



**Долголева Г.В.**

Численное решение  
системы уравнений,  
описывающей перенос  
излучения и  
взаимодействие излучения с  
веществом

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Долголева Г.В. Численное решение системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 41. 15 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-41>

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
Институт прикладной математики  
имени М.В.Келдыша РАН

Г.В. Долголева

**Численное решение системы уравнений,  
описывающей перенос излучения и  
взаимодействие излучения с веществом**

Москва, 2011 год

УДК 519.6

Численное решение системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом.

Долголева Г.В.

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

При расчете большого количества задач физики и механики определяющими процессами являются перенос излучения фотонами и взаимодействие излучения с веществом. В данной статье рассматривается численный метод решения одномерной системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом. Перенос излучения рассматривается в приближении спектральной, равновесной квазидиффузии. В этой системе сложно записать релаксацию энергии между веществом и излучением, так чтобы схема была неявной (иначе будет мелкий шаг по времени) и выполнялось условие баланса.

Рассматриваемая в статье разностная схема удовлетворяет этим условиям.

Суть численного метода состоит в расщеплении разностной системы уравнений при ее решении. Вся система расщепляется на две: первая описывает спектральный перенос излучения, а вторая изменение энергии вещества и излучения в результате их взаимодействия. Для второй системы записано три разностные схемы. Приводится сравнение результатов, полученных по этим схемам, с аналитическими решениями и известными решениями.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (гранты № 11-01-00258).

Numerical solution of equations describing the radiation transport and interaction of radiation with matter.

Dolgoleva G.V.

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS

When calculating a large number of problems in physics and mechanics of defining processes is the transfer of photon emission and the interaction of radiation with matter. This article describes a numerical method for solving one-dimensional system of equations describing the radiation transport and interaction of radiation with matter. The radiation transport is considered in the approximation of spectral, equilibrium quasi-diffusion. In this system difficult to record the relaxation of energy between matter and radiation, so that the scheme was implicit (otherwise it would be a fine time step) and the condition of balance.

Considered in the paper the difference scheme satisfies these conditions.

The essence of the numerical method is splitting the difference equations for its solution. The whole system is split into two parts: the first describes the spectral radiation transfer, and the second change in the energy of matter and radiation as a result of their interaction. For the second system recorded three difference schemes. A comparison of the results obtained by these schemes, with analytical solutions and known solutions.

This work is supported by RFFI (grants N 11-01- 00258).

## Содержание

	стр.
Введение	3
1. Разностные схемы для системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом	4
1.1. Дифференциальный вид системы	4
1.2. Разностные схемы	5
2. Численные расчеты по схемам.	10
Заключение	13
Список использованных источников	14

## Введение

При расчете большого количества задач физики и механики определяющими процессами являются перенос излучения фотонами и взаимодействие излучения с веществом. В данной статье рассматривается численный метод решения одномерной системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом. В работах /1/-/4/ описаны различные разностные схемы для счета системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие его с веществом в спектральном приближении. В этой системе сложно записать релаксацию энергии между веществом и излучением, так чтобы схема была неявной (иначе будет мелкий шаг по времени) и выполнялось условие баланса. В работе /5/ приведена схема, которая записана балансно, решается исходная система дифференциальных уравнений расщеплением по спектру. На  $i$ -ом шаге расщепления рассматривается перенос излучения  $i$ -ой группы и его взаимодействие с веществом. Схема условно устойчива, так как коэффициент поглощения излучения берется с  $n$ -го слоя. Эта схема хорошо работает (балансна, счетный шаг не обременителен в счете), но в оптически толстых системах большая аппроксимационная ошибка при полном балансе энергии, которую можно сделать как угодно малой, уменьшая счетный шаг по времени.

В работе /6/ предложен численный метод решения системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие его с веществом в спектральном приближении. Вся система расщепляется на две: первая описывает спектральный перенос излучения, а вторая изменение энергии вещества и излучения в результате их взаимодействия. Для второй системы записана разностная схема, в которой в качестве переменной вместо энергии рассматривали равновесную плотность излучения. Эта схема не была балансной и в некоторых задачах давала заметную ошибку. Покажем этот факт при анализе численных расчетов.

В данной работе сохранена та же идея расщепления, что и в работе /6/, но записаны еще две разностные схемы. Проведено сравнение результатов, полученных по этим схемам, с аналитическими решениями и известными решениями.

## 1. Разностные схемы для системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом

### 1.1. Дифференциальный вид системы.

Система уравнений, описывающая перенос излучения и взаимодействие его с веществом в спектральном квазидиффузионном приближении, рассматривается в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{1}{r^\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r^\theta S_i) = \chi_{ii} (U_{ip} - U_i), \quad (1)$$

$$S_i = -\frac{1}{\chi_i} \frac{\partial}{\partial r} (D_i U_i) - \frac{(3D_i - 1)}{r \chi_i} U_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

$$\frac{dE_e}{dt} = \frac{c}{\rho} \sum_{i=1}^m \chi_{ii} (U_i - U_{ip}). \quad (2)$$

В этих уравнениях используются следующие обозначения:

$t$  - время,

$\theta$  - показатель симметрии ( $\theta=2$  - сферическая,

$\theta=1$  - цилиндрическая,  $\theta=0$  - плоская симметрия),

$r$  - эйлеров радиус точки,

$\rho$  - плотность вещества,

$E_e, T_e$  - внутренняя удельная энергия и температура электронов

соответственно,

$c$  - скорость света,

$$U_i = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} U_\omega d\omega, \quad \text{- спектральная плотность излучения,}$$

$\chi_{ii}$  - спектральный коэффициент поглощения излучения,

$\chi_{is}$  - спектральный коэффициент рассеяния,

$\chi_i = \chi_{is} + \chi_{it}$  - спектральный коэффициент ослабления,

$U_{ip} = a_i U_p = a_i \frac{4\sigma}{c} T_e^4$  - спектральная плотность равновесного излучения,

$a_i = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} \frac{15\omega^3}{\pi^4 (e^{\omega/T_e} - 1)} d\omega$  - функция Планка для  $i$ -го частотного интервала

$$\left( \int_0^{\infty} a \omega d\omega = 1 \right),$$

$\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана,

$m$  - число групп по частоте,

$$D_i = \frac{\int_{-1}^1 I_i \mu^2 d\mu}{\int_{-1}^1 I_i \mu d\mu}, \quad I_i = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} I_\omega d\omega, \quad (3)$$

$D_i$  - коэффициенты квазидиффузии [7],

$I_i$  - спектральная интенсивность излучения,

$\mu$  - косинус угла полета фотонов.

При выводе уравнений (1), (2) предположили, что коэффициенты поглощения и рассеяния усреднены по частоте каким-либо способом на  $i$ -ом частотном интервале и являются функциями температуры и плотности вещества (но не частоты).

С учетом этого предположения уравнения для переноса излучения и энергии были проинтегрированы по  $\omega$  в пределах от  $\omega_{i-1}$  до  $\omega_i$ , т.е. по  $i$ -му частотному интервалу ( $\omega$  - переменная по частоте) и получены уравнения (1), (2).

Дополнительно для решения системы (1)-(3) нужно задать уравнение состояния, связывающее внутреннюю энергию и температуру электронов:

$$E_e = f(\rho, T_e). \quad (4)$$

Система уравнений (1), (2), (4) дополняется начальными и граничными условиями.

## 1.2. Разностные схемы.

Запишем для системы (1), (2), (4) разностную схему в следующем виде:

$$\frac{U_{i,j+1/2}^{n+1} - U_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} + \frac{r_{j+1}^\theta \cdot S_{i,j+1}^{n+1} - r_j^\theta \cdot S_{i,j}^{n+1}}{V_{j+1/2}} = c \chi_{ii,j+1/2}^n \left( U_{pi,j+1/2}^{n+1} - U_{i,j+1/2}^{n+1} \right), \quad (5)$$

$$\frac{E_{e,j+1/2}^{n+1} - E_{e,j+1/2}^n}{\Delta t} = \frac{c}{\rho} \sum_{v=1}^m \chi_{ii,j+1/2}^n \left( U_{i,j+1/2}^{n+1} - U_{pi,j+1/2}^{n+1} \right), \quad (6)$$

$$S_{i,j}^{n+1} = -\frac{1}{\chi_{\omega,j}^n} \left( \frac{D_{i,j+1/2} U_{i,j+1/2}^{n+1} - D_{i,j-1/2} U_{i,j-1/2}^{n+1}}{\frac{1}{2}(r_{j+1} - r_{j-1})} + \frac{F_{i,j+1/2} U_{i,j+1/2}^{n+1} + F_{i,j-1/2} U_{i,j-1/2}^{n+1}}{2r_j} \right),$$

где  $i = 0, 1, \dots, m$ ,  $j = 0, 1, \dots, n-1$ ,  $n$  - число точек по пространству,  $F_{i,j+1/2} = 3D_{i,j+1/2} - 1$ .

Все величины, кроме потока и радиусов, берутся в полуцелых узлах, потоки и радиусы в целых.

При численном решении системы уравнений (5), (6) поступаем следующим образом:

1) в уравнении (5) прибавим и вычтем величину  $\chi_{ii,j+1/2}^n \left( U_{pi,j+1/2}^n - U_{i,j+1/2}^n \right)$ ,

где  $U_{i,j+1/2}^n$  - значение  $U_{i,j+1/2}$  после первого этапа расщепления,

2) полученную систему уравнений расщепим на две.

Первая система имеет вид:

$$\frac{U_{i,j+1/2}^{\wedge} - U_{i,j+1/2}^n}{c\Delta t} + \frac{r_{j+1}^\theta \cdot \tilde{S}_{i,j+1}^{\wedge} - r_j^\theta \cdot \tilde{S}_{i,j}^{\wedge}}{V_{j+1/2}} = \chi_{ii,j+1/2}^n \left( U_{pi,j+1/2}^n - U_{i,j+1/2}^{\wedge} \right), \quad (7)$$

$$\tilde{S}_{i,j}^{\wedge} = -\frac{1}{\chi_{i,j}^n} \left( \frac{D_{i,j+1/2} U_{i,j+1/2}^{\wedge} - D_{i,j-1/2} U_{i,j-1/2}^{\wedge}}{\frac{1}{2}(r_{j+1} - r_{j-1})} + \frac{E_{i,j+1/2} U_{i,j+1/2}^{\wedge} + E_{i,j-1/2} U_{i,j-1/2}^{\wedge}}{2r_j} \right)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

Система уравнений (7) относительно  $U_{i,j+1/2}^{\wedge}$  имеет трехдиагональную матрицу, следовательно, может быть решена прогонкой [8].

После завершения первого этапа переходим к решению системы уравнений второго этапа.

Вторая отщеплённая система имеет вид (в записи опущен индекс по пространству):

$$\begin{aligned} \frac{U_i^{n+1} - U_i^\wedge}{c\Delta t} &= \chi_{ii}^n (U_{pi}^{n+1} - U_i^{n+1}) + \chi_{ii}^n (U_i^\wedge - U_{pi}^n), \\ \frac{E_e^{n+1} - E_e^n}{\Delta t} &= \frac{c}{\rho} \sum_{i=1}^m \chi_{ii}^n (U_i^{n+1} - U_{pi}^{n+1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Решить эту систему  $m+1$  уравнения непосредственно нельзя, так как она содержит  $m+2$  неизвестных:  $U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, E_e^{n+1}, U_p^{n+1}$ , это с привлечением равенства  $U_{ip} = a_i U_p$ . Но существует связь:  $E_e, U_p$  есть функции  $T_e$ . Рассмотрим для решения системы (8) три различных схемы.

В первой в качестве основной переменной возьмем  $T_e$ , т.е. рассматриваем уравнения относительно:  $U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, T_e^{n+1}$ , а  $U_{pi}^{n+1}$  положим равным  $U_{pi}^{n+1} = a_i^n \sigma(T_e^n)^3 T_e^{n+1}$  и получим систему  $m+1$  уравнения относительно  $m+1$  неизвестных  $U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, T_e^{n+1}$ :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^\wedge}{c\Delta t} = \chi_{ii}^n (a_i^n \sigma(T_e^n)^3 T_e^{n+1} - U_i^{n+1}) + \chi_{ii}^n (U_i^\wedge - U_{pi}^n), \quad (9)$$

$$\left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n \frac{T_e^{n+1} - T_e^n}{\Delta t} = \frac{c}{\rho} \sum_{i=1}^m \chi_{ii}^n (U_i^{n+1} - a_i^n \sigma(T_e^n)^3 T_e^{n+1}) \quad (10)$$

Запишем эту систему в виде:

$$A \bar{W}^{n+1} = \bar{D}$$

где

$$\bar{W}^{n+1} = \{U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, T_e^{n+1}\}$$

$$a_{ii} = 1 + c\Delta t \chi_{ii}^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$a_{im+1} = -c\Delta t \chi_{ii}^n a_i^n \sigma(T_e^n)^3, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1i} = -\frac{c\Delta t \chi_{ii}^n}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n}, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1m+1} = 1 + \sum_{i=0}^m \frac{c\Delta t \chi_{ii}^n a_i^n \sigma(T_e^n)^3}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n};$$

$$d_i = U_i^\wedge (1 + c\Delta t \chi_{ii}^n) - c\Delta t \chi_{ii}^n U_{pi}^n, \quad i = 1, \dots, m;$$



$$d_{m+1} = T_e^n.$$

Разностную схему (9),(10) будем называть схемой 1.

Во втором случае линеаризуем уравнение энергии по  $U_p$  и получим следующую систему:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^\wedge}{c\Delta t} = \chi_{ii}^n (a_i^n U_p^{n+1} - U_i^{n+1}) + \chi_{ii}^n (U_i^\wedge - a_i^n U_p^n), \quad (11)$$

$$\left( \frac{\partial E_e}{\partial U_p} \right)^n \frac{U_p^{n+1} - U_p^n}{\Delta t} = \frac{c}{\rho} \sum_{i=1}^m \chi_{ii}^n (U_i^{n+1} - a_i^n U_p^{n+1}). \quad (12)$$

Запишем эту систему в виде:

$$A\bar{W}^{n+1} = \bar{D},$$

где

$$\bar{W}^{n+1} = \{U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, U_p^{n+1}\},$$

$$a_{ii} = 1 + c\Delta t \chi_{ii}^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$a_{im+1} = -c\Delta t \chi_{ii}^n a_i^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1i} = -\frac{c\Delta t \chi_{ii}^n}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial U_p} \right)^n}, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1m+1} = 1 + \frac{c\Delta t}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial U_p} \right)^n} \sum_{i=1}^m \chi_{ii}^n a_i^n;$$

$$d_i = U_i^\wedge (1 + c\Delta t \chi_{ii}^n) - c\Delta t \chi_{ii}^n U_{pi}^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$d_{m+1} = U_p^n.$$

Схему (11), (12) будем называть второй схемой. Эта схема рассматривается в работе /6/.

А в третьей схеме полагаем  $U_{ip}^{n+1} = U_{ip}^n + \left( \frac{\partial U_{ip}}{\partial E_e} \right)^n (E_e^{n+1} - E_e^n)$ . И тогда

рассматриваемая система разностных уравнений имеет вид:

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^\wedge}{c\Delta t} = \chi_{ii}^n \left( U_{ip}^n + \left( \frac{\partial U_{ip}}{\partial E_e} \right)^n (E_e^{n+1} - E_e^n) - U_i^{n+1} \right) + \chi_{ii}^n (U_i^\wedge - U_{pi}^n), \quad (13)$$

$$\frac{E_e^{n+1} - E_e^n}{\Delta t} = \frac{c}{\rho} \sum_{i=1}^m \chi_{ii}^n \left( U_i^{n+1} - U_{ip}^n - \left( \frac{\partial U_{ip}}{\partial E_e} \right)^n (E_e^{n+1} - E_e^n) \right). \quad (14)$$

Перепишем эту систему в виде:

$$A \bar{W}^{n+1} = \bar{D},$$

где

$$\bar{W}^{n+1} = \{U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, E_e^{n+1}\},$$

$$a_{ii} = 1 + c\Delta t \chi_{ii}^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, m;$$

$$a_{im+1} = -\frac{c\Delta t \chi_{ii}^n a_i^n 4\sigma(T_e^n)^3}{\left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n}, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1i} = -\frac{c\Delta t \chi_{ii}^n}{\rho}, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$a_{m+1m+1} = 1 + \frac{c\Delta t 4\sigma(T_e^n)^3}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n} \sum_{i=0}^m \chi_{ii}^n a_i^n;$$

$$d_i = U_i^n \left( 1 + c\Delta t \chi_{ii}^n \right) - \frac{c\Delta t 4\sigma(T_e^n)^3}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n} \chi_{ii}^n a_i^n E_e^n, \quad i = 1, \dots, m;$$

$$d_{m+1} = E_e^n \left( 1 + \frac{c\Delta t 4\sigma(T_e^n)^3}{\rho \left( \frac{\partial E_e}{\partial T_e} \right)^n} \sum_{i=0}^m \chi_{ii}^n a_i^n \right) - \frac{c\Delta t}{\rho} \sum_{i=0}^m \chi_{ii}^n a_i^n U_{ip}^n.$$

Эту схему (13), (14) будем называть третьей схемой.

Полученные системы уравнений (9,10), (11,12), (13,14) решаем методом обращения матрицы. Поскольку определитель матрицы  $A$  не равен нулю, то решение существует и единственно.

При проведении расчетов для решения системы второго этапа можно использовался метод двойной ортогонализации /9/.

Исследование устойчивости проведено в работе /6/ для схемы 2 для каждого численного этапа решения отдельно. Аналогично можно это сделать и для схем 1 и 3.

Ограничение на счетный шаг вытекает из того, что  $\chi_{it}$  берется с  $n$ -го слоя. Если предположить, что  $\chi_{it} = f(\rho, i)T_e^\alpha$ , то ограничение на шаг имеет вид

$$\Delta t^{n+1} = \frac{1}{\alpha} \min_j \frac{E_{ej+1/2}^n}{|E_{ej+1/2}^{n+1} - E_{ej+1/2}^n|} \Delta t^n, \quad j=1, \dots, n-1. \quad (15)$$

## 2 Численные расчеты по схеме

Работу схемы проиллюстрируем на расчетах нескольких задач.

Первая- расчёт тепловой волны от мгновенного источника. Излучение в этой задаче рассматривается в одnogрупповом приближении или в приближении «серой» материи.

Рассматривается идеальный газ  $c_{ve}=5000$ ,  $\gamma=1.4$ , радиус меняется от 0 до 200. Начальная температура:

$$T_e(t=0) = \begin{cases} 4774, & \text{при } r \leq 10 \\ 0, & \text{при } 10 \leq r \leq 200 \end{cases}$$

Коэффициент поглощения  $\chi_t = 1$ .

Граничные условия заданы в виде потока  $S(0)=0$ ,  $S(200)=0$ .

На моменты времени, когда радиус фронта  $R_{\phi p} \gg 10$  решение выходит на автомодельный режим. Автомодельное решение задачи о тепловой волне от мгновенного источника согласно /10/ при наших данных приводит к следующим формулам для положения фронта ( $R_{\phi p}(t)$ ) и профиля температуры ( $T_e(r, t)$ ):

$$R_{\phi p}(t) = 88.67t^{1/11}, \quad T_e(r, t) = T_c(t) \left(1 - \frac{r^2}{R_{\phi p}^2}\right)^{1/3}, \quad T_c(t) = 88.67t^{-3/11},$$

где  $T_c(t)$  - температура в центре системы от времени.

В первой и второй задачах система единиц:  $r$ -[м],  $t$ -[10<sup>-2</sup> сек],  $T$ -[ев],  $\sigma=1.37_{10-3}$ ,  $c=3_{10}4$ . Расчеты проведены по методике /5/ и по всем трем схемам.

Отличия в величине  $T_c(t)$  по всем схемам меньше 1%. Определение величины  $R_{\phi p}(t)$  по расчету уже сложнее, так как нет четкого определения величины  $R_{\phi p}(t)$ . Если положить  $R_{\phi p}(t) = r_i$  при  $(T_e(r_{i-1/2}) > 10 \cdot T_e(r_{i+1/2}))$ ,

максимальное отличие между аналитическими и численными величинами меньше 2%.

Отметим еще такой факт: в этой задаче должна сохраняться первоначальная энергия, равная сумме внутренней энергии и энергии излучения во всей системе, так как потоки на границах равны нулю. В расчетах получаем полный баланс по методике /5/ и в первой и третьей схемах. Что касается второй схемы, то она записана балансно относительно величин  $U_1^{n+1}, \dots, U_m^{n+1}, U_p^{n+1}$  и чтобы найти энергию  $E_e(t)$ , сначала находим температуру  $T_e(t) = \sqrt[4]{U_p(t)/\sigma}$  и лишь потом по уравнению состояния энергию. И нет никакой гарантии, что полная энергия будет сохраняться, что и видим в расчетах. Уменьшение счетного шага приводит к тому, что дисбаланс уменьшается. Если в (15) взять  $\frac{1}{\alpha} = 0.1$  и  $\frac{1}{\alpha} = 0.01$ , то дисбаланс в полной энергии уменьшается с 0.5% до 0.05%.

В таблице 1 приведены результаты, полученные из численного решения по схеме 2 и аналитического решения.

Таблица 1.

T(сек)	$R_{\phi p}$ - аналит.	$R_{\phi p}$ - расчёт	$T_c$ - аналит.	$T_c$ - расчёт
0,02	62,143	62,78	28,77	29,3
0,1	71,92	73,33	18,55	18,68
1	88,67	90,22	9,9	9,933
10	109,3	111,3	5,283	5,298
100	134,77	136,7	2,82	2,827
2100	177,7	178,9	1,229	1,2320
4100	188,9	189,4	1,024	1,027

Вторая задача - расчёт остывания оптически тонкого шара. Излучение в этой задаче рассматривается в приближении «серой» материи.

Газовый шар радиуса  $R=10$ , с единичной плотностью и начальной температурой  $T_e=477.4$  остывает за счёт лучистого охлаждения. Уравнение состояния – идеальный газ:  $c_{ve}=5000$ ,  $\gamma=1.4$ . Коэффициент

поглощения:  $\chi_t = \left(\frac{10}{T_e}\right)^3 = \frac{A}{T_e^3}$  (т.е. шар оптически тонок при  $T_e > 50$ );

граничные условия: слева - центр ( $S(0)=0$ ), справа - условие на свободной поверхности  $\left(S(10) = \frac{cU}{2}\right)$ .

Задача об остывании равномерно нагретого оптически тонкого шара имеет простое аналитическое решение, так как в этом случае  $U \ll U_p = \frac{4\sigma}{c} T_e^4$  и

$\text{div}S = \chi \frac{4\sigma}{c} T_e^4$  одинакова для всех точек. Из уравнения энергии имеем

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{4\sigma A T_e}{\rho c_v}, \text{ отсюда } T_e(t) = 477.4 e^{\frac{4\sigma A t}{\rho c_v}}.$$

На рисунке 1 приведена зависимость  $T_e(t)$ , полученная по аналитической формуле и численно.

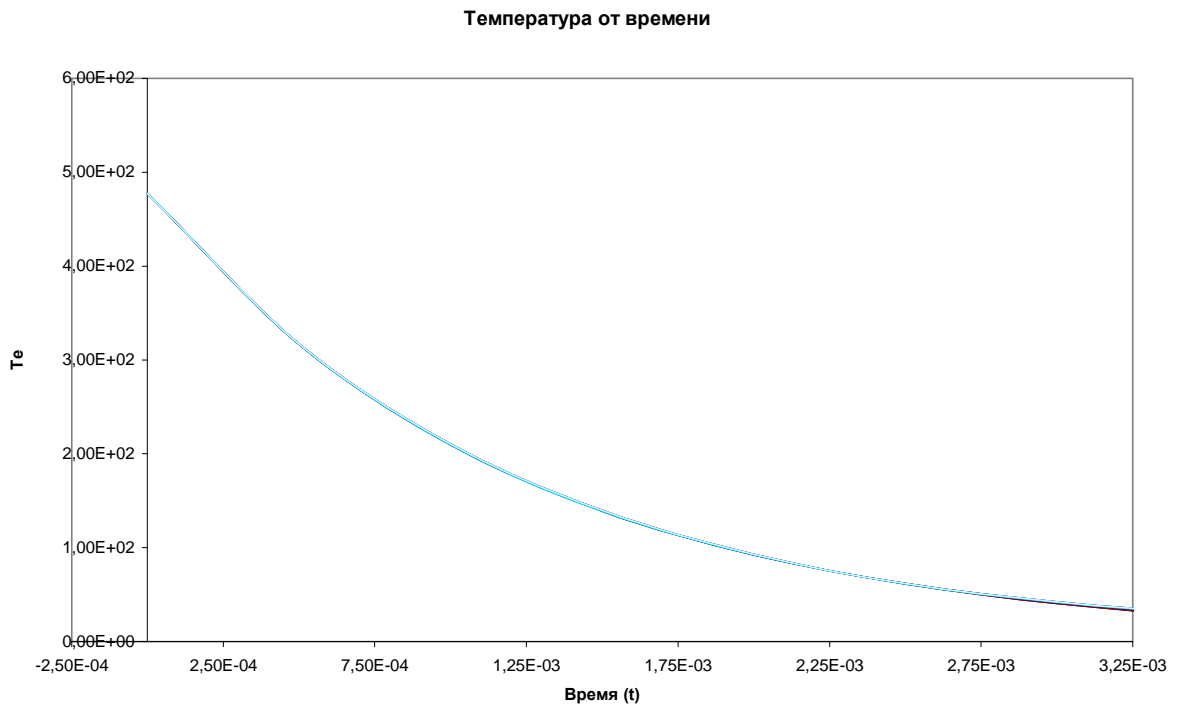


Рис. 1.

Кривые по всем схемам совпали. Максимальная ошибка 3.6%. По второй схеме (линеаризация по  $U_p$ ) наблюдается дисбаланс 0.15%. Уменьшение константы в выборе шага уменьшает величину дисбаланса.

Третья задача спектральная взята из работы /11/. Рассматривается плоский слой  $[0,5]$  с начальной температурой  $T_e(r) = 0.01$  и начальной

плотностью излучения  $U_i(r) = U_{ip}(T_e = 0.01)$ . Уравнение состояния

$E_e = 0.81T_e$ , коэффициент поглощения  $\chi_{от} = \frac{100}{T_e \omega^3} \left(1 - e^{-\frac{\omega}{T_e}}\right)$ , коэффициент

рассеяния  $\chi_{ос} = 1_{10} - 8$ . Граничные условия:

$$U_{\omega}(r=0, t) = U_{\omega p}(T_{cp}), T_{cp} = 100t + 0.01,$$

$$U_{\omega}(r=5, t) = U_{\omega p}(0.01).$$

Сетка по частоте следующая 0; 0.02; 0.04; 0.06; 0.08; 0.1; 0.15; 0.2; 0.3; 0.4; 0.5; 0.7; 1; 1.4; 1.8; 2.2; 2.6; 3; 3.5; 4; 4.5; 5; 5.5; 6; 7; 8; 12; 1.5.

На рисунке 2 приведена зависимость  $T_e(r)$  на момент времени  $t = 0.015$  по всем 4-м схемам.

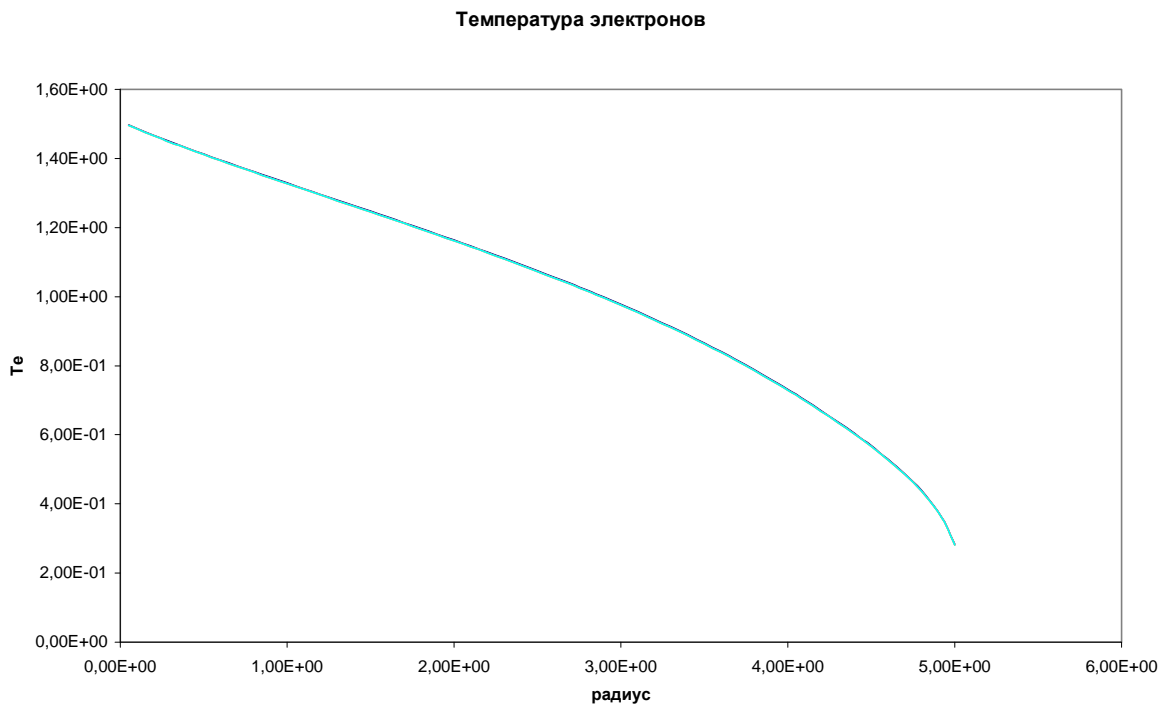


Рис.2.

Кривые по всем схемам совпали. Максимальная ошибка 0.4%. По второй схеме (линеаризация по  $U_p$ ) наблюдается дисбаланс 0.03%.

## Заключение

Рассмотренные схемы хорошо описывают решение задач в оптически тонких и толстых областях, ограничение на шаг (15) не обременительно в счете.

Из анализа результатов расчетов видно, что из всех трех рассмотренных схем лучше всего схема 3 (линеаризация равновесной плотности излучения по энергии). Но ее результаты не лучше, чем получаются по схеме /5/, которая численно решается расщеплением по спектру.

Но в отличие от схемы /5/ рассмотренные схемы хорошо распараллеливаются как по пространству, так и по спектру.

Экономические характеристики схемы можно улучшить, применив методы для численного решения системы уравнений, использующие незаполненность матриц.

**Список использованных источников**

1. Гольдин В.Я., Шильков А.В. Уравнения высокотемпературной радиационной газовой динамики в квазидиффузионном виде // М.: Препринт ИПМ, №43, 1981.
2. Базылев Б.Н., Романов Г.С. Численное моделирование спектральной радиационно-газодинамической задачи с лучистым охлаждением сферического объема плазмы с учетом нестационарности процесса излучения // Инж. Физ. Журн. БССР, т.41, №2, 1981, 318-327.
3. Немчинов И.В. Об усредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач // ПММ, т.34, вып. 4, 1970, 706-721.
4. Зуев А.И. Комплекс программ и методика для численного интегрирования физических процессов в плотной плазме // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, вып. 3/14/, 1983, 41-43.
5. Долголева Г.В. Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, вып. 2/13/, 1983, 29-33.
6. Долголева Г.В. Численное решение уравнений, описывающих перенос излучения и его взаимодействие с веществом // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов, вып. 1, 1991, 56-60.
7. Гольдин В.Я., Шильков А.В. Уравнения высокотемпературной радиационной газовой динамики в квазидиффузионном виде // М.: Препринт ИПМ, №43, 1981.
8. Годунов С.К., Рябенький В.С. Введение в теорию разностных схем // М.: ФИЗМАТ, 1962.
9. Загускин В.Л. Программа для решения системы линейных алгебраических уравнений методом ортогонализации // Сбор. Подпрограммы для решения задач линейной алгебры, вып. 2, №4, 19-21.
10. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явления // М.: Наука, 1966.
11. Белкина Т.А., Козьманов М.Ю., Рачилов Е.Б. Применение продольно-поперечной схемы для решения системы уравнений спектральной диффузии // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, вып. 3, 1985, 48-51.