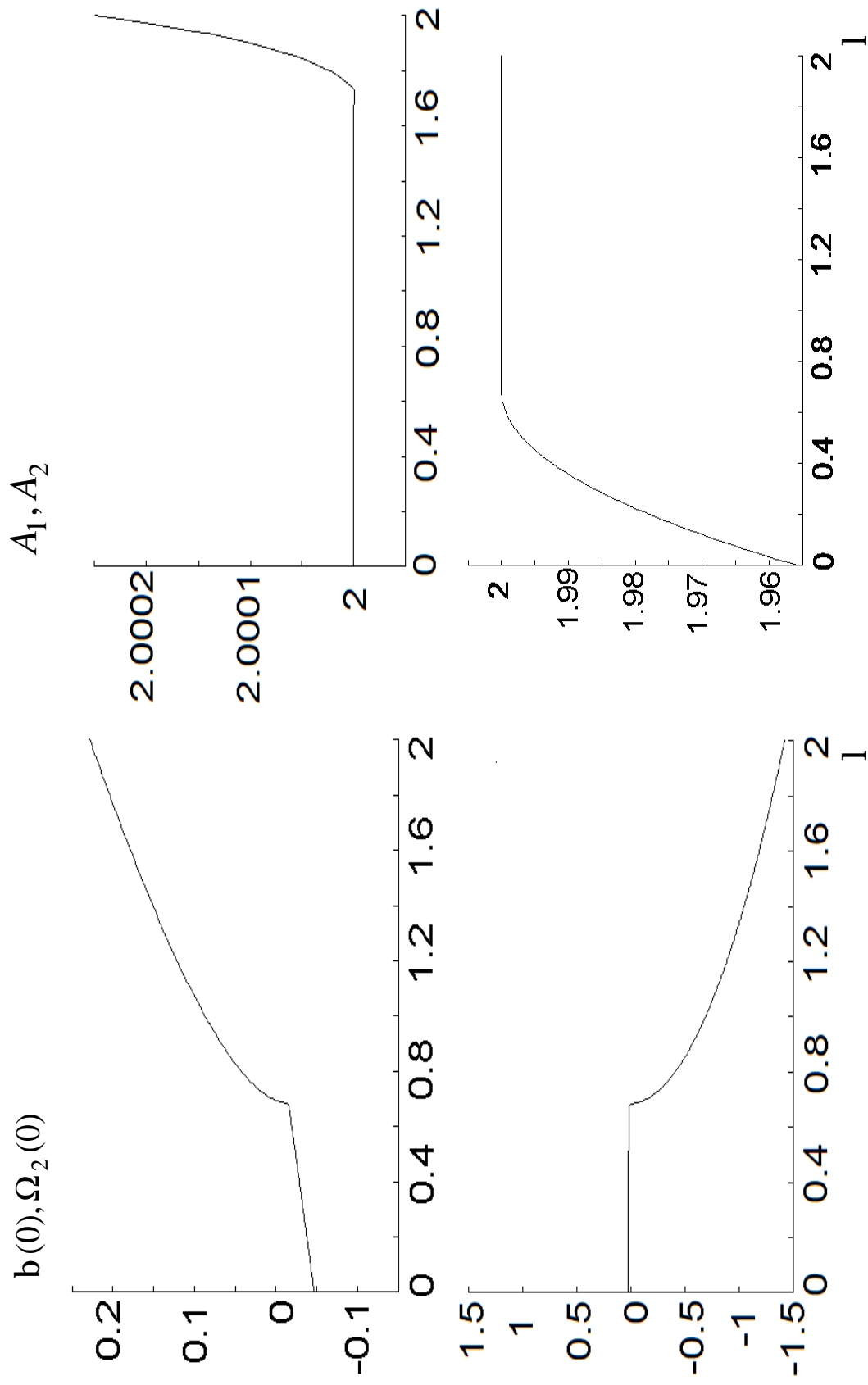


Рис. 8. Зависимость начальных условий и коэффициентов устойчивости периодических решений от l при $h = 7.97$.

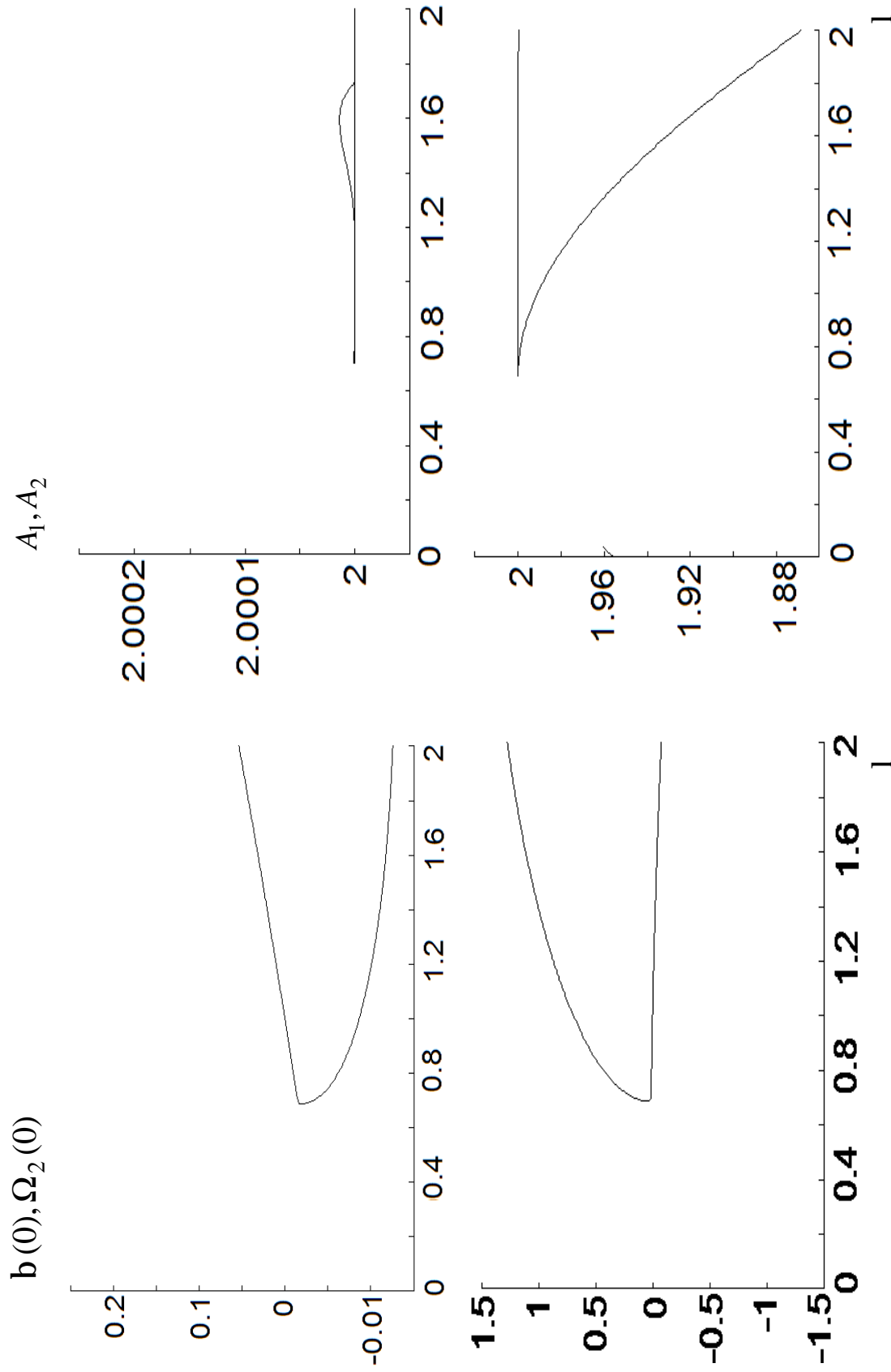


Рис. 9. Зависимость начальных условий и коэффициентов устойчивости периодических решений от I при $h = 7.97$.

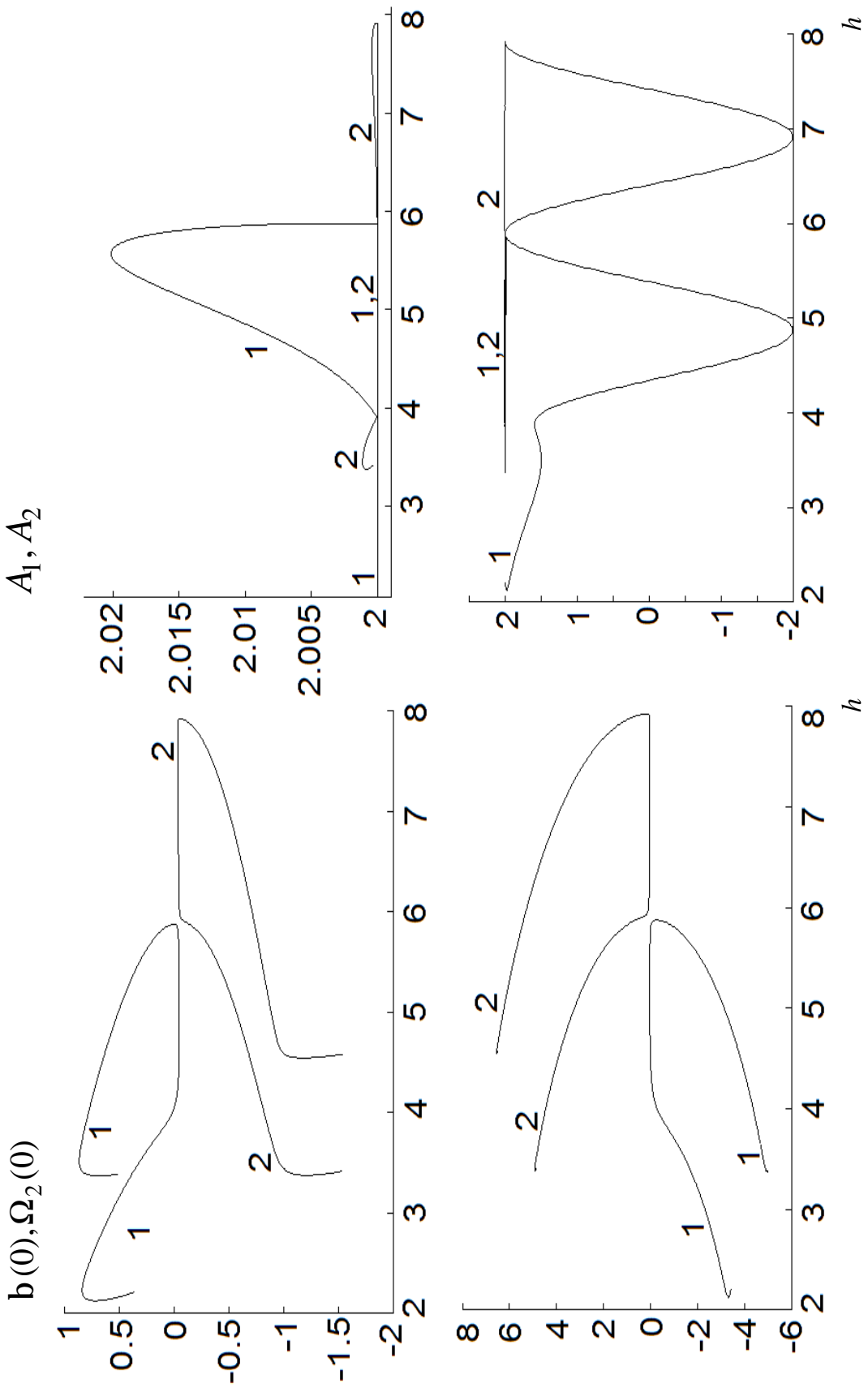


Рис. 10. Зависимость начальных условий и коэффициентов устойчивости периодических решений от h при $\Gamma = 0.261633$.

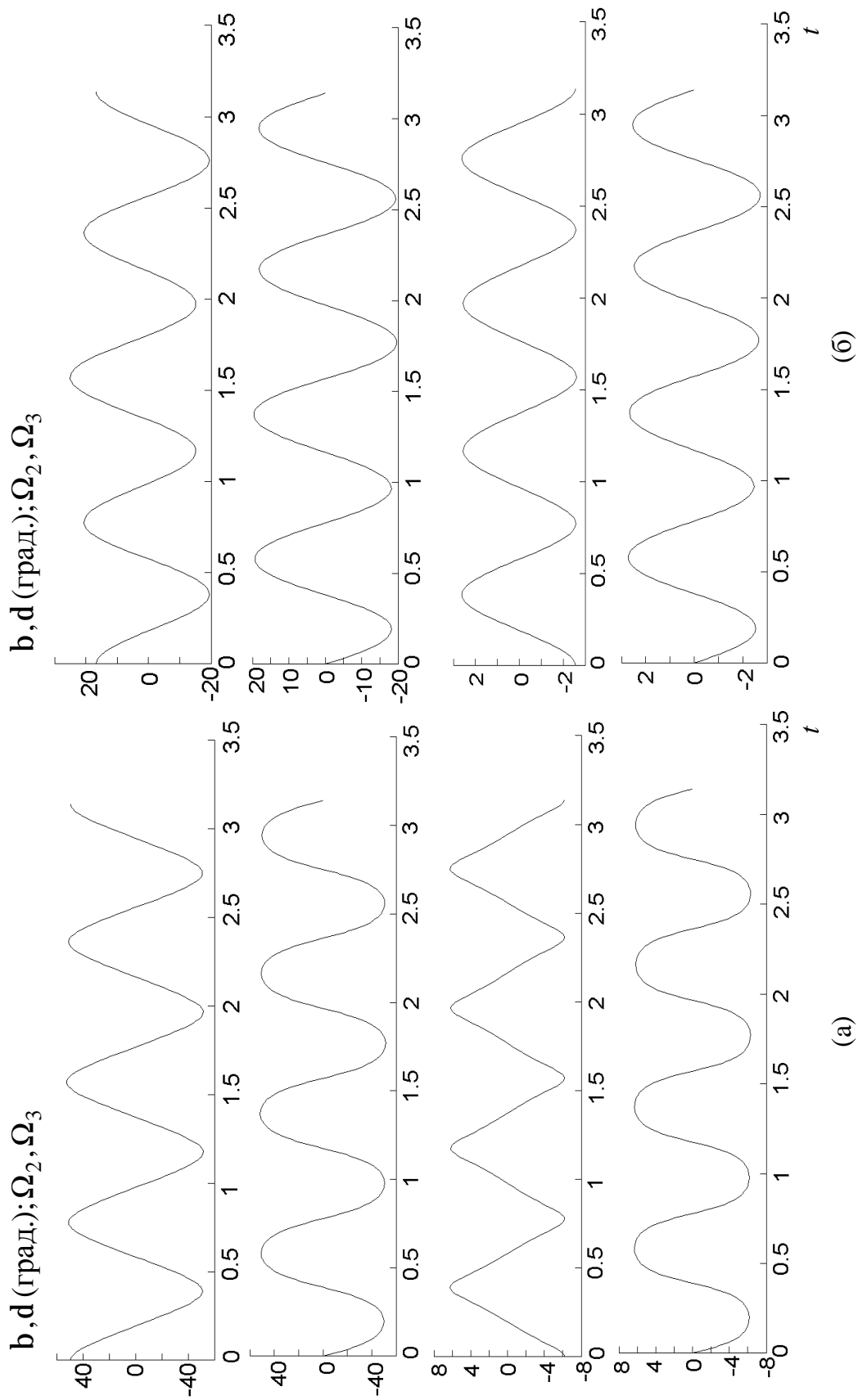


Рис. 11. Примеры периодических решений: (а) $b(0) = 0.861524$, $\Omega_2(0) = -6.190204$, $l = 0.263212$, $h = 5$;
(б) $b(0) = 0.291654$, $\Omega_2(0) = -2.570362$, $l = 0.263212$, $h = 7.5$.

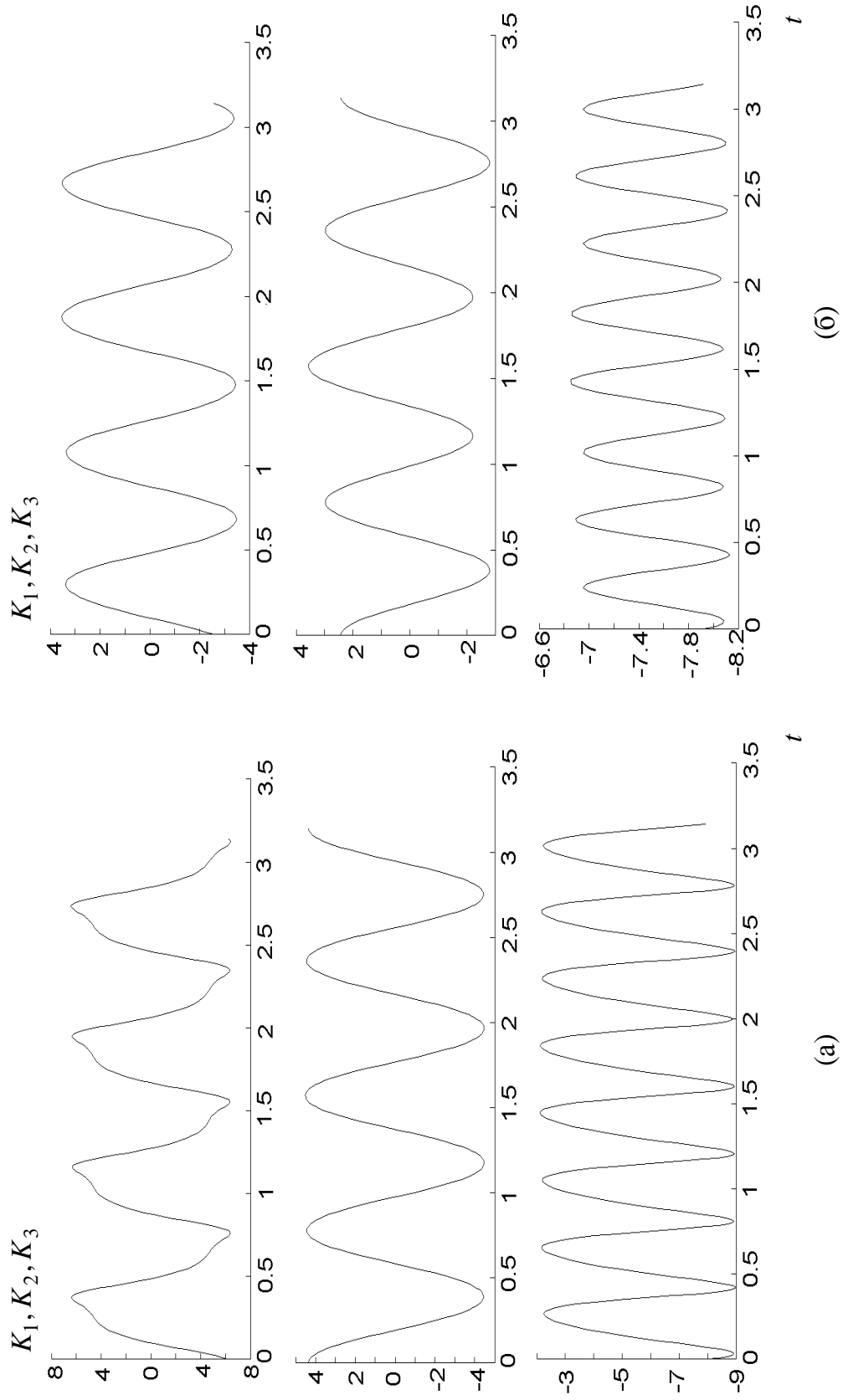


Рис. 12. Зависимость кинетического момента от времени в периодических решениях: (а) $\mathbf{b}(0) = 0.861524$, $\Omega_2(0) = -6.190204$, $\mathbf{l} = 0.263212$, $h = 5$; (б) $\mathbf{b}(0) = -2.570362$, $\mathbf{l} = 0.263212$, $h = 7.5$.

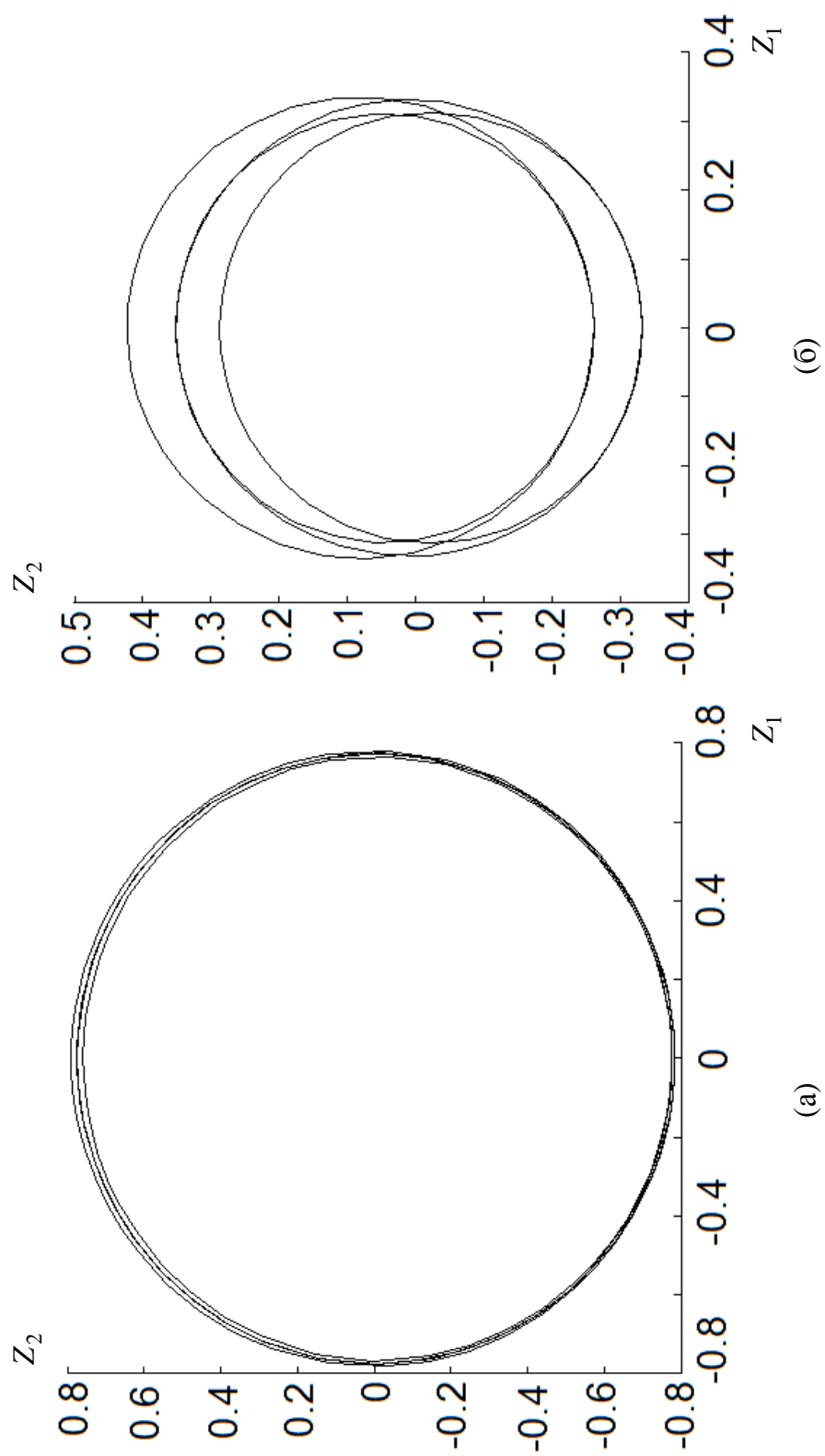


Рис. 13. Проекция годографа оси x_1 на плоскость Z_1Z_2 в периодических решениях: (a) $\mathbf{b}(0) = 0.861524$, $\Omega_2(0) = -6.190204$, $\mathbf{l} = 0.263212$, $h = 5$; (б) $\mathbf{b}(0) = -2.570362$, $\Omega_2(0) = -2.263212$, $\mathbf{l} = 0.263212$, $h = 7.5$.