ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 45 за 2011 г.

Келлин Н.С.

Оператор переноса частиц и его полугруппа в пространствах Лебега

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Келлин Н.С. Оператор переноса частиц и его полугруппа в пространствах Лебега // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 45. 24 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-45

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

Н.С. Келлин

Оператор переноса частиц и его полугруппа в пространствах Лебега

Москва - 2011

Н.С. Келлин. Оператор переноса частиц и его полугруппа в пространствах Лебега. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 24 страницы, 3 рисунка, библиография: 31 наименование.

Изучаются спектры оператора переноса частиц (и его полугруппы), отвечающего за описание их движения и поглощения (но не воспроизводства их в соударениях) в линеаризованном уравнении Больцмана. Вкупе с соответствующими начальными и граничными условиями оно описывает процесс переноса частиц самой различной природы (от нейтронов или фотонов в ядерных реакторах или в звёздных атмосферах, соответственно, до клеток в популяциях или книг в библиотеках).

N.S. Kellin. Particle Transport Operator and it's Semi-group at Lebesgue Skale. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 24 Pages, 3 Figures, 31 References.

Spectrums of particles transport operator (and it's semi-group) which describes their motion and adsorption (without generation) in linearized Boltzmann equation is investigated in this paper. Together with corresponding initial and boundary conditions this equation describes many processes of particle transport (from neutrons and photons in nuclear reactors and star's atmospheres correspondingly till cells in growing populations and texts in libraries).

Введение. Задачи, связанные с анализом свойств оператора переноса частиц, рассматривались многими авторами. Например, в работе [1] было проведено исчерпывающее исследование односкоростной стационарной задачи переноса частиц в возможно невыпуклом теле, погружённом в вакуум. В работе [2] были сняты некоторые ограничения по стационарности и фиксированности модуля скорости частиц, но рассмотрение велось исключительно для выпуклых тел. Видимо, в работе автора [3] была сделана первая попытка провести соответствующий анализ для случая переноса частиц в компактном теле. В дальнейшем (лет на 20) интересы в теории переноса сместились в сторону численных исследований. В настоящее время актуальность теоретического (функционально-аналитического) подхода к задачам теории переноса частиц вновь возрастает, что связано с заметным расширением области приложений (см., например, работу [4], где указана соответствующая литература). Рассмотрение переноса частиц проводится сейчас чаще всего [5, 6] не в модели В.С. Владимирова (тело погружено в вакуум), а в более простой модели К.О. Фридрихса (тело погружено в абсолютно чёрный поглотитель частиц [7]). В настоящей работе «реанимируется» модель Владимирова.

0. Постановка задачи

0.1. Цель данного исследования – спектральный анализ оператора переноса $-\widehat{L} = -(\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} + h\widehat{I})$ в возможно более общих условиях, наложенных на области определения функций $f = f(\mathbf{r}, \boldsymbol{\upsilon})$, на которые он действует. Напомню, что целью исследования в работе [8] был спектральный анализ оператора переноса в возможно более общих условиях, накладываемых на функцию $h = h(\mathbf{r},\boldsymbol{\upsilon})$, измеримую и ограниченную в существенном, то есть в таких, которых только и требует сам вывод уравнений переноса и газокинетического [9]. Итак, пусть $(\mathbf{r},\boldsymbol{\upsilon}) \in W_{\vec{\upsilon}} \times V_{\vec{r}}$. ***Полагаем, что почти при всех*** $\vec{\upsilon} \in W_{\vec{\upsilon}} \subset \text{Ў}^3$ **(**$diam(W) < \infty$**)** ***множество*** $V = V_{\vec{r}}$ ***эквивалентно компактному в*** Ў^3***, то есть ограниченмому и замкнутому***. Здесь и далее аргументы функций или часть их для краткости опускаются при записи, если это не приводит к недоразумениям.

0.2. Унифицируем изложение, сравнив описания областей определения функций, заданных в телах общего вида [1] и выпуклых [2] (см. рис. 1–3, выполненные при фиксированном υ).

Относительно множества G и $\Gamma = \partial G$ можно предполагать следующее.

a) Трехмерная мера границы Γ равна нулю почти при всех $\boldsymbol{\upsilon}$ (см. рис. 1).

b) Почти все (относительно меры в четырехмерном пространстве $S^2\times \text{Ў}^2$) прямые линии, имеющие с множеством G общую точку, пересекают его по замкнутому множеству, что в аналитической форме формулируется так: фиксируем некоторое направление $\boldsymbol{\Omega}$ из S^2. Обозначим через π_s ортогональную проекцию G на плоскость, перпендикулярную направлению $\boldsymbol{\Omega}$ и проходящую через фиксированную точку O (см. рис. 1). π_s – непустое, двумерное, компактное множество; Q – его произвольная точка π_s. Проведём через неё прямую, параллельную направлению $\boldsymbol{\Omega}$: $\{Q+\xi\Omega, -\infty<\xi<\infty\}$. Пусть $\pi_{s,Q}$ множество, получающееся от пересечения указанной прямой с множеством $R^3\backslash G$. По построению, $\pi_{s,Q}$ – непустое, одномерное, открытое и ограниченное множество. Поэтому оно состоит из не более чем счетного числа открытых интервалов. В силу предположения b), почти для всех точек (s,Q) из $Q\times\pi_s$ множество $\pi_{s,Q}$ представляет собой объединение не более чем счётного числа интервалов: $\pi_{s,Q} = \sum_{i=2}^{n(s,Q)}\{Q+\xi s, \eta_{i-1}(s,Q)<\xi<\xi_i(s,Q)\}$, которые (см. рис.1) занумерованы в естественном порядке: $\eta_i \le \xi_{i+1}$. Так как диаметр G равен d, то $0 < \eta_N - \xi_1 \le d$. Из построения вытекают следующие соотношения: $\pi_s = \pi_{-s}$, $\pi_{s,Q} = \pi_{-s,Q}$, $n(s,Q) = n(-s,Q)$, $\xi_i(s,Q) = -\eta_{n-i-1}(-s,Q)$, $\eta_i(s,Q) = -\xi_{n-i-1}(-s,Q)$, $i = 1, 2, ..., N(s,Q)$. В целях простоты записи можно опускать аргумент $(s,\mathbf{Q})$ у N, ξ_i и η_i. Отметим, что условие b) есть не что иное, как обобщенное условие выпуклости: для выпуклого множества G всегда $N(s,Q) = 1$ (см. рис.

2, 3). Формула для $\pi_{s,Q}$ при каждом s дает разложение множества G на декартово произведение двумерного множества π_s и одномерного множества $\bar{\pi}_{s,Q}$: $G = \pi_s \times \bar{\pi}_{s,Q}$ Это разложение выражает взаимно однозначное преобразование точек P множества G в точки ***(Q**,ξ)* из $\pi_s \times \bar{\pi}_{s,Q}$ по формуле $r = Q \times \xi\Omega$. Взяв за начало отсчёта на луче $\boldsymbol{\Omega}$ произвольную точку $r \in V$ и приняв в качестве положительного направления направление орта $\boldsymbol{\Omega}$ (рис. 2), можно перейти от координат ***(Q**,ξ)* обратно к координатам ***r***. Следует также указать, какой вид имеет нулевой элемент в пространстве L_D^p: если $f \in L_D^p,\ f = 0$, то функция $f(r + s\Omega; \upsilon, \Omega)$ равна нулю почти всюду на интервале $[-s_0(r,\Omega), s^{(0)}(r,\Omega)]$ почти при всех значениях $(\upsilon, \Omega, r_0) \in [0, \upsilon_0] \times V_\Omega \times f(\Omega)$. ..

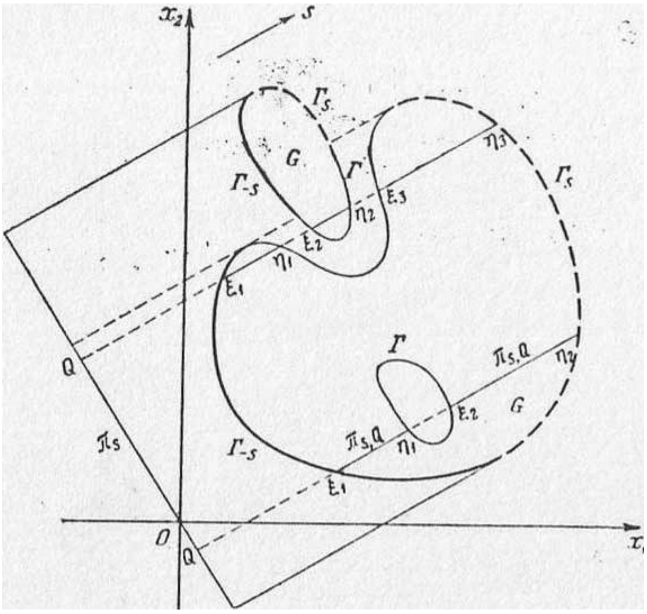

Рис.1. Геометрия невыпуклой области.

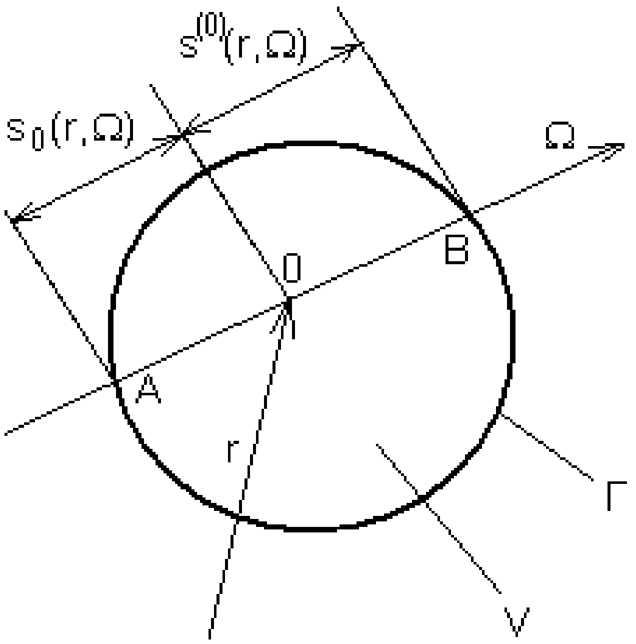

Рис.2. Геометрия выпуклой области в собственной системе координат.

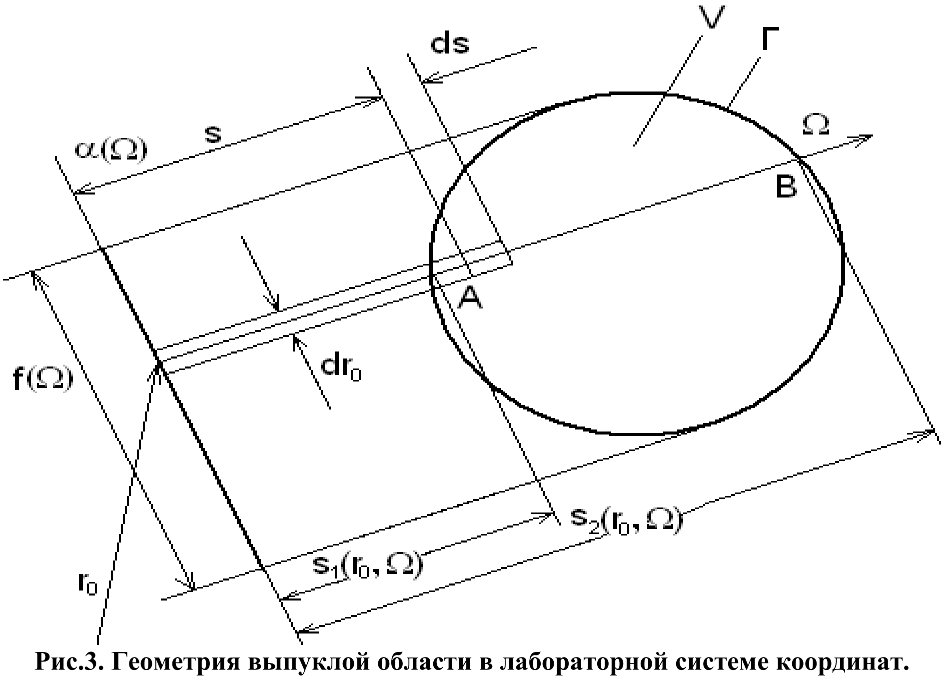

Рис.3. Геометрия выпуклой области в лабораторной системе координат.

1. Спектральный анализ оператора переноса частиц $\hat{L}$.

1.0. Проводим основное преобразование пространственных координат, переводящее при фиксированной скорости $\boldsymbol{\upsilon} = (\upsilon,\boldsymbol{\Omega})$ произвольное компактное (и даже только замкнутое) тело в выпуклое в направлении $\boldsymbol{\Omega}$: При замене $s = mes(\bar{\pi} \cap [\xi_1, \xi])$ множество $G = \pi_s \times \bar{\pi}_{s,Q}$ (как и в [1]) переходит в $V_{\vec{r}} = f_{\vec{\rho}}(\vec{\Omega}) \times [s_1(\vec{\rho},\vec{\Omega}), s_2(\vec{\rho},\vec{\Omega})]$ (как и в [2]). Именно из-за этой замены и приходится в дальнейшем вводить в рассмотрение «нефизическую» ситуацию, когда процесс переноса частиц происходит в теле V, размеры которого зависят от скорости самих частиц. При этом преобразовании граница ∂G уменьшается до множества точек (Q, ξ_1) – освещённая часть и (Q,η_N) – затенённая часть. Остальные её точки оказываются внутри V и равными друг другу: $s(\xi_{k+1}) = s(\eta_k)$. В модели Владимирова оператор переноса действует на функции f, такие что $f(\xi_{k+1}) = f(\eta_k)$, то есть их (абсолютная) непрерывность при данном преобразовании не нарушается и стационарная задача [1], как и условно стационарные задачи ([2], гл.2, 3, 4, 5.) переходят в таковые же, но для переноса частиц в выпуклых телах.

1.1. Итак, цель настоящего исследования – спектральный анализ оператора переноса $-\hat{L} = -(\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} + h\hat{I}\,)$ в возможно более общих условиях, накладываемых на функцию $h = h(\vec{r},\vec{\upsilon})$, измеримую и ограниченную в существенном, и в возможно более слабых условиях, накладываемых на функции $f = f(\vec{r},\vec{\upsilon})$ из его области определения, может быть конкретизирована следующим образом. Ограниченность в существенном, как и в [8], оставим только за $(Re f)_+$ (величины $(Re f)_-$ и $Im f$ полагаем измеримыми и почти всюду конечными), а области определения (по $\boldsymbol{r}$) функций $f = f(\vec{r},\vec{\upsilon})$ полагаем выпуклыми в направлении $\boldsymbol{\Omega}$.

Как и в [8] предполагаются известными следующие свойства оператора переноса.

с.1. Замкнутость и неограниченность в пространствах L^p_D. Здесь $1 \le p \le \infty$, $D = D_x = W_{\vec{\upsilon}} \times V_{\vec{r}}(\vec{\upsilon})$, где $W_{\vec{\upsilon}}$ – стандартный единичный шар в $\mathbb{R}^3_{\vec{r}}$, а $V_{\vec{r}}$ – компактное выпуклое в направлении $\vec{\Omega}$ тело в $\mathbb{R}^3_{\vec{r}}$ $(mes_3 V_{\vec{r}} > 0)$, для которого возможно представление

$$V_{\vec{r}}(\vec{\upsilon}) = f_{\vec{\rho}}(\vec{\upsilon}) \times [\,s_1(\vec{\rho},\vec{\upsilon}), s_2(\vec{\rho},\vec{\upsilon})] = f_{\vec{\rho}}(\vec{\upsilon}) \times S_s(\vec{\rho},\vec{\upsilon}). \tag{1}$$

Здесь $f_{\vec{\rho}}(\vec{\upsilon})$ – проекция тела V на плоскость, ортогональную направлению $\vec{\upsilon}$ (см. рис. 3). Аналогично $D = Q_y \times S_s(y)$; $y = (\vec{\rho},\vec{\upsilon})$; $Q^{(0)}_{y_0} = \{y_0\} = \{(\vec{\rho},\vec{\Omega})\}$.

с.2. Области определения оператора $\hat{L} - D(\hat{L}) = R^p_D$ плотны в L^p_D для $p < \infty$.

с.3. Сопряженный к $\hat{L}$ оператор $\hat{L}^+$ равен $\hat{L}' = -\vec{\upsilon}\nabla_{\vec{r}} \cdot + \bar{h}\hat{I} = \upsilon D_s \cdot + \bar{h}\hat{I}$ при $p < \infty$. $D(\hat{L}') = \tilde{R}^p_D$, где множество $\tilde{R}^p_D = \hat{U} R^p_D$ плотно в L^p_D. Здесь $\hat{U}$ – оператор инверсии по координатам $\vec{\Omega} = \vec{\upsilon}/\upsilon$. При $p = \infty$ $\hat{L}'^+ = \hat{L}$.

с.4. Операторы $(\hat{L} + \lambda\hat{I}\,)^{-1} = \hat{l}(\lambda)$ и $(\hat{L}' + \lambda\hat{I}\,)^{-1} = \hat{l}\,'(\lambda)$ существуют и ограничены при $Re\lambda > -a$, $a = \operatorname{vrai\,min}\limits_{\vec{r}\in V,\, \vec{\upsilon}\in W} Re\, h(\vec{r},\vec{\upsilon})$ с оценкой норм $1/(Re\lambda + a)$.

Определение множеств R^p_D и $\tilde{R}^p_D$, формулировка газокинетических граничных условий для операторов $\hat{L}$ и $\hat{L}'$, представление норм функций из пространств L^p_D согласованное с представлением (2.1), явные выражения для резольвент $\hat{l}\,'(\lambda)$ и $\hat{l}(\lambda)$ не отличаются от приведенных в работе [2] § 6.

Функция $h(\vec{r},\vec{\upsilon})$ соответствует функции $E^{1/2}\Sigma_{total}(\vec{r},E)$ из работы [2]. Переход к переменным $\vec{\upsilon}$ от $(E,\vec{\Omega})$ связан как с упрощением записи многих формул, так и с тем, что в "скоростных" переменных мера в $W_{\vec{\upsilon}}$ – обычная лебегова (в $\breve{Y}^3_{\vec{\upsilon}}$), в отличие от меры в $W_{E,\vec{\Omega}}$, рассматриваемой в работе [2].

1.2. Для сокращения записи и упрощения рассуждений будем придерживаться следующих соглашений, обозначений и определений.

п.1. $\vec{L}_p$ – индекс $p \geq 1$ у оператора, действующего в пространствах Лебега, будет означать, что в данном контексте он рассматривается действующим в L^p_D с тем же индексом. Индекс будет опускаться, если формулируемые свойства оператора верны при всех p. Аналогичных соглашений будем придерживаться при записи норм функций и операторов без указания индекса $p \geq 1$.

п.2. Запись $\tilde{l}(\lambda)$ или $\tilde{L}$ означает, что возможно одновременное рассмотрение операторов $\vec{l}(\lambda)$ и $\vec{l}'(\lambda)$ или $\vec{L}$ и $\vec{L}'$.

п.3. Существенные минимум и максимум функции $h(\vec{r},\vec{\upsilon})$ будут обозначаться для краткости через Vmh и VMh соответственно. Аргументы функций и операторов или часть из них опускаются при записи, если это не приводит к недоразумению.

п.4. $D_{\varepsilon,E} = \{ x \in D : x = (\vec{r},\vec{\upsilon}),\ \ \varepsilon \leq \upsilon \leq E \}$. Удобно полагать так же, что $D_{a,b} = D_{b,a}$. Аналогично определяются и множества $Q_{\varepsilon,E}$.

п.5. $\pi^-_a = \{ \lambda \in J\ : Re\,\lambda < -a \};\ \ \pi^+_a = J \setminus \bar{\pi}^-_a$.

п.6. $|\vec{L}| = \vec{\upsilon}\cdot\nabla_{\vec{r}}\cdot + Re\,h\cdot\vec{I};\ \ |\vec{l}| = |\vec{L}|^{-1}$ и аналогично для операторов $\vec{L}'$ и $\vec{l}'(\lambda)$. Корректность определения операторов $|\vec{l}(\lambda)|$ будет вытекать из Пр.2.

п.7. Последовательностью Хилле оператора $\hat{A}$ назовем последовательность $\{u_n\}$ такую, что при всех n $u_n \in D(\hat{A})$, существуют константы C_0 и C_1 такие, что $0 < C_0 \leq \|u_n\| \leq C_1 < \infty$ и $\|\hat{A}u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$ ([10], с.68).

п.8. Существование последовательности Хилле у операторов $(\tilde{L} + \lambda\tilde{I}) = \tilde{L}(\lambda)$ эквивалентно неограниченности операторов $\tilde{l}(\lambda)$, то есть существованию последовательности $\{F_n\}$ такой, что при всех n $\|F_n\| = 1$, но $\|\tilde{l}(\lambda)F_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

п.9. Особыми существенными минимумом и максимумом функции h назовем величины $a_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \underset{D_{0,\varepsilon}}{Vm}\, Re\,h(\vec{r},\vec{\upsilon});\quad A_0 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \underset{D_{0,\varepsilon}}{VM}\, Re\,h(\vec{r},\vec{\upsilon})$ соответственно.

п.10. Спектральным типом a_s функции $h \in L^\infty_D$ и операторов $\tilde{L}$, ею порожденных, назовем такое число $a_s(h) = a_s(\tilde{L})$, что $\lambda \in \rho(-\tilde{L}) \Leftrightarrow Re\,\lambda > -a_s$. Корректность определения числа a_s будет являться следствием теорем 1 и 4.

п.11. Через χ всегда обозначается характеристическая функция множества, а через θ – функция Хевисайда.

п.12. Знаки неравенств между функциями понимаются в смысле частичной упорядоченности пространств L^p_D относительно конуса почти всюду неотрицательных функций $K_p \subset L^p_D$.

1.3. Сформулируем несколько простых предложений, которые будут использованы при доказательстве теорем 1-10.

Пр.1. Газокинетические граничные условия обеспечивают пустоту точечных спектров операторов $\tilde{L}$, что проверяется непосредственным вычислением.

Пр.2. $\forall \lambda \in J$ существуют операторы $\tilde{l}(\lambda)$ формально обратные к операторам $\tilde{L}(\lambda)$. Таким образом $\vec{R}(\lambda,-\tilde{L}) = \tilde{l}(\lambda)$, когда последние ограничены.

Пр.3. $\forall \lambda \in J$ операторы $\hat{R}(\lambda)$ определены на функциях f, таких, что $supp\, f \subseteq D_{\varepsilon,1}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Так как объединения по $\varepsilon > 0$ таких функций – это всюду плотные в L^p_D $(p < \infty)$ множества, то отсюда следует пустота остаточных спектров операторов $\hat{L}_p$ $(p < \infty)$.

Пр.4. (Вытекающее из предложений 1 и 3). Спектр операторов $\hat{L}_p$ – непрерывный при $p < \infty$, то есть операторы $\hat{R}(\lambda)$ неограниченны, если λ лежит в спектре операторов $-\hat{L}$ соответственно. Неограниченность операторов $\hat{R}_\infty(\lambda)$ при $\lambda \in \sigma(-\hat{L}_\infty)$ вытекает из сопряженности их с неограниченными операторами $\hat{R}_1(\bar{\lambda})$. Неограниченность операторов $\hat{R}(\lambda)$, как уже сказано, эквивалентна существованию последовательностей Хилле у операторов $\hat{L}(\lambda)$.

Пр.5. (Вытекающее из предложения 4) $\sigma(-\hat{L}) = \sigma_e(-\hat{L})$, где, через σ_e, как и в работе [11] с.305 обозначен существенный спектр оператора.

Замечание 1. Предложения 4, 5, 6 будут важны при рассмотрении газокинетического оператора $\hat{\Lambda} = -\hat{L} + \hat{K} = -\hat{L} + \int_W d\vec{\upsilon}\,' K(\vec{r}, \vec{\upsilon}\,' \to \vec{\upsilon})g$, как возмущенного оператора переноса.

Пр.6. Операторы $\hat{L}$ являются e -операторами в пространстве L^1_D, что следует из оценки $||\hat{R}(\lambda)|| \le 1/(Re\,\lambda + a)$. В частности, $||\, f\, ||_\infty = ||\, f\, ||'$ $\forall f \in L^{1e}_D$.

Пр.7. $\forall \varepsilon > 0$ $\forall p \in [1,\infty]$, операторы $\hat{R}(\lambda) \in B(L^p_{D_{\varepsilon,1}})$, что очевидно в силу оценки $|\hat{R}(\lambda)F| \le \sup\limits_{D_{\varepsilon,1}\times S_\eta} exp[-\int_\eta^s Re(h+\lambda)\frac{d\xi}{\upsilon}] \cdot \int_{s_1}^s \frac{d\eta}{\upsilon} |\, F\,| = M(\varepsilon)\int_{s_1}^s |\, F\,|\, d\eta$, где $F \in L^p_D$, $M(\varepsilon) < \infty$.

Пр. 8. Измеримость встречается здесь и далее подынтегральных выражений легко доказывается, на чём не будем впредь специально останавливаться. Например, если функция $h(\vec{r}, \vec{\upsilon})$ измерима и суммируема на D, то из теоремы Фубини следует существование интеграла $\int_0^{s_0} h(\vec{r} - s\vec{\Omega})ds$ почти при всех $(\vec{r}, \vec{\Omega})$ и его измеримость.

1.4. Один из основных результатов содержится в теореме 1.

$\forall h \in L^\infty_D$ $\exists\, a_s = a_s(h) : \rho(-\hat{L}_p) = \pi^+_{a_s}$. Иначе говоря, каждая измеримая и ограниченная в существенном функция h порождает в пространствах L^p_D оператор переноса $-\hat{L}$ такой, что все точки некоторой открытой правой полуплоскости на комплексной плоскости (и только они) являются резольвентными для операторов $-\hat{L}$. (Теорема показывает, в частности, эквивалентность стандартного подхода к спектральному анализу оператора переноса в комплексных пространствах, в рамках которого сопряженность операторов рассматривается относительно сопряженно-линейных (полуторалинейных) функционалов, и спектры операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}^+$ получаются сопряженными друг другу, подходу, избранному в работе [2], при котором сопряженность операторов рассматривается относительно линейных функционалов, и, когда имеет место равенство спектральных множеств $\sigma(\hat{A}) = \sigma(\hat{A}^+)$.)

Лемма 1. Пусть $\mu \in \sigma(-|\,\hat{L}\,|) \cap \check{Y} \Rightarrow \forall \nu \in \check{Y}$ $\lambda = (\mu + i\nu) \in \sigma(-\hat{L})$.

Доказательство. Согласно Пр.4 для оператора $-|\,\hat{L}\,(\mu)|$ существует последовательность Хилле $\{u_n\}$. Покажем, что последовательностью Хилле для оператора $-\hat{L}\,(\lambda)$ служит последовательность $\{W_n\} = \{u_n\, exp[i\int_s^{s_2}\frac{d\xi}{\upsilon}(Im\,h + \nu)]\}$. Действительно, очевидно, что $|\,W_n| = |\,u_n\,|$, а следовательно, $0 < C_0 \le \|\,W_n\| \le C_1 < \infty$, где C_0 и C_1 берутся теми же, что и в пункте п.7. Кроме того, непосредственно устанавливается равенство: $\hat{L}(\lambda)W_n = (|\,\hat{L}(\mu)\,|\,u_n)\, exp[i\int_s^{s_2} d\xi(Im\,h(\vec{p} + \xi\vec{\Omega}, \vec{\upsilon}) + \nu)/\upsilon]$.

Отсюда следует, что $\|\,\hat{L}\,(\lambda)W_n\| \le \|\,|\,\hat{L}\,(\mu)\,|\,u_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Следствие. Результат леммы 1 верен и для оператора $\acute{L}'$. В этом случае нужно последовательность Хилле для оператора $|\acute{L}'(\mu)|$ $\{u_n\}$ умножать поэлементно на $exp[i\int_{s_1}^{s} d\xi(Im\, h+\nu)/\upsilon]$. Далее ход рассуждений не изменяется.

Замечание 2. Из леммы 1 следует, в частности, что в силу сопряженности операторов $-\acute{L}$ и $-\acute{L}'$, $\sigma(-\acute{L}')=\sigma(-\acute{L})$.

Лемма 2. Пусть $\mu\in\rho(-|\tilde{L}_0|)\cap\check{Y}^1 \Rightarrow \forall\,\nu\in\check{Y}^1\ \lambda=(\mu+i\nu)\in\sigma(-\tilde{L}_0)$. Действительно, $\forall F\in D(|\tilde{R}(\mu)|)$ имеет место оценка $\|\tilde{R}(\lambda)F\|=\||\tilde{R}(\mu)F|\|\le\||\tilde{R}(\lambda)|\,|F|\|= =\||\tilde{R}(\mu)|\,|F|\|$ $<\infty$, то есть ограниченность операторов $|\tilde{R}(\mu)|$ влечет ограниченность операторов $\tilde{R}(\lambda)$.

Пусть теперь $\mu\in\rho(-\tilde{L}_0)\cap\check{Y}^1$. Покажем, что $\forall\varepsilon>0\ \ (\mu+\varepsilon)\in\rho(-\tilde{L}_0)$.

Действительно $\|\tilde{R}(\mu+\varepsilon)\|\le\|\tilde{R}(\mu)\| < \infty$, так как при всех функциях F $|\tilde{R}(\mu+\varepsilon)F|\le|\tilde{R}(\mu+\varepsilon)|\cdot|F|\le|\tilde{R}(\mu)|\cdot|F|$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Замечание 3. Леммы 1-2 показывают, что в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением действительных λ и h, а потому, $a_s(h) = a_s(Re h)$.

Замечание 4. Для анализа газокинетического оператора $\acute{\Lambda}$ существенным будет то, что операторы $\upsilon\cdot\tilde{R}(\lambda)$ ограничены тогда и только тогда, когда ограничены операторы $|\upsilon\cdot\tilde{R}(Re\,\lambda)|$. Доказательство этого факта повторяет выкладки лемм 1-2.

Теорема 2. Пусть

$$h\in L_D^\infty \Rightarrow a_0(h)\le a_s(h)\le A_0(h); \qquad (2)$$

то есть спектральный тип функции лежит между ее особыми существенными минимумом и максимумом. (В работе [2] доказаны результаты, аналогичные приводимым в теореме 2 для функций h, удовлетворяющих "газовой модели" вещества.)

Доказательство:

1) $a_s\ge a_0$. Действительно, используя неравенство Гельдера в форме, приведенной в работе [2] с.331, получаем оценку, справедливую при $p<\infty$ и при всех функциях $F\in L_D^p$: $|\tilde{R}(\mu)F|^p\le(\tilde{R}(\mu)|F|)^p\le\tilde{R}(\mu)|F|^p\cdot\left(\tilde{R}(\mu)\chi(D)\right)^{p-1}$.

Отсюда следует оценка нормы операторов $\tilde{R}(\mu)$:

$$\|\tilde{R}(\mu)\|\le \underset{D}{VM}(\tilde{R}(\mu)\chi(D))^{1/q}\cdot\underset{D}{VM}(\tilde{R}(\mu)\chi(D))^{1/p}=G; \qquad (3)$$

при $p=\infty$ оценка (3) вытекает из определения нормы в пространстве L_D^∞.

Докажем корректность оценки (3) при $\mu>-a_0$. По пункту п.9 $\forall\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}G&\le max\{G_0(\varepsilon),G_1(\varepsilon)\}=\max_{i=0;1}\Big\{\underset{D_{i,\varepsilon}}{VM}(\tilde{R}(\mu)\chi(D))^{1/p}\cdot\underset{D_{i,\varepsilon}}{VM}(\tilde{R}(\mu)\chi(D))^{1/q}\Big\}=\\ &=\max_{i=0;1}\Big\{\Big(\underset{D_{i,\varepsilon}}{VM}\int_s^{s_2}\frac{d\eta}{\upsilon}exp[-\int_s^{\eta}(h+\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}]\Big)^{1/p}\cdot\Big(\underset{D_{i,\varepsilon}}{VM}\int_s^{s_2}\frac{d\eta}{\upsilon}exp[-\int_s^{\eta}(h+\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}]\Big)^{1/q}\Big\}.\end{aligned} \qquad (4)$$

Принадлежность h к пространству L_D^∞ гарантирует конечность величины $G_1(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon>0$. Согласно пункту п.9 и выбору $\mu>-a_0\ \exists\varepsilon>0$: $\underset{D_{0,\varepsilon}}{Vm}\,h=a(\varepsilon)>-\mu$. Отсюда следует оценка, справедливая на множествах $D_{0,\varepsilon}$ при всех s и η: $exp[-\int_\eta^s(h+\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}]\le exp[-(\mu+a(\varepsilon))|s-\eta|/\upsilon]$. Поэтому, оценив выражение (4) для G_0

сверху и проведя интегрирование, получаем $G_0(\varepsilon) \le 1/(\mu+a(\varepsilon)) < \infty$. Таким образом, оценка снизу величины $a_s(h)$ получена.

2) $a_s \le A_0$. Для доказательства этого неравенства достаточно при всех $\mu > A_0$ предъявить последовательности Хилле $\{W_n\}$ для операторов $\tilde{\mathcal{L}}(\mu)$.

Согласно п.9 $\forall\mu > A_0$ $\exists\varepsilon = \varepsilon(\mu) > 0$: $\forall x \in D_{0,\varepsilon}$ $h(x) < \mu$. Пусть теперь $n > max\{1/e, 2, (ln16)/(p\Delta|a_0 - \mu|)\}$. Тогда искомыми последовательностями Хилле будут $\{W_n\} = |s_i - s| \cdot d^{-1} \cdot n^{2/p} \cdot \vartheta[(n^{-1/2} - v)(v - n^{-1})]\ exp[_{(}\pm_{)}\int_s^{s_i}(h-\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}]$.

Действительно, константы подобраны таким образом, чтобы выполнялись неравенства $0 < \Delta/(2d)\{3\tilde{C}/[32p(\mu - a_0)]\}^{1/p} \le \|W_n(\mu)\|_p \le \{C/[4p(\mu - A_0)]\}^{1/p} < \infty$, где Δ – ширина тела V; d – его диаметр; $\tilde{N} = \int_{4\pi} d\Omega' \tilde{f}(\Omega')$; $\tilde{N} = \int_{4\pi} d\Omega' f(\Omega')$. Здесь область $\tilde{f}(\Omega') \subset f(\Omega')$ такова, что при $\vec{\rho} \in \tilde{f}(\Omega')$ $s_2(\vec{\rho},\Omega') - s_1(\vec{\rho},\Omega') \ge \Delta/2$. Далее очевидно, что при $W_n(\mu) \in (\tilde{R}_D)^\infty$ $|\tilde{\mathcal{L}}(-\mu)W_n| = |\upsilon W_n/|s - s_i|| \le |W_n|/(n^{1/2}|s - s_i|)$. Проводя оценки сверху величин $\|W_n/|s - s_i|\|$ аналогично тому, как то было сделано для самих W_n, получим в итоге что $\|\tilde{\mathcal{T}}(\mu)W_n\| \le \{C/[4p(\mu - A_0)]\}^{1/p}/(dn^{1/2}) \to 0$ при $n \to \infty$. Остается воспользоваться замкнутостью спектра любого оператора. Итак, показано, что, во-первых, $\pi^+_{a_0} \subseteq \rho(-\tilde{\mathcal{L}})$, а во-вторых, $\bar{\pi}^-_{A_0} \subseteq \sigma(-\tilde{\mathcal{L}})$. Теорема 2 доказана.

Замечание 5. Для анализа свойств спектра газокинетического оператора $\hat{\Lambda}$ существенным будет то, что для операторов $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)$ $(Re\lambda < -A_0)$ удаётся построить последовательности Хилле $\{W_n\}$ «сходящиеся к нулю по υ», то есть такие, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon)$ $\forall n > N$ $\forall x \in D_{\varepsilon,1}$ $W_n(x) \equiv 0$. Этот же факт будет справедлив и для всех точек спектра операторов $-\tilde{\mathcal{L}}$, что будет следовать из доказательства теоремы 4.

Исследование спектрального типа $a_s = a_s(h)$ в зависимости от свойств функции h начнем с

Теоремы 3. Для любого тела V (компактного, выпуклого с ненулевой мерой) существуют, во-первых, кусочно-постоянная (трехзначная), а, во-вторых, бесконечно-дифференцируемые функции h, такие, что $a_s = a_s(h)$ совпадает с наперед заданным числом из промежутка $[a_0(h), A_0(h)]$.

Лемма 4. Пусть V – единичный шар. Тогда для функции

$$h_0 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le r < \upsilon \\ \alpha & \text{при} \quad \upsilon \le r \le \upsilon^{1/2} \\ 1 & \text{при} \quad \upsilon^{1/2} \le r \le 1 \end{cases}$$ будет $a_s(h_0) = \alpha \in (\mathbf{0},\mathbf{1})$.

Действительно, 1) $\forall\mu \in (-\alpha, 0)$ воспользуемся, как и при доказательстве части 1) теоремы 2, соотношением (3). Оценим сверху величину $VM_D\tilde{\mathcal{T}}(\mu)\chi(D)$. Для этого заметим, что

а) $-\int_\eta^s \frac{d\xi}{\upsilon}(h+\mu) \le -\int_\eta^s \frac{d\xi}{\upsilon}(h_1+\mu)$, где $h_1 = min\{h,\alpha\}$;

б) $s^*_2(y) - s^*_1(y) \le 2\upsilon$ (величины s^*_1 и s^*_2 относятся к $\tilde{V}_{\vec{r}}$ – шару, радиуса υ).

Из неравенств пунктов а) и б) следует оценка величин $\tilde{\mathcal{T}}(\mu)\chi(D) \le \{[2\mu + \alpha - \alpha \cdot exp(-2\mu)]/(\mu^2 + \mu\alpha)\}\chi(D)$. Аналогичные оценки, разумеется, справедливы и для $VM_D\tilde{\mathcal{T}}(\mu)\chi(D)$. В результате имеем ограниченность операторов $\tilde{\mathcal{T}}(\mu)$ с оценкой нормы $\|\tilde{\mathcal{T}}(\mu)\| \le [2\mu + \alpha - \alpha \cdot exp(-2\mu)]/(\mu^2 + \alpha\mu)$.

2) $\forall\mu\in(-1,-\alpha)$ рассмотрим функции $f_n=\vartheta[(1/n-\upsilon)(\upsilon-1/(2n))]\chi(\vec{V}_{\vec r}(\vec\upsilon))$ и $F_n=f_n/\|f_n\|$. Здесь $\vec{V}_{\vec r}(\vec\upsilon)=\{\vec r=(\vec\rho,s)\in V:\ r<\upsilon^{1/2};\ 2\rho<(2\upsilon)^{1/2}>|2s-(s_1+s_2)|\}$. Тогда $|\hat l(\mu)F_n|\geq\left(\int_{\sqrt{\upsilon/2}}^{1}d\eta\, exp[-\int_\eta^s(h+\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}]\right)f_n/\|f_n\|\geq|exp[(s+(\upsilon/2)^{1/2})(\mu+\alpha)/\upsilon]-$ $-1|/(\|f_n\|(-\mu-\alpha))\geq|exp[-(\mu+\alpha)/\upsilon^{1/2}]-1|/(\|f_n\|(-\mu-\alpha))$.

Отсюда следует, что $|\hat l(\mu)F_n|\geq\{exp[-(\mu+\alpha)n^{1/2}]-1\}/|\mu+\alpha|\to\infty$ при $n\to\infty$. В силу замкнутости спектра, и, учитывая результат теоремы 2, имеем доказательство леммы 4.

Заметим теперь, что построенная при доказательстве пункта 3) леммы 4 функция h_0 аналитически может быть представлена в виде $h_0=\{\vartheta_{\vec r}(r-\upsilon^{1/2})+$ $+\alpha\vartheta_{\vec r}[(r-\upsilon)(\upsilon^{1/2}-r)]\}\chi(D)$. Если изменить ее значения на интервалах $(\upsilon-\upsilon^2,\upsilon)$ и $(\upsilon^{1/2},\ c=min\{1,\upsilon^{1/2}+\upsilon^2\})$ в соответствии с формулами $\tilde h_0=\alpha\int_{\upsilon-\upsilon^2}^{\eta}d\xi\ K(\xi,\upsilon-\upsilon^2,\upsilon)$ и $\tilde h_0=\alpha+(1-\alpha)\int_{\upsilon^{1/2}}^{\eta}d\xi\ K\left(\xi,\sqrt{\upsilon},c\right)$, где $K(\xi,\alpha,\beta)=\tilde c\cdot exp\left[1/(\xi^2-\xi\alpha-\xi\beta+\alpha\beta)\right]$, причем, $\int_\alpha^\beta d\xi\ K(\xi,\alpha,\beta)=1$ то, очевидно, что вновь полученная функция $\tilde h_0$ бесконечно дифференцируема, $0\leq\tilde h_0\leq 1$, и, кроме того, $a_s(\tilde h_0)=a_s(h_0)$. (Доказательства этих утверждений опущены, так как они по существу не отличаются от доказательства леммы 4).

Для доказательства теоремы 3 теперь достаточно рассмотреть функции h и $\tilde h$ равные $(A_0-a_0)\cdot h_0((\vec r-\vec r_0)/R,\vec\upsilon)+a_0$ и $(A_0-a_0)\cdot\tilde h_0((\vec r-\vec r_0)/R,\vec\upsilon)+a_0$ в шаре радиуса R с центром в точке $\vec r_0$, целиком лежащем в объеме V при всех $\vec\upsilon$, и A_0 – вне этого шара также при всех $\vec\upsilon$ соответственно.

По построению (и учитывая результат леммы 4)

1) h – кусочно-постоянная (трехзначна), $\tilde h$ – бесконечно дифференцируема.

2) Особые существенные минимум и максимум функций h и $\tilde h$ совпадают и равны a_0 и A_0 соответственно.

3) Спектральный тип $a_s=a_s(h)=a_s(\tilde h)=\alpha A_0+(1-\alpha)a_0$, то есть может принимать любое значение из промежутка $[a_0, A_0]$ при изменении α в промежутке $[0, 1]$*). Теорема 3 доказана.

Теорема 1 ничего не говорит об инвариантности числа $a_s=a_s(-\tilde L_p)$ по индексу p. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 4. Спектральный тип a_s операторов $-\tilde L_p$ не зависит от индекса p. Лемма 5.

$$\|\tilde l(\beta)\|_\infty=\|\tilde l(\beta)\chi(D)\|_\infty\,. \tag{5}$$

Действительно, $\|\tilde l(\beta)\chi(D)\|_\infty\leq\|\tilde l(\beta)\|_\infty\cdot\|\chi(D)\|_\infty=\|\tilde l(\beta)\|_\infty$, а с другой стороны: $\|\hat l(\beta)\|_\infty=\sup\limits_{\|F\|_\infty=1}\|\hat l(\beta)F\|_\infty\|\chi(D)\|_\infty=\sup\limits_{\|F\|_\infty=1}\underset{D}{VM}\,|\int_{s_1}^{s}\frac{d\eta}{\upsilon}(exp[-\int_\upsilon^s\frac{d\xi}{\upsilon}(h+\beta)])F(\eta)|\leq\|\hat l(\beta)\chi(D)\|_\infty=$ $=\underset{D}{VM}\int_{s_1}^{s}\frac{d\eta}{\upsilon}(exp[-\int_\upsilon^s\frac{d\xi}{\upsilon}(h+\beta)])$ и аналогично для оператора $\hat l'(\beta):\|\hat l'(\beta)\|_\infty\leq\|\hat l'(\beta)\chi(D)\|_\infty$

Доказательство теоремы 4. Если $\beta\in\sigma(-\tilde L_\infty)$, то $\exists\tilde D\subset D$, такая что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\underset{\tilde D_{0,\varepsilon}}{Vm}|\tilde l(\beta)\chi(D)|=\infty$ причем, в силу абсолютной непрерывности функции $\tilde l(\beta)\chi(D)$ по переменной s можно считать, что $\tilde{D} = \tilde{Q} \times [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$.

Воспользуемся сопряженностью операторов $\hat{l}_1^{+}(\beta) = \hat{l}'_\infty(\beta),\ \hat{l}_1^{+}{}'(\beta) = \hat{l}_\infty(\beta)$, которая позволяет доказать с помощью неравенства Гельдера, что на последовательности $u_n = \chi(\tilde{D}_{0,1/n}) / mes\tilde{D}_{0,1/n}$ операторы $\tilde{l}(\beta)$ – неограниченные, так как $\|\breve{l}(\beta)u_n\|_1 = [\int_{\tilde{Q}} dy \int_{\tilde{s}_1}^{\tilde{s}_2} ds\, \breve{l}'(\beta)\chi(\tilde{D}_{0,1/n})] / mes\tilde{D}_{0,1/n} \geq \underset{\tilde{D}_{0,1/n}}{Vm}\ \breve{l}'(\beta)\chi(\tilde{D}_{0,1/n}) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$, и аналогично для $\hat{l}'_1(\beta)$, а операторы $\tilde{l}_p(\beta)$ – неограниченные на последовательности $u_n^{(p)} = \chi(\tilde{D}_{0,1/n}) / (mes\tilde{D}_{0,1/n})^{1/p}$, так как $\|\tilde{l}(\beta)u_n^{(p)}\|_p^p \geq (\|\tilde{l}(\beta)\chi(\tilde{D}_{0,1/n})\|_1 / mes\tilde{D}_{0,1/n})^p \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Последовательности $u_n^{(p)}$ нормированы, так что предельным переходом по p устанавливается одновременная (не)ограниченность операторов $\breve{l}_1(\beta)$ и $\breve{l}_\infty(\beta)$, и $\breve{l}'_1(\beta)$, и $\breve{l}'_\infty(\beta)$. С учетом независимости числа a_s от индекса p для нахождения его может быть использована формула:

$$r_\sigma(\breve{l}_1(\beta)) = \lim_{n\to\infty} \|\breve{l}^n(\beta)\|_1^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \underset{D}{VM}\{\int_0^{s_0/\upsilon} dt \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} exp[-\int_0^t (\beta + h(\vec{\rho} - \tau\cdot\vec{\upsilon}))d\tau]\}^{1/n},$$

справедливость которой с учетом первого резольвентного уравнения следует из леммы 5. Но, по теореме об отображении спектров $r_\sigma(\breve{l}(\beta)) = 1/(\beta + a_s)$. Поэтому, спектральный тип a_s равен

$$a_s = 1/\{\lim_{n\to\infty} \underset{D}{VM}[\int_0^{s_0/\upsilon} \frac{t^{n-1}dt}{(n-1)!} exp[-\int_0^t (\beta + h)d\tau]]^{1/n}\} - \beta; \quad \beta \in \rho(-\tilde{L}), \tag{6}$$

В частности, при $h \neq h(s)$ приходим к интересной формуле:

$$1/\left\{\lim_{n\to\infty} \underset{Q}{VM}[\int_0^{s_0/\upsilon} dt \frac{t^n}{n!} exp[-t(h+\beta)]]^{1/n}\right\} - \beta = \lim_{\varepsilon\to 0} \underset{Q_{0,\varepsilon}}{Vm}\ h(\vec{\rho}, \vec{\upsilon}), \tag{6a}$$

справедливость которой следует из равенства $a_s(h(\vec{\rho}, \vec{\upsilon})) = a_0(h)$, поскольку $\forall\delta > 0\ \forall\mu > a_0\ \exists\tilde{Q} \subseteq Q$: $\forall\varepsilon > 0\ mes\tilde{Q}_{0,\varepsilon} > 0$ и $\mu - h < \delta$ при $(\vec{\rho}, \vec{\upsilon}) \in \tilde{Q}$.

Следовательно, $\chi(\tilde{D}) \notin D(\tilde{l}(\mu)) \Rightarrow (-\mu) \in \sigma(-\tilde{L})$, здесь $\tilde{D} = \tilde{Q} \times [s_1, s_2]$.

<u>Лемма 6</u>. Множество $\tilde{Q}_y = \tilde{W}_\upsilon \times \tilde{f}_\rho(\vec{\upsilon}) \subseteq Q$ $(mes\tilde{Q}_y > 0)$ и множества $\tilde{S}_1 = [\tilde{s}_1(y), \tilde{s}_2(y)]$ такие, что

$$\lim_{0<\varepsilon<E\to 0} \underset{\tilde{Q}_{\varepsilon,E}}{Vm}[\tilde{l}(-\mu)\chi(\tilde{D})](\tilde{s}_i(y)) = \infty, \quad здесь \quad i=1,2; \quad \tilde{D} = \tilde{Q}_y \times \tilde{S}_s(y) \tag{7}$$

существуют тогда и только тогда, когда $(-\mu) \in \sigma(-\tilde{L}_\infty)$.

<u>Доказательство</u>: В силу абсолютной непрерывности $\tilde{l}(-\mu)\chi(D)$ по s функций из соотношения (7) следует, что $\lim_{0<E\to 0} \underset{\tilde{Q}_{\varepsilon,E}}{Vm} \underset{\tilde{S}(y)}{VM} \tilde{l}(-\mu)\chi(\tilde{D}) = \infty$, а следовательно, и $\lim_{0<\varepsilon\to 0} \underset{\tilde{D}_{\varepsilon,E}\cap\tilde{D}}{VM} |\tilde{l}(-\mu)\chi(\tilde{D})| = \infty$, то есть $(-\mu) \in \sigma(-\tilde{L}_\infty)$.

Если, напротив, множеств $\tilde{Q}$ и $\tilde{S}$ с указанными свойствами не существует, то для всех множеств $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_y \times \mathcal{S}_s(y)$ имеем последовательно:

$$\overline{\lim_{0<\varepsilon<E\to 0}} \underset{\mathcal{Q}_{\varepsilon,E}}{Vm}[\mathcal{I}(-\mu)\chi(\mathcal{D})](\mathcal{S}_i(y)) < \infty; \qquad \overline{\lim_{0<\varepsilon<E\to 0}} \underset{\mathcal{Q}_{\varepsilon,E}}{VM}[\mathcal{I}(-\mu)\chi(\mathcal{D})](\mathcal{S}_i(y)) < \infty;$$

$VM_{\mathcal{Q}}[\mathcal{I}(-\mu)\chi(\mathcal{D})](\mathcal{S}_i(y)) < \infty$. То есть функция $\Psi(s) = VM_{\mathcal{Q}}[\mathcal{I}(-\mu)\chi(\mathcal{D})](s)$ ограничена в существенном и измерима по s почти при всех $y \in \mathcal{Q}$. Полагая теперь $Q = \mathcal{Q}$, $\mathcal{S}_i = s_i(y_0)$, ·из последнего соотношения получаем неравенство $VM_D|\mathcal{I}(-\mu)\chi(\mathcal{D})|<\infty$, совпадающее с условием непрерывности операторов $\mathcal{I}_\infty(-\mu)$. Итак, показано, что в этом случае $(-\mu) \in \rho(-\mathcal{L}_\infty)$. Лемма 6 доказана.

Замечание 6. Переходя, если надо, к некоторому подмножеству $D^* \subseteq \widetilde{D}$ можно считать, что условие (7) выполнено в более сильной форме:

$$\forall \mu \geq a_s \quad \lim_{0<\varepsilon<E\to 0} \min_{Q^*_{\varepsilon,E}} \int_{s_1^*}^{s_2^*} \frac{ds}{\upsilon} exp[-\int_S^{s_2^*} \frac{d\xi}{\upsilon}(h-\mu)] = \infty; \tag{8}$$

причем, меры $mesQ^*$ и $mesS^*_s(y) = f^*(\upsilon)$ строго положительны (последняя при $\upsilon > 0$). Очевидно также, что верхний предел $\overline{\lim_{\upsilon\to 0}} f^*(\upsilon)/\upsilon = \infty$, иначе левая часть выражения (8) оценивалась бы сверху величиной $B \cdot \exp B(\mu - a_s)$, где $B = \sup_{\upsilon} f^*(\upsilon)/\upsilon$.

Замечание 7. Множества D^* и $\widetilde{D}$, рассмотренные выше, можно считать независимыми от точки $\lambda \in \sigma(-\mathcal{L})$. Это следует из соотношения $\forall \Delta \in \{\mathcal{D}(Re\lambda)\}\ \forall \lambda' : Re\lambda' \geq Re\lambda \Rightarrow \Delta \in (\mathcal{D}(Re\lambda'))$, вытекающего из неравенства $\mu' = Re\lambda' \geq Re\lambda = \mu \Rightarrow exp[\int_\eta^s \frac{d\xi}{\upsilon}(\mu' - h)] \geq exp[\int_\eta^s \frac{d\xi}{\upsilon}(\mu - h)]$.

Соотношения (6-8) определяют спектральный тип a_s оператора переноса в терминах резольвенты $\acute{l}(\lambda)$. Охарактеризовать спектральный тип a_s оператора переноса $-\acute{L}$ в терминах самого оператора переноса, то есть в терминах D_μ множеств уровня функции h, порождающей этот оператор: $D_\mu = \{x \in D : h(x) < \mu\}$, видимо, невозможно. (См., впрочем, ниже результат пункта 2 теоремы 9) Однако лемма 6 позволяет уточнить нижнюю оценку для числа a_s, давая ее, тем не менее, в терминах самого оператора переноса $-\acute{L}$. Рассмотрим при $\mu > a_s$ функцию

$$H_{\varepsilon,E} = \min_{Q^*} \underset{S^*(y)}{VM}[-\int_s^{s_2^*} \frac{d\eta}{\upsilon}(h-\mu)] \tag{9}$$

Здесь множества Q^*, S^* и $D^* = Q^* \times S^*$ обладают свойствами, сформулированными в замечании 6. Если существует число $\mu' > a_s$ такое, что $\overline{\lim_{0<\varepsilon<E\to 0}} H_{\varepsilon,E}(\mu') = B < \infty$, то в противоречие с заключением леммы 6 неравенство $\overline{\lim_{0<\varepsilon<E\to 0}} \min_{Q^*_{\varepsilon,E}} \int_{s_1^*}^{s_2^*} \frac{ds}{\upsilon} exp[-\int_s^{s_2^*}(h-\mu)\frac{d\xi}{\upsilon}] \leq \frac{B}{\mu'-\mu} < \infty$ будет справедливо. Из полученного результата:

$$\overline{\lim_{0<\varepsilon<E\to 0}} H_{\varepsilon,E}(\mu) = \infty \quad npu \quad \mu > a_s \tag{10}$$

выведем соотношение $\overline{\lim\limits_{0\langle\varepsilon\langle E\to 0}} K_{\varepsilon,E}(\mu)=\infty$, где $K_{\varepsilon,E}(\mu)=\min\limits_{Q^*_{\varepsilon,E}} mes[S^*(y) I\ \ D^{(\mu)}]/\upsilon$.

В самом деле, если при некотором $\mu' > a_s$ имеет место оценка $\overline{\lim\limits_{0\langle\varepsilon\langle E\to 0}} K_{\varepsilon,E}(\mu')=B\langle\infty$, то, учитывая неравенство $h(x)\ge af(D^{(\mu')})+\mu'(1-f(D^{(\mu')})$, оценим сверху интеграл в соотношении (9): $\forall\mu<\mu'$

$$\underset{S^*(y)}{VM}[-\int_s^{s_2^*}\frac{d\xi}{\upsilon}(h-\mu)]\le \underset{S^*(y)}{VM}\{\frac{\mu-a}{\upsilon}mes([s,s_2^*]I\ \ D^{(\mu')})-\frac{\mu'-\mu}{\upsilon}mes([s,s_2^*]I\ \ ([s_1^*,s_2^*]\setminus D^{(\mu')}))\}\le$$
$$\le \underset{S^*(y)}{VM}(\mu-a)\cdot mes([s_1^*,s_2^*]I\ \ S^{(\mu')}(y))/\upsilon.$$

Следовательно, в противоречие с соотношением (10) имеем неравенство $\overline{\lim\limits_{0<\varepsilon<E\to 0}} H_{\varepsilon,E}(\mu)\le(\mu-a)B$. Итак, доказана <u>теорема 5</u>: $\tilde{a}\le a_s$ коль скоро

$$\tilde{a}= sup\{\mu : \underset{D}{VM}\, mes([s_1,s_2]\cap D^{(\mu)})/\upsilon<\infty\}=inf\{\mu:\exists D^*=Q^*\times[s_1^*,s_2^*];$$
$$\forall\varepsilon>0\quad mesD^*_{0,\varepsilon}>0;\ \ \lim_{E\to 0}\min_{Q^*_{\varepsilon,1}} mes([s_1^*,s_2^*]\cap D^{(\mu)})/\upsilon=\infty\}. \qquad (11)$$

1.3. Исследуем тонкую структуру спектров операторов $\tilde{\mathcal{L}}_1$ и $-\tilde{\mathcal{L}}_\infty$. Этот вопрос не был рассмотрен в Пр.4. <u>Теорема 6</u>. Спектры этих операторов остаточные.

<u>Доказательство</u>. Как и в теореме 1 воспользуемся формулой: $\forall\ \mu = Re\lambda$ $\tilde{\mathcal{L}}(\lambda)f\, exp[(\pm i)\int_{s_1}^{s}\frac{d\xi}{\upsilon}Im(h+\lambda)]=exp[(\pm i)\int_{s_1}^{s}\frac{d\xi}{\upsilon}Im(h+\lambda)]\,|\tilde{\mathcal{L}}(\mu)|\,f$, которая показывает, что $L_D^\infty\ne\overline{R(\tilde{\mathcal{L}}(\lambda))}\ne L_D^{1e}$, коль скоро этим же свойством обладает область значений $R(|\tilde{\mathcal{L}}(\mu)|)$. В самом деле, операторы $\tilde{M}$ – умножения на взаимно обратные (с единичными нормами) функции $exp[(\pm i)\int_{s_1}^{s}d\xi\, Im(h+\lambda)/\upsilon]$, то есть ограничены и ограниченно обратимы в пространствах L_D^∞ и L_D^{1e}, $\tilde{M}\tilde{R}_D^{(\tilde{\mathcal{L}})\infty}={}^{(\tilde{\mathcal{L}})}\tilde{R}_D^\infty$, и поэтому, $R(|\tilde{\mathcal{L}}(\mu)|)$ и $exp[(\pm i)\int_{s_1}^{s}Im(h+\lambda)\frac{d\xi}{\upsilon}]\,R(|\tilde{\mathcal{L}}(\mu)|)$ плотны или не плотны в пространствах L_D^∞ и L_D^{1e} одновременно. Поэтому далее ограничиваемся доказательством того, что в случае, когда $Imh = 0$; $\forall\mu\ge a_s$; $(-\mu)\in R_\sigma(-\tilde{\mathcal{L}}_1)$, $R_\sigma(-\tilde{\mathcal{L}}_\infty)$. Для этого достаточно показать, что найдется функция $f_0\in D(\tilde{\mathcal{L}}_1)$, такая что $\forall f:\ \ \|f-f_0\|_\infty<0.5\ \ \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\|\tilde{\mathcal{L}}(-\mu)f\chi(D_{\varepsilon,1})\|_\infty=\infty$ при $\mu\ge a_s$.

Рассмотрим множество D^*, определенное в лемме 6, и заметим, что почти при всех $y\in Q^*$ можно полагать $s_1\ne s_1^*$ и $s_2\ne s_2^*$, так как в противном случае можно вместо отрезка $[s_1^*,s_2^*]$ рассмотреть его часть $[s_1^0,s_2^0]$ такую, что $|s_i^o-s_i^*| = 0{,}5\upsilon^2\,|s_2^*-s_1^*|$, оставляя справедливым основное соотношение (9).

Пусть теперь функция f_0 такова, что $0\le f_0\le 1$; $f_0(y,s) = 0$ при $y\in Q^*$; $f_0(y,s_1)=f_0(y,s_2)=0$; $f_0(y,s) = 1$ при $|s-s_i|\ge min\{(s_2^*-s_1^*),(s_1^*-s_1),(s_2-s_2^*)\}$ и $\tilde{\mathcal{L}}f_0\in[{}^{(\tilde{\mathcal{L}})}\tilde{R}_D^\infty]$. (Всем сформулированным требованиях удовлетворяет, например, функция f_0, где $\tilde{s}_i$ выбраны так, чтобы выполнялись равенства $|s_i-\tilde{s}_i|=\delta$: $f_0=\chi(Q^*)\cdot\int_{s_1}^{s}\frac{d\xi}{2}\sum_{i=1}^{2}(-1)^{i-1}\{|s_i-\tilde{s}_i|-|2s-(s_i+\tilde{s}_i)|\}\vartheta[(s_i+\tilde{s}_i)\xi-\xi^2-s_i\tilde{s}_i](s_i-\tilde{s}_i)^{-2}$.)

Тогда при $\delta<\upsilon/(\mu-a)\cdot ln(1+2(\mu-a)[1+exp(d(\mu-a)/\upsilon)])$, если $\mu>a$ и при $\delta<\upsilon$, если $\mu=a$ при всех функциях $f\in L_D^\infty$ таких, что $\|f-f_0\|_\infty<0.5$ имеют место неравенства $\|\hat{l}(-\mu)f\chi(D_{\varepsilon,1})\|_\infty \geq \|\hat{l}(-\mu)\chi(D^*)\chi(D_{\varepsilon,1})/2-\hat{l}(-\mu)\chi(\hat{D})\chi(D_{\varepsilon,1})/2\|_\infty \geq$ $\geq \|\hat{l}(-\mu)\chi(D^*)\chi(D_{\varepsilon,1})/2-1\|_\infty \to \infty$, при $\varepsilon \to 0$. Здесь $\hat{D} = Q^* \times([s_1,\tilde{s}_1] \cup [\tilde{s}_2,s_2])$, $|s_i-\tilde{s}_i| = \delta$, $d=diamV$. Итак, на расстоянии меньшем $0,5$ от функции f_0 нет функций из $D(\hat{l}(\mu)) = R(\hat{l}(-\mu))$. При доказательстве остаточности спектра операторов $-\hat{L}_\infty$ можно вместо функции f_0 взять $\chi(D)$. Доказательство теоремы 6 закончено.

Замечание 8. Согласно теореме об отображении спектров, спектры операторов $\hat{l}(\lambda)$, являющиеся кругами с центром в точке $A = (0;(a_s+Re\lambda)/2)$ радиуса $r = (a_s+Re\lambda)/2$ являются непрерывными при $p < \infty$ и остаточными при $p = \infty$. Исключение составляет точка $\lambda = 0$ (образ точки ∞ из расширенного спектра операторов $-\hat{L}_1$, принадлежащая $C_\sigma(\hat{l}_1^e)$ согласно следствию из теоремы 5.12.2 работы [10].

2 Спектральный анализ полугруппы оператора переноса частиц $-\hat{L}$.

2.1. Свойство с.4 и предложение Пр.6 из §1 показывают, что операторы $-\hat{L}$ являются производящими операторами взаимосопряженных полугрупп $\hat{T}(t,-\hat{L})$ класса (C_0). При $p = \infty$ следует вместо полугрупп $\hat{T}_\infty(t)$, не являющихся (C_0)-полугруппами ввиду неплотности $(\hat{R}_D)^\infty$ в L_D^∞, рассматривать полугруппы $\hat{T}_1^e{}'(t)$ и $\hat{T}_1^e(t)$, сопряженные по Филлипсу соответственно к полугруппам $\hat{T}_1'(t)$ и $\hat{T}_1(t)$. (Здесь и далее под полугруппами $\hat{T}(t)$ понимаются полугруппы, порожденные операторами $-\hat{L}$. При одновременном рассмотрении полугрупп $\hat{T}(t,\hat{K}) = \hat{T}(t, -\hat{L}+\hat{K})$ и $\hat{T}(t, -\hat{L})$ последние будут рассматриваться как невозмущенные и обозначаться через $\hat{T}_0(t)$.) Полугруппы $\hat{T}(t)$ можно выписать в явном виде. Непосредственная проверка показывает, что если $f_t' = -\hat{L}f$, $f(0) = f_0$, то

$$f(t) = f_0(\vec{r} \mp \vec{\upsilon}t,\vec{\upsilon})\exp[-\int_0^t h(\vec{r} \mp \vec{\upsilon}\tau,\vec{\upsilon})d\tau] \tag{12}$$

(функции f и h считаем продолженными нулем на все пространство $\mathbb{R}_r^3$). Воспользовавшись связью между спектрами полугруппы и ее производящего оператора, а также результатами спектрального анализа операторов $-\hat{L}$, можно утверждать, что, во-первых, $\{\lambda : 0<|\lambda| \leq \exp[-a_s t]\} \subseteq \sigma(\hat{T}(t))$, а, во-вторых, $\rho(\hat{T}(t)) \subseteq \{\lambda : |\lambda| > \exp[-a_s t]\}$, а если знаки включений строгие, то оставшаяся часть комплексной плоскости принадлежит непрерывному спектру полугрупп $\hat{T}(t)$. Исключением, как всегда, является точка $\lambda = 0$. Используя явный вид полугрупп $\hat{T}(t)$, легко показать, что $0 \in P\sigma(\hat{T}(t))$, причем $Nul0 = \infty$ так что взаимосопряженные операторы $\hat{T}(t)$ заведомо не являются полуфредгольмовыми. Действительно, $\hat{T}(t)f \equiv 0$ коль скоро $f(\vec{r},\vec{\upsilon})=0$ при $\upsilon < 2d/t$.

2.2. Исследуем теперь нормы полугрупп $\hat{T}(t)$, для чего, прежде всего, оценим норму степеней операторов $\hat{l}(\lambda)$:

$$\|\hat{l}^n(\lambda)F\|_1 \cdot \|F\|_1^{-1} \leq \underset{D}{VM}\int_s^{s_2}\frac{(\eta-s)^{n-1}d\eta}{(n-1)!\upsilon^n}\exp[-\int_s^\eta \frac{d\xi}{\upsilon}(h-\mu)] \leq$$

$$\leq \underset{D\times S^0}{VM}\exp[-\int_s^\eta \frac{d\xi}{\upsilon}(h-\mu')]\,\underset{D}{VM}\int_s^{s_2}\frac{(\eta-s)^{n-1}d\eta}{(n-1)!\upsilon^n}\exp[(\mu-\mu')(\eta-s)/\upsilon] = M^0(\mu')I(n);$$

здесь $-\omega_0 < Re\lambda' = -\mu' < -\mu = Re\lambda$, а $S^0 = \{\eta \in [0,s^0]\}$, $S_0 = \{\eta \in [-s_0,0]\}$. Учитывая определение числа $-\omega_0 = \lim_{t\to\infty} ln\|\hat{T}(t)\|/t$ – типа полугруппы $\hat{T}(t)$ и то, что точка

$\mu' \in \rho(-\hat{L}_1)$, заключаем, что $M^0(\mu')<\infty$. Для величины $I(n)$ имеется следующая оценка $I(n) \le \int_0^\infty \frac{t^{n-1}dt}{(n-1)!\upsilon} exp[t(\mu-\mu')/\upsilon] = (\mu'-\mu)^{-n}$. Аналогичные оценки справедливы и для операторов $\tilde{T}_1(\lambda)$ и $\tilde{T}_\infty(\lambda)$. Учитывая равенства $\hat{l}_1^+ = \hat{l}'_\infty$ и $\hat{l}_\infty = \hat{l}'^+_1$, оценки норм функций в L_D^p : $\| f \|_{p_1} \le (mesD)^{1/p_1-1/p_2} \| f \|_{p_2}$ и применяя интерполяционную теорему ([12], с.34), на основании теоремы Хилле-Иосида-Филлипса $\forall \omega < \omega_0$ получаем оценки (13) с константами $M_0 = M_0(\omega) = \underset{D\times S_0}{VM} exp[-\int_s^\eta \frac{d\xi}{\upsilon}(h+\omega)]$ и $M^0 = M^0(\omega) = = \underset{D\times S^0}{VM} exp[-\int_s^\eta \frac{d\xi}{\upsilon}(h+\omega)]$:

$$\| \hat{T}(t) \|_p \, exp[\omega t] \le (M_0)^{1/q}(M^0)^{1/p}; \quad \| \hat{T}'(t) \|_p \, exp[\omega t] \le (M_0)^{1/p}(M^0)^{1/q}.; \tag{13}$$

Далее, рассмотрим нормы $\| \tilde{T}(t)F \|_p$ при $\| F \|_p = 1$. $p = \infty$; следовательно, при $D_t = \{ x \in D : x = (\vec{r}, \vec{\upsilon}); \vec{r} - \vec{\upsilon}t \in V \}$ имеем следующую оценку: $\| \tilde{T}(t) \|_\infty \ge \| \tilde{T}(t)\chi(D) \|_\infty =$ $= \underset{D_t}{VM} \, exp[-\int_0^t Re\, h d\tau] = exp[-\underset{D_t}{VM} \int_0^t Re\, h d\tau]$.

Таким образом, $\| \tilde{T}(t) \|_\infty \le sup \| \tilde{T}(t)F \|_\infty \le sup VM_D \, | F | \, VM_{D_t} \, | \tilde{T}(t)\chi(D) | = \| \tilde{T}(t)\chi(D) \|_\infty$. Если же $p < \infty$, то $\| \tilde{T}(t) \|_p = sup \| \tilde{T}(t)F \|_p = sup\{ \int_{D_t} dx \, | F |^p \, exp[-p\int_0^t Re\, h d\tau] \}^{1/p} \le$ $\le \underset{D_t}{VM} \, exp[-\int_0^t Re\, h d\tau] = \| \tilde{T}(t) \|_\infty$. Следовательно, $\forall n > N$ для $F_n = f_n / \| f_n \|$; $f_n = \chi(D_t^{(n)})$, таких что $\underset{D_t^{(n)}}{Vm} | \tilde{T}(t) f_n | \ge (\underset{D_t}{VM} | \tilde{T}(t)\chi(D) | - 1/n)$ имеем

$$\| \tilde{T}(t) \|_p \ge \| \tilde{T}(t)F_n \|_p \ge (\| \tilde{T}(t) \|_\infty - 1/n). \tag{14}$$

Здесь N произвольно велико.

Следствием этих неравенств является инвариантность нормы полугрупп $\tilde{T}(t)$:

$$\| \tilde{T}(t) \| = exp[-\underset{D_t}{Vm} \int_0^1 Reh(\vec{r}_{(m)}\tau\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}) d\tau] \tag{15}$$

по индексу p а, следовательно, и совпадение норм полугрупп $\hat{T}(t)$ и $\hat{T}^+(t) = \hat{T}'(t)$. В случае $p = \infty$ имеем дополнительно $\| \tilde{T}^e(t) \| \ge \| \tilde{T}(t) \|_\infty$ поскольку, согласно Пр.6, в пространстве L_D^{le} нормы, порожденная оператором $\hat{L}$: $\| F \|'$ и индуцированная из пространства $L_D^\infty \supset L_D^{le}$: $\| F \|_\infty$, совпадают.

Инвариантность нормы полугрупп $\tilde{T}(t)$ влечет за собой инвариантность по p их типов – ω_0, которые с учетом формулы (15) вычисляются следующим образом:

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \underset{D_t}{Vm} \int_0^t Re\, h(\vec{r}_{m}\vec{\upsilon}\tau, \vec{\upsilon}) \frac{d\tau}{t} = \inf_{t>0} \underset{D_t}{Vm} \int_0^t Re\, h \frac{d\tau}{t} \tag{16а}$$

Меняя переменные в формуле (16а), во-первых, по формулам $t = 1/\upsilon$, $\tau/t = \xi$, $\vec{r}_m t\vec{\upsilon} = \vec{r}'$, а, во-вторых, по формулам $\upsilon t = \eta$, $\upsilon\tau = \xi$, приходим к двум выражениям для типа – ω_0:

$$\omega_0 = \lim_{1/d > \upsilon \to 0} \underset{V\times V}{Vm} \int_0^1 d\xi \, Re\, h(\xi\vec{r} + (1-\xi)\vec{r}', \upsilon(\vec{r} - \vec{r}')), \quad Re\, h \ge 0; \tag{16б}$$

$$\omega_0 = \inf_{\upsilon>0} \underset{D\times S_0}{Vm} \int_0^\eta \frac{d\xi}{\eta} Re\, h(\vec{r} - \xi\vec{\Omega}, \vec{\upsilon}); \tag{16в}$$

Формула (16в) будет важна для спектрального анализа полугрупп $\mathcal{T}(t)$, а формула (16б) удобна в практическом отношении.

Подытожим полученные результаты в Теореме 7.

Полугруппы $\mathcal{T}(t)$, порожденные операторами $-\mathcal{L}$, являются (C_0)-полугруппами в пространствах L_D^p, $p < \infty$ и в пространстве L_D^{le}. Явный вид полугрупп задается формулой (12), а скорость их роста – формулой (13). Нормы и тип полугрупп $\mathcal{T}(t)$ инвариантны по p и задаются соответственно формулами (15) и (16).

2.3. Дальнейшее связано с уточнением спектральных характеристик полугрупп $\mathcal{T}(t)$.

Теорема 8. $\lambda \in \sigma(\mathcal{T}(t))$ при $|\lambda| < exp[-\omega_0 t]$.

Лемма 7. $\lambda \in \sigma(\mathcal{T}(t)) \Rightarrow \forall \nu \in \check{Y}, \forall$ действительной функции $H(x)$: $\mu = exp[i\nu] \in \sigma(\mathcal{Z}(t))$, здесь полугруппы $\mathcal{Z}(t)$ порождены функцией $[h(x) + iH(x)]$.

Доказательство. Пусть $\{U_n\}$ – последовательность Хилле для операторов $[\lambda\hat{I} - \mathcal{T}(t)]$. Тогда последовательности $\{u_n\}_{1,2} = \{U_n\, exp\, i[\nu|s_{1,2} - s|/(\upsilon t) + \int_0^{|s_{1,2}-s|/\upsilon} d\tau H(\vec{r} \mp \vec{\upsilon}\tau, \vec{\upsilon})]\}$ суть последовательности Хилле для операторов $[\mu\hat{I} - \mathcal{Z}(t)]$, соответственно. Действительно, $\forall n$ $\|U_n\| = \|(u_n)_{1,2}\|$ и $[\mu\hat{I} - \mathcal{Z}(t)](u_n)_{1,2} =$

$= ([\lambda\hat{I} - \mathcal{T}(t)]U_n)\, exp[i\{\nu + \nu|s_{1,2} - s|/(\upsilon t) + \int_0^{|s_{1,2}-s|/\upsilon} d\tau H(\vec{r} \mp \vec{\upsilon}\tau, \vec{\upsilon})\}]$, отсюда следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы. Предположим противное: $\{\lambda : |\lambda| < exp[-\omega_0 t]\} \cap \rho(\mathcal{T}(t)) \neq \neq \phi$. Тогда, учитывая то, что $r_\sigma(\mathcal{T}(t)) = exp[-\omega_0 t]$, и результат леммы 1, получаем разбиение спектра $\sigma(\mathcal{T}(t))$ на две части $\sigma_2 = \{\lambda : exp[-(\omega_0 + k)t] \le |\lambda| \le exp[-\omega_0 t]\}$ и $\sigma_1 = \{\lambda : |\lambda| \le exp[-(\omega_0 + \kappa)t]\}$, где $k < \kappa$ в силу открытости множества $\rho(\mathcal{T}(t))$. В соответствии с этим разбиением пространство L_D^p, в котором рассматриваются полугруппы $\mathcal{T}(t)$ может быть разложено в прямую сумму $L_D^p = \mathsf{L}_1 \oplus \mathsf{L}_2$, так что $\sigma(\mathcal{T}_i(t)) = \sigma(\mathcal{T}(t)|_{\mathsf{L}_i}) = \sigma_i$. Исходя из этого, получаем на основании теорем 12.3.2 и 16.7.8 работы [10], что $\mathcal{T}_2(t)$ суть группы, а, следовательно, в L_2 входят только функции, убывающие при $\upsilon \to 0$ быстрее любой степени функции $exp[s/\upsilon]$. Следовательно, для того, чтобы представить функции f_n из соотношения (14) в виде суммы $\varphi_n^{(1)} + \varphi_n^{(2)}$, где $\varphi_n^{(i)} \in L_i$, функции $\varphi_n^{(1)}$ должны экспоненциально мало по υ отличаться от 1 на множествах $D_t^{(n)}$ при достаточно больших t. Поэтому тип полугрупп $\mathcal{T}(t)$ обязан совпадать с $-\omega_0$ в противоречие со сделанным предположением.

Дальнейшие результаты связаны с оценкой величины чисел a_s, ω_0, a_0.

Теорема 9.

1) $\omega_0 \le a_s$, причем возможен случай строгого неравенства.

2) $\omega_0 \le a_0$, причем также возможен случай строгого неравенства.

Доказательство. Неравенство $\omega_0 \le a_s$ есть следствие включения $exp\, t\sigma(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{T}(t,\hat{A}))$, составляющего результат теоремы 16.7.1 работы [10]. Для того чтобы построить операторы $-\hat{L}$ и $\hat{T}(t,-\hat{L})$ с $\omega_0 \neq a_s$, достаточно взять в качестве функции h, порождающей $-\hat{L}$ и

$\hat{T}(t)$, функцию из леммы 4 при $\alpha = 1$. В этом случае $a_s(-\hat{L}) = 1$, но, согласно формуле (16в), $\omega_0(\hat{T}(t,-\hat{L}))=0$.

1) Докажем, что $\forall\varepsilon > 0$ число $\beta = \varepsilon - a_0$ есть порядок роста полугрупп $\tilde{T}(t)$ то есть $exp\,[\,t(a_0 - \varepsilon\,)]\,||\,\tilde{T}(t\,)\,||_p \le const$. Для этого рассмотрим величину $I(\varepsilon\,) = exp[\,t(a_0 - \varepsilon\,)]\,||\,\tilde{T}(t\,)f\,||_p$ при $||\,f\,||_p = 1$. Для достаточно больших t $I(\varepsilon)$ = $= \{\int_{D_{0,d/t}} dx\,|\,f\,|^p\, exp[\,p\int_0^t d\tau(a_0 - \varepsilon - Reh)]\}^{1/p}$. Но, $(a_0 - \varepsilon - Reh) < 0$ при $\upsilon < \upsilon_1 = \upsilon_1(\varepsilon)$, а потому, $I(\varepsilon) < 1$ при $t > d/\upsilon_1$. Далее, $max\,||\,\tilde{T}(t\,)\,||_p < \infty$, следовательно, $||\,\tilde{T}(t\,)\,||_p \le M(\varepsilon\,)exp[-t(a_0 - \varepsilon\,)]$, где $M(\varepsilon\,) \le max\{1, exp[\,-ad/\upsilon_1(\varepsilon\,)]\}$.

Для того чтобы построить пример полугруппы $\hat{T}(t)$, такой что $\omega_0 \ne a_0$, рассмотрим в качестве объема V единичный шар, а в качестве функции h такую функцию, что $h(r)$ = $\chi(E)$, где множество $E \subset [0,1]$ удовлетворяет следующему условию: $\forall[\,\alpha,\beta\,] \subseteq [\,0,1\,];\ \{\,mes(EI\ [\,\alpha,\beta\,])\,/\,mes(([\,0,1\,] - E\,)I\ [\,\alpha,\beta\,]\,)\}=c \in (0,1)$. Существование таких множеств следует, например, из результатов работы [13], с.50. Очевидно, что $a_0(h)$ = 0, но, $\omega_0 = \inf_{v>0} \underset{D\times S_0}{Vm}\int_0^\eta h\frac{d\tau}{\eta} = \min_{0<x<1}\int_0^x \chi(E\,)\frac{d\xi}{x} = c$, так что $\omega_0 \ne a_0$.

Пункт 1) Теоремы 9 показывает, что спектральный анализ операторов переноса $-\hat{L}$ и газокинетического $\hat{\Lambda}$, порожденных произвольной функцией $h \in L_D^\infty$, не дает полной информации о поведении решений задач Коши с соответствующими операторами во времени, если эти задачи рассматриваются в пространствах L_D^p. Поэтому, следует выделить важный для приложений класс функций $\mathcal{K} \subset L_D^p$ таких, что границы спектров построенных по этим функциям операторов $-\hat{L}$ и $\hat{T}(t)$ связаны равенством $a_s = \omega_0$. Необходимо также оценить, насколько широк вновь введенный класс $\mathcal{K}$. Наиболее общие из рассматривавшихся ранее при спектральном анализе операторов $-\hat{L}$ и $\hat{\Lambda}$ функции h – удовлетворяющие газовой модели вещества и такие, что $h(\vec{r},\vec{\upsilon}\,) = a(\vec{r}\,) + \upsilon h'(\vec{r},\vec{\upsilon}\,)$ ([2], cc. 35, 171) очевидно входят в класс $\mathcal{K}$.

2.4. Завершим спектральный анализ операторов $-\tilde{L}$ и $\tilde{T}(t)$ доказательством <u>Теоремы 10</u>. Пусть функция $h(\vec{r},\vec{\upsilon}\,)$ <u>непрерывна в нуле по υ</u>, то есть $\exists h_0 = h_0(\vec{r},\vec{\Omega}\,)$, так что $\lim_{\varepsilon\to 0} \underset{D_{0,\varepsilon}}{VM}\,|\,h - h_0\,| = 0$. Тогда $h \in \mathcal{K}$.

<u>Доказательство</u>. $\omega_0(h\,) = \omega_0(h_0\,)$. Действительно, $|\,\omega_0(h\,) - \omega_0(h_0\,)\,| =$
$=|\lim_{\upsilon\to 0}[\underset{D\times S_0}{Vm}\int_0^\eta \frac{d\xi}{\eta} h(\vec{r} - \xi\vec{\Omega},\vec{\upsilon}\,) - \underset{D\times S_0}{Vm}\int_0^\eta \frac{d\xi}{\eta} h_0(\vec{r} - \xi\vec{\Omega},\vec{\Omega}\,)]\,| \le \lim_{\upsilon\to 0}\underset{D\times S_0}{VM}\int_0^\eta |\,h - h_0\,|\,\frac{d\xi}{\eta} = 0$.

Отсюда следует, что при достаточно малых υ для функции h существуют подмножества $\tilde{Q}_0(\varepsilon\,) \subseteq Q_0$ и $\tilde{S}_0 \subseteq S$ такие, что как только $s;\eta \in \tilde{S}$, а $(\vec{\rho},\vec{\Omega}\,) \in \tilde{Q}_0(\varepsilon\,)$, то $(\omega_0 + \varepsilon\,) >$ $> \int_\eta^s d\xi h(\vec{\rho} + \xi\vec{\Omega},\vec{\upsilon}\,)$, где ε сколь угодно мало. Задавшись μ, таким что $\mu - \omega_0 = 2\varepsilon$, покажем, что $\tilde{T}(-\mu\,) \notin B(L_D^\infty)$. Оценивая на множествах $D_{\delta,1}$ величину нормы $||\,\tilde{T}(-\mu\,)\chi(D\,)\,||_\infty$ снизу, приходим к соотношению $||\,\tilde{T}(-\mu\,)\chi(D_{\delta,1}\,)\,||_\infty \ge \underset{\tilde{D}_{\delta,1}}{VM}\,[exp[\,\varepsilon\,|\,s - \tilde{s}_l\,|\,/\,\upsilon\,] - 1\,]\,/\,\varepsilon \to \infty$ при $\delta \to 0$, так как $\tilde{s}_l \ne \tilde{s}_l(\,\upsilon\,)$. Учитывая результат теоремы 4, получаем требуемое: $\mu \in \sigma(-\tilde{L});\ h \in \mathcal{K}$.

3. Сводка результатов, их обсуждение, приложения и возможные обобщения

3.1. Подытожим результаты спектрального анализа операторов $\tilde{L}$ и $\tilde{T}(t)$ формулировками и кратким обсуждением теорем 1–10, как и в работе [8], но доказанных для случая $D = W_{\vec{\upsilon}} \times V_{\vec{r}}(\vec{\upsilon})$, обобщающего рассмотрение процесса переноса частиц в произвольном компактном выпуклом теле V.

Замкнутые неограниченные с плотными в $L_D^p,\ p<\infty$ областями определения $\tilde{\mathcal{R}}_D^{(\cdot)p}$ сопряженные друг с другом ($1 \le p < \infty$) операторы $-\tilde{\mathcal{L}}_p$ являются производящими операторами (C_0)-полугрупп $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ и обладают следующими спектральными свойствами.

1. Существует число $a_s = a_s(Reh)$, так что вне зависимости от индекса p полуплоскости $Re\,\lambda \le -a_s$ и $Re\,\lambda > -a_s$ состоят соответственно из точек непрерывного спектра и резольвентного множества операторов $-\tilde{\mathcal{L}}_p$. Число a_s определяется по формуле (5) или по формуле (7), и для него справедливы оценки, даваемые формулами (2) и (11), которые являются точными в том смысле, что существуют функции h, порождающие операторы $-\tilde{\mathcal{L}}_p$, так что их спектральный тип a_s совпадает с любым наперед заданным числом из промежутков, определяемых этими формулами.

2. Спектральный радиус резольвент $\tilde{\mathcal{T}}_p(\lambda) = \tilde{R}(\lambda, -\tilde{\mathcal{L}}_p)$ равен $1/(Re\,\lambda + a_s)$, а нормы $\|\tilde{\mathcal{T}}(\lambda)\|_1$ и $\|\tilde{\mathcal{T}}(\lambda)\|_\infty$ определяются формулами (5).

3. Нормы, спектральные радиусы и типы – ω_0 полугрупп $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ инвариантны по индексу p и находятся соответственно по формулам (15-16).

4. Спектральная плоскость полугрупп $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ разбивается на кольцо $0 < |\lambda| \le exp[-\omega_0\tau]$, являющееся их непрерывным спектром, область $|\lambda| > exp[-\omega_0\tau]$ – их резольвентное множество и точку $\lambda = 0$, являющуюся собственным значением бесконечной кратности.

5. Для типа полугрупп $\tilde{\mathcal{T}}(t)$ – ω_0 справедливо неравенство $a_0 \le \omega_0 \le a_s$, причем в общем случае знаки неравенств могут быть строгими. Таким образом, выделяется важный для приложений класс функций $\mathcal{K} \subset L_D^\infty$ такой, что $\forall h \in \mathcal{K}\ \ \omega_0(h) = a_s(h)$. Имеет место важное включение, класс $\mathcal{K}$ содержит непрерывные в нуле по υ функции $h(\vec{r}, \vec{\upsilon})$.

6. На операторы $-\tilde{\mathcal{L}}_1$ распространяются все результаты пунктов 1-5 кроме того, что области определения сопряженных к ним операторов не плотны в L_D^∞. Операторы $-\tilde{\mathcal{L}}_1$ являются e -операторами, причем, $\forall f \in L_D^{1e}\ \ \|f\|_\infty = \|f\|'$.

7. На операторы $-\tilde{\mathcal{L}}_1^e$ и $-\tilde{\mathcal{L}}_\infty$ также распространяются все результаты пунктов 1-5 за исключением сильной непрерывности полугрупп $\tilde{T}(t, -\tilde{\mathcal{L}}_\infty)$ и непрерывности спектров, которые являются остаточными и существенными.

8. $\forall \lambda \in \rho(-\tilde{\mathcal{L}})\ \ C\sigma(\tilde{\mathcal{T}}_1^e(\lambda)) \supset 0 \subset R\sigma(\tilde{\mathcal{T}}_\infty(\lambda))$.

9. Спектры полугрупп $\tilde{\mathcal{T}}_\infty(t)$ и $\tilde{\mathcal{T}}_1^e(t)$ в общем случае имеют следующую структуру: $0 \in P\sigma(\tilde{\mathcal{T}})$; $Nul0 = \infty$; $\{\lambda : exp[-\omega_0 t] < |\lambda| < \infty\} = \rho(\tilde{\mathcal{T}})$; $\{\lambda : 0 < |\lambda| \le exp[-a_s t]\} = R\sigma(\tilde{\mathcal{T}})$;
$\{\lambda : exp[-a_s t] < |\lambda| \le exp[-\omega_0 t]\} = C\sigma(\tilde{\mathcal{T}})$.

3.2. Результаты пп.2, 4, 5, 6, 7 обобщают известные ранее в том случае, когда коэффициент h оператора $-\tilde{L}$ удовлетворяет требованиям, вытекающим из "газовой модели" вещества. Результаты пп.1, 3, 8, 9 – новые.

Рассмотрим также вопрос об определении нормы резольвенты $\widehat{l} \in B(L_D^2)$. Для почти, всех $y \in Q$ $\widehat{l}$ можно рассматривать как одномерный интегральный оператор типа Вольтерра по переменной $s \in [s_1(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0);s_2(\mathbf{r}_0,\mathbf{v}_0)]$. Его норма $N = N(y)$ находится стандартным образом: $N = 1/\lambda_{min}$, где λ_{min} – наименьшее собственное число самосопряженной краевой задачи $\widehat{L}\,\widehat{L}'F = \lambda^2 F$, $F(s_2) = 0$, $\upsilon F'(s_1) = h(\upsilon)F(s_1)$, поскольку $N^2 = \|\widehat{l}'\,\widehat{l}\,\|_2(y)$, а $\widehat{l}'\,\widehat{l} = [\widehat{L}\,\widehat{L}']^{-1}$. Итак, $\|\widehat{l}\,F(y,s)\|_2 \le N(y)\cdot\|F\|_2(y)$, причем неравенство точно в том смысле, что $\forall\varepsilon > 0$ $\exists F_3 \in L^2_{[s_1 s_2]}$: $\|\widehat{l}\,F_3\|_2 \ge (N-\varepsilon)\|F_3\|_2$. Норма оператора умножения на функцию $N(y)$ совпадает с $\underset{y\in Q}{VM}\,|N(y)|$. Отсюда следует, что $\|\widehat{l}\,\|_2 \le \underset{y\in Q}{VM}\,[\lambda_{min}[\widehat{L}\,\widehat{L}'\,](y)]^{-1}$. Полученное выражение для нормы $\|\widehat{l}\,\|_2$ не является явной для неё формулой, поскольку не ясно, как искать λ_{min}, зависящее от произвольной функции $h \in L_D^2$. Однако, в важном частном случае $h = h(\upsilon)$ (перенос частиц в однородном теле) определение $\|\widehat{l}\,\|_2$ можно провести до конца. В этом случае краевая задача имеет вид: $F''_{t^2} = -\beta^2 F$; $F(\delta) = 0$; $\upsilon F'(0) = h(\upsilon)F(0)$; $t = s-s_1$; $\delta = s_2-s_1$; $\beta^2\upsilon^2 = \lambda^2 - h^2$. Рассмотрим три случая: $h > 0$; $h = 0$ и $h > 0$. В первом случае в области $|\lambda| \le h$ нет собственных чисел данной задачи, поскольку в противном случае при $|\lambda| = h$ должно быть $v + h\delta = 0$, а при $|\lambda| < h$ имеем $h(\upsilon)\cdot th(\beta\delta) = -\upsilon\beta$. В области $|\lambda| > h$ общее решение данной задачи имеет вид $C_1 sin\beta t + C_2 cos\beta t$ и на λ накладывается условие $-\upsilon\beta(\lambda) = h(\upsilon)tg(\beta(\lambda)\delta)$, откуда следует, что $\lambda_{min} = min\{h(\upsilon)/|cos\kappa(\upsilon)|\} \ne 0$, где $\upsilon\kappa(\upsilon) = -h(\upsilon)\cdot\delta\cdot tg\kappa(\upsilon)$. Корни этого уравнения $\kappa_n(\upsilon) > 0$ и стремятся к $(2n-1)\pi/2$ сверху, то есть $1/\lambda_{min} = |cos\kappa_1(\upsilon)|/h(\upsilon)$. Во втором случае либо $\lambda_{min} = 0$ при $\upsilon = 0$, то есть $\widehat{l} \notin B(L_D^2)$, если, $a_0(h) = 0$ либо $\lambda_{min} = \upsilon\pi/2\delta = lim_{h\to 0}[h(\upsilon)/|cos\kappa_1(h(\upsilon))|]$. В третьем случае рассуждения, аналогичные приведенным для первого, дают $|h(\upsilon)| > \lambda_{min} = \lambda_0 = ch\kappa_0(\upsilon)/|h(\upsilon)|$, где κ_0 – корень уравнения $|h(\upsilon)|\cdot\delta\cdot th\kappa_0(\upsilon) = \upsilon\cdot\kappa_0(\upsilon)$ при $\delta > \upsilon/|h(\upsilon)|$ и $\lambda_{min} = |h(\upsilon)|$ при $\delta \le \upsilon/|h(\upsilon)|$. Минимизируя полученные для λ_{min} выражения по $\delta = \delta(y_0)$ и υ для случаев $h > 0$, $h = 0$, $h < 0$, получаем окончательно:

$$\|\widehat{l}\,\|_2 \le max\{\underset{\upsilon:\ 0\le h(\upsilon);\ -h(\upsilon)\cdot\delta\cdot tg\kappa_1(\upsilon)=\upsilon\kappa_1(\upsilon)<v\pi}{vraimax}[h(\upsilon)/|cos\kappa_1(h(\upsilon))|];\ \underset{\upsilon:\ 0>h(\upsilon);\ -\kappa_0(\upsilon)\cdot\delta\cdot th\kappa_0(\upsilon)=\upsilon\kappa_0(\upsilon)}{vraimax}[|ch\kappa_0(h(\upsilon))|/h(\upsilon)]\}.$$

В частности, при $h = const$ из формулы для $\|\widehat{l}\,\|_2$ следует хорошо известный результат: при $h \le 0$ $\widehat{l} \notin B(L_D^2)$, а при $h > 0$ имеем $\|\widehat{l}\,\|_2 \le 1/h$. Другие оценки величины $\|\widehat{l}\,\|_p$ следуют из доказательств теоремы 2 (п.а) и теоремы 4: при $h \ge 0$ имеем неравенства:

$\|\widehat{l}'[\widehat{l}\,\chi(D)]^{(p-1)}\|_1/mes(D) \le sup_{Q_* \subseteq Q;\, S_*(y)=[s_{*1}(y);s_{*2}(y)]\subseteq S}\|\widehat{l}'[\widehat{l}\,\chi(Q_*\times S_*)]^{(p-1)}\|_1/mes(Q_*\times S_*) \le \|\widehat{l}_p\|^p \le \|\widehat{l}'[\widehat{l}\,\chi(D)]^{(p-1)}\|_\infty$. Для $h = const$ верхняя оценка дает лучший известный результат: $\|\widehat{l}\,\|_p \le 1/hp^{1/p}$.

3.3. Результаты, полученные в работах [8] и [14], могут быть перенесены на множества D несколько более общего вида, нежели $W^3_{\upsilon} \times V^3_r(\vec{\upsilon})$. А именно, положим $D = D_x = W^n_{\upsilon} \times V^n_r(\vec{\upsilon})$, где $W^n_{\upsilon} \in \breve{Y}^n_{\upsilon}$ – такое измеримое ограниченное множество, что почти при всех $E > 0$ $mes_n(W \cap B^n_E) > 0$ (здесь B^n_E – стандартный шар в $\breve{Y}^n_{\upsilon}$ радиуса E), и почти при всех $(\vec{\rho},\vec{\upsilon}) \in W_{\upsilon} \times f_{\rho}(\vec{\upsilon})$ множества $S_s(\vec{\rho},\vec{\upsilon})$ выпуклы, причем существует подмножество $W^* \subset W$ такое, что почти при всех $E > 0$, $mes_n(W^* \cap B^n_E) > 0$, и почти при всех $\vec{\upsilon} \in W^*_{\upsilon}$ $mes_n(V^n_r(\vec{\upsilon})) > 0$ и $(diam(V^n_r(\vec{\upsilon}))/\upsilon \to \infty$ при $\upsilon \to 0)$. Эти условия (их трёхмерные аналоги) использовались при доказательстве теорем 3-5. Если хотя бы одно из них будет нарушено, то особенность в старшем члене оператора переноса становится несущественной в интегральном смысле, и спектр его оказывается пустым [24], а сам он – нильпотентным. Эта ситуация имеет место при рассмотрении переноса фотонов, скорость которых – *c* – постоянна.

Множество W можно полагать даже только измеримым, если в $\check{Y}^{n}_{\upsilon}$ выбирать меру $\mu(d\boldsymbol{\upsilon})$, так чтобы $\mu(\check{Y}^{n}_{\upsilon})<\infty$ (например, $\mu(d\boldsymbol{\upsilon}) = exp[-d\upsilon^2]d\boldsymbol{\upsilon}$). Сами операторы $\mathcal{L}$ можно заменить на $(\pm\upsilon^k \vec{\upsilon}_0 \nabla_{\vec{r}} + \bar{h}(\vec{r},\vec{\upsilon})I)$, где $k > 0$. Подобные изменения в операторе $\mathcal{L}$ возможно будут полезны при рассмотрении задачи переноса поляризованного излучения [15]. В этом случае в формулировках результатов потребуются лишь незначительные изменения, связанные с изменением размерности, а доказательства их останутся в этих условиях справедливыми. Несколько больше аккуратности потребует лишь трактовка формулы $\hat{L}' = \hat{U}\hat{L}\hat{U}$ при условии $h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon}) = h(\boldsymbol{r}, -\boldsymbol{\upsilon})$, так как ввиду возможной несимметричности множества D по $\boldsymbol{\upsilon}_0$ функции f и $\hat{U}f$ могут не принадлежать $(\mathcal{R})^p_D$ одновременно. Однако, учтя то, что рассмотрение операторов $\mathcal{L}$ можно провести как в пространствах L^p_D, так и в пространствах L^p_{UD}, могло расширить области определения рассматриваемых функций с D на $D^* = conv(D \cup \hat{U}D)$. При этом функцию $h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon})$ надо продолжать на D^* четным образом. Тогда очевидно, что $\forall f \in R^p_D \Rightarrow g = \hat{U}f \in R^p_{UD} \Rightarrow G = \hat{L}g \in L^p_{UD} \Rightarrow \hat{U}G = F \in L^p_D$ и аналогично для оператора $\hat{L}'$.

3.4. Рассмотрение множеств $D = W^3_{\vec{\upsilon}} \times V^3_{\vec{r}}(\vec{\upsilon})$ может представить не только теоретический интерес. В самом деле, реальные, требующие достаточно точного расчета конструкции часто имеют полости и другие отклонения от выпуклости (вообще говоря, в произвольно большом числе, зависящем от предъявляемой к расчету точности). Если их заполняет воздух, то для надтепловых нейтронов они практически прозрачны и в расчетах их можно полагать пустыми ($h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon}) \equiv 0 \equiv k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon}' \to \boldsymbol{\upsilon})$) при $\boldsymbol{r} \in V_i$. Для холодных и тем более для ультрахолодных нейтронов в силу подчинения сечений закону $1/\upsilon$, такое предположение некорректно. Итак, достаточно точный расчет реальной конструкции должен проходить и в этом предельном случае, когда $V_i = V_i(\upsilon)$. Поскольку взаимное расположение полостей различно в различных проекциях, то $V_i = V_i(\boldsymbol{\upsilon})$. Исходя из сказанного, на V как функцию от $\boldsymbol{\upsilon}$ можно наложить ряд ограничений. Например, можно потребовать ее непрерывности по $\boldsymbol{\upsilon}_0$, что очевидно геометрически. Возможно, что подобные ограничения и понадобятся в дальнейшем, при исследовании более тонких вопросов о структуре спектров операторов газокинетического $\hat{\Lambda}$ и критичности $\hat{A} = \hat{L}^{-1}\hat{K}$, в частности, при решении вопроса о действительности их точечных спектров ([3], гл.IV, §6). Но для такого исследования операторов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{A}$, которое проводилось в данной работе, в подобных дополнительных условиях нет необходимости.

Приведенный пример имеет скорее иллюстративный характер. Тем не менее, с его помощью легко представить себе реальную ситуацию, в которой может потребоваться анализ свойств решений начально-краевых задач, порождённых операторами $\mathcal{L}$, при условии, что $V = V(\upsilon)$. Рассмотрим уравнение (0.1) ([3], введение), коэффициенты которого зависят от температуры $T = = T(t, \boldsymbol{r}, [n(x)])$; $h = h(x, [T])$. Подчиним зависимость $T = T(t, \boldsymbol{r})$ какому-либо условию, учитывающему теплопроводность, конвекцию, вынужденный теплообмен или же используем модель *инерционного звена* [16]. Линеаризуем зависимость коэффициентов полученной системы с обратной связью по температуре, переходя к уравнениям в отклонениях от невозмущенного решения стационарной системы ([3], гл.IV, §4). Если геометрия V и зависимость коэффициентов $h = h(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon}, T)$, и $k(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\upsilon}' \to \boldsymbol{\upsilon}, T)$ от температуры достаточно сложны (например, учитывается кризис теплообмена в гетерогенной системе), то рассмотрение линеаризованной нестационарной возмущенной задачи в пространствах $L^{p}_{W^3_{\vec{\upsilon}} \times V^3_{\vec{r}}(\vec{\upsilon})}$ или же с коэффициентами, обладающими свойствами, аналогичными указанным в лемме 4 может представлять определенный интерес, в частности, и для объяснения экспоненциального спада нейтронной плотности в образцах малых размеров [17] поскольку в этом случае собственные числа эволюционного оператора могут наложиться на непрерывный спектр порождаемой им полугруппы и оказаться именно теми *псевдоконстантами спада* [18], существование которых до сих пор подвергалось сомнению [19].

В реальных средах, обычно состоящих из большого числа зон, заполненных различными веществами, нагретыми неравномерно, возможны аномалии в скорости взаимодействия нейтронов со средой, связанные как с макроскопическими (плотностными, температурными) эффектами, так и с микроскопическими – отличиями от закона $1/\upsilon$ в полном эффективном нейтронном сечении некоторых нуклидов. Включение в рассмотрение произвольных функций $h \in L^{\infty}_{D}$, а не использование только кусочно-непрерывных их, позволяет получать устойчивые результаты спектрального анализа операторов $\widehat{\Lambda}$ и $\widehat{A}$ по отношению к уточнениям математических моделей неоднородных объектов, в которых происходит перенос нейтронов.

Исследование задач переноса нейтронов в условиях (0) позволяет автоматически включать в рассмотрение при спектральном анализе соответствующих операторов два следующих случая. Первый из них связан с тем, что макроскопические сечения $\sum(\vec{r}, E)$ могут оказаться непредставимыми конечными суммами вида $\sum_j N_j(\vec{r})\sigma_j(E)$ (невырожденными). Подобная форма записи величины $\sum(\vec{r}, E)$ предполагает выполнение принципа аддитивности для сечений σ_j, что справедливо для модели тяжелого газа, но, из-за проявления различий в эффектах взаимодействия нейтронов с ядрами атомов, включенных в молекулу или в кристаллическую решетку по сравнению со свободными [29], может оказаться неприменимым для жидкостей и твердых тел. Спектральный анализ задач с вырожденными коэффициентами дает важные результаты при рассмотрении переноса нейтронов с помощью *газовой модели* вещества, хотя в реальных газах также обнаруживаются аномалии (по давлению) в поведении полных сечений взаимодействия нейтронов с ядрами атомов их молекул [30]. Второй случай – это перенос нейтронов в неравномерно нагретых телах. Даже если среда, заполняющая тело, однородна $N(\vec{r}) = const$, например, в силу эффекта доплеровского уширения в полном микросечении возникает зависимость от $\vec{r}$: $\sigma_t = \sigma_t(T(\vec{r}), E) = \sigma_t(\vec{r}, E)$, которая может быть описана вырожденными функциями только приближенно ([31], с.60).

3.5. Возможно перенесение результатов, полученных в пп. **1** и **2**, на случай, когда от функции h требуется только $Im h \in L^{0}_{D}$; $(Re h)_{-} = \min\{Re h; 0\} \in L^{\infty}_{D}$; $(Re h)_{+} = \max\{Re h; 0\} \in L^{p}_{D}$ при $0 < p \le \infty$. Доказательства при этом сохраняются, и требуется лишь очевидное изменение $D(\mathcal{L})$: от $(\mathcal{R})^{p}_{D}$ к $R(\mathcal{L}(\lambda))$ при $Re\lambda > -a(h)$. Это может являться основой учета резонансного характера нейтронных сечений многих веществ (когда величины сечений могут разниться на 5 порядков) путем использования неограниченных при $E > 0$ функции $h > 0$.

3.6. Что касается приложений полученных результатов к задачам анализа переноса частиц иной, нежели нейтроны, природы, например, при изучении динамики клеточных популяций [20] или динамики возраста и количества текстов [21] (имеются в виду рукописные и старопечатные тексты), то необходимо отметить два момента, подчёркивающих важность проведения максимально подробного спектрального анализа операторов, порождающих подобные задачи:

– 1. Оба упомянутых процесса относятся к классу <u>ветвящихся случайных процессов</u> (ВСП). Более того, их с разумной точностью можно считать стационарными ВСП [22], для которых справедлива и эффективна трактовка их методом последовательных поколений (даже при рассмотрении динамики развития языков [23]), приводящая при $\Delta t \to \infty$ либо к уравнению диффузии, либо к линейному газокинетическому уравнению, в зависимости от дополнительно принятых допущений;

– 2. Решение конкретных задач (биологических или текстологических) в их газокинетической формализации невозможно, разумеется, без информации о коэффициентах, входящих в уравнение: $h = h(\mathbf{r}, \boldsymbol{v})$ – в невозмущённом уравнении (уравнении переноса) и $h = h(\mathbf{r}, \boldsymbol{v})$, $k = k(\mathbf{r}, \boldsymbol{v}' \to \boldsymbol{v})$ – в линейном газокинетическом. Она – эта информация – для обеих задач не может в настоящее время считаться не только достаточной, но даже сколько-нибудь надёжной (специальные исследования соответствующих сечений взаимодействия насколько это известно автору ещё не проводились). Для сравнения отметим, что соответствующее “константное” обеспечение задач нейтронной физики потребовало не только больших затрат, но и большого числа человеческих жизней [25].

3.7. Теоремы 1 и 5 работы [2] устраняют неточность в существующих доказательствах [26], [27] и [28] того, что при $Re\lambda \in (A_0(h), a_0(h))$, $-\lambda \in \sigma(-\hat{L})$ в том случае, когда функция $h = a(\mathbf{r}) + vh_1(\mathbf{r},v)$, где $a(\mathbf{r})$ кусочно непрерывна. Для таких h предполагалось верным следующее утверждение: $\forall\lambda$: $Re\lambda \in (A_0, a_0)$ либо внутри V можно выделить такой односвязный выпуклый объем V^*, в котором $a(\mathbf{r}) = Re\lambda$, либо внутри V можно выделить такой шар S и гладкую поверхность Γ, что центр шара лежит на ней, и эта поверхность делит S на две части S_1 и S_2,

в одной из которых $a(\mathbf{r}) < Re\lambda$, а в другой – $a(\mathbf{r}) > Re\lambda$. (19)

Пусть, однако, V – единичный шар в $\check{Y}^{3}_{r}$; $V = V_1 \cup V_2$; $\Gamma = V_1 \cap V_2$ – гладкая поверхность конечной площади, $h(\mathbf{r}, \boldsymbol{v}) = 3\chi(V_1) + \chi(V_2)$, где $V_1 = U_n V^{(n)}$, где $V^{(n)}$ определяются индуктивно: пусть $\tilde{V}$ – счётное всюду плотное множество точек из V: $\tilde{V} = \{P_1,\ldots,P_n,\ldots\}$. Тогда $V^{(n)} = V^{(n-1)} \cup A_n \cup B_n$, где A_n – шар радиуса ρ_n такого, что $\rho([A_n],[V^{(n-1)}]) \geq \rho_n$ с центром в точке $Q_n = P_{m(n)} \in \tilde{V} \cap (V\backslash[V^{(n-1)}])$, имеющей наименьший номер. $B_n = (V\backslash[V^{(n-1)}]) \cap C_n$, где C_n есть такая часть ε_n-окрестности несамопересекающейся конечнозвенной ломанной, соединяющей точки Q_{n-1} и Q_n, что $\partial V^{(n)}$ является гладкой поверхностью. Очевидно, что за счет выбора ρ_n и ε_n можно добиться, чтобы $mes_1 U_n [c_n (c_{n+1}] = \infty$, $mes_3 V_1 > 0$, $mes_3 V_2 > 0$, $mes_2 \Gamma > 0$. Отсюда следует, что, $A_0(h)=3;$ $a(h) = a_0(h) = 1 = a_s(h);$ $a(\mathbf{r}) = h$. Рассмотрим точку $\lambda = -2 \in [-3, -1]$. Очевидно, что подобъём V^* в котором $a(\mathbf{r}) = 2$, выделить нельзя. Но, одновременно нельзя выделить и шар $S \subset V$, такой чтобы для него выполнялась вторая часть утверждения (19) и одновременно было бы возможно доказательство принадлежности к спектру оператора $-\hat{L}$ точки $\lambda = -2$ методом, использованным в [26], так как в силу плотности $\tilde{V}$ (то есть $[\tilde{V}]=V$) невозможен выбор "точки $\xi_1(\mathbf{r}_0, \boldsymbol{\Omega})\ldots$ " ([26], с.110, стр.5). В работе [27], с.204, стр.8-11сн. утверждается возможность выбора для любой кусочно-непрерывной функции $\tilde{h} = \tilde{h}(\mathbf{r})$, такой что $0 < |h - \tilde{h}| < c^* v$ подынтервала $[\tilde{s}_1, \tilde{s}_2] \subset [s_1, s_2]$ (в наших обозначениях), так что $\forall s \in [\tilde{s}_1, \tilde{s}_2]$ $\tilde{h}(\mathbf{r} - s\boldsymbol{\Omega}) \leq (|\beta| + a(h))/2$, где $\beta \in \pi^{-}_{a_s(h)}$. Аналогичное утверждение делается и в работе [28], с.1990, стр.1-5сн. Построенный выше пример показывает некорректность подобных утверждений о кусочно-непрерывных функциях $h(\mathbf{r}, \boldsymbol{v})$.

3.8. Обращает на себя внимание следующая возможность исследования задач с оператором переноса, родственная методу Кейса – разложения решений исследуемых задач по частным решениям. Хотя, начиная с работ Ленера и Винга, установлено, что у оператора $-\widehat{L}$ нет собственных функций в L_D^p, они могут найтись в других пространствах.

Аналогично этому рассмотрение операторов $-\widehat{L}$ и $\widehat{\Lambda}$ в пространстве L_D^∞ "физических" функций требует рассмотрения операторов $\widehat{\Lambda}'$ и $-\widehat{L}'$, ответственных за описание функции ценности частиц, в пространствах $L_D^{\infty+}$ или в $L_D^{1\square+}$. Но в них оператор $-\widehat{L}$ имеет целую полуплоскость $\overline{\pi}_{a_s}^-$, занятую точками точечного спектра, поскольку $\overline{\pi}_{a_s}^- = R\sigma(-\widehat{L}')$ и $\widehat{L}' = \widehat{L}$. В этом случае разложения решений по собственным функциям множеств из пространства мер оператора ценности представляется возможным.

При решении же стационарных неоднородных задач $-\widehat{L}n+\widehat{K}n=Q(\vec{r},\vec{\upsilon})$ и $-\widehat{L}'\vartheta+\widehat{K}'\vartheta=R(\vec{r},\vec{\upsilon})$ целесообразно рассматривать эти задачи соответственно на множествах $\tilde{R}_D^p$ и R_D^p. Решения новых задач будут связаны с решениями прежних посредством оператора инверсии $\widehat{U}$. Вновь поставленные задачи обладают тем преимуществом, что при $p = 2$ операторы $\tilde{L}\widehat{U}$, входящие в получаемые уравнения, самосопряжены: $\widehat{L}_2^+=\widehat{L}_2'=\widehat{U}_2\widehat{L}_2\widehat{U}_2 \Leftrightarrow$ $(\widehat{U}\widehat{L})_2=\widehat{U}_2^+\widehat{L}_2^+=(\widehat{U}\widehat{L})_2^+$ поскольку $\widehat{U}\in B(L_D^2)$ и $\widehat{U}^+=\widehat{U}=\widehat{U}^{-1}$.

Очевидно, что указанный прием особенно полезен, когда предполагается выполненным в той или иной форме принцип детального равновесия, то есть когда справедливо одно из равенств типа $\widehat{K}\widehat{U}=\widehat{K}$, $\widehat{K}\widehat{U}=\widehat{U}\widehat{K}$, $\widehat{K}'\widehat{U}=\widehat{U}\widehat{K}$, $\widehat{K}=K(\vec{r},\upsilon'\to\upsilon,\vec{\Omega}'\vec{\Omega})$...

Литература

1. *Владимиров В.С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц, Тр. МИАН СССР им. В.А. Стеклова. Т.61. – М., 1961.
2. *Шихов С.Б.* Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. – М.: Атомиздат, 1973.
3. *Келлин Н.С.* Анализ линейного уравнения Больцмана. Применение к теории переноса частиц. Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – М.: ИПМ АН СССР, 1985. – 140с.
4. *Келлин Н.С., Паротькин С.В.* Одномерная задача для системы уравнений Власова–Максвелла // Вестник МГОУ. Серия «Физика-математика». 2008. № 1. С. 36–45.
5. *Стёпин С.А.* Волновые операторы для линеаризованного уравнения Больцмана в односкоростной теории переноса // Матем. сб. 2001. № 1. С. 139–160.
6. *Стёпин С.А.* О модели Фридрихса в односкоростной теории переноса // Функ. ан. 2001. 35:2. С. 87–92.
7. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики. Т. 1–2. – М.: Мир, 1984.
8. *Келлин Н.С.* Оператор переноса частиц в пространствах Лебега, Рукопись депонирована в ВИНИТИ 3 декабря 1984 г., №7649/84 - Деп.
9. *Келлин Н.С.* Газокинетический оператор в пространствах Лебега. Рукопись депонирована в ВИНИТИ, 20 ноября 1984 г., №7401/84 - Деп.
10. *Хилле Э., Филипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: Мир, 1972.
11. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.
12. *Красносельский М.А. и др.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. – М.: Наука, 1966.
13. *Очан Ю.С.* Сборник задач и теорем по ТФДП. – М.: Просвещение, 1965.
14. *Келлин Н.С.* Спектральные свойства оператора переноса // Труды IX Международной научной конференции “Цивилизация знаний: инновационный переход к обществу высоких технологий”, ч.I, М.: РосНОУ, 25-26 апреля 2008, с.347-351.
15. *Коновалов Н.В.* Оператор рассеяния поляризованного излучения и его общие свойства. Характеристическое уравнение теории переноса поляризованного излучения. – М., препринт ИПМ РАН №34, 2009.

16. *Горбунов В.П., Шихов С.Б.* Нелинейная динамика ядерных реакторов. (Анализ методами Ляпунова А.М.). М.: Атомиздат, 1975.
17. *Юрова Л.Н., Ромоданов В.Л., Давыдов В.И., Смирнов В.Е., Понкратенко Д.А., Боярский П.В., Богатов В.Н.* Экспериментальное и расчетное определение влияния пространственного расположения локальной неоднородности на диффузионные свойства среды. В сб. «Физика ядерных реакторов». Вып. 1. М., Атомиздат, 1968.
18. *Corngold N.* In: IAEA.Proc.Symp. Pulsed Neutron Research, Vienna, 1965, v.1, p.199-207.
19. *Стёпин С.А.* – Принцип Бирмана-Швингера и гипотеза Нелкина в теории переноса нейтронов // Докл. РАН. т. 380. №1. С.19-22.
20. *Rotenberg M.* Transport Theory for Growing Cell Population. – J.Theor.Biol., 1983, v.103, №2, p.181-199.
21. *Н.С. Келлин, Н.Н. Митина, И.С. Неретин.* – Ветвящиеся случайные процессы и их приложения к хронографии. – IV Международный форум по информатизации. МФИ-97, М., 1997.
22. *Р. Харрис.* Теория ветвящихся случайных процессов. М.: «Мир», 1966.
23. *Н.С. Келлин, И.С. Неретин, А.С. Филатова.* – Модель процессов размножения и гибели в задачах естествознания. – Труды III международной конференции «Математика, компьютер, образование». М.: РИИС ФИАН, 1996, сс. 156-161.
24. *Pimbley G.H.* Solution of the Initial Value Problem for the Multy-velocity Neutron Transport Equation with a Slab Geometry. – J.Math.Mech., 1959, v.8, №6, p.838-851.
25. *Юнг Р.* Ярче тысячи солнц. М., Атомиздат, 1961.
26. *Шихов С.Б., Шкурпелов А.А.* Анализ нестационарного кинетического уравнения переноса нейтронов в размножающих и замедляющих средах. – В сб.: “Теоретические и экспериментальные проблемы переноса нейтронов”, М.: Атомиздат, 1972.
27. *Borysiewicz M., Mika J.* Spectrum of the Neutron Transport Operator in Nonuniform Media. – Nukleonik, 1967, B.10, H.4, s.203-206.
28. *Larsen E.W., Zweifel P.F.* On the Spectrum of the Linear Transport Operator. – J.Math.Phys., 1974, v.15, №11, p.1987-1997.
29. Hughes D.J., Schwartz R.B. Neutron Cross Section. Sec. Ed., 1.07.1958, BNL UPTON New York, Associated Univ. Inc. under contract with the US AEC.
30. Житарев В.В., Степанов С.Б. Влияние давления в парах легкой воды и бензола на полное сечение взаимодействия для холодных нейтронов. “Атомная энергия”, 1977, т.42, №1, с.53-55.
31. Лукьянов А.А. Структура нейтронных сечений. М.: Атомиздат, 1978.