ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 17 за 2011 г.

Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В.

Определение вращательного движения космического аппарата по измерениям звездного датчика и датчика угловой скорости

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бессонов Р.В., Куркина А.Н., Сазонов В.В. Определение вращательного движения космического аппарата по измерениям звездного датчика и датчика угловой скорости // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 17. 27 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-17**

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

Р.В. Бессонов, А.Н. Куркина, В.В. Сазонов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА И ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

Москва – 2011

Аннотация

Описывается применение фильтра Калмана в задаче определения вращательного движения космического аппарата по измерениям звездного датчика и датчика угловой скорости. Рассмотрены два варианта этой задачи. В первом варианте определение движения выполняется без использования измерений угловой скорости – по одним только измерениям звездного датчика. Во втором варианте существенно используются измерения вектора угловой скорости. Приведены примеры определения реального вращательного движения спутника «Метеор-М».

R.V. Bessonov, A.N. Kurkina, V.V. Sazonov. Determining a spacecraft attitude motion by measurements of a star sensor and an angular rate sensor. We describe an application of Kalman's filter in the problem of determining a spacecraft attitude motion by measurements of a star sensor and an angular rate sensor. We consider two variants of this problem. The first variant deals with star sensor measurements solely; the second one uses essentially angular rate measurements. The solutions of these variants are illustrated by examples of determining the real attitude motion of the spacecraft Meteor-M.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА

1.1. Постановка задачи. Рассматривается вращательное движение КА. Это движение описывается нормированной кватернионной функцией времени $\mathbf{q}_*(t)$, $\|\mathbf{q}_*(t)\| \equiv 1$. Кватернион $\mathbf{q}_*(t)$ задает ориентацию жестко связанной с корпусом КА системы координат $x_1x_2x_3$ относительно базовой инерциальной системы координат $X_1X_2X_3$ в момент t. Формулы перехода от системы $x_1x_2x_3$ к системе $X_1X_2X_3$ записываются в кватернионной форме следующим образом

$$(0, X_1, X_2, X_3) = \mathbf{q}_* \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{q}_*^{-1}.$$

Астроизмерительный прибор БОКЗ-М, далее для краткости называемый датчиком, выдает в дискретные моменты времени t_k $(k = 1, 2, \ldots)$, $t_k < t_{k+1}$ «измеренные» значения этой функции $\mathbf{q}_k \approx \mathbf{q}_*(t_k)$, $\|\mathbf{q}_k\| = 1$. По данным измерений t_k, $\mathbf{q}_k$ $(k = n, n-1, n-2, \ldots)$ требуется найти более точную (сглаженную) оценку значения $\mathbf{q}_*(t_n)$ и сделать прогноз значения $\mathbf{q}_*(t_{n+1})$. Решая эту задачу, будем считать, что угловая скорость КА меняется медленно и на отрезках времени $t_k \le t \le t_{k+1}$ ее можно считать постоянной.

1.2. Параметры Родрига. Введем удобные для последующего изложения обозначения. Нормированные кватернионы будем выражать в функции модифицированных параметров Родрига [1]. Компоненты произвольного кватерниона $\mathbf{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, $\|\mathbf{q}\| = 1$ представим в виде

$$q_0 = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2 - z_3^2}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}, \quad q_i = \frac{2z_i}{1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь z_i – параметры Родрига. Для удобства записи такую параметризацию обозначим $\mathbf{q} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)$.

В общем случае

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \ne \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2), \quad \mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \ne \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1),$$

но при $|\mathbf{z}_1| << 1$, $|\mathbf{z}_2| << 1$ разность $\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) - \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2)$ будет иметь второй порядок малости относительно $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$. Ниже для любых малых $|\mathbf{z}_1|$ и $|\mathbf{z}_2|$ принимаем

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}_1) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2) = \mathbf{F}(\mathbf{z}_2) \circ \mathbf{F}(\mathbf{z}_1).$$

Такое упрощение эквивалентно линеаризации некоторых используемых ниже соотношений. Функцию, обратную функции $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$ в окрестности точки $\mathbf{s} = 1$, обозначим $\mathbf{z} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{s})$. Эта обратная функция удовлетворяет условию $\mathbf{F}^{-1}(1) = 0$. Если $\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{z})$, то $\mathbf{s}^{-1} = \mathbf{F}(-\mathbf{z})$. Последняя формула является точной.

Абсолютную угловую скорость спутника и ее компоненты в системе $x_1x_2x_3$ обозначим $\boldsymbol{\omega}$ и ω_i $(i=1,2,3)$. Справедлива формула [1]

$$(0,\omega_1,\omega_2,\omega_3)=2\mathbf{q}_*^{-1}\circ\frac{d\mathbf{q}_*}{dt}\ .$$

Если движение системы $x_1x_2x_3$ выражено через параметры Родрига $\mathbf{z}(t)$, то ее угловую скорость $\boldsymbol{\omega}(t)$ также можно выразить через эти параметры [1]:

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{4}{(1+\mathbf{z}\cdot\mathbf{z})^2}\left[(1-\mathbf{z}\cdot\mathbf{z})\frac{d\mathbf{z}}{dt}-2\left(\mathbf{z}\times\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)+2\left(\mathbf{z}\cdot\frac{d\mathbf{z}}{dt}\right)\mathbf{z}\right].$$

Компоненты вектора $\mathbf{z}$ и определяемого последней формулой вектора $\boldsymbol{\omega}$ относятся к системе $x_1x_2x_3$. Бесконечно малый поворот этой системы вокруг вектора $\boldsymbol{\theta}=(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ задается кватернионом с параметрами Родрига $\mathbf{z}=\boldsymbol{\theta}/4$.

Встречающиеся ниже случайные нормированные кватернионы имеют вид $\mathbf{q}=\mathbf{p}\circ\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$, где $\mathbf{p}$ – неслучайный нормированный кватернион, $\boldsymbol{\xi}$ – случайный трехмерный вектор с нулевым средним значением и ковариационной матрицей K_ξ: $\mathrm{M}\boldsymbol{\xi}=0$, $K_\xi=\mathrm{M}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$. При этом $\mathrm{tr}K_\xi<<1$. В такой ситуации с высокой точностью $\mathrm{M}\mathbf{q}=\mathbf{p}$, а вектор $\boldsymbol{\xi}$ можно считать лежащим в касательном пространстве к трехмерной единичной сфере в точке $\mathbf{p}$.

1.3. Вывод соотношений фильтра Калмана. Пусть КА движется с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и в момент t_0 его угловое положение задается кватернионом $\mathbf{q}_0=\mathbf{q}_*(t_0)$. Движение КА в малой окрестности точки t_0 можно представить следующим образом

$$\mathbf{q}_*(t)=\mathbf{q}_0\circ\mathbf{F}(\mathbf{z}),\quad \mathbf{z}=\frac{1}{4}\boldsymbol{\omega}(t-t_0)+o[(t-t_0)^2].$$

Компоненты векторов $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{\omega}$ относятся к системе $x_1x_2x_3$. С учетом этой формулы модель движения КА и модель измерений возьмем в виде

$$\mathbf{q}_n=\mathbf{q}_{n-1}\circ\mathbf{F}[\boldsymbol{\mu}_{n-1}(t_n-t_{n-1})+\boldsymbol{\eta}_n],\quad \boldsymbol{\mu}_n=\boldsymbol{\mu}_{n-1}+\boldsymbol{\zeta}_n,\quad \mathbf{p}_n=\mathbf{q}_n\circ\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_n).\quad (1)$$

Здесь кватернион $\mathbf{q}_n=\mathbf{q}_*(t_n)$ и вектор $\boldsymbol{\mu}_n$ образуют фазовый вектор КА, $\mathbf{p}_n$ – результат измерения кватерниона $\mathbf{q}_n$, $\boldsymbol{\xi}_n$ – вектор случайных ошибок измерений, $(\boldsymbol{\eta}_n,\boldsymbol{\zeta}_n)$ – вектор случайных возмущений в системе. Полагаем, что векторы $\boldsymbol{\xi}_m$ и $(\boldsymbol{\eta}_n,\boldsymbol{\zeta}_n)$ некоррелированны при любых значениях m и n, векторы $\boldsymbol{\xi}_m$, $\boldsymbol{\xi}_n$, $\boldsymbol{\eta}_n$, $\boldsymbol{\eta}_m$, $\boldsymbol{\zeta}_m$ и $\boldsymbol{\zeta}_n$ попарно некоррелированны при любых не равных значениях индексов. Математические ожидания и ковариационные матрицы этих векторов определяются соотношениями

$$\mathrm{M}\boldsymbol{\xi}_n=0,\qquad \mathrm{M}\boldsymbol{\eta}_n=0,\qquad \mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_n=0,\qquad \mathrm{M}\boldsymbol{\xi}_n\boldsymbol{\xi}_n^{\mathrm{T}}=K_n,$$
$$\mathrm{M}\boldsymbol{\eta}_n\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}=L_{\eta\eta}^{(n)},\qquad \mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_n\boldsymbol{\zeta}_n^{\mathrm{T}}=L_{\zeta\zeta}^{(n)},\qquad \mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_n\boldsymbol{\eta}_n^{\mathrm{T}}=L_{\zeta\eta}^{(n)}=\left[L_{\eta\zeta}^{(n)}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Задача состоит в том, чтобы по данным измерений $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ найти оценки кватерниона $\mathbf{q}_n$ и вектора $\boldsymbol{\mu}_n$, а также характеристики точности этих оценок. Задача прогноза будет решена попутно. Искомые оценки обозначим $\hat{\mathbf{q}}_{n/n}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}$; ошибки этих оценок представим в виде: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} = \mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_{n/n}^{-1} \circ \mathbf{q}_n)$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} = \boldsymbol{\mu}_n - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}$. И оценки, и ошибки представляют собой случайные величины. Алгоритм получения оценок $\hat{\mathbf{q}}_{n/n}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}$ будем строить так, чтобы ошибки $\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}$ имели нулевые средние значения. В качестве характеристик точности оценок примем ковариационные матрицы

$$P_{n/n} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}^{\mathrm{T}}, \quad Q_{n/n} = \mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}^{\mathrm{T}}, \quad R_{n/n} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}^{\mathrm{T}}.$$

Прогноз величин $\mathbf{q}_{n+1}$, $\boldsymbol{\mu}_{n+1}$ по измерениям $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, …, $\mathbf{p}_n$ обозначим $\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}$; ошибки прогноза представим так: $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} = \mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n}^{-1} \circ \mathbf{q}_{n+1})$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = \boldsymbol{\mu}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}$. Обеспечим соотношения $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} = 0$, $\mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = 0$ и точность прогноза будем характеризовать ковариационными матрицами

$$P_{n+1/n} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}^{\mathrm{T}}, \quad Q_{n+1/n} = \mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}^{\mathrm{T}}, \quad R_{n+1/n} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}^{\mathrm{T}}.$$

Пусть оценки $\hat{\mathbf{q}}_{n/n}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}$ и матрицы $P_{n/n}$, $R_{n/n}$, $Q_{n/n}$ получены, причем $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} = 0$, $\mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} = 0$. Приведем формулы для величин $\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}$, $\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n+1}$, $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1}$ и ковариационных матриц их ошибок. Прогноз зададим формулами (ср. (1))

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n} = \hat{\mathbf{q}}_{n/n} \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}), \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}.$$

Здесь $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$. Используя последнюю формулу и второе уравнение (1), получим

$$\boldsymbol{\mu}_{n+1} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = \boldsymbol{\mu}_n - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\zeta}_{n+1} \quad \text{или} \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\zeta}_{n+1}.$$

Первое уравнение (1), увеличив в нем индексы на 1, преобразуем так:

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \boldsymbol{\mu}_n + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n/n} \circ \hat{\mathbf{q}}_{n/n}^{-1} \circ \mathbf{q}_n \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n/n} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}) \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}) \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n/n} \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n}) \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\mathbf{q}_{n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n+1/n} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} + \Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n}^{-1} \circ \mathbf{q}_{n+1} \equiv \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} + \Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} + \Delta t_n \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} + \boldsymbol{\eta}_{n+1}.$$

В этих преобразованиях использованы формулы прогноза, малость аргументов функции $\mathbf{F}(\cdot)$ и формулы, определяющие ошибки. Полученные формулы для ошибок прогноза запишем в виде

$$\begin{Vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_3 & \Delta t_n E_3 \\ 0 & E_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\eta}_{n+1} \\ \boldsymbol{\zeta}_{n+1} \end{Vmatrix},$$

где E_3 – единичная матрица третьего порядка. Отсюда следуют равенства $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} = 0$, $\mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = 0$ и выражение для ковариационных матриц

$$\begin{Vmatrix} P_{n+1/n} & R_{n+1/n} \\ R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} & Q_{n+1/n} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} E_3 & \Delta t_n E_3 \\ 0 & E_3 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_{n/n} & R_{n/n} \\ R^{\mathrm{T}}_{n/n} & Q_{n/n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} E_3 & 0 \\ \Delta t_n E_3 & E_3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} L^{(n+1)}_{\eta\eta} & L^{(n+1)}_{\eta\zeta} \\ L^{(n+1)}_{\zeta\eta} & L^{(n+1)}_{\zeta\zeta} \end{Vmatrix}.$$

Обозначим $\boldsymbol{\delta}_{n+1} = \mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n} \circ \mathbf{p}_{n+1})$ и преобразуем формулу ошибки измерения на шаге $n+1$ (ср. последнее соотношение (1) после замены $n \to n+1$):

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_{n+1}) = \mathbf{q}^{-1}_{n+1} \circ \mathbf{p}_{n+1} = (\hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n} \circ \mathbf{q}_{n+1})^{-1} \circ \hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n} \circ \mathbf{p}_{n+1} = \mathbf{F}(-\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}_{n+1}).$$

Отсюда $\boldsymbol{\xi}_{n+1} = \boldsymbol{\delta}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}$. Следуя методу наименьших квадратов, составим выражение

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - \boldsymbol{\delta}_{n+1})^{\mathrm{T}} K^{-1}_{n+1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - \boldsymbol{\delta}_{n+1}) +$$

$$+ \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{T}_{n+1/n}, \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{T}_{n+1/n} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_{n+1/n} & R_{n+1/n} \\ R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} & Q_{n+1/n} \end{Vmatrix}^{-1} \begin{Vmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} \\ \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} \end{Vmatrix}.$$

Значения величин $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}$, доставляющие этому выражению минимум, обозначим $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1/n}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*}_{n+1/n}$. Они определяются линейной системой с правой частью $\begin{Vmatrix} \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}_{n+1} K^{-1}_{n+1}, 0 \end{Vmatrix}^{\mathrm{T}}$ и матрицей $A^{\mathrm{T}} K^{-1}_{n+1} A + B^{-1}$, где

$$A = \| E_3, 0 \|, \quad B = \begin{Vmatrix} P_{n+1/n} & R_{n+1/n} \\ R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} & Q_{n+1/n} \end{Vmatrix}.$$

Соответствующая обратная матрица задается соотношениями

$$\left(A^{\mathrm{T}} K^{-1}_{n+1} A + B^{-1}\right)^{-1} = B - BA^{\mathrm{T}} S^{-1} AB, \quad S = K_{n+1} + ABA^{\mathrm{T}},$$

полная форма которых $S = K_{n+1} + P_{n+1/n}$ и

$$\left(A^{\mathrm{T}} K^{-1}_{n+1} A + B^{-1}\right)^{-1} = \begin{Vmatrix} P_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n} & R_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} \\ R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n} & Q_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} \end{Vmatrix}.$$

Отсюда находим формулы для расчета величин $\boldsymbol{\varepsilon}^{*}_{n+1/n}$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^{*}_{n+1/n}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n} = (P_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n}) K^{-1}_{n+1} \boldsymbol{\delta}_{n+1},$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^*_{n+1/n} = (R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n}) K^{-1}_{n+1} \boldsymbol{\delta}_{n+1}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $(E_3 - S^{-1} P_{n+1/n}) K^{-1}_{n+1} = S^{-1}$, поэтому полученные формулы представимы в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n} = P_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_{n+1}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*_{n+1/n} = R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_{n+1}.$$

Положим $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*_{n+1/n}$, $\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n+1/n} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n})$. Тогда $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} - \tilde{\boldsymbol{\mu}}^*_{n+1/n}$. Чтобы найти $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1}$, запишем соотношения

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1}) = \hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n+1} \circ \mathbf{q}_{n+1} = (\hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n} \circ \hat{\mathbf{q}}_{n+1/n+1})^{-1} \circ \hat{\mathbf{q}}^{-1}_{n+1/n} \circ \mathbf{q}_{n+1} =$$
$$= \mathbf{F}(-\boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n}) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - \boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n}).$$

Отсюда $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - \boldsymbol{\varepsilon}^*_{n+1/n}$. Напомним, $\boldsymbol{\delta}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} + \boldsymbol{\xi}_{n+1}$, поэтому

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_{n+1} = (E_3 - P_{n+1/n} S^{-1}) \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\xi}_{n+1},$$
$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} \boldsymbol{\xi}_{n+1}.$$

Из последних соотношений следует, что $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1} = 0$, $\mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} = 0$. С помощью тех же соотношений получаем

$$P_{n+1/n+1} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1} \boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}_{n+1/n+1} = (E_3 - P_{n+1/n} S^{-1}) P_{n+1/n} (E_3 - S^{-1} P_{n+1/n}) +$$
$$+ P_{n+1/n} S^{-1} K_{n+1} S^{-1} P_{n+1/n} = P_{n+1/n} - 2 P_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n} +$$
$$P_{n+1/n} S^{-1} (P_{n+1/n} + K_{n+1}) S^{-1} P_{n+1/n} = P_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n}.$$

Здесь использовано равенство $(P_{n+1/n} + K_{n+1}) S^{-1} = E_3$. Аналогично

$$R_{n+1/n+1} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n+1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}_{n+1/n+1} = (E_3 - P_{n+1/n} S^{-1}) R_{n+1/n} -$$
$$- (E_3 - P_{n+1/n} S^{-1}) P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} + P_{n+1/n} S^{-1} K_{n+1} S^{-1} R_{n+1/n} =$$
$$= R_{n+1/n} - 2 P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} + P_{n+1/n} S^{-1} (P_{n+1/n} + K_{n+1}) S^{-1} R_{n+1/n} =$$
$$= R_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n},$$

$$Q_{n+1/n+1} = \mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^{\mathrm{T}}_{n+1/n+1} = Q_{n+1/n} - 2 R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} +$$
$$+ R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} + R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} K_{n+1} S^{-1} R_{n+1/n} =$$
$$= Q_{n+1/n} - 2 R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n} + R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} (P_{n+1/n} + K_{n+1}) S^{-1} R_{n+1/n} =$$
$$= Q_{n+1/n} - R^{\mathrm{T}}_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n}.$$

Выпишем с некоторыми изменениями основные полученные формулы. Формулы прогноза:

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n} = \hat{\mathbf{q}}_n \circ \mathbf{F}(\Delta t_n \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n}), \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n},$$

$$P_{n+1/n} = P_{n/n} + \Delta t_n \left(R_{n/n}^{\mathrm{T}} + R_{n/n}\right) + (\Delta t_n)^2 Q_{n/n} + L_{\eta\eta}^{(n+1)},$$

$$R_{n+1/n} = R_{n/n} + \Delta t_n Q_{n/n} + L_{\eta\zeta}^{(n+1)}, \quad Q_{n+1/n} = Q_{n/n} + L_{\zeta\zeta}^{(n+1)}.$$

Формулы оценивания:

$$\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n+1} = \hat{\mathbf{q}}_{n+1/n} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}^*), \quad \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n+1} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n} + \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}^*,$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1/n}^* = P_{n+1/n} \boldsymbol{\lambda}, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}_{n+1/n}^* = R_{n+1/n}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = S^{-1} \mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_{n+1/n}^{-1} \circ \mathbf{p}_{n+1}),$$

$$S = K_{n+1} + P_{n+1/n}, \quad P_{n+1/n+1} = P_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} P_{n+1/n},$$

$$R_{n+1/n+1} = R_{n+1/n} - P_{n+1/n} S^{-1} R_{n+1/n}, \quad Q_{n+1/n+1} = Q_{n+1/n} - R_{n+1/n}^{\mathrm{T}} S^{-1} R_{n+1/n}.$$

Замечания. 1. Если матрицы K_n, $L_{\eta\eta}^{(n)}$, $L_{\eta\zeta}^{(n)}$ и $L_{\zeta\zeta}^{(n)}$ диагональны при всех n, матрицы $P_{1/1}$, $R_{1/1}$ и $Q_{1/1}$ выбраны диагональными, то матрицы $P_{n/n}$, $R_{n/n}$, $Q_{n/n}$ и $P_{n+1/n}$, $R_{n+1/n}$, $Q_{n+1/n}$ также будут диагональными при всех n. В этом случае выписанные выше формулы по существу распадаются на три экземпляра решения одномерной задачи, исследованной в [2].

2. Поскольку вывод формул данного пункта основан на линеаризации соотношений (1), в полученных формулах можно отбросить члены $\sim (\Delta t_n)^2$.

1.4. Примеры. Обработаем описанным способом измерения БОКЗ, полученные на спутнике «Метеор-М». Применим этот способ к отрезкам измерений, исследованным в [3]. В данном случае система $x_1 x_2 x_3$ – это собственная система координат датчика БОКЗ-М. Плоскость $x_1 x_2$ параллельна плоскости ПЗС-матрицы, ось x_3 направлена от матрицы к объективу датчика. Система $X_1 X_2 X_3$ – вторая геоэкваториальная система координат эпохи даты. Плоскость $X_1 X_2$ совпадает с плоскостью среднего земного экватора этой эпохи, оси X_1 и X_3 направлены соответственно в точку среднего весеннего равноденствия и северный полюс мира. Ниже используется также строительная система координат спутника $y_1 y_2 y_3$. Формулы перехода от системы координат датчика к строительной системе имеют вид

$$y_1 = -x_2, \quad y_2 = x_1 \sin\alpha - x_3 \cos\alpha, \quad y_3 = x_1 \cos\alpha + x_3 \sin\alpha,$$

где $\alpha = 15^\circ$. На рассматриваемых отрезках движения спутник находился в орбитальной ориентации; с ошибками около 1° оси y_3 и y_2 были направлены соответственно по геоцентрическому радиусу-вектору центра масс спутника и вектору его орбитального кинетического момента. Измерения датчика выполнялись с постоянным шагом $t_{n+1} - t_n = H = 3$ с.

Матрицы K_n, $L_{\eta\eta}^{(n)}$, $L_{\eta\zeta}^{(n)}$ и $L_{\zeta\zeta}^{(n)}$ зададим соотношениями

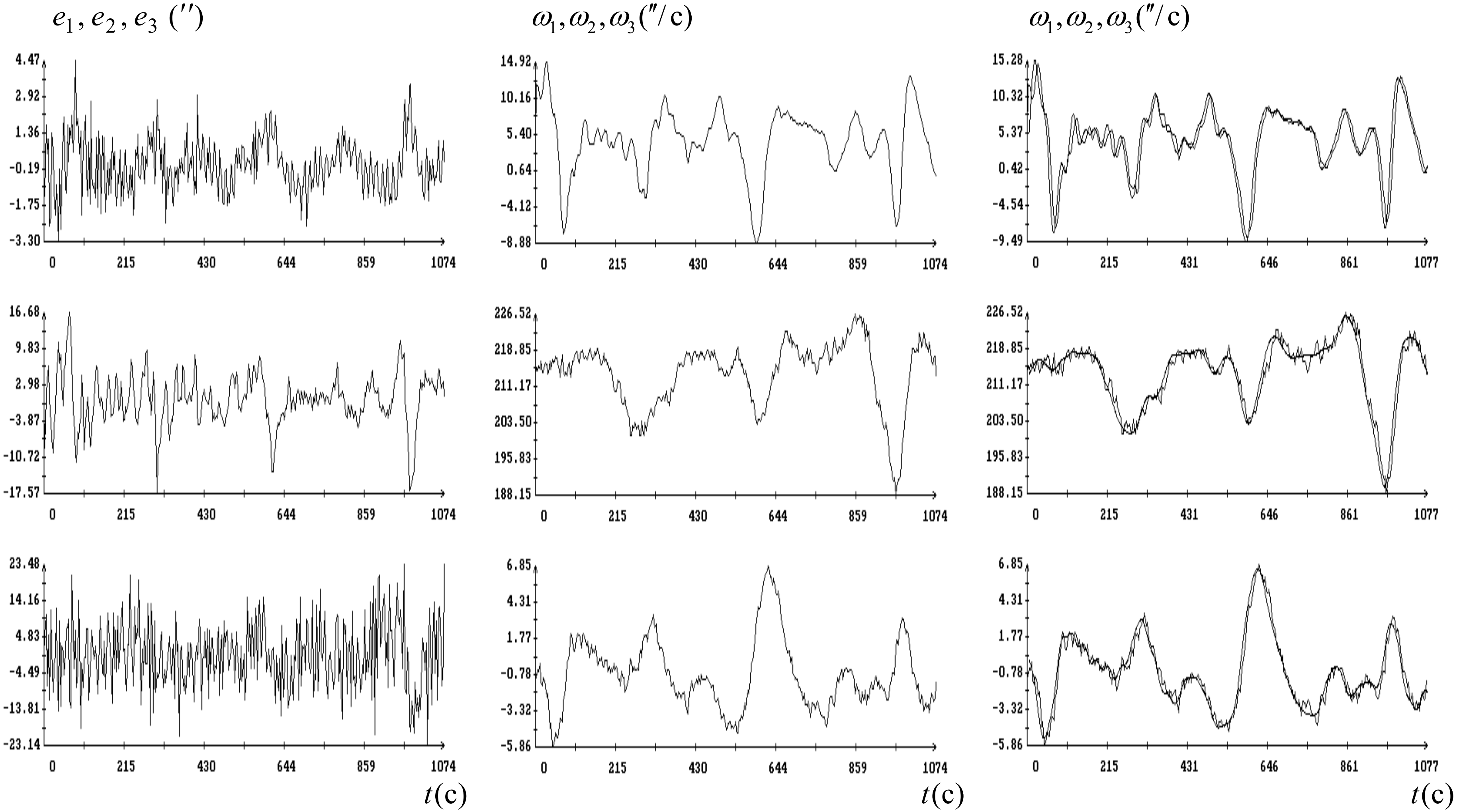
$$K_n = \mathrm{diag}(\sigma_{a1}^2, \sigma_{a2}^2, \sigma_{a3}^2), \quad L_{\zeta\zeta}^{(n)} = H\,\mathrm{diag}(\sigma_{\omega1}^2, \sigma_{\omega2}^2, \sigma_{\omega3}^2),$$

$$L_{\eta\zeta}^{(n)} = \frac{H^2}{2}\mathrm{diag}(\sigma_{\omega1}^2, \sigma_{\omega2}^2, \sigma_{\omega3}^2), \quad L_{\eta\eta}^{(n)} = \frac{H^3}{3}\mathrm{diag}(\sigma_{\omega1}^2, \sigma_{\omega2}^2, \sigma_{\omega3}^2),$$

$$\sigma_{a1} = 7'', \quad \sigma_{a2} = 12'', \quad \sigma_{a3} = 36'', \quad \sigma_{\omega1} = \sigma_{\omega2} = 0.8''/\text{с}, \quad \sigma_{\omega3} = 2.4''/\text{с}.$$

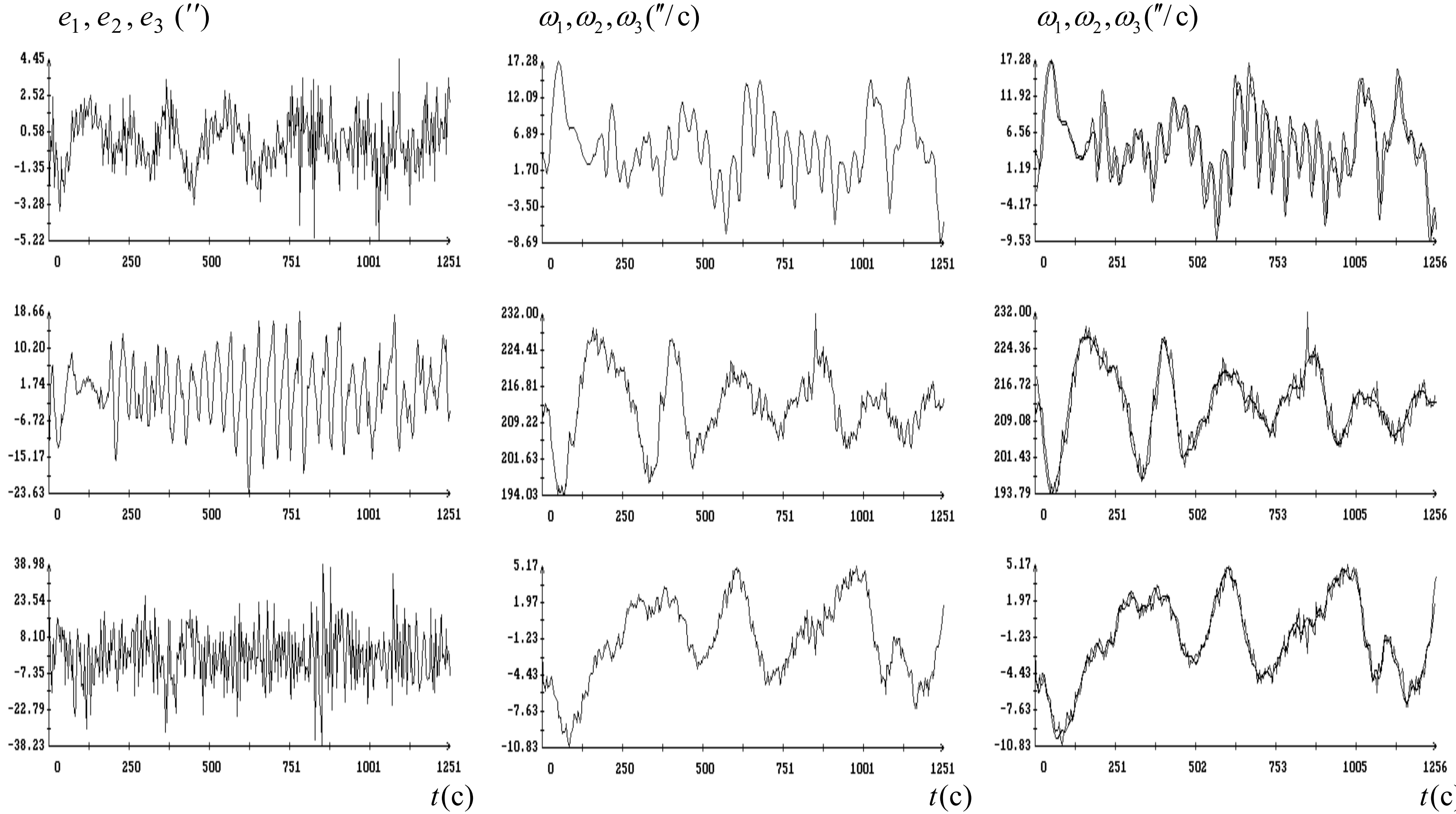
На рис. 1а и 2а приведены отклонения данных измерений от результатов фильтрации. Такие отклонения представлены графиками компонент векторов $4\boldsymbol{\varepsilon}_{n/n} = \left(e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, e_3^{(n)}\right)$ в системе координат $x_1x_2x_3$. Каждый такой график представляет собой ломаную, звенья которой последовательно соединяют точки $\left(t_n, e_i^{(n)}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ при соответствующем значении $i = 1, 2, 3$. В примере на рис. 1 среднеквадратичные значения величин $e_i^{(n)}$ составляют $\sigma_1 = 1.14''$, $\sigma_2 = 4.92''$, $\sigma_3 = 8.58''$. В примере на рис. 2 аналогичные среднеквадратичные значения $\sigma_1 = 1.49''$, $\sigma_2 = 7.62''$, $\sigma_3 = 11.7''$. При расчете этих примеров значения параметров σ_{ai} и $\sigma_{\omega i}$ были выбраны так, чтобы отклонения фильтрации примерно совпадали с ошибками сглаживания в [3]. Как оказалось, величины σ_i зависят от отношений $\sigma_{ai}/\sigma_{\omega i}$, а не от конкретных значений параметров σ_{ai} и $\sigma_{\omega i}$. От этих параметров зависят ковариационные матрицы оценок, в частности, в рассматриваемых примерах диагональные элементы матриц $P_{n/n}$ после завершения короткого переходного процесса практически постоянны и несколько превосходят соответствующие величины σ_{ai}^2.

Графики оценок угловой скорости приведены на рис. 1б и 2б. Оценками угловой скорости служат компоненты векторов $4\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n/n} = \left(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \omega_3^{(n)}\right)$ в строительной системе координат $y_1y_2y_3$. График компоненты с номером $i = 1, 2, 3$ представляет собой ломаную, звенья которой последовательно соединяют точки $\left(t_n, \omega_i^{(n)}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Правильнее было бы представлять компоненты угловой скорости графиками кусочно-постоянных функций, однако при выбранном масштабе рисунков разница между указанными способами представления несущественна. На рис. 1в и 2в графики компонент угловой скорости, полученные фильтрацией Калмана, сравниваются с графиками компонент угловой скорости, взятыми из [3] и полученными сглаживанием данных измерений ГИВУСов (ГИВУС – гироскопический измеритель вектора угловой скорости, его измерения относятся к системе $y_1y_2y_3$) с помощью дискретных рядов Фурье. На рисунках последние графики выглядят более гладкими. Как видно из рисунков, совпадение достаточно хорошее, но оценки, полученные с помощью фильтра Калмана, несколько отстают от оценок [3]. На рис. 3 описываемое сравнение повторено, но калмановские оценки смещены на 4 с влево. Совпадение оценок улучшилось.



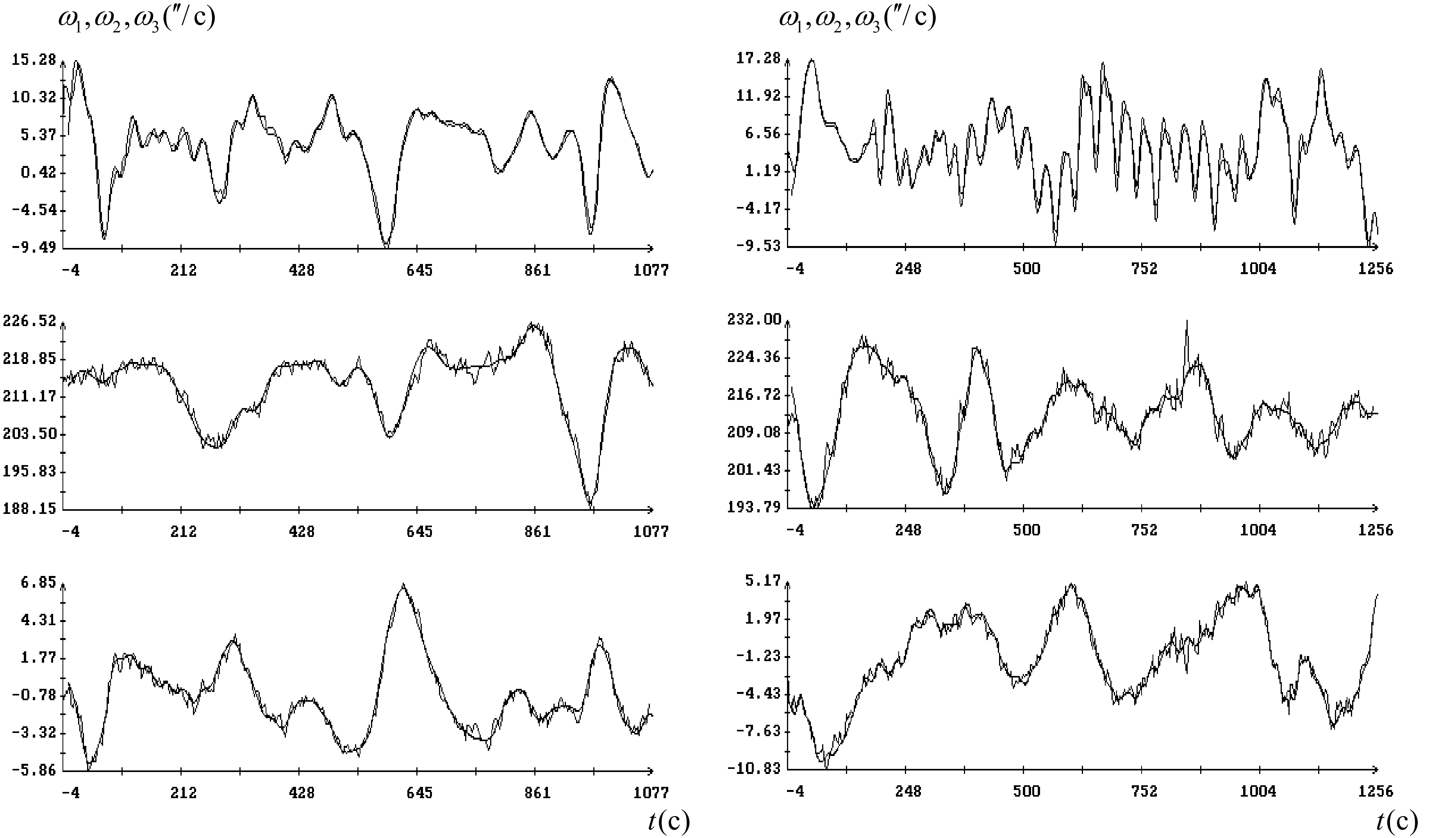
(а) (б) (в)

Рис. 1. Обработка данных измерений БОКЗ с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 13:22:04 UTC 27.04.2010; (а) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающего отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 1.14''$, $\sigma_2 = 4.92''$, $\sigma_3 = 8.58''$; (б) оценка угловой скорости; (в) оценка угловой скорости и сглаженные значения данных измерений.



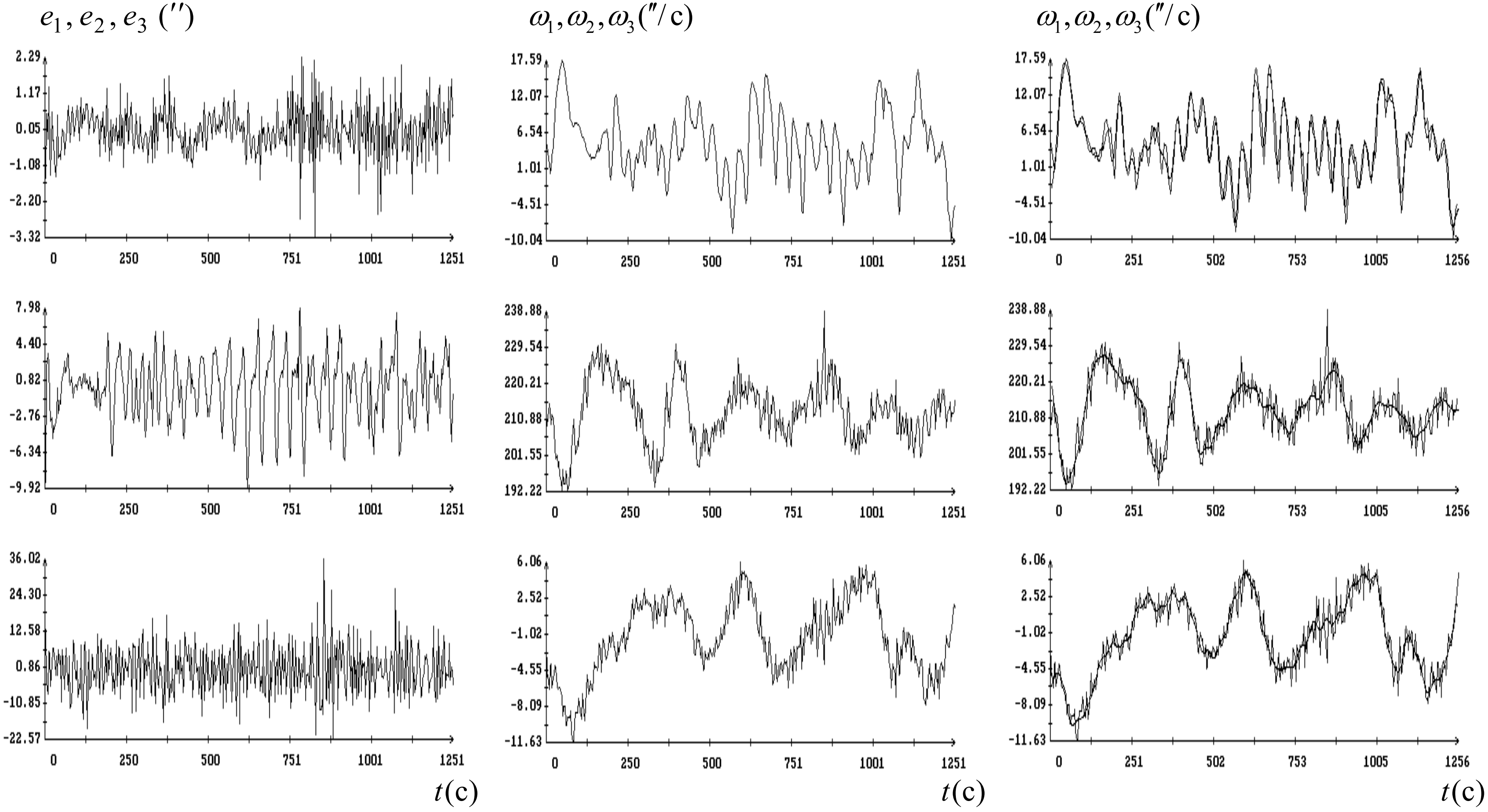
(а) (б) (в)

Рис. 2. Обработка данных измерений БОКЗ с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:26 UTC 27.04.2010; (а) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающего отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 1.49''$, $\sigma_2 = 7.62''$, $\sigma_3 = 11.7''$; (б) оценка угловой скорости; (в) оценка угловой скорости и сглаженные значения данных измерений.



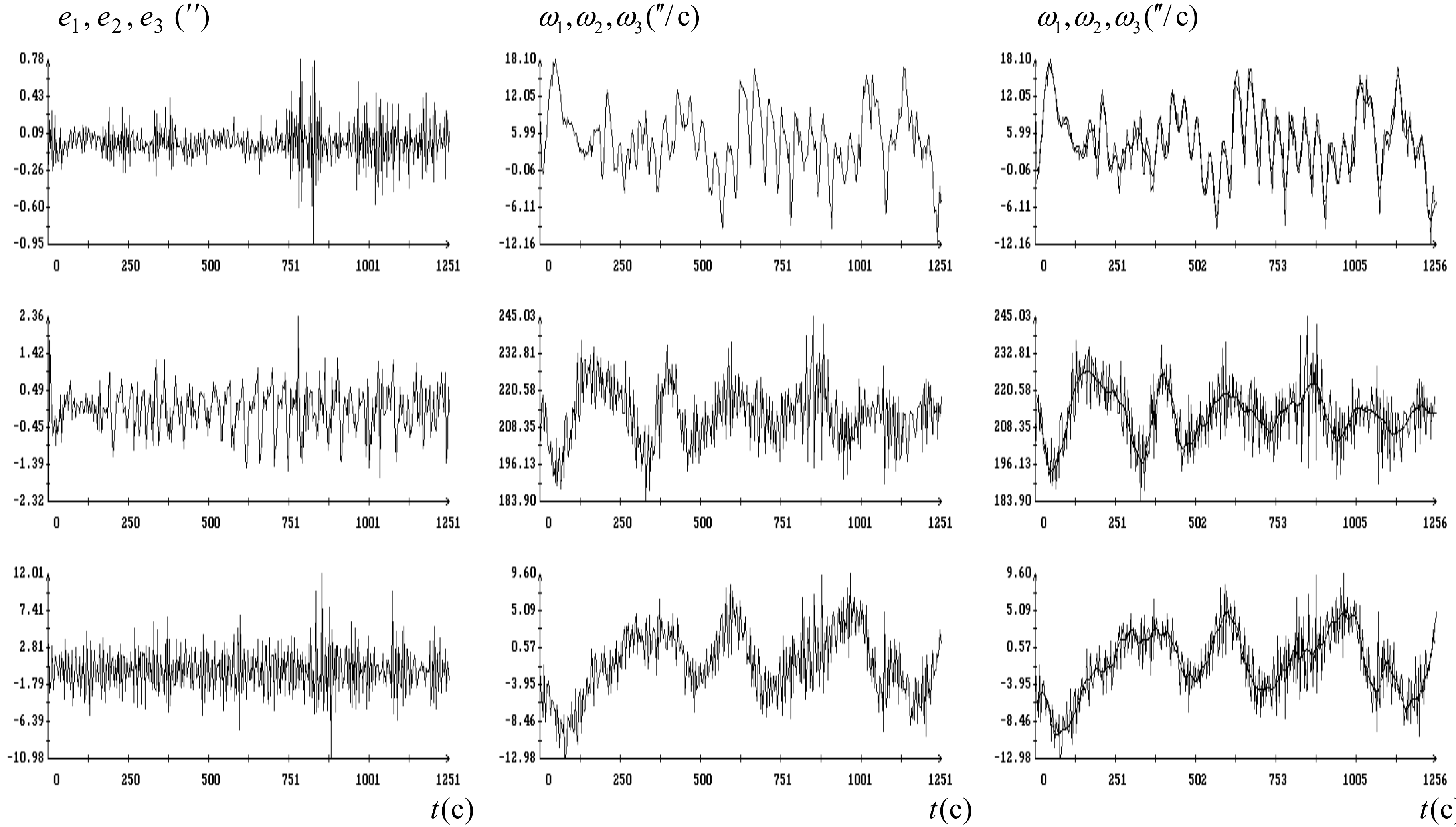
(а) (б)

Рис. 3. Оценки угловой скорости, полученные фильтрацией измерений БОКЗ и сглаженные измерения угловой скорости; момент $t = 0$ соответствует: на графиках (а) – 13:22:04 UTC 27.04.2010, на графиках – (б) 14:43:26 UTC 27.04.2010. Результаты фильтрации сдвинуты на 4 с влево (вперед по времени).



(а) (б) (в)

Рис. 4. Обработка данных измерений БОКЗ с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:26 UTC 27.04.2010; (а) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающего отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 0.76''$, $\sigma_2 = 3.14''$, $\sigma_3 = 7.81''$; (б) оценка угловой скорости; (в) оценка угловой скорости и сглаженные значения данных измерений.



(а) (б) (в)

Рис. 5. Обработка данных измерений БОКЗ с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:26 UTC 27.04.2010; (а) компоненты вектора бесконечно малого поворота, выражающего отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 0.19''$, $\sigma_2 = 0.58''$, $\sigma_3 = 2.83''$; (б) оценка угловой скорости; (в) оценка угловой скорости и сглаженные значения данных измерений.

На рис. 4, 5 приведены варианты обработки данных, представленных на рис. 2, при другом выборе параметров $\sigma_{\omega i}$. Параметры σ_{ai} оставлены прежние. Вариант на рис. 4 получен при $\sigma_{\omega 1} = \sigma_{\omega 2} = 2''/\text{с}$, $\sigma_{\omega 3} = 6''/\text{с}$. Здесь $\sigma_1 = 0.76''$, $\sigma_2 = 3.14''$, $\sigma_3 = 7.81''$. В варианте на рис. 5 $\sigma_{\omega 1} = \sigma_{\omega 2} = 8''/\text{с}$, $\sigma_{\omega 3} = 24''/\text{с}$, $\sigma_1 = 0.19''$, $\sigma_2 = 0.58''$, $\sigma_3 = 2.83''$. Эти рисунки иллюстрируют влияние на результаты обработки параметров $\sigma_{\omega i}$, точнее, отношений $\sigma_{ai}/\sigma_{\omega i}$. В новых вариантах запаздывание оценок угловой скорости практически исчезло.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ КА ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ЗВЕЗДНОГО ДАТЧИКА И ДАТЧИКА УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

2.1. Численное интегрирование кинематических уравнений движения КА. Пусть дополнительно к измерениям кватерниона $\mathbf{q}$ имеются измерения компонент угловой скорости КА в системе $x_1 x_2 x_3$, заданные на временной сетке $\{t'_k\}$. Будем считать, что измерение, приписываемое моменту t'_k, реально относится к моменту $t'_{k-0.5} = (t'_k + t'_{k-1})/2$ и что узлы сетки $\{t'_k\}$ расположены существенно чаще узлов сетки $\{t_n\}$ с измерениями звездного датчика.

Математическую модель вращательного движения КА построим на базе кинематических уравнений, которым должна удовлетворять функция $\mathbf{q}_*(t)$. Эти уравнения имеют вид

$$2\frac{dq_0}{dt} = -\omega'_1 q_1 - \omega'_2 q_2 - \omega'_3 q_3, \quad 2\frac{dq_1}{dt} = \omega'_1 q_0 + \omega'_3 q_2 - \omega'_2 q_3, \tag{1}$$

$$2\frac{dq_2}{dt} = \omega'_2 q_0 + \omega'_1 q_3 - \omega'_3 q_1, \quad 2\frac{dq_3}{dt} = \omega'_3 q_0 + \omega'_2 q_1 - \omega'_1 q_2 .$$

Здесь $\omega'_i = \omega_i + \Delta_i$ $(i = 1,2,3)$, Δ_i – постоянные величины, которые рассматриваем как возможные смещения в телеметрических данных $\boldsymbol{\omega}(t'_{k-0.5})$. Система (1) допускает интегральное соотношение $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = 1$, поэтому кватернион $\mathbf{q}_*(t)$, определяемый как решение уравнений (1), будет нормированным, если он нормирован в начальной точке.

Уравнения (1) можно записать в кватернионной форме

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{q} \circ \boldsymbol{\omega}', \quad \boldsymbol{\omega}' = (\omega'_1, \omega'_2, \omega'_3). \tag{1'}$$

При умножении кватерниона на вектор последний считается чисто мнимым кватернионом.

Разностную схему для интегрирования уравнений (1) построим так. Проинтегрируем левую и правую части уравнения (1′) по времени на отрезке $[t'_k, t'_{k+1}]$, считая его решение известным. Получим (ради удобства ниже везде пишем $\boldsymbol{\omega}$ вместо $\boldsymbol{\omega}'$)

$$\mathbf{q}(t'_{k+1})-\mathbf{q}(t'_k)=\frac{1}{2}\int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}}\mathbf{q}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\,dt\,.$$

Для гладких решений уравнения ($1'$) имеем (ср. формулу трапеций)

$$\int\limits_{t'_k}^{t'_{k+1}}\mathbf{q}(t)\circ\boldsymbol{\omega}(t)\,dt=\frac{h_k}{2}[\mathbf{q}(t'_{k+1})+\mathbf{q}(t'_k)]\circ\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})+O\left(h_k^3\right),\quad h_k=t'_{k+1}-t'_k\,,$$

поэтому с погрешностью $O\left(h_k^3\right)$ можно записать

$$\mathbf{q}(t'_{k+1})-\mathbf{q}(t'_k)=\frac{h_k}{4}[\mathbf{q}(t'_{k+1})+\mathbf{q}(t'_k)]\circ\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})\,.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{q}(t'_{k+1})=\mathbf{q}(t'_k)\circ\boldsymbol{\kappa}_k\,,$$

$$\boldsymbol{\kappa}_k=\left(1,\frac{h_k\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{4}\right)\circ\left(1,-\frac{h_k\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{4}\right)^{-1}=\mathbf{F}\left[\frac{h_k\boldsymbol{\omega}(t'_{k+0.5})}{4}\right].$$

В силу свойств функции $\mathbf{F}$ имеем $|\boldsymbol{\kappa}_k|=1$, следовательно, полученная разностная схема сохраняет нормировку кватерниона.

2.2. Вывод соотношений фильтра Калмана. Разностную схему предыдущего пункта, несколько изменив обозначения и учтя постоянное смещение в измерениях угловой скорости, запишем в виде

$$\mathbf{q}_{k+1}=\mathbf{q}_k\circ\mathbf{F}\left(\frac{1}{4}h_k\boldsymbol{\omega}_{k+0.5}\right). \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{q}_k=\mathbf{q}(t'_k)$, $\boldsymbol{\omega}_{k+0.5}=\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5}+\boldsymbol{\Delta}$, $\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5}$ – измеренное значение угловой скорости, доступное в момент t'_{k+1}, но реально относящееся к моменту $t'_{k+0.5}$, $\boldsymbol{\Delta}$ – постоянное смещение в данных измерений. Поскольку сетка $\{t'_k\}$ предполагается достаточно мелкой, ошибки дискретизации при использовании уравнения (2) учитывать не будем.

Чтобы на базе выписанных соотношений построить фильтр Калмана, надо учесть в них случайные возмущения и ошибки. Опишем модель ошибок (ср. [4]). Во-первых, данные измерений помимо систематической ошибки, выражаемой величиной $\boldsymbol{\Delta}$, имеют случайную ошибку. Примем, что эта ошибка имеет нулевое среднее значение. Во-вторых, величина $\boldsymbol{\Delta}$ в действительности не является постоянной. Она медленно меняется со временем, и это изменение при определении движения КА на продолжительном промежутке времени необходимо учитывать.

Наличие указанных ошибок приводит к тому, что в уравнение (2) надо подставлять не величину $\boldsymbol{\omega}_{k+0.5}=\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5}+\boldsymbol{\Delta}$, а величину

$$\boldsymbol{\omega}_{k+0.5}=\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5}+\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}+\mathbf{b}_{k+0.5}+\boldsymbol{\eta}_{k+0.5}\,. \tag{3}$$

Здесь $\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}$ – оценка величины $\boldsymbol{\Delta}(t'_k)$, $\mathbf{b}_{k+0.5}$ – ошибка оценки $\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}$ (истинное значение $\boldsymbol{\Delta}(t'_k) = \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5} + \mathbf{b}_{k+0.5}$), $\boldsymbol{\eta}_{k+0.5}$ – случайная ошибка в измерении $\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5}$. Величины $\mathbf{b}_{k+0.5}$ и $\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}$ при подходящем значении k уточняются сразу после прихода измерения от звездного датчика. Моменты получения этих измерений, как уже говорилось, образуют временную сетку $\{t_n\}$, шаг которой намного крупнее шага сетки $\{t'_k\}$. На участках сетки $\{t'_k\}$, расположенных между узлами сетки $\{t_n\}$, примем соотношения

$$\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5} = \boldsymbol{\Delta}_{k-0.5}, \quad \mathbf{b}_{k+0.5} = \mathbf{b}_{k-0.5} + \boldsymbol{\zeta}_{k-0.5}. \tag{4}$$

Полагаем, что векторы $\boldsymbol{\eta}_{k+0.5}$, $\boldsymbol{\eta}_{j+0.5}$, $\boldsymbol{\zeta}_{k+0.5}$ и $\boldsymbol{\zeta}_{j+0.5}$ попарно некоррелированны при любых $k \neq j$. Математические ожидания и ковариационные матрицы этих векторов определяются соотношениями

$$\mathrm{M}\boldsymbol{\eta}_{k+0.5} = 0, \quad \mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_{k+0.5} = 0, \quad \mathrm{M}\boldsymbol{\eta}_{k+0.5}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}_{k+0.5} = L^{(k+0.5)}_{\eta\eta},$$
$$\mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_{k+0.5}\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}_{k+0.5} = L^{(k+0.5)}_{\zeta\zeta}, \quad \mathrm{M}\boldsymbol{\zeta}_{k+0.5}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}}_{k+0.5} = L^{(k+0.5)}_{\zeta\eta} = \left[L^{(k+0.5)}_{\eta\zeta}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Прогноз движения КА на участках сетки $\{t'_k\}$ между узлами сетки $\{t_n\}$ и расчет ошибки такого прогноза выполняется следующим образом. Оценку кватерниона $\mathbf{q}_k$ обозначим $\hat{\mathbf{q}}_k$. Ошибка этой оценки выражается вектором $\boldsymbol{\varepsilon}_k = \mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_k^{-1} \circ \mathbf{q}_k)$. Получим рекуррентные формулы для величин $\hat{\mathbf{q}}_k$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_k$. В уравнение (2) подставим соотношение (3) и сделаем преобразования:

$$\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \hat{\mathbf{q}}_k^{-1} \circ \mathbf{q}_k \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5} + \mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right],$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_k) \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5})\right] \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right],$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5})\right] \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_k) \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right],$$

$$\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \mathbf{F}\left[\frac{h_k}{4}(\boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5})\right] \circ \mathbf{F}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right].$$

Формулы прогноза возьмем в виде

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+0.5} = \boldsymbol{\omega}^G_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}, \quad \hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \mathbf{F}\left(\frac{1}{4}h_k\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+0.5}\right). \tag{5}$$

Тогда преобразованное уравнение (2) перейдет в уравнение

$$\mathbf{q}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_{k+1} \circ \mathbf{F}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right].$$

В силу этого уравнения

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1}) = \hat{\mathbf{q}}_{k+1}^{-1} \circ \mathbf{q}_{k+1} = \mathbf{F}\left[\boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5})\right],$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{h_k}{4}(\mathbf{b}_{k+0.5} + \boldsymbol{\eta}_{n+0.5}).$$

Последнее уравнение объединим со вторым уравнением (4), индексы в котором увеличим на 1, получим

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} \\ \mathbf{b}_{k+1.5} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} E_3 & h_k E_3/4 \\ 0 & E_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{b}_{k+0.5} \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} h_k E_3/4 & 0 \\ 0 & E_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\eta}_{k+0.5} \\ \boldsymbol{\zeta}_{k+0.5} \end{matrix} \right\|. \tag{6}$$

Соотношение (6) описывает распространение ошибки прогноза, задаваемого уравнениями (5) вместе с первым уравнением (4). В силу этого соотношения для средних значений ошибок $\boldsymbol{\varepsilon}_k$, $\mathbf{b}_{k+0.5}$ имеют место рекуррентные формулы

$$\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_k + \frac{h_k}{4}\mathrm{M}\mathbf{b}_{k+0.5}, \quad \mathrm{M}\mathbf{b}_{k+1.5} = \mathrm{M}\mathbf{b}_{k+0.5}.$$

Для момента t'_l, следующим непосредственно за моментом прихода измерения от звездного датчика, следует принять (см. ниже) $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_l = 0$, $\mathrm{M}\mathbf{b}_{l+0.5} = 0$. Отсюда $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_k = 0$, $\mathrm{M}\mathbf{b}_{k+0.5} = 0$ при всех k.

Введем ковариационные матрицы ошибок прогноза

$$P_k = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_k\boldsymbol{\varepsilon}_k^{\mathrm{T}}, \quad R_k = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}_k\mathbf{b}_{k+0.5}^{\mathrm{T}}, \quad Q_k = \mathrm{M}\mathbf{b}_{k+0.5}\mathbf{b}_{k+0.5}^{\mathrm{T}}.$$

С помощью соотношения (6) для расчета этих матриц получаем рекуррентную формулу

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} P_{k+1} & R_{k+1} \\ R_{k+1}^{\mathrm{T}} & Q_{k+1} \end{matrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} E_3 & h_k E_3/4 \\ 0 & E_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} P_k & R_k \\ R_k^{\mathrm{T}} & Q_k \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} E_3 & 0 \\ h_k E_3/4 & E_3 \end{matrix} \right\| + \\ &+ \left\| \begin{matrix} h_k E_3/4 & 0 \\ 0 & E_3 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} L_{\eta\eta}^{(k+0.5)} & L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)} \\ L_{\zeta\eta}^{(k+0.5)} & L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} h_k E_3/4 & 0 \\ 0 & E_3 \end{matrix} \right\|. \end{aligned} \tag{7}$$

Эта формула описывает рост ошибки прогноза (5) между измерениями звездного датчика.

Перейдем к обработке измерения, полученного от звездного датчика. Пусть это измерение пришло в момент $t_n \in [t'_m, t'_{m+1})$ и выражается кватернионом $\mathbf{p}_n$. Модель ошибки измерения представим формулой (см. п. 1.1)

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{q}_*(t_n) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_n),$$

где $\boldsymbol{\xi}_n$ – случайный вектор, имеющий нулевое среднее значение, ковариационную матрицу K_n и некоррелированный с векторами $\boldsymbol{\eta}_{k+0.5}$, $\boldsymbol{\zeta}_{k+0.5}$ при любом k

и векторами $\boldsymbol{\xi}_l$ при $l \neq n$. Прогноз кватерниона $\mathbf{q}_*(t_n)$ получим линейной интерполяцией по кватернионам $\hat{\mathbf{q}}_m$ и $\hat{\mathbf{q}}_{m+1}$:

$$\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu} = (1-\mu)\hat{\mathbf{q}}_m + \mu\hat{\mathbf{q}}_{m+1}, \quad \mu = \frac{t_n - t'_m}{h_m}.$$

Ошибку такого прогноза определим формулой $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} = \mathbf{F}^{-1}[\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{q}_*(t_n)]$. Наряду с этой ошибкой будем рассматривать ошибку $\mathbf{b}_{m+\mu+0.5} = \boldsymbol{\Delta}(t_n) - \boldsymbol{\Delta}_{m+0.5}$. Среднее значение вектора $\left\| \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}^{\mathrm{T}} \right\|^{\mathrm{T}}$ и его ковариационную матрицу получим линейной интерполяцией этих величин для векторов $\left\| \boldsymbol{\varepsilon}_m^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_{m+0.5}^{\mathrm{T}} \right\|^{\mathrm{T}}$ и $\left\| \boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_{m+1.5}^{\mathrm{T}} \right\|^{\mathrm{T}}$. Среднее значение – нулевое, а матрицу обозначим

$$\left\| \begin{matrix} P_{m+\mu} & R_{m+\mu} \\ R_{m+\mu}^{\mathrm{T}} & Q_{m+\mu} \end{matrix} \right\|.$$

Положим $\boldsymbol{\delta}_n = F^{-1}(\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{p}_n)$. Поскольку

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}_n) = \mathbf{q}_*^{-1}(t_n) \circ \mathbf{p}_n = [\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{q}_*(t_n)]^{-1} \circ \hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{p}_n = \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\delta}_n),$$

имеем $\boldsymbol{\xi}_n = \boldsymbol{\delta}_n - \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}$. Следуя методу наименьших квадратов, составим выражение

$$\Phi(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}, \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}) = (\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - \boldsymbol{\delta}_n)^{\mathrm{T}} K_n^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - \boldsymbol{\delta}_n) +$$

$$+ \left\| \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^{\mathrm{T}}, \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}^{\mathrm{T}} \right\| \left\| \begin{matrix} P_{m+\mu} & R_{m+\mu} \\ R_{m+\mu}^{\mathrm{T}} & Q_{m+\mu} \end{matrix} \right\|^{-1} \left\| \begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} \\ \mathbf{b}_{m+\mu+0.5} \end{matrix} \right\|.$$

Значения величин $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}$ и $\mathbf{b}_{m+\mu+0.5}$, доставляющие этому выражению минимум, обозначим $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^*$, $\mathbf{b}_{m+\mu+0.5}^*$. Формулы для этих величин выводятся точно также, как формулы, задающие точку минимума аналогичной квадратичной формы в п. 1.3. Эти формулы имеют вид

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^* = P_{m+\mu} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_n, \quad \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}^* = R_{m+\mu}^{\mathrm{T}} S^{-1} \boldsymbol{\delta}_n, \quad S = K_n + P_{m+\mu}.$$

Положим $\mathbf{q}_{m+\mu}^{\circ} = \hat{\mathbf{q}}_{m+\mu} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^*)$. Это – уточненная оценка кватерниона $\mathbf{q}_*(t_n)$. Ошибка этой оценки $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^{\circ}$ определяется соотношениями

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^{\circ}) = (\mathbf{q}_{m+\mu}^{\circ})^{-1} \circ \mathbf{q}_*(t_n) = (\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{q}_{m+\mu}^{\circ})^{-1} \circ \hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}^{-1} \circ \mathbf{q}_*(t_n) =$$

$$= \mathbf{F}^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^*) \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}).$$

Отсюда $\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^{\circ} = \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu}^*$. Смещение $\boldsymbol{\Delta}(t_n)$ можно представить в виде $\boldsymbol{\Delta}(t_n) = \boldsymbol{\Delta}_{m+0.5} + \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}$. Новая оценка этого смещения $\boldsymbol{\Delta}_{m+0.5} + \mathbf{b}_{m+\mu+0.5}^*$, новое значение ошибки смещения $\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5} = \mathbf{b}_{m+\mu+0.5} - \mathbf{b}^{*}_{m+\mu+0.5}$. Поскольку $\boldsymbol{\delta}_n = \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} + \boldsymbol{\xi}_n$, справедливы соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu} = \boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}\boldsymbol{\delta}_n = (E_3 - P_{m+\mu}S^{-1})\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}\boldsymbol{\xi}_n,$$
$$\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5} = \mathbf{b}_{m+\mu+0.5} - R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}S^{-1}\boldsymbol{\delta}_n = \mathbf{b}_{m+\mu+0.5} - R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}S^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_{m+\mu} - R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}S^{-1}\boldsymbol{\xi}_n.$$

Из последних соотношений следуют равенства $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu} = 0$, $\mathrm{M}\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5} = 0$. С помощью тех же соотношений получаем (ср. п. 1.3)

$$P^{\circ}_{m+\mu} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu})^{\mathrm{T}} = P_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}P_{m+\mu},$$

$$R^{\circ}_{m+\mu} = \mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu}(\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5})^{\mathrm{T}} = R_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}R_{m+\mu},$$

$$Q^{\circ}_{m+\mu} = \mathrm{M}\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5}(\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5})^{\mathrm{T}} = Q_{m+\mu} - R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}S^{-1}R_{m+\mu}$$

Величины $\mathbf{q}^{\circ}_{m+\mu}$, $P^{\circ}_{m+\mu}$, $R^{\circ}_{m+\mu}$, $Q^{\circ}_{m+\mu}$ с помощью линейной экстраполяции пересчитаем в точку t'_{m+1}:

$$\mathbf{q}^{\circ}_{m+1} = \mathbf{q}^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(\hat{\mathbf{q}}_{m+1} - \hat{\mathbf{q}}_m), \quad P^{\circ}_{m+1} = P^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(P_{m+1} - P_m) \quad \text{и т. д.}$$

Положим $\boldsymbol{\Delta}^{\circ}_{m+1.5} = \boldsymbol{\Delta}_{m+0.5} + \mathbf{b}^{*}_{m+\mu+0.5}$. Величины $\mathbf{q}^{\circ}_{m+\mu}$, $\boldsymbol{\Delta}^{\circ}_{m+1.5}$ и $P^{\circ}_{m+\mu}$, $R^{\circ}_{m+\mu}$, $Q^{\circ}_{m+\mu}$ рассматриваем в качестве начальных условий для вычислений по рекуррентным формулам (5), (7) и первой формулы (4).

Матрицы $P^{\circ}_{m+\mu}$, $R^{\circ}_{m+\mu}$, $Q^{\circ}_{m+\mu}$ суть ковариационные матрицы случайных величин $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+1}$ и $\mathbf{b}^{\circ}_{m+1.5}$, являющихся ошибками оценок $\mathbf{q}^{\circ}_{m+\mu}$, $\boldsymbol{\Delta}^{\circ}_{m+1.5}$. По способу получения указанных оценок можно заключить, что их ошибки представляют собой однородные линейные комбинации величин $\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+\mu}$, $\mathbf{b}^{\circ}_{m+\mu+0.5}$ и некоторых других случайных величин с нулевыми средними значениями (ср. (6)). Отсюда следует, что $\mathrm{M}\boldsymbol{\varepsilon}^{\circ}_{m+1} = 0$, $\mathrm{M}\mathbf{b}^{\circ}_{m+1.5} = 0$.

Выпишем с небольшими изменениями основные полученные формулы. Формулы прогноза на участке между измерениями звездного датчика:

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+0.5} = \boldsymbol{\omega}^{G}_{k+0.5} + \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5}, \quad \hat{\mathbf{q}}_{k+1} = \hat{\mathbf{q}}_k \circ \mathbf{F}\left(\frac{1}{4}h_k\hat{\boldsymbol{\omega}}_{k+0.5}\right), \quad \boldsymbol{\Delta}_{k+1.5} = \boldsymbol{\Delta}_{k+0.5},$$

$$P_{k+1} = P_k + \frac{h_k}{4}\left(R_k^{\mathrm{T}} + R_k\right) + \frac{h_k^2}{16}\left[Q_k + L^{(k+0.5)}_{\eta\eta}\right],$$

$$R_{k+1} = R_k + \frac{h_k}{4}\left[Q_k + L^{(k+0.5)}_{\eta\zeta}\right], \quad Q_{k+1} = Q_k + L^{(k+0.5)}_{\zeta\zeta}.$$

Формулы обработки измерения звездного датчика, выполненного в момент $t_n \in [t'_m, t'_{m+1})$, и расчета начальных условий для прогноза из точки t'_{m+1}:

$$\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu} = \hat{\mathbf{q}}_m + \mu(\hat{\mathbf{q}}_{m+1} - \hat{\mathbf{q}}_m), \quad P_{m+\mu} = P_m + \mu(P_{m+1} - P_m),$$

$$R_{m+\mu} = R_m + \mu(R_{m+1} - R_m), \quad Q_{m+\mu} = Q_m + \mu(Q_{m+1} - Q_m), \quad \mu = \frac{t_n - t'_m}{h_m},$$

$$\mathbf{q}^{\circ}_{m+\mu} = \hat{\mathbf{q}}_{m+\mu} \circ \mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}^*_{m+\mu}), \quad \boldsymbol{\Delta}^{\circ}_{m+1.5} = \boldsymbol{\Delta}_{m+0.5} + \mathbf{b}^*_{m+\mu+0.5},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^*_{m+\mu} = P_{m+\mu}\boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{b}^*_{m+\mu+0.5} = R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}\boldsymbol{\lambda}, \quad \boldsymbol{\lambda} = S^{-1}\mathbf{F}^{-1}(\hat{\mathbf{q}}^{-1}_{m+\mu} \circ \mathbf{p}_n),$$

$$S = K_n + P_{m+\mu}, \quad P^{\circ}_{m+\mu} = P_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}P_{m+\mu},$$

$$R^{\circ}_{m+\mu} = R_{m+\mu} - P_{m+\mu}S^{-1}R_{m+\mu}, \quad Q^{\circ}_{m+\mu} = Q_{m+\mu} - R^{\mathrm{T}}_{m+\mu}S^{-1}R_{m+\mu},$$

$$\hat{\mathbf{q}}^{\circ}_{m+1} = \hat{\mathbf{q}}^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(\hat{\mathbf{q}}_{m+1} - \hat{\mathbf{q}}_m), \quad P^{\circ}_{m+1} = P^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(P_{m+1} - P_m),$$

$$R^{\circ}_{m+1} = R^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(R_{m+1} - R_m), \quad Q^{\circ}_{m+1} = Q^{\circ}_{m+\mu} + (1-\mu)(Q_{m+1} - Q_m).$$

Разгон описанного алгоритма опишем для случая $t'_1 \le t_1$. Пусть $t_1 \in [t'_m, t'_{m+1})$ и $m > 1$. Сначала на отрезке $[t'_1, t'_{m+1}]$ вычисления выполняются по формулам (5) с начальным условием $\hat{\mathbf{q}}_1 = (1,0,0,0)$ при $\boldsymbol{\Delta}_{k+0.5} = 0$. Затем вычисляется величина $\hat{\mathbf{q}}_{m+\mu}$, и полученные значения $\hat{\mathbf{q}}_k$ умножаются на $\mathbf{p}_1 \circ \hat{\mathbf{q}}^{-1}_{m+\mu}$. Тем самым получен отрезок решения уравнения (2) в случае $\boldsymbol{\Delta} = 0$ с начальным условием $\mathbf{q}(t_1) = \mathbf{p}_1$.Значение этого решения в точке t'_{m+1} обозначим $\hat{\mathbf{q}}^{\circ}_{m+1}$. Из точки t'_{m+1} вычисления продолжаются по формулам прогноза с начальными условиями $\hat{\mathbf{q}}_{m+1} = \hat{\mathbf{q}}^{\circ}_{m+1}$, $\boldsymbol{\Delta}_{m+1.5} = 0$, $P_{m+1} = L^{(m+0.5)}_{\eta\eta}$, $R_{m+1} = L^{(m+0.5)}_{\eta\zeta}$, $Q_{m+1} = L^{(m+0.5)}_{\zeta\zeta}$. Далее используется основной алгоритм.

Замечания. 1. Линейные интерполяцию и экстраполяцию при вычислении величин $(\ldots)_{m+\mu}$, $(\ldots)^{\circ}_{m+1}$ можно заменить более точными, однако в приводимых ниже примерах линейные соотношения приемлемы. При вычислении величин $(\ldots)^{\circ}_{m+1}$ используются те же коэффициенты при времени в формулах линейной интерполяции, что и при вычислении величин $(\ldots)_{m+\mu}$. На самом деле эти коэффициенты должны быть другими вследствие уточнения оценки смещения $\boldsymbol{\Delta}$. В приводимых ниже примерах указанное изменение этих коэффициентов пренебрежимо мало.

При $t_n = t'_m$ формулы обработки измерения звездного датчика упрощаются – нет необходимости в интерполяции и экстраполяции.

2. Если матрицы K_n, $L^{(k+0.5)}_{\eta\eta}$, $L^{(k+0.5)}_{\eta\zeta}$ и $L^{(k+0.5)}_{\zeta\zeta}$ диагональны при всех n и k, матрицы P_1, R_1 и Q_1 выбраны диагональными, то матрицы P_k, R_k, Q_k и т. п. также будут диагональными при всех k.

3. Поскольку вывод формул данного пункта основан на линеаризации уравнения (2), в полученных формулах можно отбросить члены $\sim h_k^2$.

2.3. Примеры. Ниже приводятся результаты обработки описанным способом данных измерений звездного датчика БОКЗ-М и ГИВУСов, полученных на спутнике «Метеор-М». Способ применяется к отрезкам данных, исследованным выше. В качестве измерений $\boldsymbol{\omega}(t'_{k-0.5})$ служат комбинации реальных измерений $[\boldsymbol{\omega}(t'_k)+\boldsymbol{\omega}(t'_{k-1})]/2$, компоненты которых пересчитаны из системы $y_1y_2y_3$ в систему $x_1x_2x_3$. Измерения ГИВУСов выполнялись с постоянным шагом $h_k = h = 0.1$с. Результаты представлены на рис. 6 – 9. Рис. 6 и 8 получены при использовании матриц K_n, $L_{\eta\eta}^{(k+0.5)}$, $L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)}$ и $L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)}$, заданных соотношениями

$$K_n = \mathrm{diag}[(1'')^2, (1'')^2, (3'')^2],$$

$$L_{\eta\eta}^{(k+0.5)} = L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)} = (1'')^2 \cdot E_3, \quad L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)} = h\cdot(1'')^2 \cdot E_3.$$

При расчете примеров на рис. 7, 9 матрицы $L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)}$ и $L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)}$ были изменены:

$$L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)} = (0.1'')^2 \cdot E_3, \quad L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)} = h\cdot(1'')\cdot(0.1'') \cdot E_3.$$

На рис. 6а, 7а, 8а и 9а приведены отклонения кватернионов, измеренных БОКЗом, от соответствующих прогнозных кватернионов. Отклонения представлены графиками компонент векторов $4\boldsymbol{\varepsilon}^*_{m+\mu} = \left(\tilde{e}_1^{(n)}, \tilde{e}_2^{(n)}, \tilde{e}_3^{(n)}\right)$ в системе координат $x_1x_2x_3$ (напомним, здесь m является функцией n). Каждый такой график представляет собой ломаную, звенья которой последовательно соединяют точки $\left(t_n, \tilde{e}_i^{(n)}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ при соответствующем значении $i = 1, 2, 3$. Среднеквадратичные значения величин $\tilde{e}_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обозначим $\tilde{\sigma}_i$. Эти значения приведены в подписях к рисункам.

На рис. 6б, 7б, 8б и 9б приведены отклонения кватернионов, измеренных БОКЗом, от кватернионов, полученных фильтрацией. Отклонения представлены графиками компонент векторов $4\boldsymbol{\varepsilon}^\circ_{m+\mu} = \left(e_1^{(n)}, e_2^{(n)}, e_3^{(n)}\right)$ в системе координат $x_1x_2x_3$. Каждый график представляет собой ломаную с вершинами в точках $\left(t_n, e_i^{(n)}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ при одном из значений $i = 1, 2, 3$. Среднеквадратичные значения величин $e_i^{(n)}$ обозначены σ_i и указаны в подписях к рисункам. В данном случае усреднение проводилось по отрезкам соответствующих последовательностей при $n > 10$, чтобы исключить влияние переходного процесса. Как и должно быть, во всех примерах $\sigma_i < \tilde{\sigma}_i$. Однако в примерах на рис. 7, 9 различие между этими величинами заметно больше, чем в примерах на рис. 6, 8. Этот эффект объясняется выбором ковариационных матриц $L_{\eta\zeta}^{(k+0.5)}$ и $L_{\zeta\zeta}^{(k+0.5)}$.

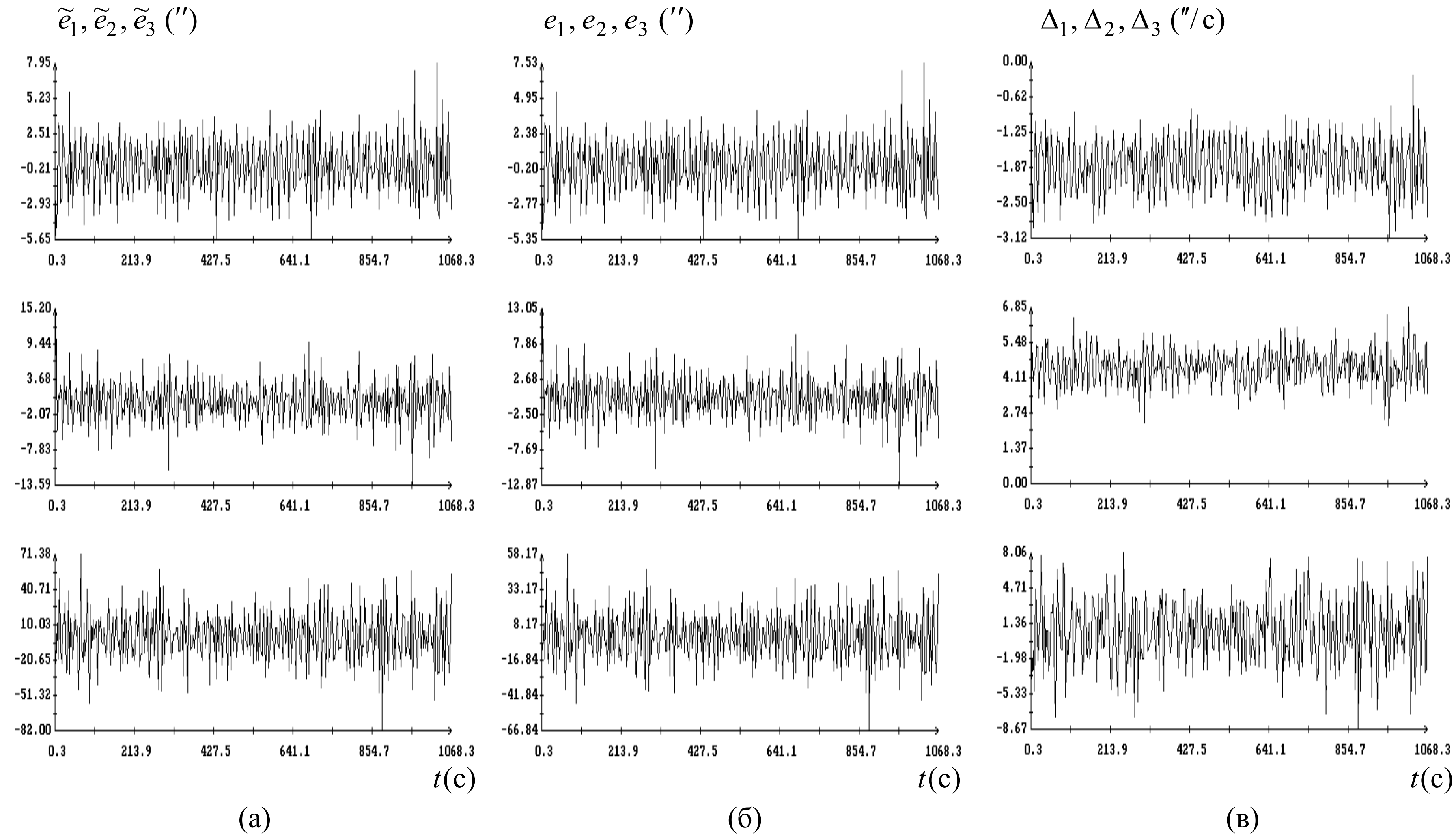


Рис. 6. Обработка данных измерений БОКЗа и ГИВУСов с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 13:22:09.7 UTC 27.04.2010; (а) отклонения прогноза, $\widetilde{\sigma}_1 = 2.16''$, $\widetilde{\sigma}_2 = 3.49''$, $\widetilde{\sigma}_3 = 22.9''$; (б) отклонения фильтрации $\sigma_1 = 2.02''$, $\sigma_2 = 3.22''$, $\sigma_3 = 18.6''$; (в) оценки «постоянных» смещений в измерениях угловой скорости, $\overline{\Delta}_1 = -1.84''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_2 = 4.50''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_3 = 0.56''/\text{с}$.

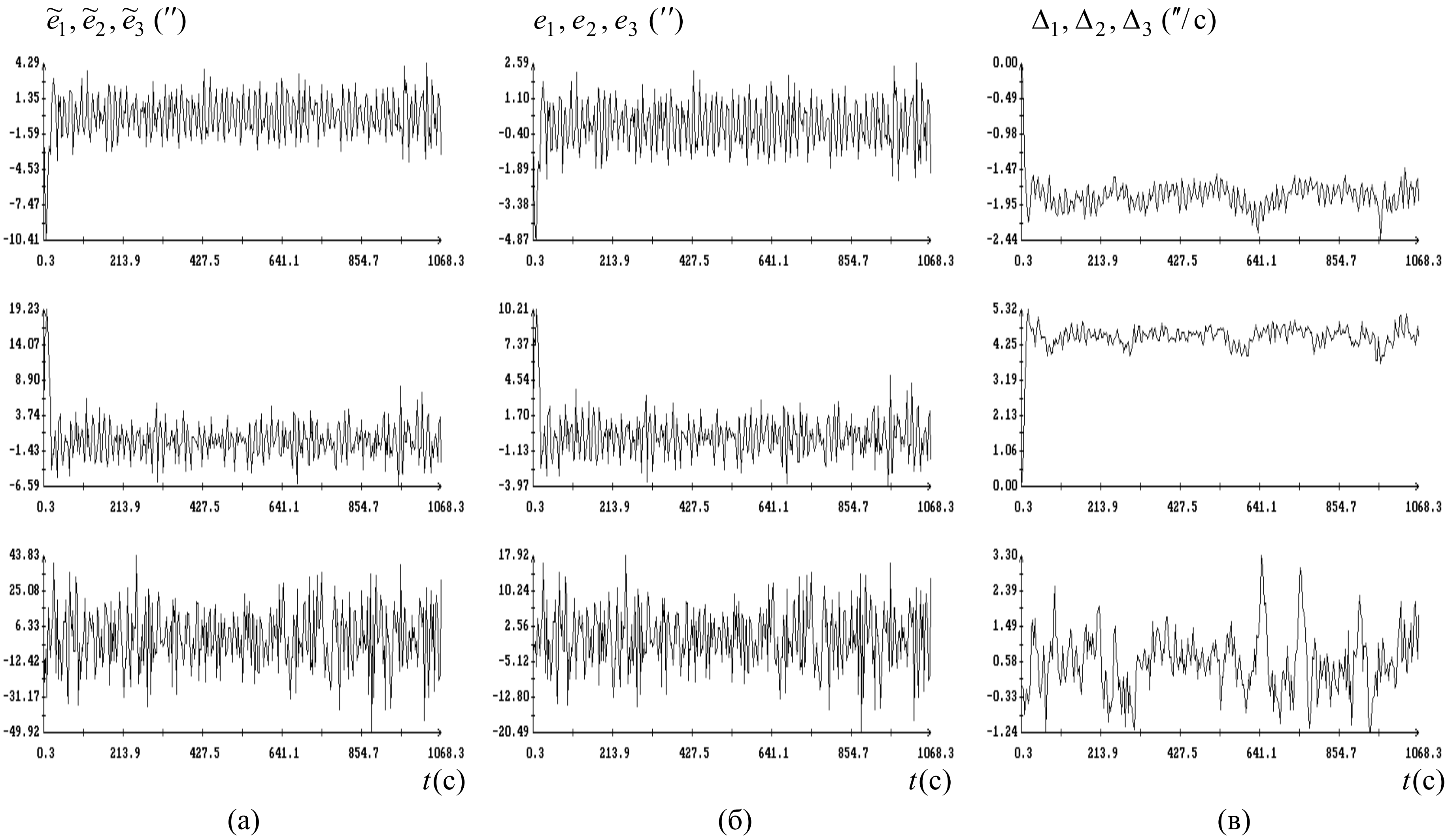
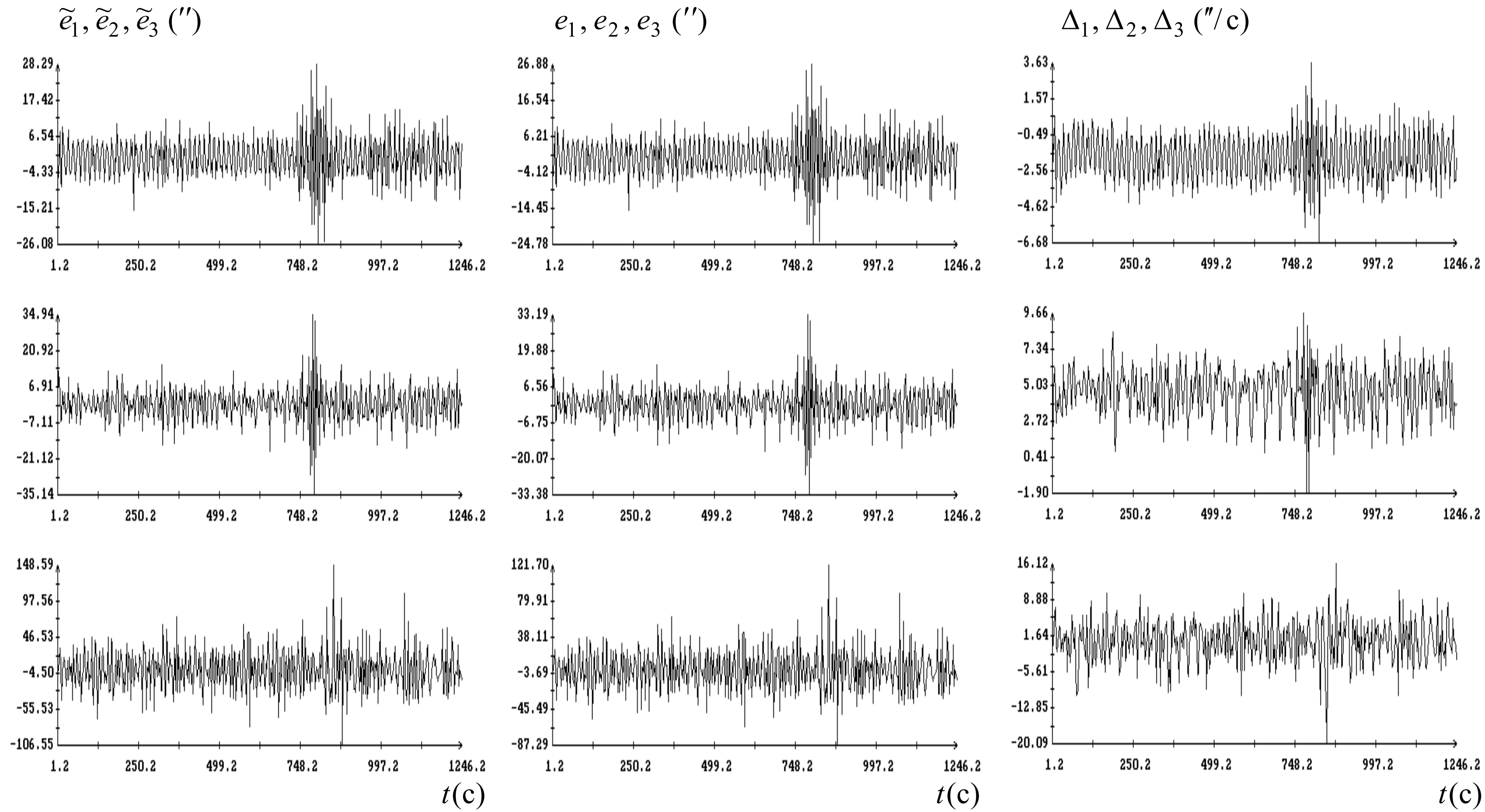


Рис. 7. Обработка данных измерений БОКЗа и ГИВУСов с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 13:22:09.7 UTC 27.04.2010; (а) отклонения прогноза, $\widetilde{\sigma}_1 = 1.81''$, $\widetilde{\sigma}_2 = 3.01''$, $\widetilde{\sigma}_3 = 16.2''$; (б) отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 0.97''$, $\sigma_2 = 1.45''$, $\sigma_3 = 6.60''$; (в) оценки «постоянных» смещений в измерениях угловой скорости, $\overline{\Delta}_1 = -1.82''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_2 = 4.48''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_3 = 0.55''/\text{с}$.



(а) (б) (в)

Рис. 8. Обработка данных измерений БОКЗа и ГИВУСов с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:30.8 UTC 27.04.2010; (а) отклонения прогноза, $\tilde{\sigma}_1 = 6.87''$, $\tilde{\sigma}_2 = 7.28''$, $\tilde{\sigma}_3 = 30.9''$; (б) отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 6.55''$, $\sigma_2 = 6.95''$, $\sigma_3 = 25.5''$; (в) оценки «постоянных» смещений в измерениях угловой скорости, $\overline{\Delta}_1 = -1.77''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_2 = 4.63''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_3 = 0.42''/\text{с}$.

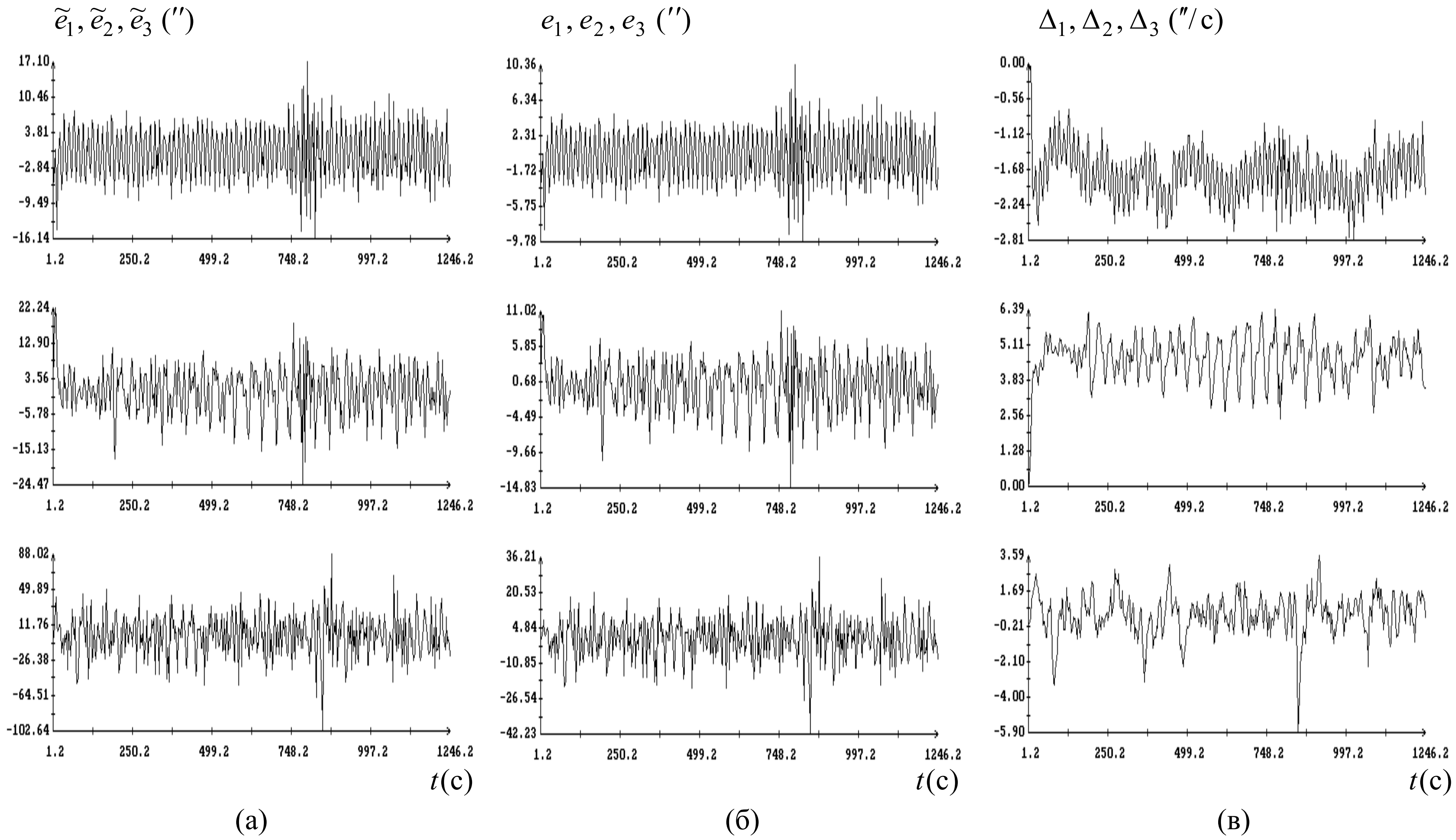


Рис. 9. Обработка данных измерений БОКЗа и ГИВУСов с помощью фильтра Калмана. Момент $t = 0$ на графиках отвечает 14:43:30.8 UTC 27.04.2010; (а) отклонения прогноза, $\widetilde{\sigma}_1 = 4.91''$, $\widetilde{\sigma}_2 = 6.34''$, $\widetilde{\sigma}_3 = 23.0''$; (б) отклонения фильтрации, $\sigma_1 = 2.96''$, $\sigma_2 = 3.76''$, $\sigma_3 = 9.49''$; (в) оценки «постоянных» смещений в измерениях угловой скорости, $\overline{\Delta}_1 = -1.76''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_2 = 4.61''/\text{с}$, $\overline{\Delta}_3 = 0.42''/\text{с}$.

Графики оценки «постоянного» смещения $\mathbf{\Delta}$ в измерениях угловой скорости приведены на рис. 6в, 7в, 8в и 9в. Графики иллюстрируют поведение компонент векторов $\mathbf{\Delta}_{m+0.5} + \mathbf{b}^*_{m+\mu+0.5} = \left(\Delta_1^{(n)}, \Delta_2^{(n)}, \Delta_3^{(n)}\right)$ в функции времени. Компоненты относятся к системе $x_1 x_2 x_3$. Графики суть ломаные, соединяющие точки $\left(t_n, \Delta_i^{(n)}\right)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ при одном из значений $i = 1, 2, 3$. Средние значения $\overline{\Delta}_i$ величин $\Delta_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ указаны в подписях к рисункам. Эти средние значения хорошо согласуются с оценками параметров Δ_i, полученными в [3].

Данная работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 11-01-00262). Авторы благодарны Г.А. Аванесову и А.Д. Беленькому за полезные обсуждения при выполнении работы.

Литература

1. Shuster M.D. A survey of attitude representation. The Journal of the Astronautical Sciences, 1993, vol. 41, No. 4, pp. 439-517.
2. Farrenkopf R.L. Analytic steady-state accuracy solution for two common spacecraft attitude estimators. Journal of Guidance and Control, 1978, vol. 1, No. 4, p. 282-284.
3. Аванесов Г.А., Красиков В.А., Никитин А.В., Сазонов В.В. Оценка точности определения параметров ориентации осей системы координат астроизмерительного прибора БОКЗ-М по экспериментальным данным. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2010, № 74.
4. Creamer G. Spacecraft attitude determination using gyros and quaternion measurements. The Journal of the Astronautical Sciences, 1996, vol. 44, No. 3, p. 357-371.