



**Келлин Н.С.**

Условия справедливости  
гипотез Нелкина и  
Корнгольда при  
произвольных скоростях  
генерации и поглощения  
нейтронов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Келлин Н.С. Условия справедливости гипотез Нелкина и Корнгольда при произвольных скоростях генерации и поглощения нейтронов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 44. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-44>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской Академии наук**

**Н.С. Келлин**

**Условия справедливости гипотез Нелкина и  
Корнгольда при произвольных скоростях  
генерации и поглощения нейтронов**

**Москва - 2011**

**Н.С. Келлин. Условия справедливости гипотез Нелкина и Корнгольда при произвольных скоростях генерации и поглощения нейтронов.** Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 16 страниц, 15 рисунков, библиография: 37 наименований.

Изучается детальная структура спектра линейного газокинетического оператора, отвечающего за описание процессов переноса частиц, их поглощения и воспроизводства их при соударениях. Вместе с соответствующими начальными и граничными условиями с использованием модели Владимирова оно приводит к выводу о несправедливости гипотезы Нелкина об отсутствии константы спада плотности числа частиц при их переносе в телах малого диаметра и переформулировке гипотезы Корнгольда о существовании соответствующих псевдоконстант спада.

**N.S. Kellin. Truth Conditions of Nelkin's and Corngold's Hypotheses with Respect to Arbitrary Velocities of Neutrons' Generations and Adsorption.** Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 16 Pages, 15 Figures, 37 References.

The spectrum of linear Boltzmann operator which describes processes of particles transport and their adsorption with generation in linearized Boltzmann equation is investigated in this paper. Together with corresponding initial and boundary conditions taken in Vladimirov's form this investigation gives that the Nelkin's hypothesis in generalized conditions is false and also gives a correct form of the Corngold's hypothesis concerning pseudoeigenvalues.

## **Введение**

При изучении (как в расчётах, так и в экспериментах) процесса переноса нейтронов, начиная примерно с 1940 года – начала интенсивного развития ядерной науки и техники – молчаливо предполагалось, что качественная картина поведения во времени нейтронной плотности не сильно отличается по своим характеристикам от статистического поведения других родственных величин, ранее исследовавшихся в похожих по своей математической формализации задачах.

Конкретно это означало, что первым предположением о поведении нейтронной плотности как в импульсных экспериментах, так и в энергетических установках было постулирование наличия константы её спада/роста во времени по экспоненциальному закону.

Попытки объяснить заметные отклонения от него в экспериментах ошибками в последних [34] потерпели неудачу [16]. Тогда (и даже ещё раньше примерно в 1960 - 1965 годах) М.Нелкиным и Н.Корнгольдом были высказаны две уточняющих ситуацию гипотезы.

Во-первых, постулировалось, что, если процесс переноса нейтронов происходит в теле достаточно малых размеров, то экспоненциального спада нейтронной плотности может и не быть из-за большой их утечки.

А, во-вторых, постулировалось, существование “псевдоконстант спада” и соответствующих “pseudoeigenvalues” и “pseudoeigenfunctions”. Последние трактовались Корнгольдом, по-видимому, по аналогии со случаем анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений как работающие (проявляющие себя) на ограниченном интервале времени присоединённые функции.

С изучением на модельных задачах физического содержания различных частей спектра эволюционного (чаще всего газокинетического) оператора и последующей экспериментальной проверкой полученных теоретических результатов связано целое направление работ с характерной тематикой, представленной ниже в пп. В.1 и В.2.

**В.1.** В частности, интерес представляет проблема существования недействительных собственных значений. В разработке проблемы в рамках асимптотической теории для односкоростного уравнения Больцмана в предположении об анизотропии рассеяния приняли участие Т.Хино и Ю.Оцава [27; 28] и Шестранд [29; 30]. Базируясь в основном на расчетах К.Клаусена и К.Тильгейма [31; 32], они показали, что существование недействительных собственных значений эволюционного оператора обязано эффектам анизотропии рассеяния. Однако исследователи не пришли к единому мнению относительно физического смысла полученного результата. Шестранд считает, что недействительные собственные значения и соответствующие им собственные функции не имеют какого-либо физического смысла, поскольку эти собственные числа лежат левее  $-a_0$  – корнгольдовской границы (см. далее п.2.1), то есть в “нефизической” области. Японские ученые, напротив, связывают эти собственные числа с лучеобразным распространением частиц при рассеянии прямо вперед или прямо назад, имеющим место, например, в явлении полостного резонанса. Корнгольдовская граница в этом случае совпадает с мнимой осью  $\text{Re } \lambda = -a_0 = 0$ .

К данной тематике примыкает работа Шестранда и Даля [33], в которой авторы рассматривают различные вопросы приближенного вычисления собственных значений и, в частности, полемируют с авторами работы [50], в которой обсуждается точность методов определения собственных значений уравнения Больцмана в плоской геометрии с линейной анизотропией в ядре рассеяния. Показано, что предложенный аналитический метод математически точен и не требует ни численного интегрирования, ни применения итерационного процесса, что позволяет избежать накопления численных ошибок при счете; при определении собственного значения согласно теореме о собственных значениях линейного оператора используются более точные собственные функции. Собственные значения, полученные этим методом, оказываются систематически ниже полученных другими методами. Основной ошибкой при определении

собственного значения в случае разложения пространственной зависимости потока по полиномам Лежандра, является неточное удовлетворение граничных условий. Предлагается использовать разложение по полиномам Лежандра с *почленным* удовлетворением граничным условиям. Даль и Шестранд, сравнивая результаты Сироса и Теочарапулоса со своими, отмечают, что относительное отклонение результатов лежит в пределах  $1,0 \cdot 10^{-4} \div 1,3 \cdot 10^{-3}$ , что значительно превосходит оцененную неопределенность результатов расчета. В связи с этим исследуются возможные источники погрешности собственных значений уравнения Больцмана, причем, эти расхождения не могут быть объяснены за счет неточности описания угловой зависимости  $\vartheta$  членами разложения по полиномам Лежандра: результаты расчетов с 9 и 20 членами совпадают в 8 значащих цифрах. Источником расхождений не может быть также и неточность решения интегральных уравнений, так как результаты работы [33] совпадают с результатами других авторов, использовавших метод Кейса. Проведенный анализ подтверждает достоверность результатов Даля и Шестранда, но оставляет открытым вопрос о причинах расхождений.

**В.2.** Между результатами экспериментов (и многогрупповых расчетов) с одной стороны и предсказаниями теории с другой, существует расхождение, сущность которого заключается в следующем. Обнаружен экспоненциальный спад нейтронной плотности в экспериментах с образцами, размерами меньше критического, когда спектр газокинетического оператора справа от корнгольдской границы  $\text{Re } \lambda = -a_0$  пуст. Работы, объясняющие подобные расхождения в рамках газокинетического метода, до сих пор отсутствуют. Двухгрупповое рассмотрение не может объяснить это противоречие [35], так как в малых или в невыпуклых областях главное значение имеют процессы релаксации ультрахолодных нейтронов (им и обязан своим существованием сплошной спектр). При этом большое значение имеет малость размеров образца, чем и пренебрегают в асимптотической двухгрупповой модели в работе [35]. Иными словами рассматриваемая модель исключает возможность релаксации равновесного состояния в холодной группе, хотя это является экспериментальным фактом: японские ученые обнаружили чисто экспоненциальный характер затухания импульса нейтронов, энергии  $0,84 \text{ эВ}$  в метане при температуре  $20^\circ \text{K}$  [16];

Гипотеза о существовании псевдоконстанты спада, впервые выдвинутая, по-видимому, Корнгольдом [13] для объяснения экспериментального материала, противоречащего основной его теории, до сих пор не имеет обоснованного теоретического подтверждения, даже при рассмотрении переноса нейтронов в выпуклом теле. Более того, из результатов работы [4], в частности, следует, что в широком классе функций – коэффициентов газокинетического оператора – у последнего есть *ведущее* собственное значение (простое: у которого нет присоединённых функций).

В большинстве вышеотмеченных работ предположение о выпуклости области переноса частиц не делалось (она подразумевалась изначально). Со времени их опубликования – в период бума публикаций по данной тематике – в семидесятых-восьмидесятых годах прошлого века прошло уже более двадцати лет, не самых лучших для ядерной науки и, особенно, техники – послечернобыльских. И, хотя обе указанные гипотезы оставались недопроверенными, интерес здесь сместился в область численных исследований, которые с повышением мощности компьютеров неизбежно привели к расчётам нейтронной плотности в объектах с сильными отклонениями от выпуклости в их геометрии, которыми, разумеется, уже никак нельзя пренебрегать.

Таким образом, проблема анализа условий не/справедливости обеих гипотез возникает вновь, но уже с начальными установками, заведомо более общими, чем ранее.

## 0. Соглашения и предположения

Данная работа продолжает исследование спектров операторов прямой и сопряжённой

задач в линейной теории переноса частиц проведенное в [1] и [2] для случая переноса частиц в произвольной замкнутой области, а начатое в [19] и [18] в предположении, что процесс переноса происходит в выпуклом теле. Все обозначения и термины, использованные в них, сохраняются. В частности, при необходимости (возможности) одновременного рассмотрения в проводимой выкладке обоих операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^+$  – основного и ему сопряженного – используется обозначение  $\tilde{A}$ ; и аналогично для других операторов. Основные результаты проведенного спектрального анализа проиллюстрированы на рисунке-схеме 1 (см. ниже Приложение). То есть они сводятся к тому, что, во-первых, замкнутая левая полуплоскость  $\bar{\pi}_{a_s}^-$  целиком входит в спектр  $\tilde{A}$ , а её образ – круг с центром в начале координат радиуса  $\exp[a_s t]$  целиком входит в спектр  $\tilde{T}(t, \tilde{A})$ . А во-вторых, правая полуплоскость  $\pi_{a_s}^+$  и внешность указанного круга являются областями мероморфности операторов и их полугрупп соответственно. Уточнению условий того, в каком случае область мероморфности становится резольвентным множеством, и в каком случае в теореме об отображении спектров возможно равенство  $\exp[tC\sigma(-\tilde{L})] = C\sigma(\tilde{T}(t, -\tilde{L}))$  и посвящена данная работа.

### **1. Резольвентное множество или область мероморфности?**

Рассмотрим вопрос о пустоте точечного спектра линейного газокинетического и ему сопряженного операторов  $\tilde{A}$  в правой полуплоскости. Нелкин в работе [3] высказал гипотезу о пустоте точечного спектра операторов  $A$ , действующих на функции  $f(\mathbf{r}, v)$ , определенные в объеме  $V_r$  достаточного малого диаметра. В работах [4, 5, 6, 7] это предположение было доказано в различных условиях на коэффициенты данных операторов. Наибольшая общность условий была достигнута в работах [4] и [5], где требования к коэффициентам  $h = E^{1/2} \Sigma_i(\mathbf{r}, E)$  и  $K(\mathbf{r}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega) = \sum_{b,e} E^{1/2} \nu_{b,e}(E') \Sigma_{b,e}(\mathbf{r}, E') W_{b,e}(E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega)$  физически вытекали из газовой модели вещества ([4], с.34-35). Однако численный анализ данного вопроса (см., например, работу [8] с.297) обнаружил плохое согласие с теорией. Поскольку теоретический анализ проблемы наталкивается на трудности, связанные с отсутствием полной теории ядерного взаимодействия, а эксперименты с ультрахолодными нейтронами<sup>1)</sup> не обеспечивают еще необходимой точности, целесообразно методами функционального анализа выяснить, какие свойства функций  $h$  и  $K$  будут гарантировать (не)справедливость гипотезы Нелкина. Дальнейшее рассмотрение процесса переноса проводится в отсутствие запаздывающих нейтронов и без учета нелинейных, релятивистских и квантовых<sup>2)</sup> эффектов.

Во всех упомянутых выше работах при доказательстве гипотезы Нелкина использовалось то, что существенный минимум функции  $h = h(\mathbf{r}, v)$ , по пространственным координатам, рассматриваемый как функция скорости  $v$ , имеет минимум (называемый корнгольдовским пределом) при  $v = 0$ . В работе [4] это требование на полное сечение накладывалось в §30 в дополнение к требованиям, вытекающим из газовой модели вещества, именно для проведения спектрального анализа операторов  $\tilde{A}$ . Отказ от этого требования приводит к существенно иным результатам анализа.

Как и в работах [2] и [9] потребуем от функций  $h$  и  $K$  выполнения условий:

$$\begin{aligned} h \in L_D^\infty; K = k(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow \vec{v}) \cdot \varphi(|\vec{v}' - \vec{v}|), \quad k \in L_{D \times W}^\infty, \quad \exists b < 2: 0 < \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1 / |\vec{v}' - \vec{v}|^b; \\ 0 < k_0 \leq k \leq k_1 < \infty, \quad \text{Im}h(\vec{r}, \vec{v}) = 0; \quad [V(\vec{v})] = V(\vec{v}) \quad \text{почти при всех } \vec{v} \end{aligned} \quad (0)$$

Это, согласно теореме 4 из [18], гарантирует  $\chi(D)$ -положительность операторов  $\tilde{A}(\beta)$ ,

<sup>1)</sup> Физически именно они отвечают за характер процесса переноса во времени, математически интерпретируемый как наличие (отсутствие) у операторов  $\tilde{A}$  собственных значений в правой полуплоскости.

<sup>2)</sup> Вообще говоря, учет квантовых эффектов при взаимодействии нейтронов малых энергий с ядрами среды необходим, но проводится он путем задания соответствующих свойств сечений и индикатрис, входящих в функции  $h$  и  $K$ , фигурирующие в линейном уравнении Больцмана, которое сохраняет свою классическую форму.

при  $\beta \in \pi_{a_s}^+ \cap \square^1$ . Целесообразно воспользоваться вариантом леммы Альбертони – Монтаньини:  $((\lambda \in \pi_{a_s}^+) \& (\lambda \in P\sigma(\tilde{A}))) \Leftrightarrow (1 \in P\sigma(\tilde{A}(\lambda)))$ , что эквивалентно Пр.7 работы [18] в силу взаимной сопряженности операторов  $\tilde{A}'$  и  $\tilde{A}$ . Рассмотрим величины

$$N_0 = VM_r \int_W |\tilde{l}(-a_s)| \chi(D) d\bar{v} \quad (1/3)$$

и

$$N_1 = \lim_{\beta \rightarrow -a_s} VM_r \int_W |\tilde{l}(\beta)| \chi(D) d\bar{v}. \quad (2/3)$$

Если конечна величина  $N_0$  в (1/3), то равномерно по  $\beta \in (-a_s, \infty)$  ограничены величины  $VM_{\kappa V} \int_W |\tilde{l}_{(\kappa)}(\beta)| \chi(\kappa D) d\bar{v}$ ; в них через  $\tilde{l}_{(\kappa)}(\beta)$  обозначены операторы  $\tilde{l}_{(\kappa)}(\beta) \in B(L_{\kappa D}^p)$ .  
Здесь

$$\kappa D = \kappa V \times W, \text{ а } \kappa > 0. \quad (1)$$

Пользуясь инвариантностью спектра оператора критичности по индексу  $p$ , оценим сверху величину спектрального радиуса операторов  $\tilde{A}(\beta) \in Q(L_D^2)$ :

$$r_\sigma(\tilde{A}(\beta)) \leq \varphi_1 k_I r_\sigma \left( \int_W |\bar{v}' - \bar{v}|^{-b} |\tilde{l}(\beta)| \square d\bar{v}' \right) \equiv \varphi_1 k_I r_\sigma(\tilde{Y}(\beta)). \quad (2)$$

Используя неравенство Гельдера для функций  $|\bar{v}' - \bar{v}|^{-b} v^{-1/p}$  и  $v^{1/p} \tilde{l}(\beta) \chi(D)$  и учитывая, что вместе с  $\tilde{l}(\beta)$  ограничены и операторы  $\tilde{l}^{(q)}(q\beta)$  при  $q \neq q(\beta)$  (см. [18], Пр.3), приходим к неравенству:

$$\tilde{Y}(\beta) \chi(D) \leq \left( \text{Max}_W \int_W |\bar{v}' - \bar{v}|^{-bp} / v d\bar{v} \right)^{1/p} \cdot \left( VM_r \int_W |\tilde{l}^{(q)}(q\beta)| \chi(D) d\bar{v} \right)^{1/q} \chi(D), \quad (3)$$

где  $1/p + 1/q = 1$ , а  $pb < 2$ , которое с учетом соотношения (1) доказывает гипотезу Нелкина, если в качестве параметра  $\kappa$  взять  $d = \text{diam}(V)$ . Действительно, из (1)-(3) следует оценка  $r_\sigma(\tilde{A}(\beta)) \leq cd \rightarrow 0$  при  $d \rightarrow 0$ , и  $c \neq c(\beta)$ , поскольку (см. [10], с.406) из оценки  $\tilde{A}(\beta) \chi(D) \leq c \chi(D)$  следует (для операторов  $\tilde{A}(\beta) \in Q(L_D^2)$ ) оценка  $r_\sigma(\tilde{A}(\beta)) \leq c$ .

Воспользуемся теперь непрерывностью и монотонным стремлением к 0 при  $\beta \rightarrow \infty$  ведущего собственного значения,  $\chi_0(\beta)$  операторов  $\tilde{A}(\beta)$  (см.[4], лемма 34.2). Доказательства этих утверждений не меняются при использовании условия (0) по сравнению с приведёнными в монографии [4]. Пусть  $\chi_0(\beta) = r_\sigma(\tilde{A}(\beta)) \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow -a_s$ . Тогда, вне зависимости от диаметра тела, график функции  $\chi_0(\beta)$  будет при некотором  $\beta_0 > -a_s$  пересекаться с прямой  $\chi_0(\beta) = 1$ . Это значение  $\beta_0$  и будет ведущим для операторов  $\tilde{A}$ . Для нахождения условий неограниченности в  $\pi_{a_s}^+$  величин  $r_\sigma(\tilde{A}(\beta))$  воспользуемся  $\chi(D)$ -ограниченностью снизу операторов  $\tilde{A}(\beta)$ :  $\tilde{A}(\beta) \chi(D) \geq \varphi_0 k_0 \left( VM_r \int_W |\tilde{l}(\beta)| \chi(D) d\bar{v} \right) \chi(D)$ . Следовательно, доказана

**Теорема:** в случае бесконечности стоящего в (2/3) предела  
**гипотеза Нелкина не подтверждается.**

Примером функции  $h$ , порождающей газокинетический оператор, имеющий ведущее собственное значение вне зависимости от диаметра тела, в котором происходит описываемый им процесс переноса, может служить функция  $h = 2 - v^{1/2}$ .

Вопрос о том, справедлива ли гипотеза Нелкина для данных операторов  $\tilde{A}$ , значительно упрощается, если предположить дополнительно независимость функции  $h$  от  $r$ <sup>3)</sup>. В этом

<sup>3)</sup> В работе [9], с.55, стр.1 опечатка: вместо " $\|\hat{l}_1(\beta)\|_1 \rightarrow \infty$ " следует читать " $\|\hat{l}_1(\beta) \chi(D)\|_1 \rightarrow \infty$ ". Исправление есть в работе [11].

случае величина  $N_I$  в (2/3) переходит после интегрирования по  $ds$  в

$$\lim_{\beta \rightarrow -a_s} \int_W \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( (h(\bar{v}) + \beta) / \nu \right) s_0(\bar{r}, \bar{v}) \right] \right\} / (h(\bar{v}) + \beta) d\bar{v}, \quad (4)$$

и, в зависимости от конечности (или бесконечности) этого предела, гипотеза Нелкина будет справедливой (или нет). Об условиях (не)справедливости гипотезы Нелкина в модели переноса Фридрихса [25] (когда процесс переноса происходит в теле, окружённом чёрным поглотителем) смотри работу [26].

## **2. Корнгольдская граница спектра оператора переноса частиц и тип его полугруппы.**

### **Применение теории возмущений.**

2.1. Корнгольдом в работах [12, 13] и [14] было показано, что асимптотика решений задач Коши I и II во многом зависит от минимального значения<sup>4)</sup> функции  $h(v) = \nu \Sigma_t(v)$  (в наших обозначениях). В дальнейшем эта характеристика функции  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  – скорости взаимодействия частиц с ядрами среды изучалась неоднократно (см. работы [4] и [15], например). Было показано, что при рассмотрении кусочно-непрерывных функций  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , её корнгольдский предел можно представить в виде  $a_0 = \inf_v \lim_{\nu \rightarrow 0} h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ . В предположении о том, что  $a_0 = a = \text{vrai min}_{V \times W} h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  в монографии [4] проводился спектральный анализ операторов

$\tilde{A}$ . Вопрос о том, для всех ли веществ справедливо равенство  $a_0 = a$ , является весьма сложным, так как решение его зависит от многочисленных экспериментов по поглощению ультрахолодных нейтронов различными средами (см., например, [16]). Частично отрицательный ответ на него можно получить исходя из данных работы [17] (см. Приложение 1).

2.2. Спектральный анализ газокинетического оператора, проведенный в работе [18] в обобщенных условиях на его коэффициенты  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  и  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) - (0)$  – выявил следующее.

2.2.1) Определение корнгольдского предела функции  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , пригодное для всех функций  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in L_D^\infty$ , должно быть модифицировано и принять вид:  $a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{V}m \text{Re } h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) -_{D_0, \varepsilon}$

нижний предел и  $A_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{V}M \text{Re } h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) -_{D_0, \varepsilon}$  – верхний предел.

2.2.2) Асимптотика решений задач I и II в большей степени зависит от исследованных в работе [19] значений  $a_s(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$  и  $\omega_0(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$  (см. [19], формулы (6) и (16)), нежели от величины  $a_0(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$ .

Для исследования операторов  $\tilde{A}$  в обобщенных условиях на входящие в них коэффициенты необходимо более детальное знание свойств операторов  $-\tilde{L}$ , и их полугрупп, поэтому в работах [18] и [19] последовательно применялся метод исследования спектральных свойств операторов  $-\tilde{L}$  и  $\tilde{A}$  с использованием результатов теории возмущений. Необходимые в доказательствах теоремы содержатся в монографиях [20] и [21].

2.3. Попытки применять методы теории возмущений при спектральном анализе задач, связанных с теорией переноса частиц, проводились неоднократно<sup>5)</sup>. Достаточно сказать, что учет запаздывающих нейтронов при анализе нестационарного газокинетического уравнения традиционно проводился с применением методов теории возмущений. Рассмотрению же самого газокинетического оператора как возмущенного оператора переноса (без соударений) уделялось значительно меньше внимания (см. [22-24]). Связано это, по-видимому, с кажущейся простотой оператора переноса  $-\tilde{L}$  – линейного одномерного дифференциального оператора первого порядка, параметрически зависящего от остальных пяти координат  $(\mathbf{r}_0, \mathbf{v})$  (и ему сопряженного). Так, например, не рассматривалась ранее тонкая структура спектра

<sup>4)</sup> Предполагалось, что оно достигается при  $\nu = 0$ .

<sup>5)</sup> Отметим, что доказательство теоремы 6 и лемм 1 и 7 в работе [19] сведением комплекснозначных функции  $h$  к вещественным также представляет собой вариант применения теории возмущений.



операторов  $\tilde{L} \in C(L_D^\infty)$ . В работе [19] доказывается, что  $\sigma(\tilde{L}_\infty) = R\sigma(\tilde{L}_\infty)$ .

2.4. Наиболее существенным для изучения временного поведения решений задач Коши I и II является выделение класса  $\mathcal{K} \subset L_D^\infty$  не сильно разрывных при  $v = 0$  функций  $h = h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , для которых их спектральная граница  $a_s(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$  действительно определяет возможный неэкспоненциальный характер поведения во времени решений задач I и II. Можно оказать более определенно: свойства линейного газокинетического оператора  $\hat{\Lambda} = -\tilde{L} + \hat{K}$  определяют временное поведение решений уравнения  $n'_t = \hat{\Lambda}n$  в том и только в том случае, когда функция  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , порождающая оператор  $\tilde{L}$ , входит в класс  $\mathcal{K}$ .

В самом деле, рассмотрим оператор  $\hat{\Lambda}$ , порожденный функциями  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \geq 0$  и  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) \geq k_0 > 0$ , такими, что  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{K}$  и имеет бесконечный предел (4), а  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  достаточно мала. Тогда на основании результатов [18] и п.1 можно утверждать, что существует ведущее собственное значение  $\beta_0$  оператора  $\hat{\Lambda}$ , а на основании теоремы 9 из [19] можно подобрать столь малую функцию  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ , чтобы выполнялось неравенство  $a_s(h(\mathbf{r}, \mathbf{v})) < \beta_0 < \omega_0(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$ , где  $\omega_0$  тип полугруппы  $\hat{T}(t, -\tilde{L})$ .

Отсюда следует, что число  $\exp(-\beta_0 t)$  заведомо не является ведущим собственным значением полугруппы. Например, если  $V = \{\mathbf{r}: r \leq 1\}$ , а  $v \leq 1$ , то в качестве функции  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  можно брать функцию  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = h_1(r, v)h_2(v)$ ,  $h_1(r, v) = \theta_r(r - v)$ ,  $h_2(v) = 2 - v^{1/2}$ , а в качестве функции  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  брать достаточно малую константу. Итак, выделен новый класс операторов  $\tilde{L}$ , таких, что в их спектрах есть ведущее собственное значение  $-\beta_0$ , но порождающих  $C_0$ -полугруппы  $\hat{T}(t, \tilde{L})$  в спектрах которых нет ведущего собственного значения, так как число  $\exp(-\beta_0 t)$  лежит на непрерывном спектре полугрупп операторов  $\tilde{L}$ .

Различие в результатах спектрального анализа газокинетического оператора и порождаемой им полугруппы можно сделать ещё более разительным. Достаточно, как и в предыдущем примере, задаться в качестве  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  достаточно малой константой, а к функции  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  добавить также достаточно малую положительную константу  $h_0$ , чтобы выполнялось соотношение  $\beta < 0 < \omega_0(h(\mathbf{r}, \mathbf{v}))$ . В этом случае  $r_\alpha(\hat{T}(t, -\tilde{L})) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , но  $\text{diam}\{\exp[t\sigma(\hat{\Lambda})]\} \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

2.5. Завершающим результатом применения теории возмущений к исследованию операторов  $-\tilde{L}$  и  $\hat{\Lambda} = -\tilde{L} + \hat{K}$  является доказательство того, что разность полугрупп  $\hat{T}(t, \hat{\Lambda})$  и  $\hat{T}(t, -\tilde{L})$  является компактным оператором в пространствах  $L_D^p$ ,  $p \in (1, \infty)$  если функции  $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  и  $k(\mathbf{r}, \mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$  удовлетворяют условиям (0). (см. [19], теорема 7).

### **3. Обсуждение границ применимости полученных результатов**

I. Рассмотрим одну из возможных интерпретаций особенности ядра оператора  $\hat{K} - \varphi(|\mathbf{v}' - \mathbf{v}|)$ , учитываемой условиями (0), обобщающими в этом плане результаты описания особенности  $1/|\mathbf{v}' - \mathbf{v}|$  в индикатрисе упругого рассеяния, приведенные в [4]. Эта полярная особенность обязана своим существованием  $\delta$ -функции от  $(v_c'^2 - v_c^2)$ , появляющейся при описании упругого рассеяния нейтронов на ядре в системе центра инерции и являющейся следствием законов сохранения импульса и кинетической энергии в системе нейтрон-ядро. Закон сохранения импульса справедлив в системе нейтрон-ядро и при неупругом рассеянии нейтронов на нуклидах, поскольку характерные времена ядерных взаимодействий минимум на два порядка меньше, чем у электромагнитных, которыми определяется снятие возбуждения ядра  $\gamma$ -квантом, изменяющим при этом импульс ядра. Для неупругого рассеяния, идущего без образования составного ядра или с образованием метастабильных ядер, как, например, в случае неупругого рассеяния нейтронов на родии, это очевидно. Закон изменения ки-

нетической энергии принимает в этом случае вид:  $v_c^2 = v_c'^2 + 2AE_K/(1+A)$ ; здесь  $E_K$  – энергия одного из возбужденных уровней ядра, а  $A$  – атомная масса ядра. При  $v_c' \gg v_{i\delta i \delta i}$  вклад в процесс неупругого рассеяния будут в основном давать высокие уровни, для которых  $E_{K-1} - E_K \rightarrow 0$  при  $K \rightarrow \infty$ . Поэтому, ядро оператора неупругого рассеяния может принять вид  $K_{in}(\vec{r}, \vec{v}'_c \rightarrow \vec{v}_c) \delta(v_c^2 - H(v_c'^2))$ , где  $K_{in} \in L_{D \times W}^\infty$ , а функция  $H$  определяется структурой ядер, на которых происходит рассеяние\*). Детальное описание этой функции возможно только с использованием той или иной квантово-механической модели этих ядер и зависит от последней. Но, какова бы ни была использованная модель структуры ядер, определяющая свойства ядра неупругого рассеяния  $K_{in}(\vec{r}, \vec{v}' \rightarrow \vec{v})$ , оператор генерации частиц  $\hat{K}$  должен оказаться ограниченным:  $D(\hat{K}_{in}) \supseteq D(\hat{K}) = L_D^\infty$ , так как перенос нейтронов можно рассматривать в любых ограниченных образцах, давая произвольное (нормированное) начальное распределение нейтронов. Таким образом, усреднение  $\delta$ -особенностей в индикатрисе  $W_{in}$  по функциям распределения по скоростям  $\vec{w}$  ядер среды даст полярную особенность (поскольку  $\vec{v}'_c = (\vec{v}'_c - \vec{w})A/(1+A)$ ,  $\vec{v}'_c - \vec{v}_c = \vec{v}'_L - \vec{v}_L$ ), учитываемую условиями (0).

Эта полярная особенность в индикатрисе рассеяния, как и подчинение закону  $1/v_L$  в лабораторной системе координат величины  $\delta_{in}(v_L)$  на ядрах, имеющих максвелловское распределение по скоростям ([1], с.32), являются весьма слабыми эффектами при нормальных условиях. Можно предположить, что они будут более существенны в плазме, в которой средняя скорость ионов сравнима со скоростью нейтронов, для которых возможно неупругое рассеяние на ядрах вещества плазмы. Таким образом, условия (0) позволяют учитывать особенности переноса нейтронов как в системах с малыми характерными временами ( $нс$ ), так и в телах с высокой абсолютной температурой ( $10^8 \div 10^9$  °K), то есть рассматривать задачи, в которых термализация нейтронов будет происходить при энергиях, соответствующих области неразрешённых резонансов, в которой введение понятия «псевдоконстанты» спада/разгона исследуемого процесса переноса вновь может стать актуальным.

**II.** Условия (0) позволяют проводить спектральный анализ задач, операторы которых порождены функциями  $h(\vec{r}, \vec{v})$ , такими, что:  $a_0(h) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Vm_{D_0, \varepsilon} h(\vec{r}, \vec{v}) > a(h) = Vm_D h(\vec{r}, \vec{v})$ . Это обобщение важно для задач теории переноса нейтронов по следующей причине. Существуют вещества, полные сечения которых порождают функции  $h$ , удовлетворяющие неравенству  $a_0(h) > a(h)$ . Примерами подобных веществ являются следующие элементы:  $^{45}Rh$ ,  $^{48}Cd$ ,  $^{49}In$ ,  $^{54}Xe^{135}$ ,  $^{62}Sm$ ,  $^{63}Eu$ ,  $^{64}Gd$ ,  $^{66}Dy$ ,  $^{77}Ir$ ,  $^{80}Hg$ ,  $^{92}U^{235}$ ,  $^{93}Np^{237}$ ,  $^{94}Pu^{239}$ ,  $^{95}Am^{241}$ . На рис.2-15 представлены графики зависимости их функций  $E^{1/2} \sigma_t(E)$  от энергии нейтронов (см. приложение). Характер зависимости функции  $v\sigma_t$  при малых  $v$  для данных элементов определяется резонансом в полном сечении с такими параметрами, что для функций  $h$ , порожденных соответствующими сечениями  $\sigma_t$ , справедливо неравенство  $a_0(h) > a(h)$ . Таким образом, спектральный анализ операторов в задачах переноса нейтронов в средах, содержащих упомянутые выше элементы, необходимо проводить в условиях на функции  $h$  и  $K$  не менее общих, чем условия (0). Возможность наличия у функции  $v\sigma_t$  минимума не при  $v = 0$  для некоторых нуклидов можно показать, используя одноуровневое приближение. Для этого найдем условия на фазу потенциального рассеяния  $f_l$ , при соблюдении которых для функции  $v\sigma_t$  будет справедливо данное неравенство. Для описания зависимости  $\sigma_t$  от  $v$  воспользуемся одноуровневой формулой Брейта-Вигнера в том приближении, в каком она обычно используется в нейтронно-физических приложениях. Полагаем, что нейтронные ширины (при взаимодей-

\*) Для модели неподвижных ядер среды  $\delta$ -особенности в  $W_{in}$  изучались в работе [36].

ствии с ядрами рассматриваемого нуклида) одноканальные, то есть, учитываем только члены с  $l = l_{min}$ , так как коэффициенты проницаемости при низких энергиях быстро падают с ростом  $l$ :  $\sim \rho^{2l+1}$ . Такое приближение хорошо выполняется для средних и тяжелых ядер [37]\*\*).

В результате приходим к формуле для полного сечения  $\sigma_t = \sigma_p + \sigma_\lambda(\cos 2\varphi - x \sin 2\varphi)/(1 + x^2)$ ,  $\sigma_\lambda = (2\pi/k^2)[(2J+1)/(2I+1)](\Gamma_{\lambda n}/\Gamma_\lambda)$ , где  $\sigma_p$  – потенциальное сечение,  $\varphi$  – его фаза,  $x = 2(E_\lambda - E)/\Gamma_\lambda$ . Анализируя функцию  $v\sigma_t$  на экстремум в зависимости от  $x$ , находим, что при соблюдении неравенства  $[(1 - (2E_\lambda/\Gamma_\lambda)^2)/(1 + (2E_\lambda/\Gamma_\lambda)^2)] < \sigma_p/\sigma_\lambda$  интерференционный минимум в полном сечении у нуклидов, обладающих при  $E = E_\lambda$  резонансом с фазой  $\varphi \in [\varphi^*, \pi - \varphi^*]$ , будет давать меньшее значение функции  $(E^{1/2}\sigma_t(E))|_{E=E_{min}}$ , чем  $(E^{1/2}\sigma_t(E))|_{E=0}$ . Здесь  $2\varphi^* = \arcsin\{\Gamma_\lambda\sigma_\lambda/[(2E_\lambda\sigma_\lambda)^2 + (\Gamma_\lambda\sigma_p)^2]^{1/2}\} - \arctg[\Gamma_\lambda\sigma_p/(2E_\lambda\sigma_\lambda)]$ . За счет теплового движения ядер среды, благодаря доплеровскому уширению, интерференционные максимумы понижаются, а минимумы повышаются (см.[37], сс.60-61). Поэтому при достаточно высокой абсолютной температуре среды неравенство  $a_0(h) > a(h)$  может перестать быть справедливым. Но, при низких абсолютных температурах для рассмотренных веществ оно выполнено.

Из рассмотренных примеров следует, что результаты анализа линейного уравнения Больцмана в обобщенных условиях на его коэффициенты (0) применимы к изучению задач переноса нейтронов в средах, корректное описание нейтронно-физических свойств которых требует невырожденности функции  $h(\vec{r}, \vec{v}) \in L_D^\infty$ , зависящей в общем случае и от  $\vec{\Omega} = (\vec{v}/v)$ , минимум которой может достигаться необязательно при  $v = 0$ .

### Литература

1. Келлин Н.С. Спектральные свойства оператора переноса частиц // Труды IX Международной научной конференции “Цивилизация знаний: инновационный переход к обществу высоких технологий”. Ч.I. – М.: РосНОУ, 25-26 апреля 2008. С.347-351.
2. Келлин Н.С. Спектральные свойства газокINETического оператора // Труды X Международной научной конференции “Глобальный кризис и инновационный выбор России”. Ч.I. – М.: РосНОУ, 24-25 апреля 2009. С.315-319.
3. Nelkin M. Asymptotic Solutions of the Transport Equations for Thermal Neutrons. Physica, 1963, v.29, №2, p.261-293.
4. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. М.: Атомиздат, 1973.
5. Шихов С.Б., Шкурпелов А.А. Анализ нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов в размножающих и замедляющих средах. В сб.: “Теоретические и экспериментальные проблемы переноса нейтронов”, М.: Атомиздат, 1972.
6. Bednarz R. Spectrum of the Boltzmann Operator with an Isotropic Thermalization Kernel. Rep. №615 /IX-A/ R Warsaw, INR, March 1965.
7. Albertoni S., Montagnini B. On the Spectrum of Neutron Transport Equation in Finite Bodies. – J.Math.Anal.Appl., 1966, v.13, №1, p.19-48.
8. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов, М., Атомиздат, 1974.
9. Келлин Н.С. О существовании собственных значений у газокINETического оператора. В сб.: Проблемы теории и численного решения задач переноса частиц. Отд.выч.мат. АН СССР, М., ВИНТИ, 1983, с.52-56.
10. СМБ – Функциональный анализ. Под общей редакцией С.Г.Крейна, М., “Наука”, 1972.
11. Келлин Н.С. О существовании собственных значений у газокINETического оператора - II. В сб.: “Математические модели ядерно-энергетических установок”. М.: Энергоиздат, 1983, с.83-86.
12. Corngold N. In: IAEA.Proc.Symp. Pulsed Neutron Research, Vienna, 1965, v.1, p.199-207.
13. Corngold N., Michael P., Wollman W. The Time Decay Constants in Neutron Thermalization. –

\*\*) Для веществ, зависимость скорости взаимодействия нейтронов с которыми приведена на рис.2-15, минимум функции  $v\sigma_t$  достигается при энергии до 100 эВ, так что можно полагать  $l_{min}=0$ .

- Nucl. Sci. Eng., 1963, v.15, №1, p.13-19.
14. *Corngold N., Michael P.* Some Transient Phenomena in Thermalization, 2. Implications for Experiments. – Nucl. Sci. Eng., 1964, v.19, №1, p. 91-94.
  15. *Larsen E.W., Zweifel P.F.* On the Spectrum of the Linear Transport Operator. – J.Math.Phys., 1974, v.15, №11, p.1987-1997.
  16. *Kasuhiko I., Yoshiaki K., Hidetoshi K.* Time Dependence of Cold Neutrons Pulse Emitted from Methane at 20°K. – J.Nucl.Sci. Technol., 1977, v.14, №3, p.195-199.
  17. *Hughes D.J., Schwartz R.B.* Neutron Cross Section. Sec. Ed., 1.07.1958, BNL UPTON New York, Associated Univ. Inc. under contract with the US AEC.
  18. *Келлин Н.С.* Газокинетический оператор в пространствах Лебега. Рукопись депонирована в ВИНТИ, 20 ноября 1984г., №7401/84-Деп.
  19. *Келлин Н.С.* Оператор переноса частиц в пространствах Лебега, Рукопись деп. в ВИНТИ 3 декабря 1984 г., №7649/84-Деп.
  20. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
  21. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: “Мир”, 1972.
  22. *Таратунин В.В., Шихов С.Б.* Спектр оператора нестационарного переноса нейтронов при неограниченной энергии в условиях "газовой модели" вещества. В сб.: “Физика ядерных реакторов”. вып.4. М., Атомиздат, 1975, с.31-38.
  23. *Таратунин В.В., Шихов С.Б.* Теория возмущений для задач нестационарного переноса нейтронов. В сб.: “Физика ядерных реакторов”. вып.4, М., Атомиздат, 1975, с.24-31.
  24. *Таратунин В.В., Шихов С.Б.* Решение Абстрактной Задачи Коши, порожденной нестационарным переносом нейтронов в условиях "газовой модели" вещества. В сб.: “Физика ядерных реакторов”. вып.5. М., Атомиздат, 1977, с. 5-10.
  25. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1–2. – М.: “Мир”, 1984.
  26. *Стёпин С.А.* Принцип Бирмана-Швингера и гипотеза Нелкина в теории переноса нейтронов // Докл. РАН. т. 380. №1. С.19-22.
  27. *Hino T., Ozawa Y.* Dispersion Law in Anisotropic Scattering Media – J.Nucl.Sci.Technol., 1974, v.11, №3, p.110-111.
  28. *Hino T., Ozawa Y.* Conter-comment on "Eigenvalues in Time-depender Monoenergetic Neutron Systems", by N.G.Sjostrand. – J.Nucl.Sci.Technol., 1975, v,12, №6, p.388-389.
  29. *Sjostrand N.G.* Eigenvalues in Time-dependent Monoenergetic Neutron Systems with Anisotropic Scattering. – J.Nucl.Sci.Technol., 1975, v.12, №4, p.256-257.
  30. *Sjostrand N.G.* Complex Eigenvalues of the Monoenergetic Neutron Transport Equation with Anisotropic Scattering. – J.Nucl.Sci.Technol., 1976, v.13, №2, p.81-84.
  31. *Thilheim K.O., Claussen K.* Comments on Half Space Problem with Linear Anisotropy of Scattering. – Kernenergie, 1973, B.16, H.10, ss.321-325.
  32. *Thilheim K.O., Claussen K.* Comments on Half-space Problem with Quadratic Anisotropy of Scattering. – Kernenergie, 1974, B.17, H.8, ss.253-258.
  33. *Dahl E.B., Sjostrand N.G.* Reply to “the Influence of Boundary Conditions on the Precision of the Eigenvalues of Boltzmann Equation”. – Nucl.Sci.and Eng., 1980, v.73, №1, p.109-110.
  34. *Syros C., Theocharapulos P.* The Influence of Boundary Conditions on the Precision of the Eigenvalues of the Boltzmann Equation. – Nucl.Sci.and Eng., 1980, v.73, №1, p.108-109.
  35. *Казарновский М.В., Майоров Л.В., Юдкевич М.С.* Эволюция плотности нейтронов от импульсного источника в ограниченных объемах замедлителя. – В сб.: “Теоретические и экспериментальные проблемы переноса нейтронов”. М.: Атомиздат, 1972, с.46-65.
  36. *Шкурпелов А.А., Веселов В.П.* Исследование влияния свойств оператора столкновений на спектральные характеристики краевой задачи для уравнения переноса нейтронов. Отчет НПО “Энергия” по теме №76086489. Гос.рег.№ Б-540222, М., 1976.
  37. *Лукьянов А.А.* Структура нейтронных сечений. М.: Атомиздат, 1978.

**Приложение. Рисунки.**

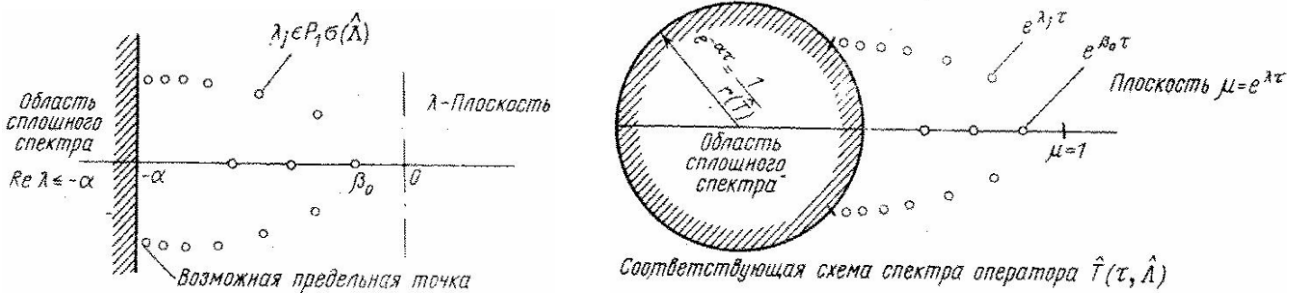


Рис. 1. Спектральная картина газокинетического оператора и его полугруппы.

Примеры веществ, для скоростей взаимодействия нейтронов с которыми выполняется неравенство:  $a(h) < a_0(h)$ .

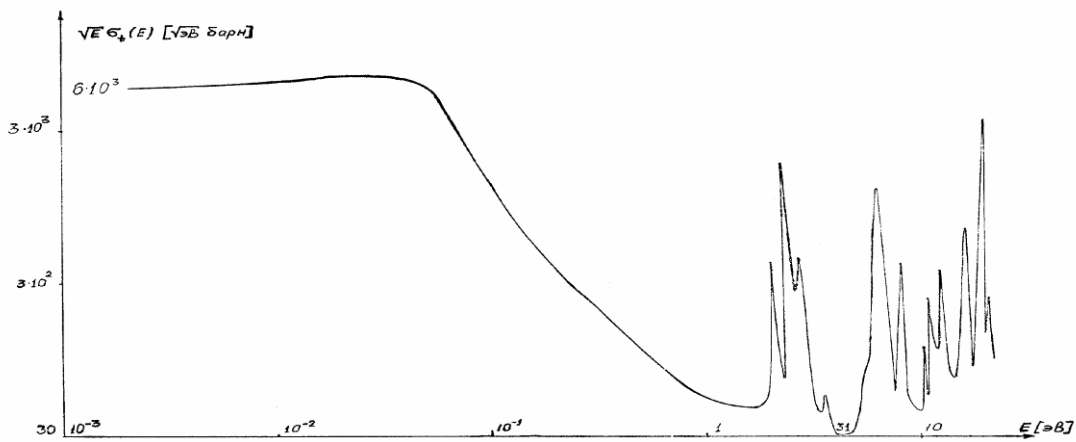


Рис. 2. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с гадолинием.

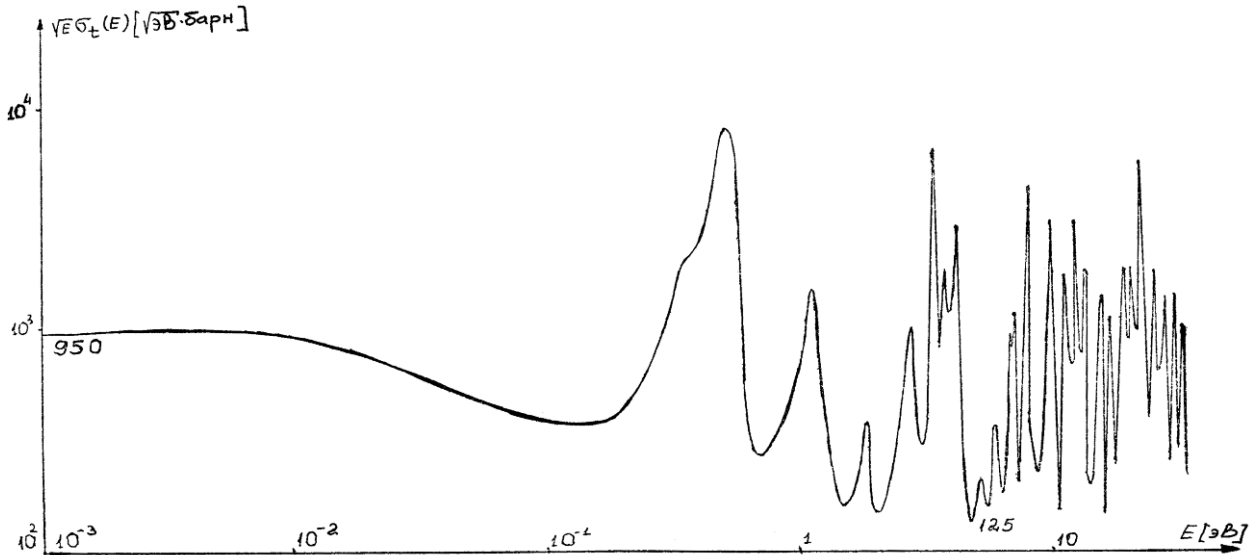


Рис. 3. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с европием.

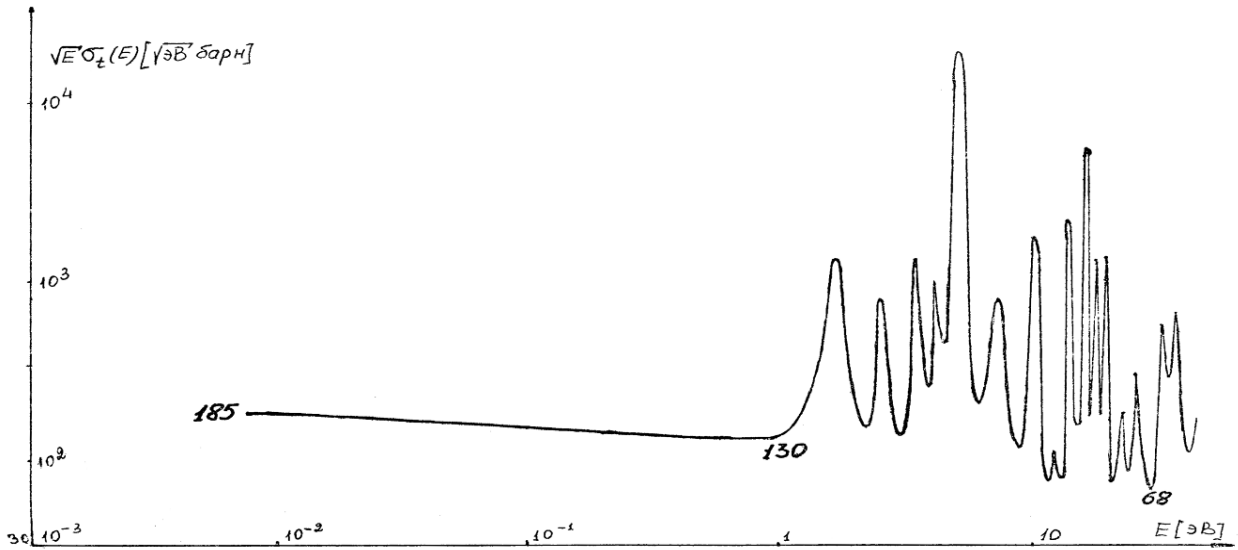


Рис. 4. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с диспрозием

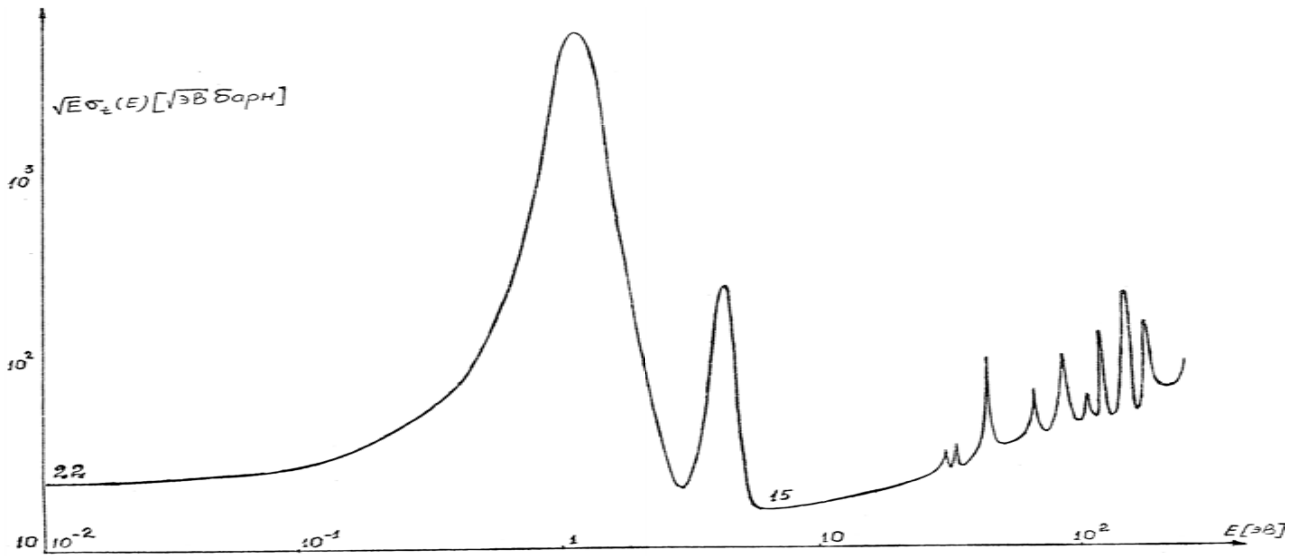


Рис. 5. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с рением

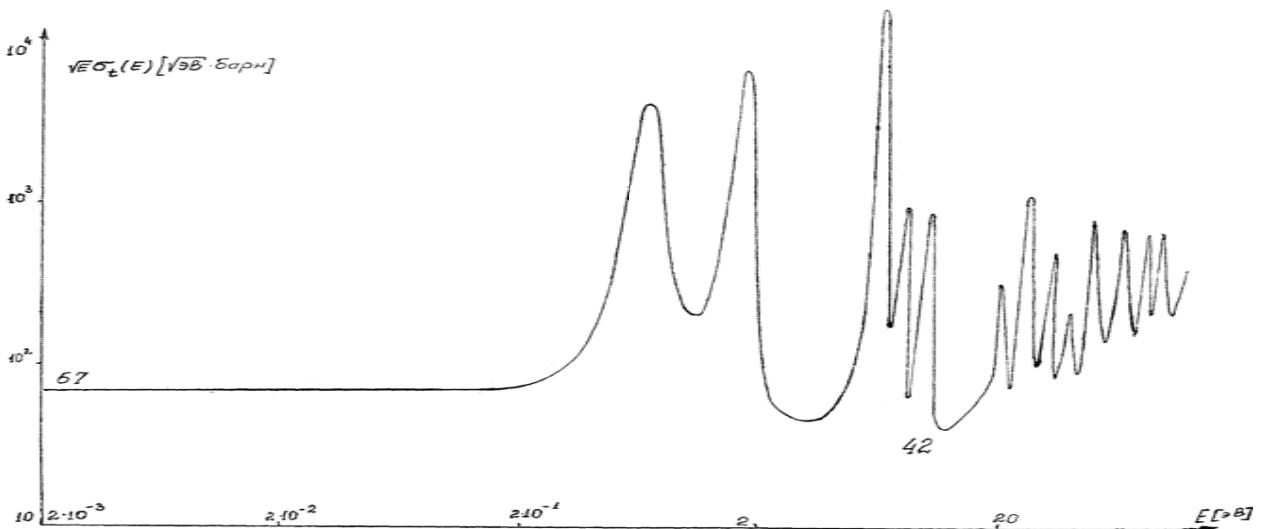


Рис. 6. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с иридием

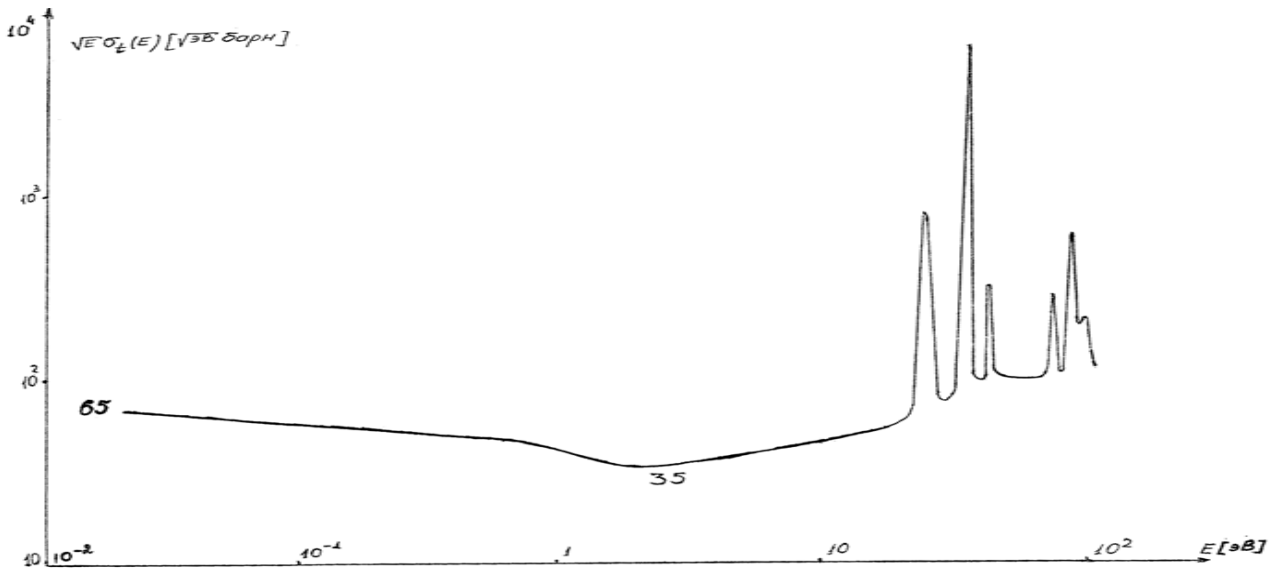


Рис. 7. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия со ртутью

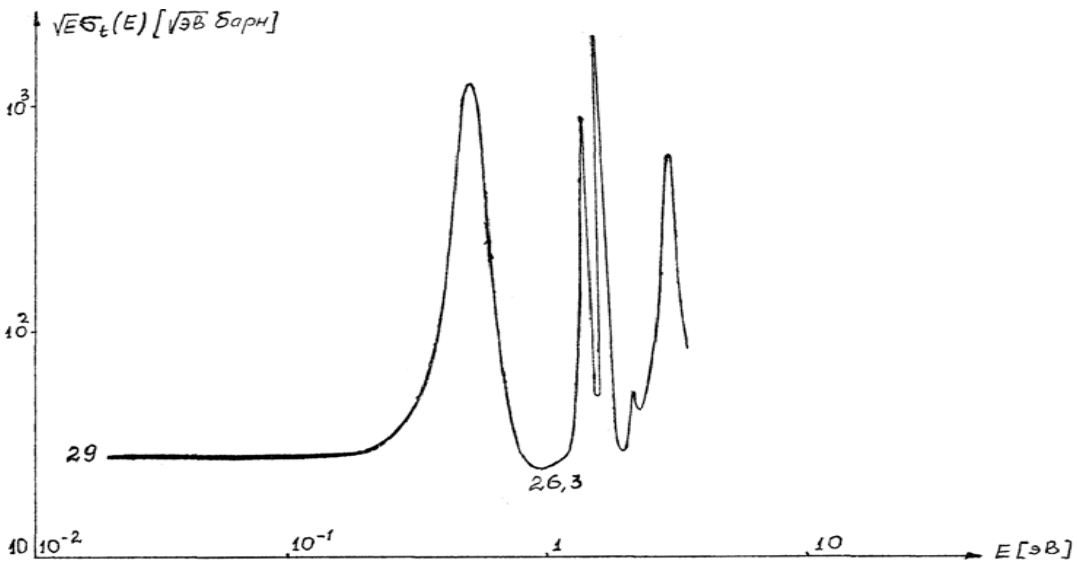


Рис. 8. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с нептунием ( ${}_{93}\text{Np}^{237}$ )

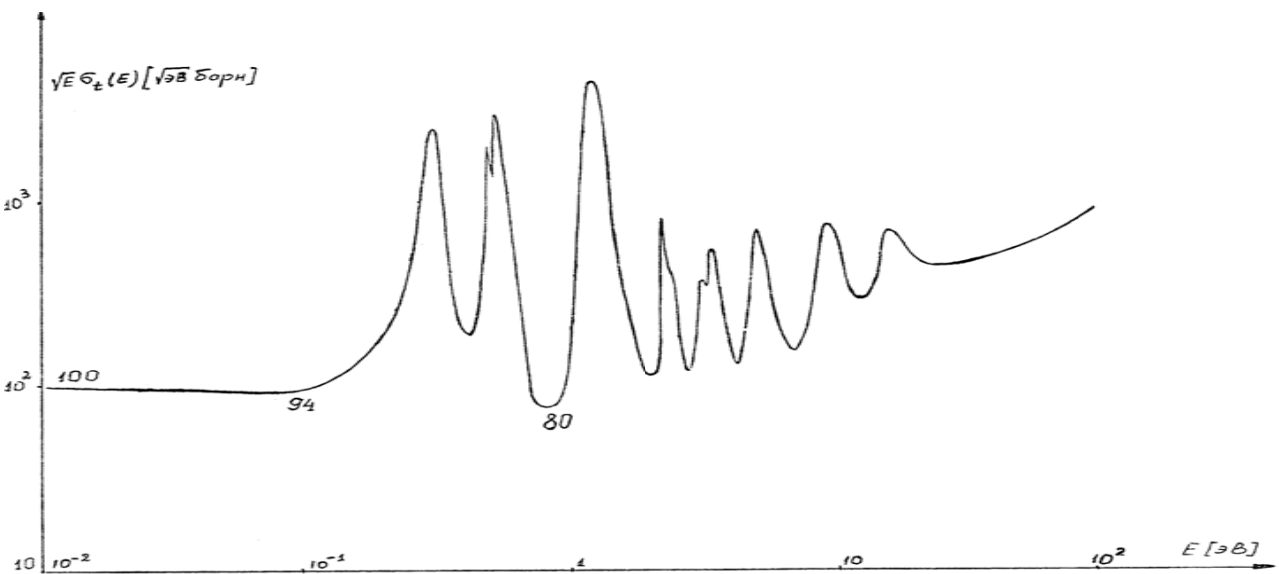


Рис. 9. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с америцием ( ${}_{95}\text{Am}^{241}$ )

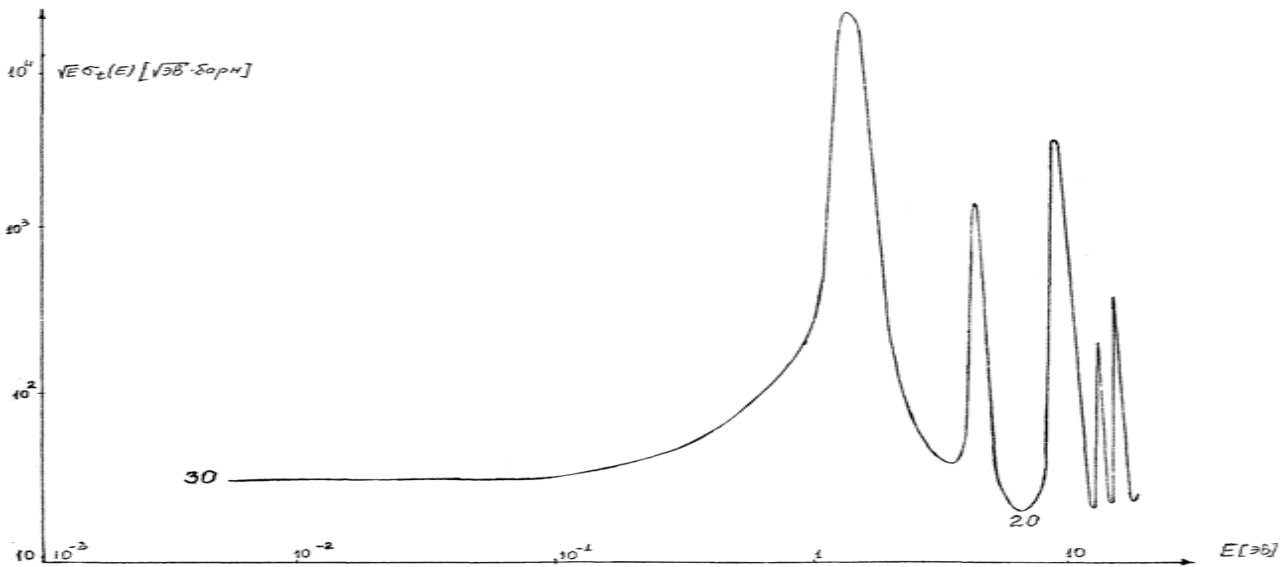


Рис. 10. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с индием.

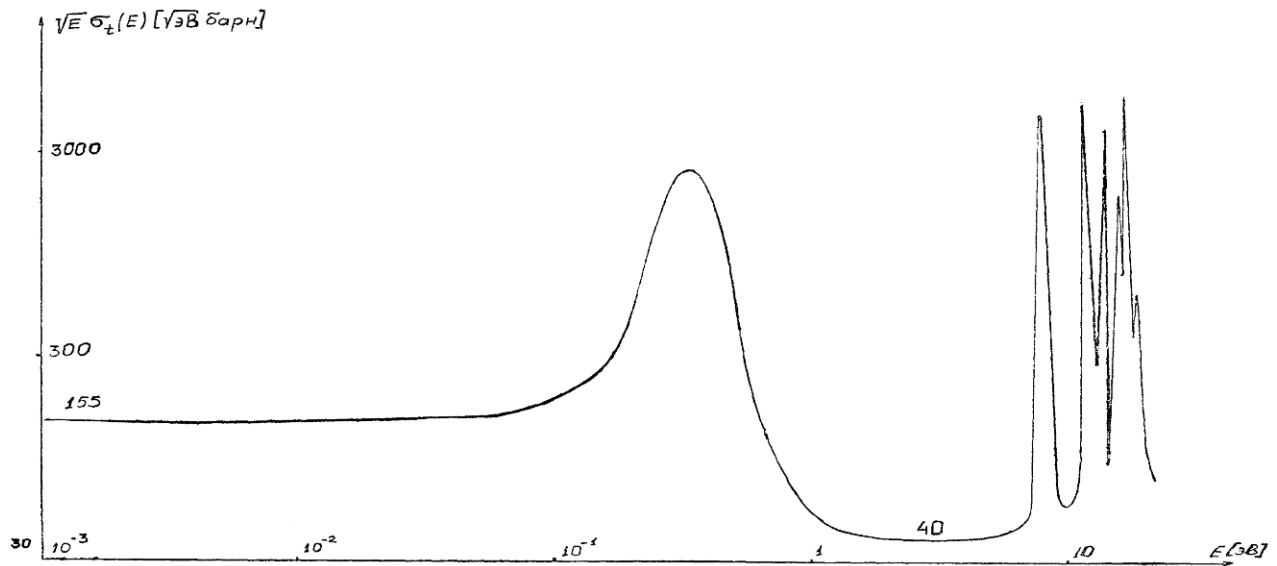


Рис. 11. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с плутонием ( ${}_{94}\text{Pu}^{239}$ )

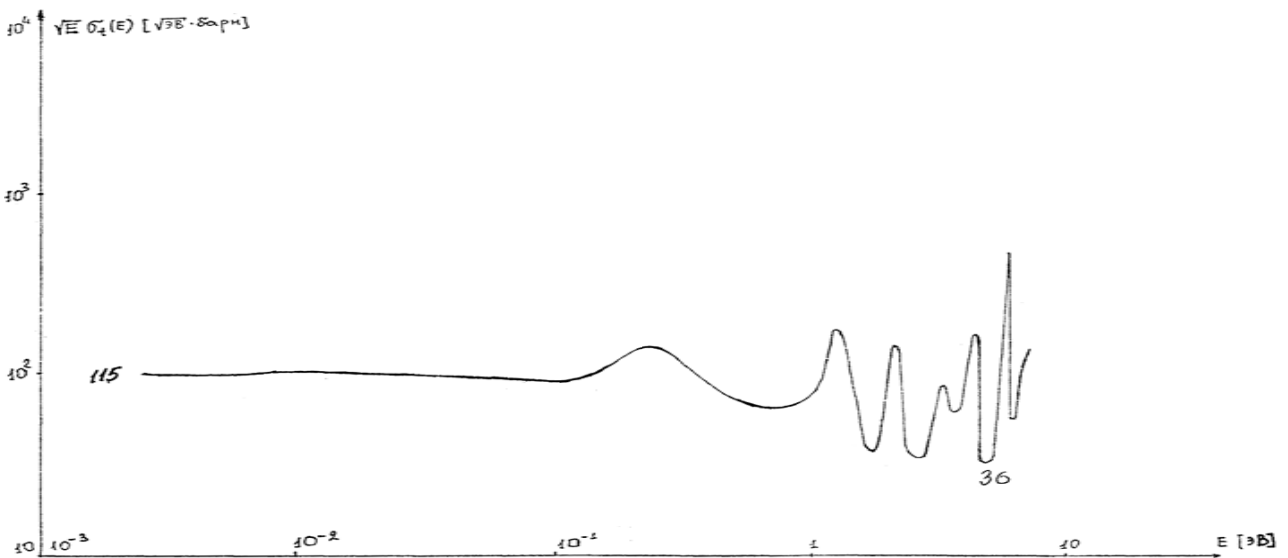


Рис. 12. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с ураном ( ${}_{92}\text{U}^{235}$ )



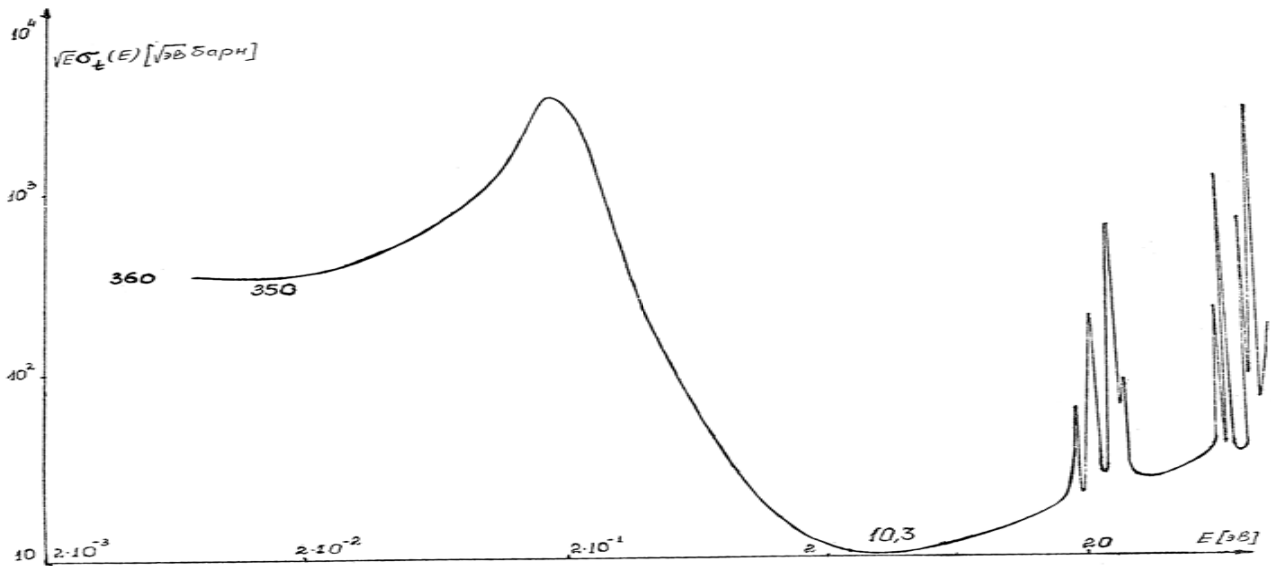


Рис. 13. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с кадмием

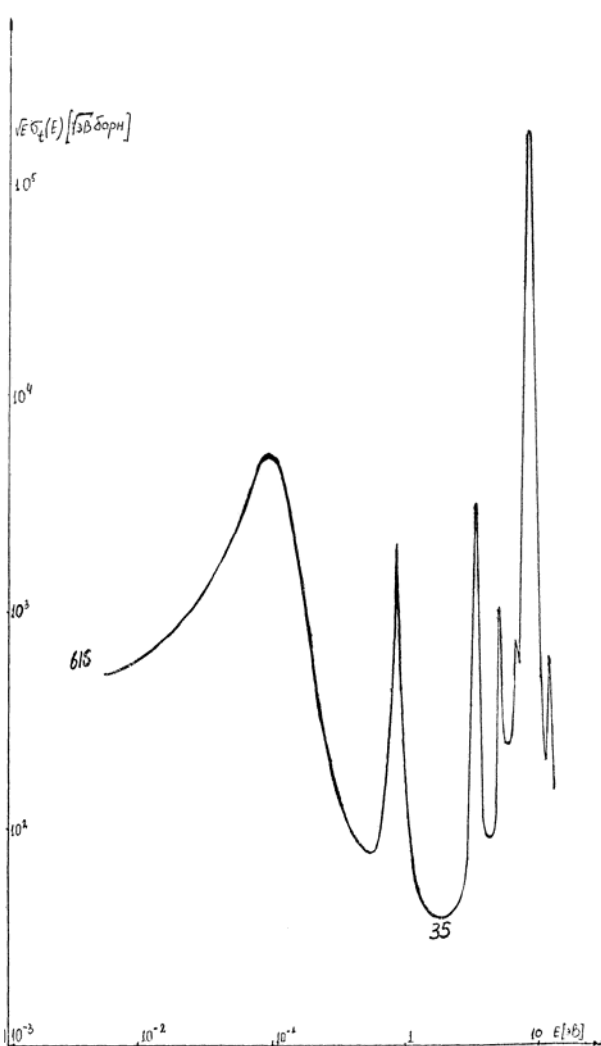


Рис. 14. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с самарием

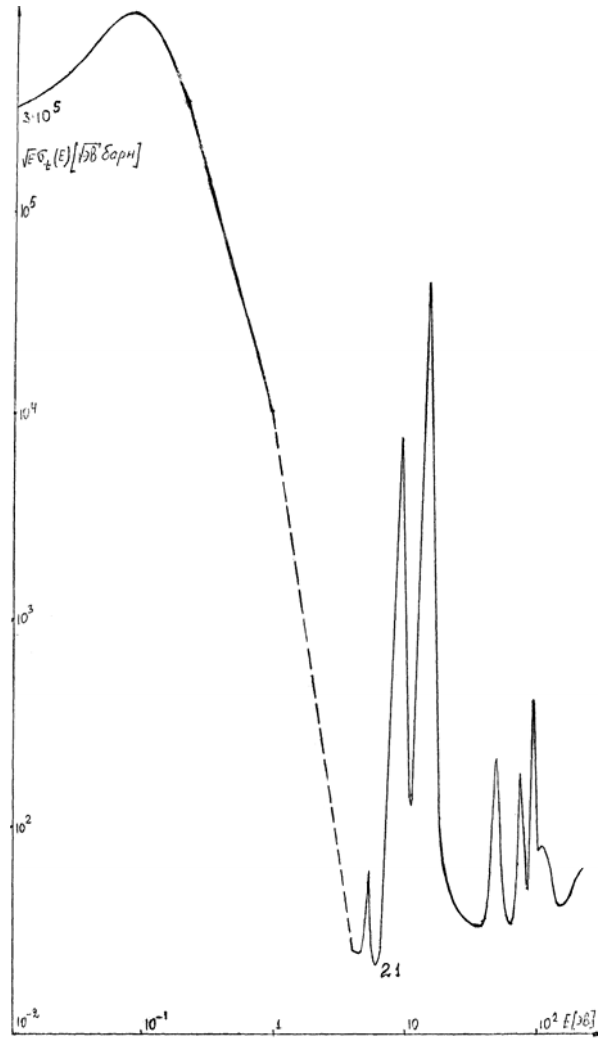


Рис. 15. График зависимости от энергии нейтронов скорости их взаимодействия с ксеноном ( ${}_{54}\text{Xe}^{135}$ )

Элемент	Gd	Eu	Dy	Rh	Ir	Hg	${}_{93}\text{Np}^{237}$	${}_{95}\text{Am}^{241}$	In	${}_{94}\text{Pu}^{239}$	${}_{92}\text{U}^{235}$	Cd	Sm	${}_{54}\text{Xe}^{135}$
$a(h)$	31	125	68	15	42	35	26.3	80	20	40	36	10.3	35	21
$a_0(h)$	$>6 \cdot 10^3$	950	185	22	67	65	29	100	30	155	115	360	615	$>3 \cdot 10^5$