



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

Карпенко С.О., [Овчинников М. Ю.](#),  
[Ролдугин Д.С.](#), [Ткачев С. С.](#)

Формирование и анализ  
алгоритма магнитной  
ориентации с  
использованием измерений  
углового датчика. Случаи  
солнечного датчика и  
магнитометра

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки**

Формирование и анализ алгоритма магнитной ориентации с использованием измерений углового датчика. Случаи солнечного датчика и магнитометра / С.О.Карпенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 26. 27 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-26>

**Публикации по материалам препринта**

S.O. Karpenko, M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin, S.S. Tkachev, One-axis attitude of arbitrary satellite using magnetorquers only // Cosmic Research, 2013, V. 51, № 6, pp. 478-484

DOI: [10.1134/S0010952513060087](https://doi.org/10.1134/S0010952513060087)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952513060087>

M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin, S.S. Tkachev, S.O. Karpenko, New one-axis one-sensor magnetic attitude control theoretical and in-flight performance // Acta Astronautica, 2014, V. 105, N 1, pp. 12-16

DOI: [10.1016/j.actaastro.2014.08.017](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.08.017)

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576514003245>

ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ.М.В.КЕЛДЫША  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

С.О. Карпенко, М.Ю. Овчинников,  
Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев

**Формирование и анализ алгоритма магнитной  
ориентации с использованием измерений углового  
датчика.**

**Случаи солнечного датчика и магнитометра**

Москва, 2011

**С.О. Карпенко, М.Ю. Овчинников, Д.С. Ролдугин, С.С. Ткачев**

Формирование и анализ алгоритма магнитной ориентации с использованием измерений углового датчика. Случаи солнечного датчика и магнитометра

Рассматривается логика формирования алгоритма активного магнитного управления ориентацией спутника «Чибис-М», реализующего разворот его солнечных панелей на Солнце. При этом используются показания только солнечных датчиков. Уравнения движения интегрируются в квадратурах для осесимметричного аппарата при помощи методов асимптотического анализа. Для несимметричного спутника определяются устойчивые положения равновесия.

**Ключевые слова:** активная магнитная система ориентации, алгоритм ориентации, осредненная модель магнитного поля Земли, солнечный датчик

**S.O. Karpenko, M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin, S.S. Tkachev**

Synthesis and analysis of geomagnetic control using attitude sensor data. Case of sun sensor and magnetometer use

An active magnetic control synthesis for attitude guidance of «Chibis-M» microsatellite is considered. The only information required is the data from the sun sensor. Applicability of a control to achieve solar panels sun-pointing is studied. Equations of motions are analytically solved using averaging technique. The behavior of a system with respect to initial conditions and orbit parameters is studied.

**Key words:** active magnetic control, control algorithm, averaged geomagnetic field model, sun attitude

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ (проекты 02.740.11.0860) и РФФИ (грант 09-01-00431).

## **Оглавление**

Введение.....	3
1. Постановка задачи.....	4
2. Формирование закона управления .....	10
3. Анализ динамики осесимметричного спутника.....	13
3.1. Осредненные уравнения .....	13
3.2. Первые интегралы усредненных уравнений .....	18
3.3. Положения равновесия и их устойчивость .....	20
4. Анализ динамики спутника, близкого к осесимметричному .....	21
5. Численное моделирование .....	24
Заключение .....	26
Литература .....	27

## Введение

Магнитные системы ориентации (МСО) широко применяются для управления ориентацией спутников. Их использование особенно привлекательно, когда есть серьезные ограничения на массу, стоимость, энергопотребление спутника. Поэтому малые спутники часто оснащаются МСО. Малые спутники обычно подвержены менее жестким ограничениям по точности и быстродействию системы ориентации, что позволяет использовать МСО, точность которых заметно меньше, чем, скажем, у маховичных систем. Вместе с тем, МСО может быть единственно возможным решением для системы ориентации спутника с ограниченной энергетикой и лимитированной стоимостью. Наиболее часто МСО используется для демпфирования начальной угловой скорости спутника после отделения от носителя. Несмотря на то, что этот этап управления ориентацией спутника может казаться простым, он необходим, так как без гашения начальной скорости до некоторого приемлемого значения не могут работать более точные актюаторы.

Традиционно, для работы МСО необходимо наличие на спутнике магнитометра. В случае его отказа будет утеряна возможность получения информации, необходимой для работы стандартных алгоритмов магнитной ориентации. Это приведет к невозможности демпфирования начальной угловой скорости и, как следствие, возможной потере спутника. Поэтому полезно разработать алгоритм, который позволил бы использовать показания других находящихся на борту спутника датчиков для демпфирования угловой скорости при помощи МСО. В работе предлагается универсальный алгоритм, использующий показания углового датчика, то есть датчика, измеряющего определенное направление в инерциальном пространстве относительно связанных осей. Заметим, что магнитометр может рассматриваться как частный случай таких датчиков. Тогда предлагаемый алгоритм совпадает с широко известным алгоритмом « $-\dot{V}$ » [1].

Общая схема формирования алгоритма схожа с логикой формирования алгоритма «-Vdot». В работе рассматривается случай использования солнечного датчика, что позволяет также обеспечить ориентацию солнечных панелей спутника на Солнце. Рассматриваемый алгоритм применяется на борту микроспутника «Чибис-М» для ориентации солнечных панелей. Заметим, что направление на Солнце в инерциальном пространстве считается постоянным, так как характерное время работы рассматриваемых алгоритмов – несколько часов.

## 1. Постановка задачи

Введем необходимые для описания движения системы координат и переменные, опишем используемую модель геомагнитного поля и метод исследования.

Вектор геомагнитной индукции в заданной точке пространства в практических задачах обычно моделируется при помощи разложения в ряд Гаусса [2]. Эта модель не может использоваться для аналитического исследования, поэтому вводится ряд упрощений. Учитывая три первых слагаемых в разложении, получаем модель наклонного диполя. Геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и наклоненного под углом  $168^{\circ}26'$  к ее оси. При использовании этой модели вектор геомагнитной индукции может быть записан достаточно компактно. Однако, ее использование при аналитическом исследовании все же затруднительно. Дальнейшее упрощение, модель прямого диполя, широко используется как в численных, так и в аналитических исследованиях. Геомагнитное поле моделируется полем диполя, расположенного в центре Земли и антипараллельного ее оси вращения. При этом вектор геомагнитной индукции движется практически равномерно по поверхности почти кругового конуса при движении спутника по орбите.

Однако и эта модель не позволяет получить решение уравнений движения в конечном виде в рассматриваемом в данной работе случае. Логично ввести

дальнейшее упрощение, считая вектор геомагнитной индукции движущимся равномерно по поверхности кругового конуса. Введем инерциальную систему  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ , где  $O_a$  – центр Земли, ось  $O_a Y_3$  направлена по оси Земли, ось  $O_a Y_1$  лежит в плоскости орбиты и направлена в восходящий узел,  $O_a Y_2$  дополняет систему до правой. Если перенести вектор геомагнитной индукции в начало этой системы, то конус, по которому он движется, будет касаться оси  $O_a Y_3$ , а его ось будет лежать в плоскости  $O_a Y_2 Y_3$  (рис. 1). Угол полураствора конуса определяется из соотношения [3]

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})}, \quad (1.1)$$

где  $i$  – наклонение орбиты. Вектор геомагнитной индукции движется равномерно с удвоенной орбитальной скоростью,  $\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi'_0$ , где  $\omega_0$  – орбитальная скорость. Не теряя общности можно считать, что  $\chi'_0 = 0$ .

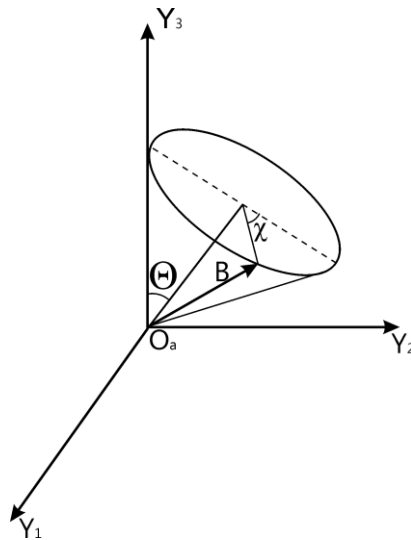


Рис. 1. Осредненная модель геомагнитного поля

Описанная модель, иногда называемая осредненной, используется в настоящей работе. Хотя она не позволяет учесть неравномерность движения вектора геомагнитной индукции (как позволяет модель прямого диполя) и его суточное изменение (как позволяет модель наклонного диполя), она представляет собой компромисс между точностью описания геомагнитного поля и возможностью получить решение в конечном виде. Детальное сравнение

моделей может быть найдено в [2]. Вектор геомагнитной индукции задан в системе  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$  и имеет вид

$$\mathbf{B}_Z = B_0 \begin{pmatrix} \sin \Theta \sin 2u \\ \sin \Theta \cos 2u \\ \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Опишем используемые в работе системы координат.

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$  – инерциальная система, получаемая из системы  $O_a Y_1 Y_2 Y_3$  поворотом на угол  $\Theta$  вокруг оси  $O_a Y_1$ .

$OL_1 L_2 L_3$  – система, связанная с вектором кинетического момента спутника.  $O$  – центр масс спутника, ось  $OL_3$  направлена вдоль вектора кинетического момента, ось  $OL_2$  перпендикулярна  $OL_3$  и лежит в плоскости, параллельной  $O_a Z_1 Z_2$  и содержащей  $O$ ,  $OL_1$  дополняет систему до правой.

$Ox_1 x_2 x_3$  – связанная система, оси которой совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентация систем друг относительно друга описывается матрицами направляющих косинусов  $\mathbf{Q}, \mathbf{A}$ , записанными в виде таблиц

$$\begin{array}{ccc} L_1 & L_2 & L_3 \\ Z_1 & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ Z_2 & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ Z_3 & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ L_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ L_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ L_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}.$$

В работе используются индексы  $Z, L, x$  для обозначения компонент векторов в системах  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ ,  $OL_1 L_2 L_3$  и  $Ox_1 x_2 x_3$  соответственно. Например, для первой компоненты механического момента будем писать  $M_{1Z}, M_{1L}, M_{1x}$ .

Для описания динамики спутника будем использовать переменные Белецкого-Черноуьско. Эти переменные суть набор  $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ , где  $L$  – модуль вектора кинетического момента, углы  $\rho, \sigma$  описывают его ориентацию относительно системы  $O_a Z_1 Z_2 Z_3$  (рис. 2). Ориентация системы  $Ox_1 x_2 x_3$  относительно  $OL_1 L_2 L_3$  описывается углами Эйлера  $\varphi, \psi, \theta$ . Аналогичные переменные были впервые введены Булгаковым [4] в задаче движения

гироскопа. Система уравнений в этих переменных была впервые предложена Белецким для осесимметричного спутника [5], для спутника с произвольными моментами инерции – Черноусько [6]. Уравнения движения свободного твердого тела в переменных  $\varphi, \psi, \theta$  были впервые предложены Уиттекером [7], но при этом не рассматривались эволюционные уравнения. Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{Q}$  при таком выборе переменных имеет вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{A}$  –

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

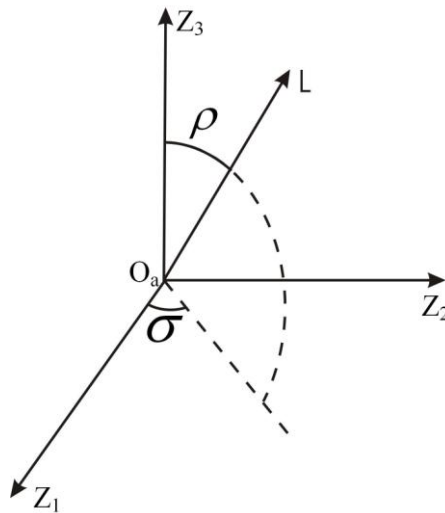


Рис. 2. Ориентация кинетического момента в инерциальном пространстве

Предположим, что спутник имеет произвольный тензор  $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, B, C)$ .

Тогда уравнения движения на круговой кеплеровой орбите имеют вид [8]



$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\
\frac{d\theta}{dt} &= L \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) + \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\
\frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left( \frac{1}{C} - \frac{\sin^2 \varphi}{A} - \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\
\frac{d\psi}{dt} &= L \left( \frac{\sin^2 \varphi}{A} + \frac{\cos^2 \varphi}{B} \right) - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где  $M_{1L}, M_{2L}, M_{3L}$  – компоненты механического момента в системе  $OL_1L_2L_3$ .

Для осесимметричного спутника с тензором инерции  $\mathbf{J}_x = \operatorname{diag}(A, A, C)$

уравнения принимают вид

$$\begin{aligned}
\frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\
\frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\
\frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\
\frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

При рассмотрении переходных процессов в работе используется метод усреднения [9]. Предположим, что момент, создаваемый взаимодействием МСО с геомагнитным полем, мал в смысле малого изменения кинетического момента аппарата за один его оборот вокруг центра масс и за один виток по орбите по сравнению со значением кинетического момента. Тогда можно ввести малый параметр  $\varepsilon$  и представить уравнения (1.5) в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \tag{1.7}$$

где  $\mathbf{y} = (\varphi, \psi, u, \theta)$  – быстрые переменные, а  $\mathbf{x} = (l, \rho, \sigma)$  – медленные переменные. Эти уравнения позволяют использовать метод осреднения для поиска эволюции медленных переменных. Однако, усреднение вдоль

порождающего решения – движения Эйлера-Пуансо – приводит к громоздким уравнениям. Значительно упростить анализ позволяет рассмотрение осесимметричного спутника. Уравнения (1.6) имеют вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \varepsilon \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{y}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{Y}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t), \quad (1.8)$$

порождающим решение для уравнений (1.8) является регулярная прецессия, переменная  $\theta$  становится медленной. В этом случае среднее по времени совпадает с пространственным средним и для получения осредненных уравнений для медленных переменных достаточно независимо усреднить правые части уравнений по быстрым переменным. В результате на временном интервале порядка  $1/\varepsilon$  решение может быть найдено с точностью порядка  $\varepsilon$ . Рассмотрение осесимметричного спутника и использование осредненной модели геомагнитного поля позволило получить достаточно простые эволюционные уравнения, решения которых могут быть найдены в квадратурах.

Перейдем в (1.6) к дифференцированию по аргументу широты  $u = \omega_0(t - t_0)$ , где  $t_0$  – некоторый начальный момент времени. безразмерный кинетический момент  $l$  по формуле  $L = L_0 l$ , где  $L_0$  – начальный кинетический момент спутника и безразмерный момент  $\bar{M}$ , перепишем систему (1.6) в виде

$$\frac{dl}{du} = \varepsilon l \bar{M}_{3L}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \bar{M}_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \bar{M}_{2L},$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sin \theta} (\bar{M}_{1L} \cos \psi + \bar{M}_{2L} \sin \psi),$$

$$\frac{d\psi}{du} = \eta_2 l - \varepsilon \bar{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \bar{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta),$$

$$\frac{d\theta}{du} = \varepsilon (\bar{M}_{2L} \cos \psi - \bar{M}_{1L} \sin \psi),$$

где  $\varepsilon = \frac{kB_0^2}{L_0}$ ,  $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$ ,  $\eta_2 = \frac{L_0}{A\omega_0}$ .

Если механический момент мал, то  $\varepsilon$  и  $\frac{\varepsilon}{\eta_i}$  малы. Переменные разделяются

на быстрые  $(\varphi, \psi, u)$  и медленные  $(l, \rho, \sigma, \theta)$ . Тогда можно применить описанный выше метод осреднения и перейти к системе

$$\frac{dl}{du} = \varepsilon l \langle \overline{M}_{3L} \rangle, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \langle \overline{M}_{1L} \rangle, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{\sin \rho} \langle \overline{M}_{2L} \rangle, \quad (1.9)$$

$$\left\langle \frac{d\theta}{du} \right\rangle = \varepsilon \left\langle \left\langle \overline{M}_{2L} \right\rangle_u \cos \psi - \left\langle \overline{M}_{1L} \right\rangle_u \sin \psi \right\rangle_\psi,$$

где  $\langle x \rangle$  означает осреднение по всем быстрым переменным (в случае осесимметричного спутника нет необходимости проводить усреднение по  $\varphi$ ).

Эта система описывает эволюцию величины и направления вектора кинетического момента. Таким образом, может быть проанализирован процесс демпфирования угловой скорости спутника, которая характеризуется одной переменной – величиной кинетического момента, а также ориентация, к которой стремится вектор угловой скорости и ось симметрии спутника.

## 2. Формирование закона управления

Рассмотрим сначала логику формирования алгоритма “-Bdot” [1]. Запишем уравнения движения в виде

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}.$$

Если на спутник действует гравитационный момент, то уравнения движения допускают интеграл Якоби в форме

$$J = \frac{1}{2} \left( (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) + 3\omega_0^2 (\mathbf{e}_3, \mathbf{J}\mathbf{e}_3) - \omega_0 (\mathbf{e}_2, \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}) \right),$$

где  $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2$  – орты радиус-вектора спутника и нормали к нему в плоскости орбиты, записанные в связанной системе координат.

Если на спутник действует также магнитный момент  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ , это выражение уже не будет первым интегралом. Рассмотрим  $V = J - \omega_0^2 (3C - B) / 2$  в качестве функции Ляпунова. Ее производная в силу уравнений движения

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^3 (\Omega_i - \omega_0 \mathbf{e}_{2i}) M_i = \mathbf{M}(\mathbf{\Omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2).$$

Последнее выражение может быть записано в виде

$$\frac{dV}{dt} = \mathbf{m}(\mathbf{B} \times \mathbf{\Omega}), \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega} - \omega_0 \mathbf{e}_2$  – относительная скорость спутника. Выражение (2.1)

позволяет сразу выбрать дипольный магнитный момент

$$\mathbf{m} = k \mathbf{\Omega} \times \mathbf{B},$$

обеспечивающий асимптотическую устойчивость орбитальной ориентации, при которой две оси связанной системы совпадают с радиус-вектором спутника и нормалью к плоскости орбиты соответственно. Здесь  $k$  – положительный коэффициент.

Если спутник имеет большую угловую скорость ( $\omega_0 \ll |\boldsymbol{\omega}|$ ), можно считать, что  $\mathbf{\Omega} \approx \boldsymbol{\omega}$ , и тогда закон управления дипольным моментом представим так

$$\mathbf{m} = k \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}. \quad (2.2)$$

Последнее выражение может быть преобразовано к виду

$$\mathbf{m} = -k \frac{d\mathbf{B}}{dt}, \quad (2.3)$$

опираясь на соотношение

$$\mathbf{A} \mathbf{Q} \frac{d\mathbf{B}_z}{dt} = \frac{d\mathbf{B}_x}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_x.$$

В случае большой угловой скорости спутника первым слагаемым в правой части этого выражения можно пренебречь и (2.3) сразу следует из (2.2).

Закон управления (2.2) обеспечивает демпфирование абсолютной угловой скорости. Предположим теперь, что вместо показаний магнитометра имеются показания какого-либо другого датчика. В этом случае ни один из полученных выше алгоритмов использовать нельзя, так как для их работы требуется знать вектор геомагнитной индукции. Поэтому необходимо получить закон

управления, использующий не вектор  $\mathbf{B}$ , а некоторый другой вектор  $\mathbf{S}$ . Обозначение  $\mathbf{S}$  выбрано потому, что в настоящей работе рассматривается вектор направления на Солнце.

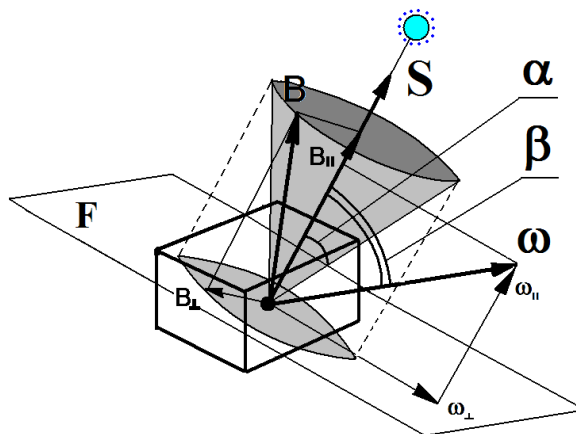


Рис. 3. Формирование закона управления

Представим  $\omega$  и  $\mathbf{B}$  в виде суммы компонент вдоль и перпендикулярно вектору  $\mathbf{S}$  (рис. 3),

$$\omega = \omega_{\perp} + \omega_{\parallel}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{B}_{\parallel}.$$

Закон управления (2.2) тогда записывается в виде

$$\mathbf{m} = k(\omega_{\parallel} \times \mathbf{B}_{\perp}) + k(\omega_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel}).$$

Будем рассматривать только слагаемое

$$\mathbf{m} = k(\omega_{\perp} \times \mathbf{B}_{\parallel})$$

в качестве закона управления. Тогда

$$\mathbf{m} = kB_0 \cos \alpha (\omega_{\perp} \times \mathbf{S}).$$

Поскольку  $\omega_{\parallel} \times \mathbf{S} = 0$  это выражение можно записать так:

$$\mathbf{m} = kB_0 \cos \alpha (\omega \times \mathbf{S}). \quad (2.4)$$

В случае использования магнитометра  $\mathbf{S} = \mathbf{B}$  и, следовательно,  $\alpha = 0$ . Тогда закон управления (2.4) принимает вид (2.2). Закон управления (2.4) можно рассматривать как общий алгоритм демпфирования угловой скорости, если имеются измерения какого-либо вектора  $\mathbf{S}$ . Угол  $\alpha$  между  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{B}$

вычисляется при помощи моделей, задающих их в инерциальном пространстве для любой точки орбиты.

Логика формирования алгоритма, названного “Sdot” по аналогии с “-Bdot”, указывает на возможность его использования для демпфирования угловой скорости. Однако оказалось, что этот алгоритм также может использоваться для обеспечения ориентации солнечных панелей спутника на Солнце, что позволяет сократить время работы основных исполнительных элементов системы ориентации (маховики, двигательная установка) и тем самым снизить энергопотребление и/или расход топлива системы ориентации.

### 3. Анализ динамики осесимметричного спутника

#### 3.1. Осредненные уравнения

Микроспутник «Чибиc-M» имеет тензор инерции, близкий к осесимметричному. Рассмотрим сначала динамику такого спутника, используя уравнения (1.9). Запишем механический момент, действующий на спутник при реализации закона управления (2.4),

$$\mathbf{M} = kB_0^2 \cos \alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{S}) \times \mathbf{B}.$$

Перепишем это выражение в виде

$$\mathbf{M}_L = kB_0^2 \left[ -\cos^2 \alpha \boldsymbol{\omega}_L + \mathbf{S}_L (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \right].$$

Для поиска осредненных уравнений найдем сначала компоненты  $\langle M_{iL} \rangle$ . Заметим, что только  $\boldsymbol{\omega}$  необходимо усреднить по  $\psi$ , поэтому можно найти  $\langle \boldsymbol{\omega} \rangle_\psi$  можно найти отдельно. Выразим угловую скорость спутника через его кинетический момент:  $\boldsymbol{\omega}_x = \mathbf{J}_x^{-1} \mathbf{L}_x$ . Поскольку известен вид кинетического момента  $\mathbf{L}_L = (0, 0, L)^T$  в системе  $OL_1L_2L_3$ , то можем пересчитать его в систему  $Ox_1x_2x_3$  по формуле  $\mathbf{L}_x = \mathbf{A}^T \mathbf{L}_L$ , откуда  $\mathbf{L}_x = L(a_{31}, a_{32}, a_{33})^T$ . Это позволяет

записать выражение для угловой скорости в системе  $Ox_1x_2x_3$  так:

$$\boldsymbol{\omega}_x = L \left( \frac{1}{A} a_{31}, \frac{1}{A} a_{32}, \frac{1}{C} a_{33} \right)^T. \text{ Окончательно, в системе } OL_1L_2L_3 \text{ имеем}$$

$$\boldsymbol{\omega}_L = \mathbf{A} \boldsymbol{\omega}_x = L \begin{pmatrix} \frac{1}{A} a_{11} a_{31} + \frac{1}{A} a_{12} a_{32} + \frac{1}{C} a_{13} a_{33} \\ \frac{1}{A} a_{21} a_{31} + \frac{1}{A} a_{22} a_{32} + \frac{1}{C} a_{23} a_{33} \\ \frac{1}{A} a_{31} a_{31} + \frac{1}{A} a_{32} a_{32} + \frac{1}{C} a_{33} a_{33} \end{pmatrix}.$$

Осреднение приводит к

$$\langle \boldsymbol{\omega}_L \rangle_{\psi} = L \left( 0, 0, \frac{1}{C} \cos^2 \theta + \frac{1}{A} \sin^2 \theta \right).$$

Выражение для  $\cos \alpha$  может быть записано в виде

$$\cos \alpha = B_{1Z} S_{1Z} + B_{2Z} S_{2Z} + B_{3Z} S_{3Z}, \quad (3.1)$$

где  $S_{iz}$  ( $i=1,2,3$ ) предполагаются постоянными, так как  $\mathbf{S}_Z$  – направление на удаленное Солнце в инерциальном пространстве.  $\mathbf{B}_Z$  и  $\cos \alpha$  теперь являются функциями быстрой переменной  $u$ , осредненный момент имеет вид

$$\langle \mathbf{M}_L \rangle_{u,\psi} = \varepsilon l \bar{\omega} \begin{pmatrix} S_{1L} \langle B_{3L} \cos \alpha \rangle_u \\ S_{2L} \langle B_{3L} \cos \alpha \rangle_u \\ -S_{2L} \langle B_{2L} \cos \alpha \rangle_u - S_{1L} \langle B_{1L} \cos \alpha \rangle_u \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

где  $\bar{\omega} = \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta$ ,  $\varepsilon = \frac{kB_0^2 L_0}{C}$  – малый параметр. Оставшиеся выражения

необходимо усреднить только по  $u$ . Из (3.2) и (3.1) очевидно, что необходимо вычислить выражения

$$B_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_{iz} B_{jz} du \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

После несложных вычислений с использованием (1.2) получаем

$$B_{11} = B_{22} = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta = p, \quad B_{33} = \cos^2 \Theta = q, \quad B_{12} = B_{23} = B_{13} = 0.$$

Множители в (3.2) принимают вид

$$\langle B_{3L} \cos \alpha \rangle = p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33},$$

$$\langle B_{2L} \cos \alpha \rangle = p S_{1Z} q_{12} + p S_{2Z} q_{22} + q S_{3Z} q_{32},$$

$$\langle B_{1L} \cos \alpha \rangle = p S_{1Z} q_{11} + p S_{2Z} q_{21} + q S_{3Z} q_{31},$$

откуда получаем выражения для осредненных компонент механического момента

$$\begin{aligned} \langle M_{1L} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j1} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}), \\ \langle M_{2L} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j2} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}), \\ \langle M_{3L} \rangle &= -\varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j2} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{12} + p S_{2Z} q_{22} + q S_{3Z} q_{32}) - \\ &\quad - \varepsilon \bar{\omega} \sum q_{j1} S_{jZ} (p S_{1Z} q_{11} + p S_{2Z} q_{21} + q S_{3Z} q_{31}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Введем новую переменную  $\gamma$  вместо  $\sigma$ . Это угол между  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{L}$ , то есть

$$\cos \gamma = S_{1Z} q_{13} + S_{2Z} q_{23} + S_{3Z} q_{33}. \quad (3.4)$$

Найдем явный вид выражений (3.3) для того, чтобы получить новые уравнения, содержащие переменную  $\gamma$ , вместо (1.9). Перепишем  $\langle M_{3L} \rangle$  в виде

$$\langle M_{3L} \rangle = \varepsilon \bar{\omega} (a \cos^2 \Theta + b \sin^2 \Theta). \quad \text{Далее,}$$

$$\begin{aligned} a &= (q_{12} S_{1Z} + q_{22} S_{2Z} + q_{32} S_{3Z}) S_{3Z} q_{32} + (q_{11} S_{1Z} + q_{21} S_{2Z} + q_{31} S_{3Z}) S_{3Z} q_{31} = \\ &= q_{12} S_{1Z} S_{3Z} q_{32} + q_{22} S_{2Z} S_{3Z} q_{32} + (q_{32} S_{3Z})^2 + q_{11} S_{1Z} S_{3Z} q_{31} + q_{21} S_{2Z} S_{3Z} q_{31} + (S_{3Z} q_{31})^2. \end{aligned}$$

Так как  $q_{11} q_{31} + q_{12} q_{32} + q_{13} q_{33} = 0$  и  $q_{21} q_{31} + q_{22} q_{32} + q_{23} q_{33} = 0$  получаем

$$\begin{aligned} a &= -S_{1Z} S_{3Z} q_{13} q_{33} - S_{2Z} S_{3Z} q_{23} q_{33} + S_{3Z}^2 - (S_{3Z} q_{33})^2 = \\ &= S_{3Z}^2 - S_{3Z} q_{33} (S_{1Z} q_{13} + S_{2Z} q_{23} + S_{3Z} q_{33}). \end{aligned}$$

С учетом (3.4), окончательно имеем

$$a = (S_{3Z}^2 - S_{3Z} q_{33} \cos \gamma).$$

Рассуждая аналогично, получаем



$$b = \frac{1}{2}(S_{1Z}^2 - S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}^2 - S_{2Z}q_{23} \cos \gamma)$$

и  $\langle M_{3L} \rangle$  принимает вид

$$\langle M_{3L} \rangle = \varepsilon \bar{\omega} p (S_{1Z}^2 - S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}^2 - S_{2Z}q_{23} \cos \gamma) + \varepsilon \bar{\omega} q (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma).$$

Так как  $S_{1Z}q_{13} \cos \gamma + S_{2Z}q_{23} \cos \gamma + S_{3Z}q_{33} \cos \gamma = \cos^2 \gamma$  можно записать

$$\begin{aligned} -\langle M_{L3} \rangle &= \varepsilon \bar{\omega} p (1 - S_{3Z}^2 + S_{3Z}q_{33} \cos \gamma - \cos^2 \gamma) + \varepsilon \bar{\omega} q (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma) = \\ &= \varepsilon \bar{\omega} p \sin^2 \gamma + \varepsilon \bar{\omega} (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z}q_{33} \cos \gamma). \end{aligned}$$

Для того чтобы получить уравнение для  $\gamma$ , рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} -\frac{d\gamma}{du} \sin \gamma &= (\cos \rho \cos \sigma S_{1Z} + \cos \rho \sin \sigma S_{2Z} - S_{3Z} \sin \rho) \frac{d\rho}{du} + \\ &+ \sin \rho (-\sin \sigma S_{1Z} + \cos \sigma S_{2Z}) \frac{d\sigma}{du} = \varepsilon \langle M_{1L} \rangle (\cos \rho \cos \sigma S_{1Z} + \cos \rho \sin \sigma S_{2Z} - S_{3Z} \sin \rho) + \\ &+ \varepsilon \langle M_{2L} \rangle (-\sin \sigma + \cos \sigma) = \varepsilon \langle M_{1L} \rangle S_{1L} + \varepsilon \langle M_{2L} \rangle S_{2L} = \\ &= \varepsilon \bar{\omega} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}) (S_{1L}^2 + S_{2L}^2). \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{d\gamma}{du} = -\frac{\varepsilon \bar{\omega}}{\sin \gamma} (p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33}) (S_{1L}^2 + S_{2L}^2). \quad (3.5)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} p S_{1Z} q_{13} + p S_{2Z} q_{23} + q S_{3Z} q_{33} &= p (\cos \gamma - S_{3Z} q_{33}) + q S_{3Z} q_{33} = \\ &= p \cos \gamma + S_{3Z} q_{33} (q - p) \end{aligned} \quad (3.6)$$

и

$$S_{1L}^2 + S_{2L}^2 = 1 - S_{3L}^2 = 1 - \cos^2 \gamma = \sin^2 \gamma, \quad (3.7)$$

(3.5) принимает вид

$$\frac{d\gamma}{du} = -\varepsilon \bar{\omega} \sin \gamma (p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p)).$$

Рассматривая  $\langle M_{1L} \rangle$  с учетом (3.6), получаем

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon \bar{\omega} (q_{11} S_{1Z} + q_{21} S_{2Z} + q_{31} S_{3Z}) (p \cos \gamma + S_{3Z} q_{33} (q - p)).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
q_{11}S_{1Z} + q_{21}S_{2Z} + q_{31}S_{3Z} &= \frac{1}{q_{31}}(q_{11}q_{31}S_{1Z} + q_{21}q_{31}S_{2Z} + q_{31}^2S_{3Z}) = \\
&= \frac{1}{q_{31}}((q_{13}S_{1Z} + q_{23}S_{2Z} + q_{33}S_{3Z}) - q_{12}q_{32}S_{1Z} - q_{22}q_{32}S_{2Z} + (q_{31}^2 + q_{33}^2)S_{3Z}) = \\
&= \frac{1}{q_{13}}(-q_{33} \cos \gamma + S_{3Z}(1 - q_{32}^2)) = \frac{\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}}{\sin \rho}.
\end{aligned}$$

Окончательно получаем систему

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \bar{\omega} \frac{-\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} [p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p)], \\
\frac{d\gamma}{du} &= -\varepsilon \bar{\omega} \sin \gamma [p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p)], \\
\frac{dl}{du} &= -\varepsilon \bar{\omega} l [p \sin^2 \gamma + (q - p)(S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma)].
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Чтобы найти уравнение для  $\theta$ , необходимо определить выражение

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle - \langle M_{1L} \sin \psi \rangle.$$

Найдем оба слагаемых.

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle = \varepsilon l \mu g(\Theta) + \varepsilon l S_{2L} \langle (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \rangle,$$

$$\begin{aligned}
\text{где } g(\Theta) &= \langle \cos^2 \alpha \rangle = (1 - S_{3Z}^2)p + S_{3Z}^2 q, \quad \langle \omega_{1L} \sin \psi \rangle = -\langle \omega_{2L} \cos \psi \rangle = \\
&= L \frac{1}{2} \left( \frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) \sin \theta \cos \theta \text{ и } \mu = \frac{1}{2} \lambda \sin \theta \cos \theta, \text{ где } \lambda = 1 - C/A. \text{ Далее,}
\end{aligned}$$

$$\langle (\boldsymbol{\omega}_L \mathbf{B}_L) \cos \alpha \rangle = -\mu \langle B_{2L} \cos \alpha \rangle = -\mu (q_{12}S_{1Z} + q_{22}S_{2Z} + q_{32}S_{3Z})p = -\mu p S_{2L},$$

так как  $q_{32} = 0$ . Отсюда

$$\langle M_{2L} \cos \psi \rangle = \varepsilon l \mu g(\Theta) - \varepsilon l \mu p S_{2L}^2$$

Для второго слагаемого аналогично имеем

$$\begin{aligned}
\langle M_{1L} \sin \psi \rangle &= -\varepsilon l \mu g(\Theta) + \varepsilon l \mu S_{1L} (p q_{11} S_{1Z} + p q_{21} S_{2Z} + p q_{31} S_{3Z} + (q - p) q_{31} S_{3Z}) = \\
&= -\varepsilon l \mu g(\Theta) + \varepsilon l \mu S_{1L} (p S_{1L} + (q - p) q_{31} S_{3Z}).
\end{aligned}$$

В результате правая часть уравнения для  $\theta$  принимает вид

$$\langle M_\theta \rangle = 2\varepsilon l \mu g(\Theta) - \varepsilon l \mu p (S_{2L}^2 + S_{1L}^2) - \varepsilon l \mu (q - p) q_{31} S_{3Z} S_{1L}.$$

Далее, поскольку  $q_{32} = 0$ ,

$$q_{31} S_{1L} = q_{31} S_{1L} + q_{32} S_{2L} = S_{3Z} - q_{33} S_{3L} = S_{3Z} - \cos \rho \cos \gamma.$$

Это позволяет записать уравнение для  $\theta$ :

$$\frac{d\theta}{du} = \varepsilon \mu \left[ 2 \left( (1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q \right) - p \sin^2 \gamma + (q - p) S_{3Z} (\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}) \right]. \quad (3.9)$$

Объединяя (3.8) и (3.9), получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} \left[ p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\gamma}{du} &= -\varepsilon \sin \gamma \left[ p \cos \gamma + S_{3Z} \cos \rho (q - p) \right] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{dl}{du} &= -\varepsilon l \left[ p \sin^2 \gamma + (q - p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma) \right] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[ 2 \left( (1 - S_{3Z}^2) p + S_{3Z}^2 q \right) - p \sin^2 \gamma + (q - p) S_{3Z} (\cos \gamma \cos \rho - S_{3Z}) \right] \sin \theta \cos \theta.$$

Перейдем к анализу полученной системы.

### 3.2. Первые интегралы усредненных уравнений

Для поиска первых интегралов Разделим первое уравнение системы (3.10)

на второе,

$$\frac{d\rho}{d\gamma} = -\frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho \sin \gamma}.$$

После интегрирования имеем

$$\cos \rho = I_1 \sin \gamma + \cos \gamma S_{3Z}$$

и первый интеграл

$$I_1 = \frac{\cos \rho - \cos \gamma S_{3Z}}{\sin \gamma}. \quad (3.11)$$

Для того чтобы найти  $l$ , введем новую переменную

$$\delta = p \cos \gamma + (q - p) S_{3Z} \cos \rho.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{du} &= -p \sin \gamma \frac{d\gamma}{du} - S_{3Z} \sin \rho (q-p) \frac{d\rho}{du} = \\
&= \varepsilon \delta p \sin^2 \gamma - \varepsilon \delta S_{3Z} (\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}) (q-p) = \\
&= \varepsilon \delta \left( p \sin^2 \gamma + (q-p) (S_{3Z}^2 - S_{3Z} \cos \rho \cos \gamma) \right) = -\delta \frac{1}{l} \frac{dl}{du},
\end{aligned}$$

то есть

$$\frac{d\delta}{du} + \delta \frac{1}{l} \frac{dl}{du} = 0,$$

откуда

$$l = \frac{I_2}{|\delta|} = \frac{I_2}{|p \cos \gamma + S_{3Z} (q-p) \cos \rho|}.$$

и первый интеграл

$$I_2 = l |p \cos \gamma + S_{3Z} (q-p) \cos \rho|. \quad (3.12)$$

Для поиска интеграла, связывающего  $\theta$  и  $\gamma$  сначала упростим последнее уравнение в (3.10), используя (3.11). Подставляя выражение для  $\cos \rho$ , получаем

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[ 2p + 2S_{3Z}^2 (q-p) - p \sin^2 \gamma + (q-p) (I_1 S_{3Z} \cos \gamma \sin \gamma - S_{3Z}^2 \sin^2 \gamma) \right] \sin \theta \cos \theta,$$

откуда

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{1}{2} \varepsilon \lambda \left[ A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma \right] \sin \theta \cos \theta, \quad (3.13)$$

где  $A_1 = p + (q-p) S_{3Z}^2$ ,  $A_2 = I_1 S_{3Z} (q-p)$ . Заметим, что  $A_1 > 0$ . Подставляя во второе уравнение системы (3.10) выражение для  $\cos \rho$ , получаем

$$\frac{d\gamma}{du} = -\varepsilon \sin \gamma \left[ p \cos \gamma + S_{3Z} (q-p) (I_1 \sin \gamma + S_{3Z} \cos \gamma) \right] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

откуда

$$\frac{d\gamma}{du} = -\varepsilon \sin \gamma \left[ A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma \right] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right). \quad (3.14)$$

Разделив (3.14) на (3.13), получаем

$$\frac{A_1(2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma}{\sin \gamma (A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma)} d\gamma = -2 \frac{\cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta}{\lambda \sin \theta \cos \theta} d\theta,$$

откуда получаем первый интеграл

$$I_3 = \ln \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} - \ln \frac{4(A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma)}{(1 + \cos \gamma)^2} - \frac{2}{\lambda} \left[ \ln(\sin \theta) - \frac{C}{A} \ln(\cos \theta) \right].$$

Таким образом, для системы (3.10) получен полный набор независимых первых интегралов.

### 3.3. Положения равновесия и их устойчивость

Найдем положения равновесия оси симметрии спутника. Для этого перепишем уравнения (3.10), опуская уравнение для  $l$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{du} &= -\varepsilon \sin \gamma [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\theta}{du} &= \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1(2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma] \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3z}}{\sin \rho} [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Выпишем положения равновесия:

1.  $\sin \gamma = 0$ ,  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi/2$ ,  $\cos \rho - S_{3z} = 0$ .
2.  $A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma = 0$ ,  $\theta = 0$  или  $\theta = \pi/2$ .

Рассмотрим второй случай и линеаризуем уравнения движения (3.15) в окрестности  $\gamma_0 = \text{atan} \left( -\frac{A_1}{A_2} \right)$ . Для этого найдем выражения

$$A_1 \cos(\gamma + \gamma_0) + A_2 \sin(\gamma + \gamma_0) = (-A_1 \sin \gamma_0 + A_2 \cos \gamma_0),$$

$$\sin(\gamma + \gamma_0) = \sin \gamma_0.$$

Тогда

$$\frac{d\gamma}{du} = -\varepsilon \sin \gamma_0 \cos \gamma_0 \frac{A_1^2 + A_2^2}{A_2} \omega.$$

Заметим, что поскольку  $A_1 > 0$ , то  $\text{sign } A_2 = -\text{sign}(\sin \gamma_0 \cos \gamma_0)$ , откуда следует, что положение равновесия  $\gamma_0 = \text{atan}\left(-\frac{A_1}{A_2}\right)$  неустойчиво ( $\bar{\omega} > 0$ ).

Для положения равновесия  $\sin \gamma = 0$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{du} &= -\varepsilon A_1 \gamma \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \lambda A_1 \sin \theta \cos \theta, \\ \frac{d\rho}{du} &= \varepsilon A_1 \frac{\cos \rho - S_{3Z}}{\sin \rho} \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Из первого уравнения (3.16) видно, что асимптотически устойчиво положение равновесия  $\gamma = 0$  или  $\gamma = \pi$ ;  $\theta = 0$  (если  $\lambda < 0$ , то есть  $C > A$ ), или  $\theta = \pi/2$  (при  $C < A$ );  $\cos \rho - S_{3Z} = 0$ . В случае совпадения вектора кинетического момента с направлением на Солнце ( $\gamma = 0$ ) угол между кинетическим моментом и осью конуса совпадает с углом между направлением на Солнце и осью конуса, что и выражается соотношением  $\cos \rho - S_{3Z} = 0$ .

Из (3.12) следует, что

$$l_{term} = \frac{|p \cos \gamma_0 + S_{3Z} (q - p) \cos \rho_0|}{p + S_{3Z}^2 (q - p)}. \quad (3.17)$$

Таким образом, первый интеграл  $I_2$  позволяет определить значение величины кинетического момента в результате работы алгоритма.

#### **4. Анализ динамики спутника, близкого к осесимметричному**

Рассмотрим теперь, как будет влиять слабая несимметричность на динамику аппарата. Введем малый параметр

$$\eta = \frac{B - A}{C} \ll 1.$$

Будем считать, что произведение величин  $\eta$  и  $\varepsilon$  является величиной более высокого порядка малости по сравнению с  $\varepsilon$  и учитываться не будут.

После усреднения по  $u$  и по  $\psi$  уравнения движения примут вид

$$\frac{d\gamma}{du} = -\varepsilon \sin \gamma [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right), \quad (4.1)$$

$$\frac{d\rho}{du} = \varepsilon \frac{\cos \rho \cos \gamma - S_{3Z}}{\sin \rho} [A_1 \cos \gamma + A_2 \sin \gamma] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{dl}{du} = -\varepsilon l [A_1 \sin^2 \gamma - A_2 \cos \gamma \sin \gamma] \left( \cos^2 \theta + \frac{C}{A} \sin^2 \theta \right),$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \sin \theta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma] \sin \theta \cos \theta,$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{L_0}{\omega_0} \lambda \cos \theta + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \cos^2 \varphi \cos \theta - \varepsilon S_{3Z} \lambda (q - p) \cos \theta \sin \rho S_{2L}.$$

Первые три уравнения системы (4.1) идентичны уравнениям для осесимметричного спутника. В двух последних появляются слагаемые, пропорциональные  $\eta$ . Следовательно, значения  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $l$ , соответствующие положениям равновесия не изменятся. Найдем  $\theta$  и  $\varphi$ . Из четвертого уравнения (4.1) получаем, что должно выполняться одно из условий:

$$\begin{cases} \sin \theta = 0, \\ \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2} \varepsilon \lambda [A_1 (2 - \sin^2 \gamma) + A_2 \sin \gamma \cos \gamma] \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Из пятого уравнения аналогично имеем

$$\begin{cases} \frac{L_0}{\omega_0} \lambda + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \cos^2 \varphi - \varepsilon S_{3Z} \lambda (q - p) \sin \rho S_{2L} = 0, \\ \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Соответственно, в положении равновесия должно одновременно выполняться одно из уравнений (4.2) и одно из уравнений (4.3).

Если  $\sin \theta = 0$ , то переменная  $\varphi$  является быстрой и равновесия по ней не существует. В этом случае четвертое уравнение (4.1) можно усреднить

дополнительно по  $\varphi$  и получить уравнение, идентичное второму уравнению системы (3.15). Значит, для случая, когда  $\sin \theta = 0$  является асимптотически устойчивым ( $C > A$ ), результаты, полученные в предыдущем разделе, будут справедливы.

Если  $\cos \theta = 0$ , тогда из второго уравнения (4.2) получим  $\sin \varphi \cos \varphi = 0$ .

Для исследования асимптотической устойчивости линеаризуем четвертое и пятое уравнения системы (4.1) в окрестности положения равновесия  $\cos \theta = 0$ ,  $\sin \varphi = 0$  (значения остальных переменных в положении равновесия используются те же, что и в предыдущем разделе). Ограничимся значениями  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = 0$ , для значений  $\theta = 3\pi/2$  и  $\varphi = \pi$  результаты будут аналогичны. Для этого сделаем замену  $\beta = \pi/2 - \theta$  и учтем, что величина  $S_{2L}$  согласно (3.7)

по порядку малости не выше  $\gamma$ . Линеаризованные уравнения примут вид

$$\frac{d\beta}{du} = -\frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \varphi - \frac{1}{2} \varepsilon \lambda A_1 \beta,$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{L_0}{\omega_0} \lambda \beta + \frac{L_0}{\omega_0} \frac{C}{A^2} \eta \beta.$$

В этом случае, если  $\eta > 0$  ( $B > A$ ), то рассматриваемое положение равновесия будет асимптотически устойчивым, в противном случае – неустойчиво.

Аналогично можно показать, что при  $\eta < 0$  ( $B < A$ ) асимптотически устойчивыми положениями равновесия будут  $\theta = \pi/2$ ,  $\varphi = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ ,  $\varphi = 3\pi/2$ .

В любом случае оказывается, что ось максимального момента инерции в асимптотически устойчивом положении равновесия совпадает с осью кинетического момента аппарата (это относится и к ситуации  $\sin \theta = 0$ ).



## 5. Численное моделирование

Проведем численное моделирование динамики спутника под управлением алгоритма (2.4). Будем использовать спутник с тензором инерции «Чибис-М»,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1.0255 & 0.0014 & -0.0724 \\ 0.0014 & 1.5393 & 0.0019 \\ -0.0724 & 0.0019 & 1.8172 \end{pmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Для такого спутника, согласно предыдущему разделу, устойчивым будет положение  $\sin \theta = 0$ . Высота орбиты – близкая к высоте орбиты Международной космической станции, около 350 км (орбитальная скорость  $\omega_0 = 10^{-3}$ ); модель геомагнитного поля – прямой диполь; максимальный дипольный момент магнитных катушек –  $3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ . Сначала предположим, что ориентация аппарата точно известна, требуемое направление в инерциальном пространстве задается вектором  $\mathbf{S} = (5, 3, 1)$ . В моделировании учитывается влияние гравитационного момента, который, однако, более чем на порядок меньше управляющего. На рис. 4 представлен результат моделирования – компоненты угловой скорости и угол между третьей осью аппарата и требуемым направлением в инерциальном пространстве.

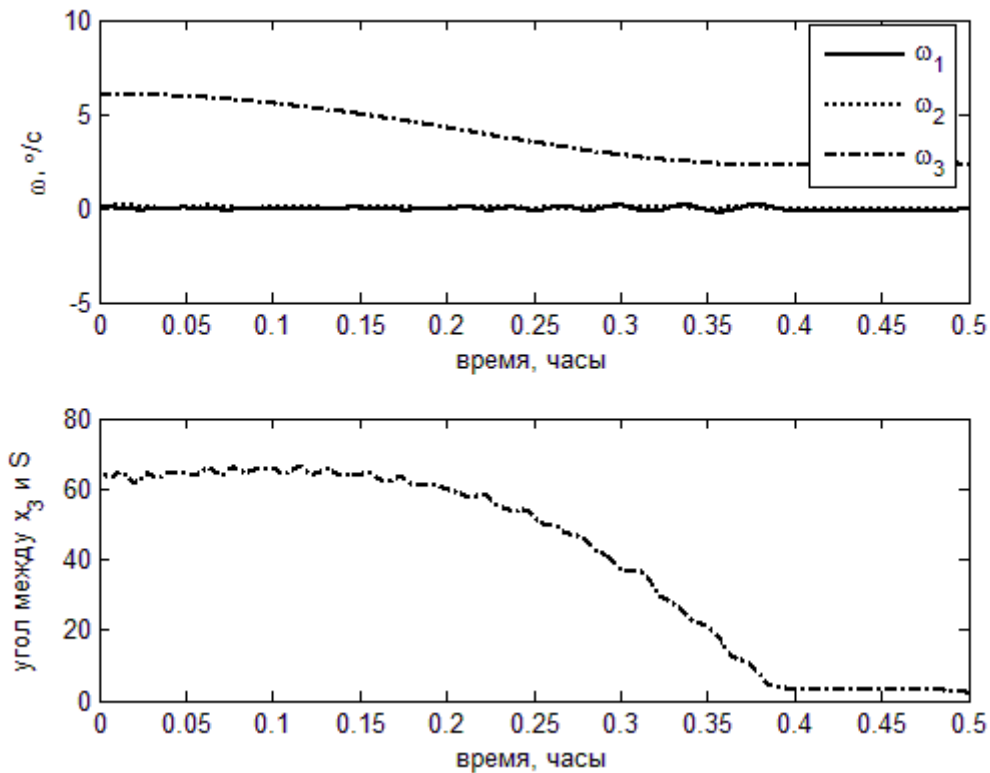


Рис. 4. Моделирование работы алгоритма

Из рис. 4 видно, что положение  $\sin\theta=0$  достигается, при этом аппарат оказывается вращающимся вокруг направления  $S$ . Кинетический момент при этом оказывается равным около  $0.08 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ , при этом согласно (3.17) величина кинетического момента должна составлять  $0.07 \text{ кг}\cdot\text{м}^2/\text{с}$ . Внесем ошибку в  $1^\circ$  в показания солнечных датчиков и частоту его опроса 1 Гц, тогда как дискретность выдачи управляющих воздействий составляет 5 Гц. Таким образом, в течение секунды осуществляется один сеанс измерений и 5 – управления. Магнитные катушки могут реализовывать только значения  $\pm 3.2 \text{ А}\cdot\text{м}^2$ , 0. Пороговое значения расчетного управляющего воздействия на катушку, при которой принимается решение о ее включении – 0.5.

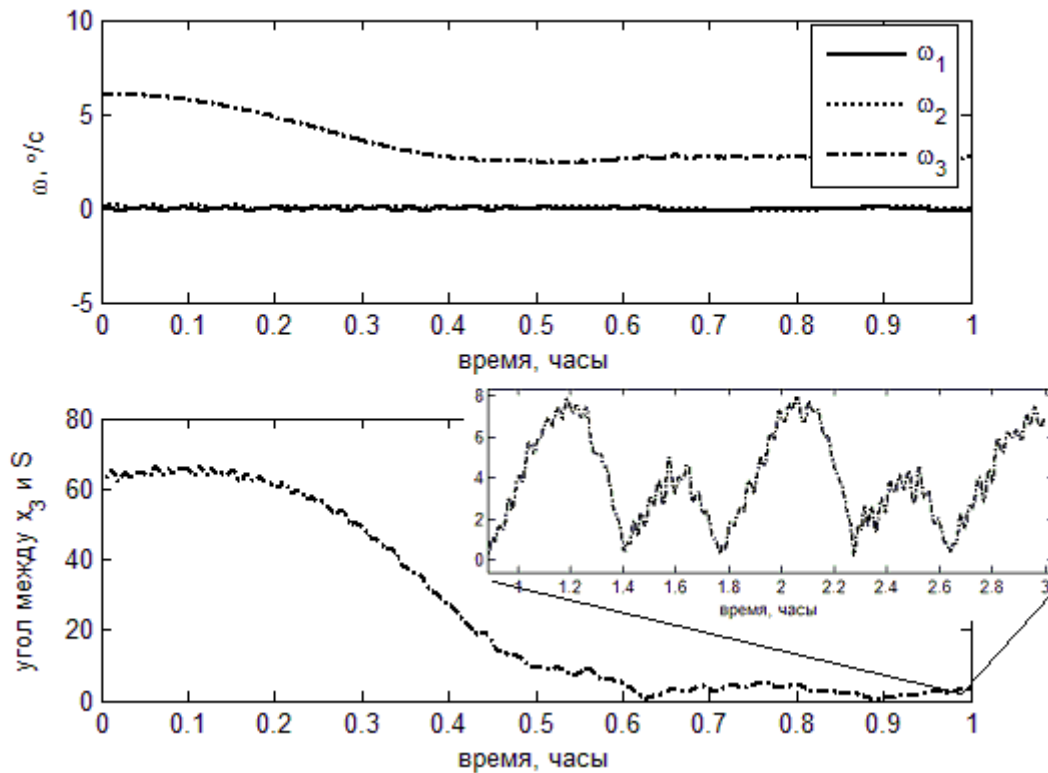


Рис. 5. Моделирование работы алгоритма с учетом характеристик датчиков и магнитных катушек

Из рис. 5 видно, что быстродействие системы при сделанных предположениях не изменилось, точность одноосной ориентации составила около  $8^\circ$ .

## Заключение

В работе предложена схема формирования алгоритма управления, позволяющего осуществлять демпфирование угловой скорости и разворот спутника в инерциальном пространстве с помощью магнитных катушек и солнечных датчиков. Показания магнитометра не используются. С помощью методов осреднения для осесимметричного спутника получены эволюционные уравнения, решение которых найдено в квадратурах. Для почти осесимметричного спутника найдены положения равновесия эволюционных уравнений, в зависимости от тензора инерции аппарата показано, какие из этих положений являются устойчивыми.

## Литература

1. Stickler A.C., Alfried K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1976. V. 13, № 5. p. 282–287.
2. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. Москва: Наука, 1985. 288 с.
3. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*. 1973. Т. 50, № 2. с. 327–335.
4. Булгаков Б.В. Прикладная теория гироскопов. Москва: Гостехиздат, 1939. 258 с.
5. Белецкий В.В. Эволюция вращения динамически-симметричного спутника // *Космические исследования*. 1963. Т. 1, № 3. с. 339–385.
6. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // *Прикладная математика и механика*. 1963. Т. 27, № 3. с. 473–483.
7. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1937. 586 с.
8. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. Москва: Изд-во Московского университета, 1975. 308 с.
9. Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В. Динамические системы-3, под ред. Арнольда В.И. Москва: ВИНТИ, 1985. 303 с.