



Забегаев А.Н., [Павловский В.Е.](#)

Адаптация фильтра  
Калмана для использования  
с локальной и глобальной  
системой навигации

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Забегаев А.Н., Павловский В.Е.  
Адаптация фильтра Калмана для использования с локальной и глобальной системой навигации  
// Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2010. № 82. 24 с. URL:  
<http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2010-82>

Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук

А.Н.Забегаев, В.Е.Павловский

**АДАПТАЦИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ  
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ С ЛОКАЛЬНОЙ И  
ГЛОБАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ НАВИГАЦИИ**

Москва, 2010 г.

А.Н.Забегает, В.Е.Павловский

## АДАПТАЦИЯ ФИЛЬТРА КАЛМАНА ДЛЯ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ С ЛОКАЛЬНОЙ И ГЛОБАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ НАВИГАЦИИ

### *АННОТАЦИЯ*

В работе построена схема адаптации фильтра Калмана для комбинирования данных с локальной и глобальной навигационной систем. Построена модель нелинейного фильтра, описаны возможности его настройки и коррекции адаптивности фильтра. Приведен алгоритм работы навигационной системы, построенной на этой теории. Для проверки эффективности работы алгоритма создан эмулятор, позволяющий смоделировать движение робота на горизонтальной плоскости, работу маяков глобальной навигационной системы и работу локальной навигационной системы. Вычислены параметры работы фильтра для различных комбинаций угломерной и дальномерной глобальной навигации.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 10-07-00409, 10-01-00160.

**Ключевые слова и выражения:** глобальная навигация, локализация, локальная навигация, фильтр Калмана, эмулятор.

A.N.Zabegaev, V.E.Pavlovsky

## KALMAN FILTER ADAPTATION FOR USE WITH LOCAL AND GLOBAL NAVIGATION SYSTEM

### *ABSTRACT*

This paper formulates a scheme of Kalman filter adaptation for combining data from a local and global navigation system. It also includes the formulation of a model of nonlinear filter and describes the ability of it's adjustment and adaptation correction. The paper contains the algorithm of work of a navigation system, built on the theory. To test the efficiency of the algorithm there's been created an emulator, which allows to model a robot movement on the horizontal surface, the work of global navigation system beacons and the work of local navigation system. The filter parameters are calculated for different combinations of goniometrical and distance-measuring global navigation system.

The work was done under support RFBR grands 10-07-00409, 10-01-00160.

**Keywords and expressions:** emulation, global navigation, Kalman filter, localization, local navigation.

## Содержание

1. Введение . . . . .	3
2. Математическая модель . . . . .	5
3. Построение фильтра . . . . .	5
3.1. Этап локальной коррекции . . . . .	6
3.2. Этап глобальной коррекции . . . . .	6
3.3. Работа фильтра . . . . .	10
3.4. Настройка и коррекция адаптивности фильтра . . . . .	10
3.5. Нелинейный фильтр . . . . .	12
4. Пример использования фильтра . . . . .	12
4.1. Модель . . . . .	13
4.2. Эмуляция поведения системы . . . . .	17
5. Заключение . . . . .	22
Список литературы . . . . .	23
Приложение. Слежение за видеоориентирами . . . . .	24

## 1. Введение

Задача навигации автономных роботов состоит в синтезе безопасного перемещения из одного положения в другое. Существует три основных задачи навигации:

- *Где я?* Робот должен знать свое положение относительно окружающего пространства. Задача определения собственного положения называется *локализацией*.
- *Куда я направляюсь?* Для того, чтобы выполнить свою задачу, робот должен знать, куда он направляется.
- *Как мне туда добраться?* Когда робот знает где он находится и где его цель, возникает вопрос как ему туда добраться. Задача определения способа добраться до цели называется *планированием пути*.

Последние две задачи зависят от требований к исполняемой цели мобильного робота и относятся в большей мере к области искусственного интеллекта. В то же время, задача локализации актуальна для практически любой цели мобильного робота. Именно этим обуславливается большое количество литературы и множество методов посвященных решению этой проблемы.

Для решения задачи определения положения робота часто применяется фильтр Калмана, на этапе прогноза использующий информацию о законах движения робота, а на этапе коррекции информацию с его датчиков. Иногда для коррекции используется локальная навигационная система, достоинством которой можно считать, как правило, хорошую точность на небольших перемещениях объекта, но ее недостаток, в виде накапливаемой ошибки, часто не позволяет ограничиться только локальной навигацией. В свою очередь, глобальная система навигации лишена недостатка в виде накапливаемой ошибки, но, в большинстве случаев, не удовлетворяет заданной точности определения положения робота. Естественно, оптимального результата можно добиться правильным совмещением двух навигационных систем. Так, например, в работах [6] и [7] описан способ локализации автомобиля при помощи фильтра Калмана на основе измерений GPS и различных локальных датчиков. Вообще говоря, применение различных модификаций фильтра Калмана широко распространено в задаче определения положения посредством спутниковых систем навигации GNSS (Global Navigation Satellite System), реализациями которых можно назвать российский ГЛОНАСС, американский GPS или европейский Galileo.

В работе [2] подробно освещаются современные проблемы навигации и локализации, освещается теория фильтра Калмана и различных его расширений. В конце работы подробно рассказывается о применении фильтра Калмана при локализации мобильного робота посредством локальной навигации, и там же сообщается о задаче глобальной локализации с использованием маркеров.

Возвращаясь к описанным ранее задачам навигации, отметим, что много работ посвящено одновременной локализации и построению карты (SLAM, Simultaneous Localization And Mapping). В работе [5] излагаются проблемы SLAM, использование фильтра Калмана в SLAM, а также сообщается о различных усовершенствованиях этого метода: FastSLAM, DP-SLAM.

Фильтр Калмана (ФК) применяется в том числе для обработки сложных наблюдаемых данных при локализации. Так, например, в работе [3] ФК применяется для локализации мобильного робота на основе измерений временной разности получаемых сигналов. В работе [4] сравниваются фильтр Калмана и фильтр частиц в задаче локализации по радиомаякам.

Во всех приведенных работах на этапе прогноза фильтра Калмана используется теоретическая модель системы. Но, часто возникают задачи, когда невозможно описать теоретическое поведение системы. Например, когда оно является слишком сложным, а упрощенная модель не дает достаточной точности. Или в случае мобильного робота, который движется согласно своей внутренней логике и характер этого движения сильно зависит от внешних факторов.

В данной работе предлагается способ, как на основе фильтра Калмана [1] построить аналогичный фильтр, заменяющий этап прогноза на этап локальной коррекции, на котором вместо теоретического описания поведения робота будет использоваться информация с датчиков локальной системы навигации, а этап коррекции по сути остается таким же, но поскольку на нем будет использоваться информация с глобальной системы навигации, то мы его назовем этапом глобальной коррекции.

Так как вышеописанная система оперирует только дискретным временем, то последующие расчеты будут опираться на понятие дискретного времени и искомый фильтр будет строиться на основе дискретного фильтра Калмана.

## 2. Математическая модель

Будем считать, что робот - это некоторая динамическая система, имеющая вектор состояния  $x$  и обладающая локальной системой навигации, позволяющей периодически получать информацию о смещении робота, т.е.:

$$x_{k+1} = x_k + (\Delta x + \omega_k), \quad (1)$$

где  $x_k$  есть  $x$  в момент времени  $t_k$ , а  $\omega_k$  - белый шум локальных измерений, причем:

$$\begin{aligned} E\langle \omega_k \rangle &= W_k \\ E\langle (\omega_k - W_k)(\omega_k - W_k)^T \rangle &= Q_k, \end{aligned}$$

где традиционно через  $E\langle y \rangle$  обозначается функция математического ожидания  $y$ .

Также, будем считать, что робот обладает глобальной навигационной системой, которая в моменты времени  $t_l$  позволяет получить вектор измерений  $z_l$ , который линейно связан с  $x_l$ :

$$z_l = H_l x_l + v_l, \quad (2)$$

где  $v_l$  - белый шум глобальных измерений с нулевым смещением и матрицей ковариаций  $R_l$ .

## 3. Построение фильтра

Фильтр будет состоять из двух этапов: этап локальной коррекции и этап глобальной коррекции. Состояние системы в момент времени  $t_k$  будут характеризовать прогнозируемая оценка  $\hat{x}_k$ , равная  $E\langle x_k \rangle$  и ковариационная матрица ошибки  $P_k$ :

$$\begin{aligned} P_k &= E\langle (x_k - E\langle x_k \rangle)(x_k - E\langle x_k \rangle)^T \rangle \\ &= E\langle (x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T \rangle \end{aligned} \quad (3)$$

### 3.1. Этап локальной коррекции

Допустим, что в момент времени  $t_k$  получена оценка вектора состояния системы  $x_k$  и ковариационной матрицы ошибок  $P_k$ . В момент времени  $t_{k+1}$  поступает информация с локальной навигационной системы  $\Delta x_k$ . Очевидно, для того, чтобы получить оценку  $x_{k+1}$  необходимо применить функцию математического ожидания к (1):

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \Delta x_k + W_k.$$

Теперь рассмотрим, как получить оценку  $P_{k+1}$ . Записав предыдущую формулу в виде:

$$E\langle x_{k+1} \rangle = E\langle x_k \rangle + \Delta x_k + E\langle \omega_k \rangle$$

и вычтя ее из (1), учитывая, что  $\omega_k$  белый шум и  $E\langle \omega_k \rangle = W_k$ , получим:

$$x_{k+1} - E\langle x_{k+1} \rangle = x_k - E\langle x_k \rangle + \omega_k - W_k$$

Подставляя это выражение в (3), и учитывая, что  $E\langle \omega_k - W_k \rangle = 0$  получаем:

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= E\langle (x_k - E\langle x_k \rangle + \omega_k - W_k)(x_k - E\langle x_k \rangle + \omega_k - W_k)^T \rangle = \\ &= E\langle (x_k - E\langle x_k \rangle)(x_k - E\langle x_k \rangle)^T \rangle + E\langle (x_k - E\langle x_k \rangle)(\omega_k - W_k)^T \rangle + \\ &+ E\langle (\omega_k - W_k)(x_k - E\langle x_k \rangle)^T \rangle + E\langle (\omega_k - W_k)(\omega_k - W_k)^T \rangle = \\ &= E\langle (x_k - E\langle x_k \rangle)(x_k - E\langle x_k \rangle)^T \rangle + E\langle (\omega_k - W_k)(\omega_k - W_k)^T \rangle \end{aligned}$$

Т.е.

$$P_{k+1} = P_k + Q_k \quad (4)$$

### 3.2. Этап глобальной коррекции

Этап глобальной коррекции практически не отличается от традиционного этапа коррекции фильтра Калмана и описывается, соответственно, аналогично. Приведем теоретические выкладки.

Пусть в момент времени  $t_k$  поступили данные  $z_k$  с глобальной навигационной системы. Обозначим оценку  $x_k$  до использования  $z_k$  как  $\hat{x}_k^-$ , а после  $\hat{x}_k^+$ . Поскольку апостериорная оценка  $\hat{x}_k^+$  зависит от априорной  $\hat{x}_k^-$  и измерений  $z_k$ , запишем ее в следующем виде:

$$\hat{x}_k^+ = K_k^1 \hat{x}_k^- + K_k z_k \quad (5)$$

Определим значения матриц  $K_k^1$  и  $K_k$  из условия, что апостериорная оценка  $\hat{x}_k^+$  удовлетворяет принципу ортогональности, который состоит в том, что разность между вектором состояния и его оценкой не коррелирует с вектором измерений. Принцип ортогональности можно записать в следующем виде:

$$E\langle (x_k - \hat{x}_k^+) z_i^T \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k-1 \quad (6)$$

$$E\langle (x_k - \hat{x}_k^+) z_k^T \rangle = 0 \quad (7)$$

Подставляя выписанное ранее выражение (5) для апостериорной оценки  $x_k^+$  в (6), получим:

$$E\langle (x_k - K_k^1 \hat{x}_k^- - K_k z_k) z_i^T \rangle = 0$$

В получившееся выражение подставим (2):

$$E\langle (x_k - K_k^1 \hat{x}_k^- - K_k H_k x_k - K_k v_k) z_i^T \rangle = 0$$

Добавим и вычтем  $K_k^1 E\langle x_k z_k^T \rangle$ :

$$E\langle (x_k - K_k H_k x_k - K_k^1 x_k) + K_k^1 x_k - K_k^1 \hat{x}_k^- - K_k v_k) z_i^T \rangle = 0$$

Так как  $E\langle (x_k - \hat{x}_k^-) z_k^T \rangle = 0$  и учитывая, что  $E\langle v_k z_k^T \rangle = 0$  получаем:

$$(I - K_k H_k - K_k^1) E\langle x_k z_i^T \rangle = 0$$

Исходя из условия, что это верно для любого  $x_k$ , получим выражение для коэффициента  $K_k^1$ :

$$I - K_k H_k - K_k^1 = 0$$

Т.е.

$$K_k^1 = I - K_k H_k \quad (8)$$

Таким образом выражение (5) для апостериорной оценки  $x_k^+$  можно переписать в виде:

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-) \quad (9)$$

Теперь выведем из формулы (7) соотношение для второго коэффициента. Введем обозначение для априорной и апостериорной ошибки:



$$\begin{aligned}\tilde{x}_k^- &= \hat{x}_k^- - x_k \\ \tilde{x}_k^+ &= \hat{x}_k^+ - x_k\end{aligned}$$

Аналогично для  $z_k$ :

$$\tilde{z}_k^- = \hat{z}_k^- - z_k^- = H_k \hat{x}_k^- - z_k = H_k \hat{x}_k^- - H_k \hat{x}_k - v_k \quad (10)$$

Поскольку,

$$E\langle (x_k - \hat{x}_k^+) z_k^T \rangle = 0$$

то и

$$E\langle (x_k - \hat{x}_k^+) \tilde{z}_k^T \rangle = 0$$

Подставляя выражение (5) зависимости апостериорной оценки от априорной оценки и измерений и учитывая выражение для  $K_k^1$ , получим

$$E\langle (x_k - (I - K_k H_k) \hat{x}_k^- - K_k z_k) \tilde{z}_k^T \rangle = 0$$

Подставляя выражения (2) и (10) для  $z_k$  и  $\tilde{z}_k$  соответственно, получим:

$$\begin{aligned}E\langle (x_k - \hat{x}_k^- + K_k H_k \hat{x}_k^- - K_k H_k x_k - K_k v_k) (H_k \tilde{x}_k^- - v_k)^T \rangle &= 0 \\ E\langle ((x_k - \hat{x}_k^-) + K_k H_k (\hat{x}_k^- - x_k) - K_k v_k) (H_k \tilde{x}_k^- - v_k)^T \rangle &= 0 \\ E\langle (-\tilde{x}_k^- + K_k H_k \tilde{x}_k^- - K_k v_k) (H_k \tilde{x}_k^- - v_k)^T \rangle &= 0 \\ E\langle ((I - K_k H_k) \tilde{x}_k^- + K_k v_k) (H_k \tilde{x}_k^- - v_k)^T \rangle &= 0\end{aligned}$$

Раскрывая:

$$\begin{aligned}(I - K_k H_k) E\langle \tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T} \rangle H_k - (I - K_k H_k) E\langle \tilde{x}_k^- v_k^T \rangle + \\ + K_k E\langle v_k \tilde{x}_k^{-T} \rangle - K_k E\langle v_k v_k^{-T} \rangle = 0\end{aligned}$$

Из условий постановки задачи  $E\langle \tilde{x}_k^- v_k^T \rangle = E\langle v_k \tilde{x}_k^{-T} \rangle = 0$ , т.е.

$$(I - K_k H_k) E\langle \tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T} \rangle H_k - K_k E\langle v_k v_k^{-T} \rangle = 0$$

Учитывая, что  $E\langle \tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T} \rangle = P_k^-$ , а  $E\langle v_k v_k^{-T} \rangle = R_k$ :

$$(I - K_k H_k) P_k^- H_k - K_k R_k = 0$$

Окончательно получаем выражение для коэффициента обратной связи:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \quad (11)$$

Теперь выведем выражение для апостериорного значения ковариационной матрицы ошибок.

$$\tilde{x}_k^+ = \hat{x}_k^+ - x_k$$

Учитывая выражение (5) для апостериорной оценки вектора состояния, получим

$$\tilde{x}_k^+ = K_k^1 \hat{x}_k^- + K_k z_k - x_k$$

Подставляем формулу коэффициента (8)  $K_k^1$ :

$$\tilde{x}_k^+ = (I - K_k H_k) \hat{x}_k^- - x_k + K_k z_k$$

или

$$\tilde{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - x_k - K_k H_k \hat{x}_k^- + K_k z_k$$

Учитывая, что  $z_k = H_k x_k - v_k$ , получим:

$$\tilde{x}_k^+ = \hat{x}_k^- - x_k - K_k (H_k \hat{x}_k^- - H_k x_k - v_k)$$

Т.е.

$$\tilde{x}_k^+ = \tilde{x}_k^- - K_k (H_k \tilde{x}_k^- - v_k)$$

или

$$\tilde{x}_k^+ = (I - K_k H_k) \tilde{x}_k^- + K_k v_k \quad (12)$$

По определению, выражение для апостериорной ковариационной матрицы ошибок выглядит следующим образом:

$$P_k^+ = E\langle \tilde{x}_k^+ \tilde{x}_k^{+T} \rangle$$

Используя полученное выражение (12):

$$\begin{aligned} P_k^+ &= E\langle ((I - K_k H_k) \tilde{x}_k^- + K_k v_k) ((I - K_k H_k) \tilde{x}_k^- + K_k v_k)^T \rangle = \\ &= (I - K_k H_k) E\langle \tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T} \rangle (I - K_k H_k)^T + (I - K_k H_k) E\langle \tilde{x}_k^- v_k^T \rangle K_k^T + \\ &+ K_k E\langle v_k \tilde{x}_k^{-T} \rangle (I - K_k H_k)^T + K_k E\langle v_k v_k^T \rangle K_k^T \end{aligned}$$

Учитывая, что  $P_k^- = E\langle \tilde{x}_k^- \tilde{x}_k^{-T} \rangle$ ,  $R_k = E\langle v_k v_k^T \rangle$ , а  $E\langle \tilde{x}_k^- v_k^T \rangle = E\langle v_k \tilde{x}_k^{-T} \rangle = 0$ , получаем:

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- (I - K_k H_k)^T + K_k R_k K_k^T$$

Преобразуем получившееся выражение к более простому виду:

$$\begin{aligned}
P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k H_k P_k^- H_k^T K_k^T + K_k R_k K_k^T = \\
&= (I - K_k H_k) P_k^- - P_k^- H_k^T K_k^T + K_k (H_k P_k^- H_k^T + R_k) K_k^T
\end{aligned}$$

Учитывая выражение (11) окончательно получаем

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^- \quad (13)$$

### 3.3. Работа фильтра

Работу фильтра можно представить в следующем виде:

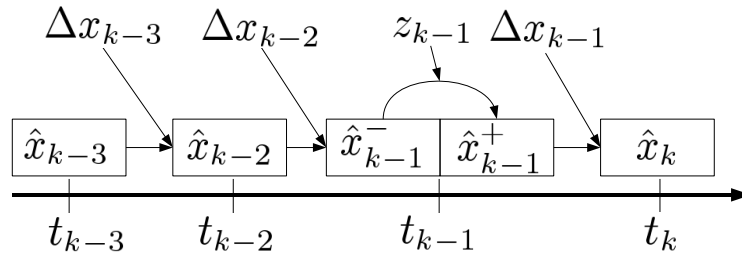


Рис. 1. Схема работы фильтра

Начальное состояние:

$$\hat{x}_0, P_0$$

Этап локальной коррекции - поступление данных  $\Delta x$  с локальной навигационной системы:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + \Delta x_k + W_k.$$

$$P_{k+1} = P_k + Q_k$$

Этап глобальной коррекции - поступление данных  $z_k$  с глобальной навигационной системы:

$$K_k = P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1}$$

$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

$$P_k^+ = (I - K_k H_k) P_k^-$$

В отличие от традиционного фильтра Калмана, этапы не чередуются, а выполняются по мере поступления соответствующих измерений, таким образом в каждый момент времени имеется актуальная информация о состоянии системы.

Рис. 1 показывает, что при поступлении данных с локальной навигационной системы происходит перерасчет вектора состояния, соответствующий переходу системы из момента времени  $t_{k-1}$  в  $t_k$ , в то время, как коррекция по данным глобальной навигационной системы происходит одновременно.

### 3.4. Настройка и коррекция адаптивности фильтра

Для того, чтобы откорректировать скорость сходимости стандартного фильтра Калмана под конкретную задачу, а так же его точность после сходимости

используется подбор значений в матрицах  $P_0$ ,  $Q_k$  и  $R_k$ . Этот процесс называется настройкой фильтра.

В построенном выше фильтре матрицы  $Q_k$  и  $R_k$  являются характеристиками максимальной ошибки измерительного оборудования локальной и глобальной навигационной системы и должны быть жестко заданы в соответствии с техническими данными навигационных систем.

Таким образом для настройки скорости и точности сходимости может быть использована матрица  $P_0$ .

Введенный вектор смещения локальных измерений  $W_K$  влияет лишь на оценку вектора состояния  $\hat{x}_k$  и для настройки фильтра не подходит. Вообще говоря, этот вектор также должен быть задан в соответствии с характеристиками локальной навигационной системы, но измерить его или достаточно точно оценить зачастую не представляется возможным. Тем более, что он может кардинально изменить свое состояние при резком изменении характера поведения системы. Так например, для одомерической локальной навигации вектор  $W_k$  будет характеризовать проскальзывание колес робота и, очевидно, будет зависеть от скорости движения, а в случае, когда робот резко изменит скорость движения на противоположную, вектор  $W_k$  также должен будет изменить знак. Заметим, что, непосредственно в момент изменения направления движения, проскальзывание в колесах вообще трудно предсказать.

Таким образом, целесообразно описать алгоритм, позволяющий оценивать вектор  $W_k$ . Выбор значения  $W_k$  в зависимости от поведения системы, назовем адаптацией фильтра. В качестве характеристики, позволяющей оценивать вектор  $W_k$  возьмем разность  $\hat{x}_k^+$  и  $\hat{x}_k^-$ , т.е.

$$\Delta \hat{x}_k = \hat{x}_k^+ - \hat{x}_k^- = K_k(z_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

Если считать, что характер движения не сильно меняется со временем, то в качестве оценки смещения вектора измерений локальной системы координат можно взять усредненное значение разностей апостериорной и априорной оценки:

$$\hat{W}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \left( \frac{1}{N_i} K_i (z_i - H_i \hat{x}_i^-) \right)$$

или

$$\hat{W}_k = \frac{k-1}{k} \hat{W}_{k-1} + \frac{1}{k} \frac{1}{N_k} K_k (z_k - H_k \hat{x}_k^-)$$

причем выборка идет по моментам времени, когда поступали измерения от глобальной навигационной системы, а  $N_i$  количество измерений локальной навигационной системы между моментами времени -  $t_{i-1}$  и  $t_i$ .  $\hat{W}_0$  можно принять равным 0. Очевидно, что каждая последующая оценка  $\Delta \hat{x}_k$  слабее

влияет на оценку вектора смещения. Ранее отмечалось, что при резком изменении характера движения вектор оценки также может сильно изменить свое состояние, в этом случае следует обнулять оценку  $\hat{W}_0$  и заново начинать его оценивание с этого момента.

### 3.5. Нелинейный фильтр

Очевидно, что в реальной навигационной системе далеко не всегда возможно обеспечить условие линейной зависимости вектора измерений от вектора состояния. Опишем, как можно перенести методологию фильтра на нелинейные системы.

В отличие от этапа прогноза фильтра Калмана, этап локальной коррекции построенного в этой работе фильтра будет всегда линейным. Нелинейность может проявиться на этапе глобальной коррекции.

Допустим, что вместо формулы (2) зависимость измерений от состояния системы описывается следующей формулой:

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (14)$$

Функция  $h(x)$  должна быть дважды непрерывно дифференцируемой. Условия на  $v_k$  остаются прежними.

Аналогично стандартному нелинейному фильтру Калмана, введем матрицу

$$H_k = \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k^-}$$

В этом случае этап глобальной коррекции примет вид:

$$\begin{aligned} K_k &= P_k^- H_k^T (H_k P_k^- H_k^T + R_k)^{-1} \\ \hat{x}_k^+ &= \hat{x}_k^- + K_k (z_k - h(\hat{x}_k^-)) \\ P_k^+ &= (I - K_k H_k) P_k^- \end{aligned}$$

## 4. Пример использования фильтра

Приведем пример использования построенного фильтра на базе задачи локализации мобильного робота. Рассмотрим робот с навигационной системой в двумерном пространстве. Робот движется по траектории, которая с некоторой точностью измеряется на основе данных локальной системы навигации. Также имеются маяки, координаты которых в пространстве известны. Навигационная система, установленная на роботе, позволяет измерять углы между направлением выделенной оси робота и направлениями на маяки, и/или дальности до маяков.

#### 4.1. Модель

Назовем роботом твердое тело, геометрические размеры которого не имеют значения, а характеризовать робот будут координаты его некоторой точки  $A(x, y)$  и угол  $\alpha$  между осью абсцисс и продольной осью робота.

Будем считать, что нам известно перемещение робота, т.е.

$$x_{k+1} = f(x_k) + \omega_k,$$

где  $x_k$  - вектор состояния системы в момент времени  $t_k$ ,  $\omega_k$  - вектор погрешности, которая предполагается, имеет математическое ожидание  $W_k$ , нормальное Гауссово распределение и матрицу ковариаций  $Q_k$ .

$$x_k = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \alpha \end{pmatrix}$$

На поверхности имеются  $n$  маяков  $B_i$  с известными координатами  $(x_i^B, y_i^B)$ .

Пусть навигационная система робота в каждый момент времени  $t_k$  измеряет вектор параметров  $z_k$ , который связан с  $x_k$  следующей формулой:

$$z_k = h(x_k) + v_k \quad (15)$$

где  $v_k$ - вектор ошибки наблюдения, который считается имеющим нулевое математическое ожидание, нормальное Гауссово распределение и матрицу ковариаций  $R_k$ .

Будем считать, что маяки действуют асинхронно, т.е. система может одновременно обрабатывать информацию только от одного маяка. Если информация от нескольких маяков поступает одновременно, то она обрабатывается последовательно для каждого маяка.

Рассмотрим несколько возможных случаев навигационных систем:

1. Используется система моноприемника, точка А совпадает с приемником, возможно измерить лишь угол на маяк  $\alpha_i$ . В этом случае  $z_k$  и формула (15) приобретают вид:

$$z_k = \alpha_i$$

$$\alpha_i = \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} \right) - \alpha + v_{i,\alpha}$$

где знак  $\pm$  противоположен знаку  $(y_i^B - y)$ .

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{(y_i^B - y)}{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} & \frac{-(x_i^B - x)}{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} & -1 \end{array} \right)$$

2. Используется система моноприемника, точка А совпадает с приемником, возможно измерить лишь расстояние до маяка  $a_i$ . В этом случае  $\bar{z}_k$  и формула (15) приобретают вид:

$$z_k = a_i$$

$$a_i = \sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} + v_{i,a}$$

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{-(x_i^B - x)}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} & \frac{-(y_i^B - y)}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} & 0 \end{array} \right)$$

3. Используется система моноприемника, точка А совпадает с приемником, возможно измерить угол  $\alpha_i$  и расстояние до маяка  $a_i$ . В этом случае  $z_k$  и формула (15) приобретают вид:

$$z_k = \begin{pmatrix} \alpha_i \\ a_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_i \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} \right) - \alpha \\ \sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,\alpha} \\ v_{i,a} \end{pmatrix}$$

где знак  $\pm$  противоположен знаку  $(y_i^B - y)$ .

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\left( \begin{array}{ccc} \frac{(y_i^B - y)}{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} & \frac{-(x_i^B - x)}{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2} & -1 \\ \frac{-(x_i^B - x)}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} & \frac{-(y_i^B - y)}{\sqrt{(x_i^B - x)^2 + (y_i^B - y)^2}} & 0 \end{array} \right)$$

4. Используется система двух приемников, которые расположены на расстоянии  $l$ , точка А находится посередине между ними, возможно измерить углы  $\beta_i$  и  $\gamma_i$ . В этом случае  $z_k$  и формула (15) приобретают вид:

$$z_k = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - \alpha \right) \\ \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - \alpha \right) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,\beta} \\ v_{i,\gamma} \end{pmatrix}$$

где знак  $\pm$  противоположен знаку  $(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)$  или  $(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)$  в зависимости от приемника.

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-\frac{l^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha}{(x_1 - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - 1 \\ \frac{(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-\frac{l^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - 1 \end{pmatrix}$$

5. Используется система двух приемников, которые расположены на расстоянии  $l$ , точка А находится посередине между ними, возможно измерить расстояние до маяка  $b_i$  и  $c_i$ . В этом случае  $\bar{z}_k$  и формула (15) приобретает вид:

$$z_k = \begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} \\ \sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,b} \\ v_{i,c} \end{pmatrix}$$

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{-(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{\frac{l}{2} ((x_i^B - x) \cos \alpha + (y_i^B - y) \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} \\ \frac{-(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-\frac{l}{2} ((x_i^B - x) \cos \alpha + (y_i^B - y) \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} \end{pmatrix}$$

6. Используется система двух приемников, которые расположены на расстоянии  $l$ , точка А находится посередине между ними, возможно измерить углы  $\beta_i$  и  $\gamma_i$  и расстояния до маяка  $b_i$  и  $c_i$ . В этом случае  $z_k$  и формула (15) приобретают вид:

$$z_k = \begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} \beta_i \\ \gamma_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - \alpha \right) \\ \pi \pm \left( \pi - \arccos \frac{x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - \alpha \right) \\ \sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} \\ \sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_{i,\beta} \\ v_{i,\gamma} \\ v_{i,b} \\ v_{i,c} \end{pmatrix}$$

где знак  $\pm$  противоположен знаку  $(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)$  или  $(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)$  в зависимости от приемника.

Для такой конфигурации навигационной системы, матрица  $H_k$  примет вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)}{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-\frac{l^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha}{(x_1 - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_1^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - 1 \\ \frac{(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} & \frac{-\frac{l^2}{4} \sin \alpha \cos \alpha}{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2} - 1 \\ \frac{-(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-(y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{\frac{l}{2} ((x_i^B - x) \cos \alpha + (y_i^B - y) \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x + \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y - \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} \\ \frac{-(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-(y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} & \frac{-\frac{l}{2} ((x_i^B - x) \cos \alpha + (y_i^B - y) \sin \alpha)}{\sqrt{(x_i^B - x - \frac{l}{2} \sin \alpha)^2 + (y_i^B - y + \frac{l}{2} \cos \alpha)^2}} \end{pmatrix}$$

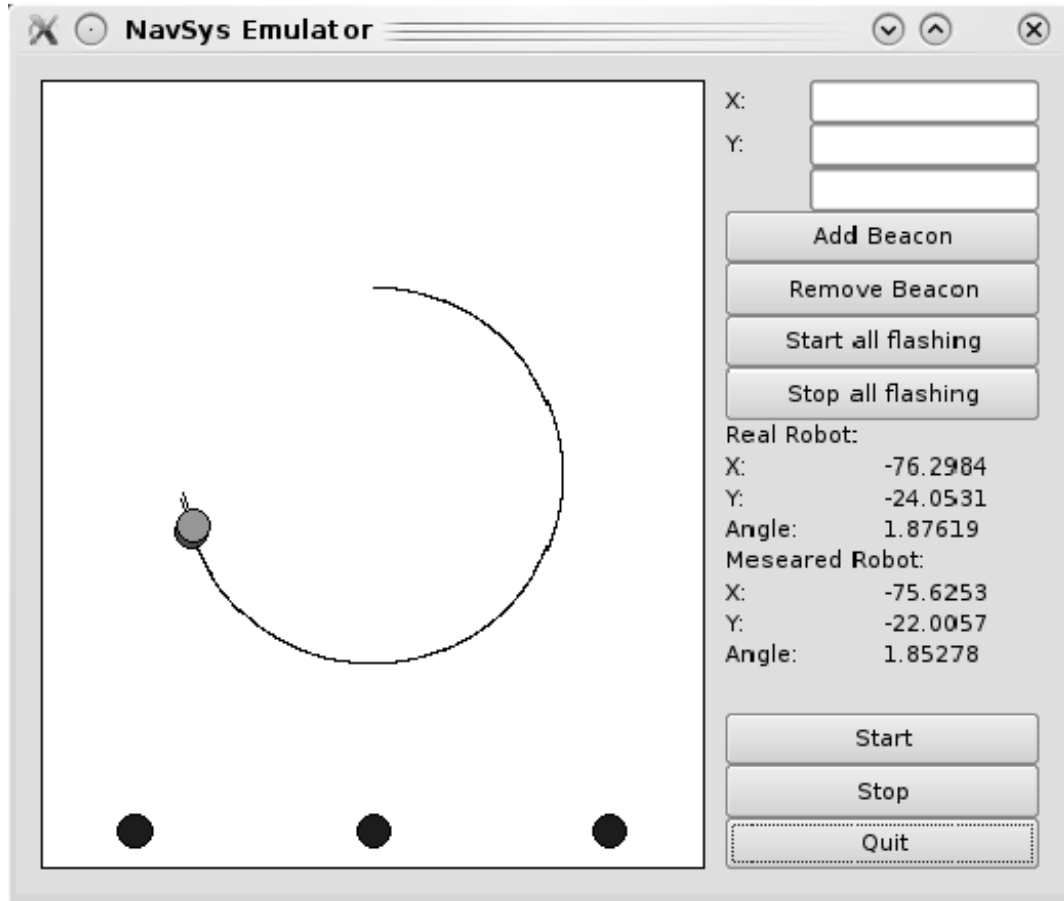


Рис. 2. Эмулятор навигационной системы. Интерфейс.

#### 4.2. Эмуляция поведения системы

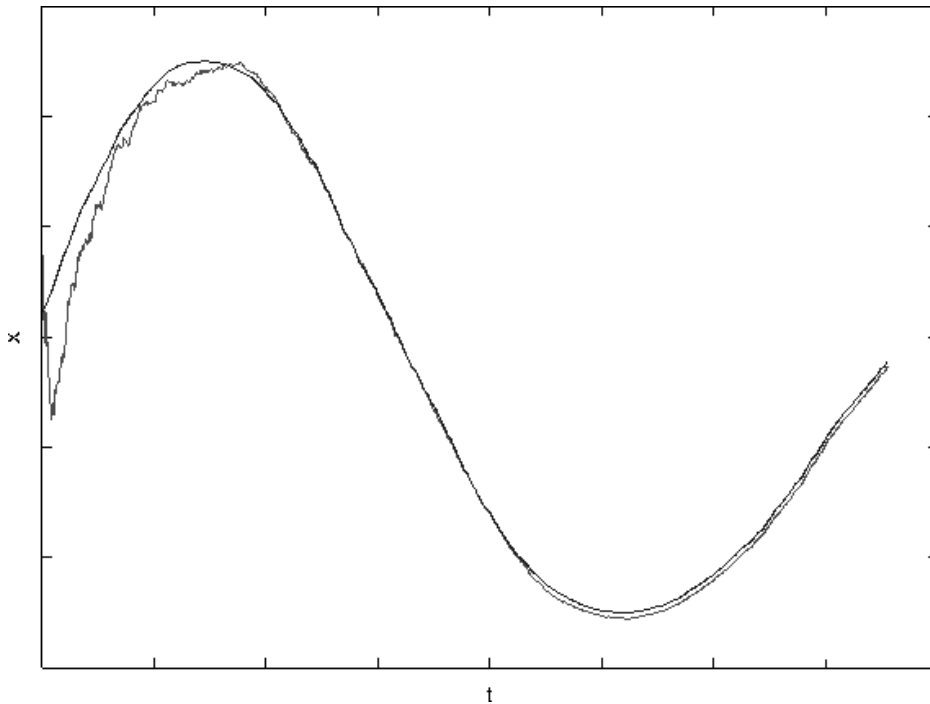
Для контроля работы фильтра, покажем поведение модели 3 на эмуляторе. В эмуляторе возможно задать любое количество маяков, имитировать движение робота, прием роботом сигналов от маяков через заданные промежутки времени. Эмулятор показывает реальное и измеренное положение робота. Причем как измеряемое роботом перемещение, так и получаемый им от маяков сигнал имитируются с некоторой случайной ошибкой, диапазон которой можно задавать. Интерфейс и блок схема работы фильтра приведены на рис. 2 и 3 соответственно.



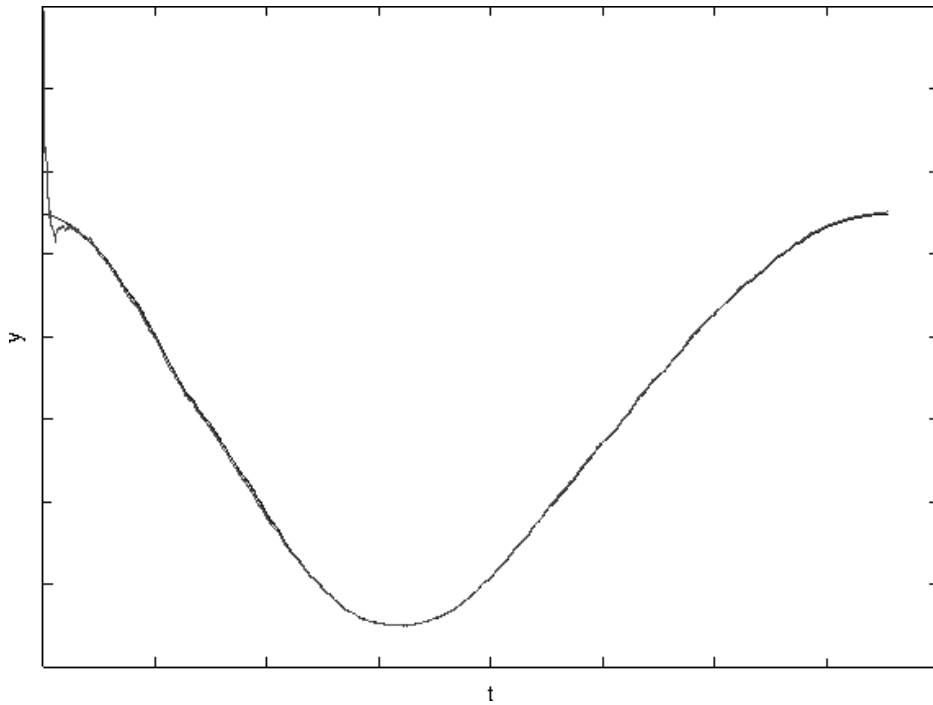
Рис. 3. Схема работы эмулятора

Например, рассмотрим движение робота по круговой траектории на достаточном удалении от маяков, расположенных на одной линии (как изображено на рис. 2). Такое расположение маяков характерно для ситуации, когда робот действует вдали от зоны, пригодной для размещения маяков (например, учитывается граница зоны действия, либо водное пространство в прибрежной зоне). Будем считать, что как локальная, так и глобальная навигационная система проводят измерения с фиксированной ошибкой, равной 5%. Результаты моделирования приведены на графиках 4, 5 и 6. На графиках видно, что после сходимости фильтра, отклонение измеренной координаты достаточно мало.

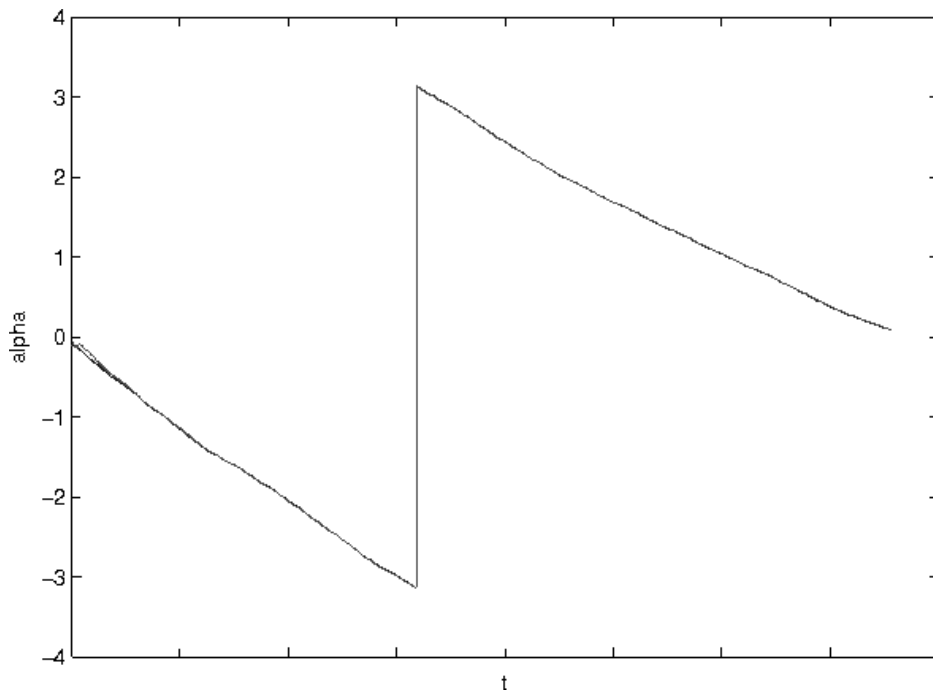
Поскольку задача модельная, на графиках специально не приведены размерности. Однако, как видно, что, после сходимости фильтра, предельная ошибка не превышает 2% от максимального изменения траектории, что соответствует 20 см на 100 м.



**Рис. 4.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $x$  от времени



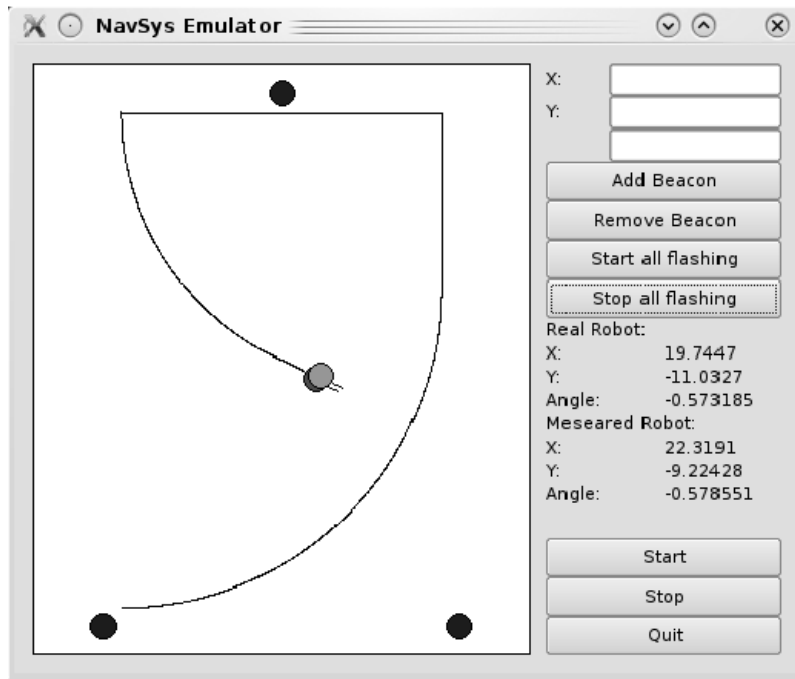
**Рис. 5.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $y$  от времени



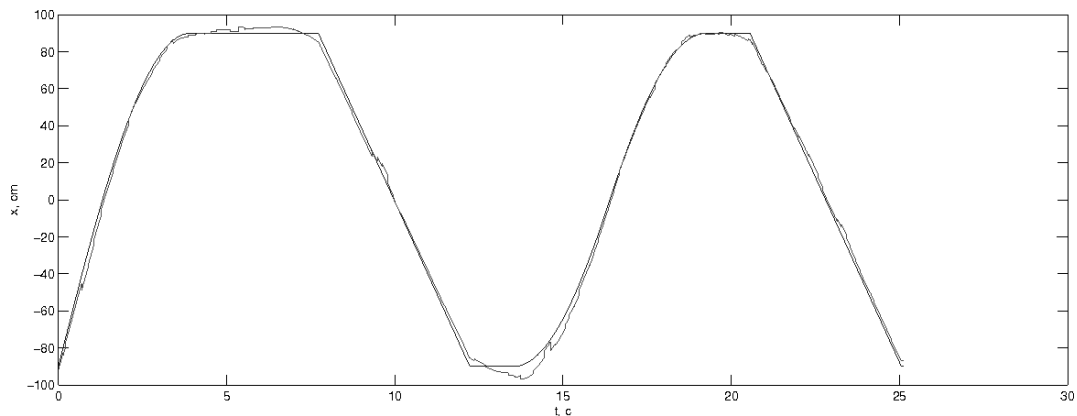
**Рис. 6.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $\alpha$  от времени

В качестве другого примера приведем навигационную систему робота, созданного для соревнований Eurobot 2010. Робот функционирует на поле размером 3 на 2 метра, маяки расположены по треугольнику, как показано на рис. 7. Робот оснащен одометрической локальной навигацией, для которой характерно проскальзывание колес. Глобальная навигационная система позволяет определять угол на маяк с частотой 2 раза в секунду и с точностью 0.5 градуса. Характерная скорость движения робота в таких задачах составля-

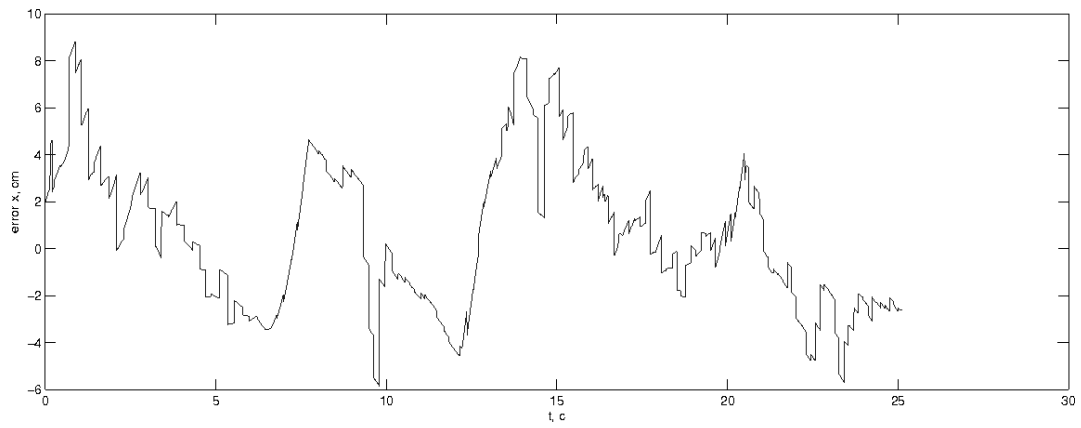
ет около 0.2 м/с. Соотношение реальной и измеренной координаты  $x$  можно увидеть на графике 8. График 9 показывает ошибку измеренной координаты  $x$ . Аналогично графики 10 и 11 показывают соотношение и ошибку для координаты  $y$ , а 12 и 13 для координаты  $\alpha$ . Результаты моделирования показывают, что максимальное отклонение по координатам не превышает 10 см, а среднеквадратичное отклонение составляет около 3 см.



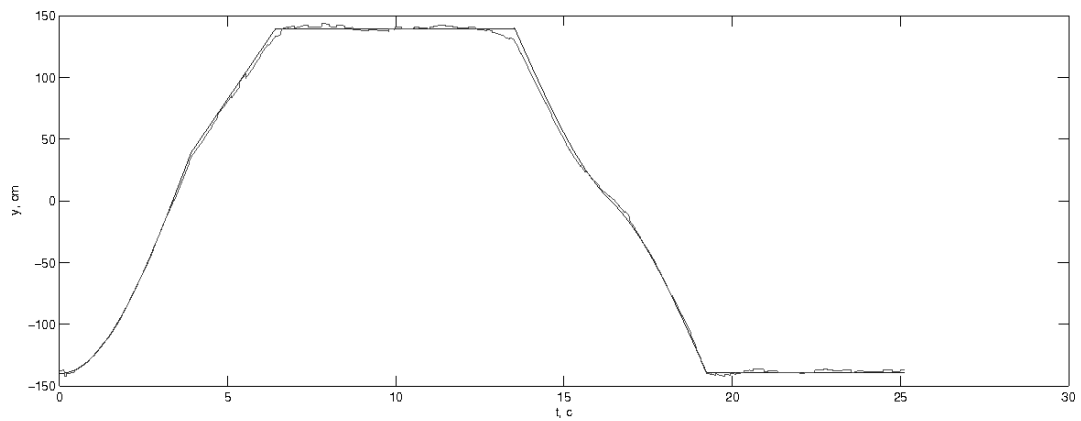
**Рис. 7.** Расположение маяков для соревнований Eurobot2010.



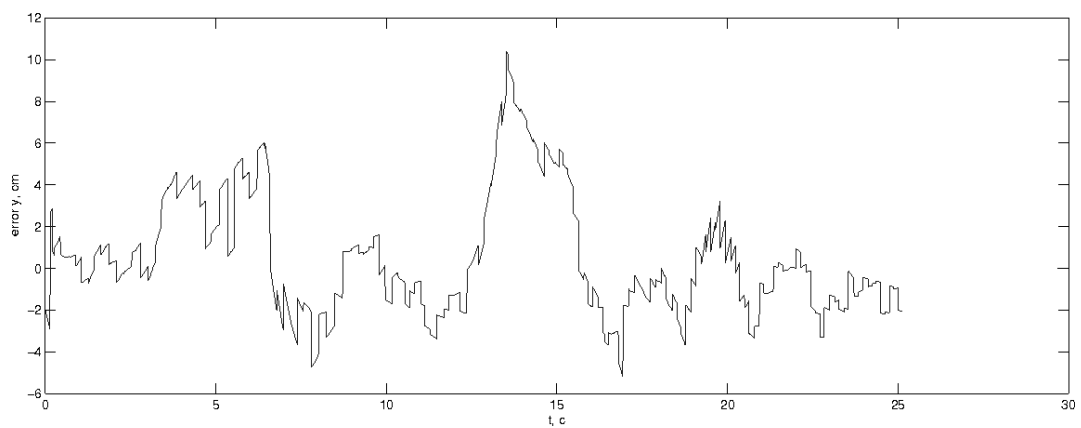
**Рис. 8.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $x$  от времени



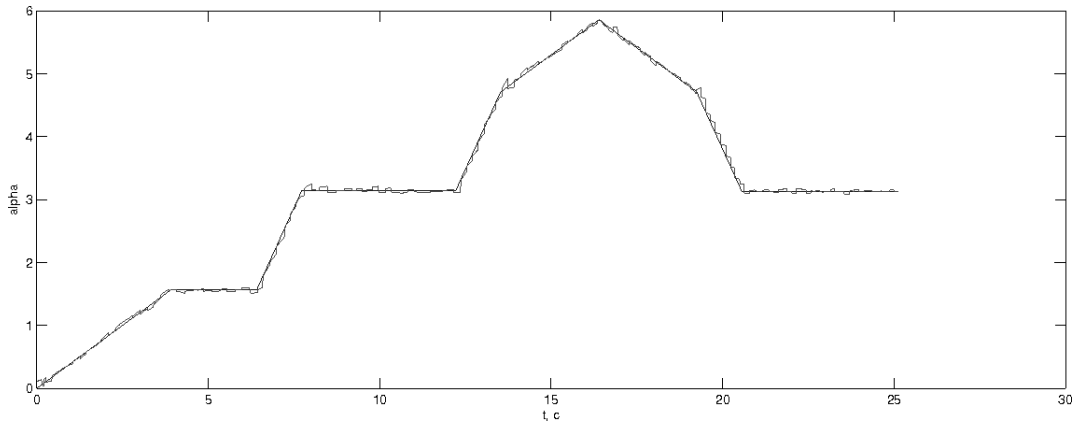
**Рис. 9.** Зависимость ошибки измеренной координаты  $x$  от времени



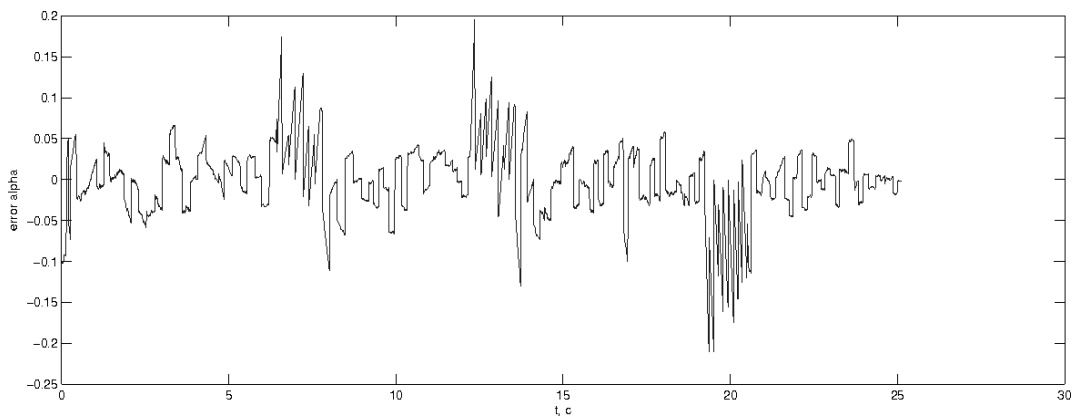
**Рис. 10.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $y$  от времени



**Рис. 11.** Зависимость ошибки измеренной координаты  $y$  от времени



**Рис. 12.** Зависимость реальной и измеренной координаты  $\alpha$  от времени



**Рис. 13.** Зависимость ошибки измеренной координаты  $\alpha$  от времени

## 5. Заключение

Описанный в работе подход позволяет совместить наблюдаемые данные локальной и глобальной системы навигации для более точной оценки состояния динамической системы. Приведенный алгоритм позволяет в каждый момент времени иметь актуальную оценку, учитывающую все предыдущие измерения. Для ошибки локальной навигации допускается иметь ненулевое смещение, что может являться характерной чертой одометрической или акселерометрической системы локальной навигации. В то же время, приводится адаптивный алгоритм оценки этого смещения. Сам фильтр построен как для линейной, так и для нелинейной зависимости вектора измерений от вектора состояния, что позволяет охватить широкий спектр различных реализаций навигационных систем.

Для проверки эффективности разработанного фильтра был создан эмулятор, позволяющий смоделировать поведение системы с параметрами. Посредством этого эмулятора было проведено исследование точности оценки положения робота при различных вариантах локальной и глобальной навигации, при различных точностях обеих систем и при различном расположении маяков глобальной навигационной системы. На основе проведенного моделирования можно утверждать, что построенный фильтр достаточно эффекти-

вен и может быть использован при локализации реальных робототехнических систем.

## Список литературы

- [1] Дегтярёв А.А., Тайль Ш. Элементы теории адаптивного расширенного фильтра Калмана / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – М., 2003. – №26. – 35 с.
- [2] Rudy Negenborn, Robot Localization and Kalman Filters On finding your position in a noisy world / Thesis, utrecht university, 2003
- [3] W.J. Sung, S.O. Choi, K.H. You, TDoA based UGV Localization using Adaptive Kalman Filter Algorithm / Sungkyunkwan University, 2009
- [4] Derek Kurth, Range-Only Robot Localization and SLAM with Radio / Robotics Institute Carnegie Mellon University, 2004
- [5] Bradley Hiebert-Treuer, An Introduction to Robot SLAM (Simultaneous Localization And Mapping), 2007
- [6] Shahram Rezaei, Raja Sengupta, Kalman Filter Based Integration of DGPS and Vehicle Sensors for Localization / Department of Civil Engineering University of California at Berkeley, 2003
- [7] Somphop Limsoonthrakul, Matthew N. Dailey, Manukid Parnichkun, Intelligent Vehicle Localization Using GPS, Compass, and Machine Vision / Asian Institute of Technology, 2008



## Приложение. Слежение за видеоориентирами

Работу предполагается развивать в следующем направлении.

Для облегчения решения задачи глобальной навигации в районе перемещения робота могут быть установлены маркеры. В данной работе маркером будем называть прямоугольный объект с нанесенным на него изображением и известными заранее размерами. Маркеры должны быть установлены таким образом, чтобы обеспечить видимость их с максимально возможной части района перемещения роботов. Будем считать, что данные обо всех маркерах заранее известны роботу - система навигации располагает снимками всех маркеров, а также координатами маркеров в системе отсчета связанной с Землей (например, полученных при помощи GPS).

Заметим, что также возможно использование системы в ручном режиме, когда оператор выделяет какой-либо объект на изображении, полученном с сенсоров робота. После этого система продолжает сопровождение этого объекта на протяжении всего его времени видимости.

Задачей данной системы является вычисление угловых координат маркеров относительно корпуса робота. После этого с помощью триангуляции и априорной информации о координатах маркеров могут быть получены или уточнены координаты робота в системе отсчета, связанной с Землей.

Для нормальной работы системы на робот потребуется установить управляемую в 2-х плоскостях камеру с максимальным углом обзора. Это позволит максимально расширить область охвата системы сопровождения маркеров. Предполагается, что система слежения за маркерами будет обрабатывать видеопоток от системы зрения робота с информацией о маркерах – ориентирах.

Предлагаемая система сможет выполнять роль автономной подсистемы навигации, а также сможет дополнить работу системы, описанной в настоящей работе, если, например, маркеры трактовать как специфические маяки.

В настоящее время система проходит макетную отработку.