



Мирер С.А., Прилепский И.В.

Авторотационное движение
спутника на низкой круговой
орбите

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Мирер С.А., Прилепский И.В. Авторотационное движение спутника на низкой круговой орбите // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 47. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-47>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

С.А. Мирер, И.В. Прилепский

**Авторотационное движение спутника на низкой
круговой орбите**

Москва - 2011

С.А. Мирер, И.В. Прилепский. Авторотационное движение спутника на низкой круговой орбите. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2011, 24 страницы, 11 рисунков, библиография: 6 наименований.

Исследуется динамика спутника на низкой круговой орбите с учетом вращающего аэродинамического момента, обусловленного специальной установкой панелей солнечных батарей. Обсуждается вопрос существования стационарных вращений спутника в орбитальной системе координат. Аналитически и численно анализируется количество возможных стационарных вращений. В ряде частных случаев проведен анализ условий устойчивости. Для асимптотически устойчивых вращений получена оценка скорости протекания переходных процессов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Программы поддержки Ведущих научных школ России.

Ключевые слова: спутник, аэродинамический момент, авторотация, стационарное вращение, устойчивость.

S.A. Mirer, I.V. Prilepskiy. Autorotation motion of a satellite in a low circular orbit. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2011, 24 Pages, 11 Figures, 6 References.

Attitude dynamics of a satellite in a low circular orbit is analyzed taking into account the rotating aerodynamic torque resulting due to special installation of solar panels. The existence of the stationary rotations in the orbital reference frame is studied. The number of these rotations is analyzed analytically and numerically. For several specific cases, stability analysis is performed. For the asymptotically stable rotations, the speed of response is estimated.

The work is carried out under support of the Russian Foundation for Basic Research and the Program for support of Leading scientific schools of Russia.

Key words: satellite, aerodynamic torque, autorotation, stationary rotation, stability.

Введение

При движении искусственного спутника Земли по низкой орбите его динамика относительно центра масс в значительной степени определяется аэродинамическими силами и моментами. Распространенным в литературе способом учета возмущений, действующих со стороны атмосферы, является применение модели, в которой центр давления (точка приложения равнодействующей аэродинамических сил) фиксирован в теле, а аэродинамический момент возникает благодаря смещению центра давления относительно центра масс. Однако такая модель не всегда позволяет описать, даже качественно, динамику спутника специальной формы. Так, для моделирования углового движения спутников «Протон» на эллиптической орбите необходимо учитывать пропеллирующий эффект, обусловленный кососимметрично установленными лопастями солнечных батарей [1].

В настоящей работе применяется альтернативный подход к моделированию пропеллирующих эффектов, предлагавшийся в [2-3] для моделирования аэродинамических моментов, действующих на твердое тело в аэродинамической трубе или при движении в плотных слоях атмосферы. Основное внимание уделяется изучению стационарных вращений спутника в орбитальной системе координат. Для отдельных типов стационарных вращений в линейном приближении проводится аналитическое и численное исследование устойчивости.

Уравнения движения

Рассмотрим движение относительно центра масс спутника специальной формы, движущегося по околоземной орбите в верхних слоях атмосферы (плотностью ρ) (Рис. 1). Предполагается, что помимо силы тяжести, приложенной в центре масс O , и гравитационного момента, на тело действует аэродинамическая сила \mathbf{F}_a , приложенная в центре давления G , и аэродинамический момент \mathbf{M}_a . Для описания движения спутника введем орбитальную систему координат (ОСК) $OXYZ$ (ось OX направлена вдоль трансверсали, OY - по нормали к плоскости орбиты, OZ - вдоль радиус-вектора) и систему главных центральных осей спутника (ССК) $Oxyz$, орты которой обозначим $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ориентацию связанных осей относительно орбитальных определим углами Эйлера ψ, θ, φ (Рис. 2); соответствующая матрица перехода имеет вид $U = \|u_{ij}\|$,

$$\begin{aligned}
u_{11} &= -\sin \psi \cos \theta \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi, & u_{31} &= \sin \theta \sin \varphi, \\
u_{12} &= -\sin \psi \cos \theta \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi, & u_{32} &= \sin \theta \cos \varphi, \\
u_{13} &= \sin \psi \sin \theta, & u_{33} &= \cos \theta. \\
u_{21} &= \cos \psi \cos \theta \sin \varphi + \sin \psi \cos \varphi, \\
u_{22} &= \cos \psi \cos \theta \cos \varphi - \sin \psi \sin \varphi \\
u_{23} &= -\cos \psi \sin \theta,
\end{aligned}$$

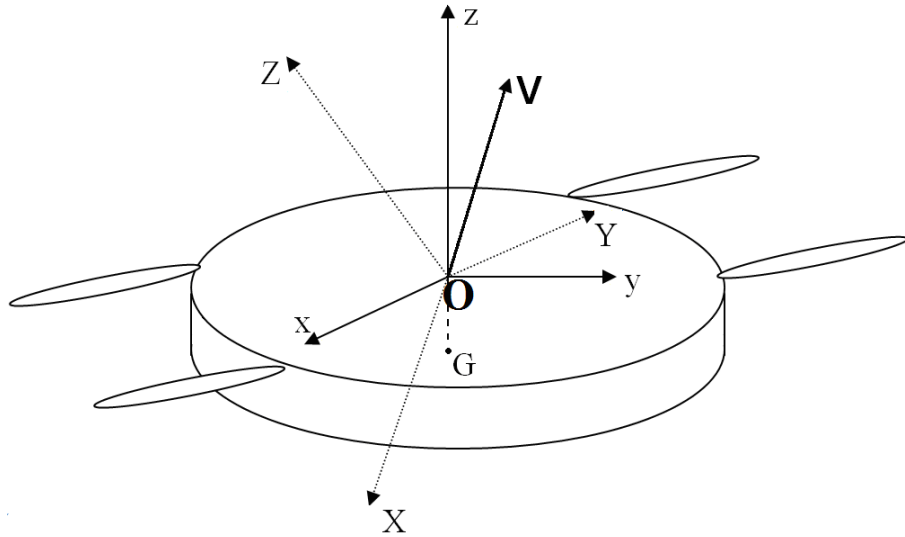


Рис. 1.

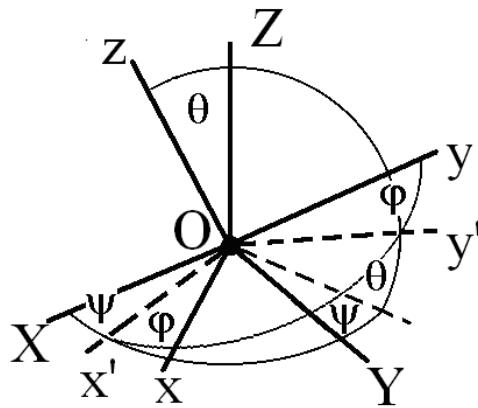


Рис. 2. Системы координат.

Выражения для аэродинамической силы и момента, в соответствии с [3], запишем в виде

$$\mathbf{F}_a = -\frac{1}{2} \rho V_D S (c_x V_x^D \mathbf{i} + c_y V_y^D \mathbf{j} + c_z V_z^D \mathbf{k}), \quad (1)$$

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{d} \times \mathbf{F}_a - \frac{1}{2} \rho V_D^2 S L \left[k_d (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + \left(p_0 \frac{V_z^D}{V_m} + p_1 \omega_z \right) \mathbf{k} \right]. \quad (2)$$

Здесь S и L - миделево сечение и характерный линейный размер тела, c_x , c_y и c_z - постоянные аэродинамические коэффициенты, V_D, V_x^D, V_y^D, V_z^D - модуль и проекции на связанные оси скорости центра давления тела, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - проекции абсолютной угловой скорости на связанные оси, p_0, p_1, k_d, V_m - постоянные. Для аэродинамической силы, таким образом, используется широко распространенная в литературе модель; отдельные слагаемые в выражении для аэродинамического момента (2) имеют следующий смысл:

$\mathbf{d} \times \mathbf{F}_a$ - консервативная компонента соответствует моменту аэродинамической силы (1), точка приложения которой смещена относительно центра масс спутника ($\mathbf{d} = \mathbf{OG}$);

$-\frac{1}{2} \rho V_D^2 SL p_0 \frac{V_z^D}{V_m}$ - данный член описывает пропеллирующий эффект и обусловлен установкой на спутнике специальных лопастей;

$-\frac{1}{2} \rho V_D^2 SL \left[k_d (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j}) + p_1 \omega_z \mathbf{k} \right]$ - демпфирующая компонента.

Такая структура аэродинамического момента означает линейную зависимость осевого момента от величины проекции угловой скорости тела на ось авторотации. Подобная модель ранее использовалась в [4, 5]. Так, в [4] аэродинамический момент, действующий по оси симметрии снаряда с косо поставленным оперением, представлялся в виде

$$M = V^2 \left(a - b \frac{\omega}{V} \right), \quad (3)$$

где a, b - положительные коэффициенты, V - скорость центра масс снаряда. Из условия $M = 0$ определяется угловая скорость стационарного вращения

$$\omega = \frac{a}{b} V, \quad (4)$$

которая, вообще говоря, не постоянна (постоянной ее можно считать лишь при небольших изменениях V).

В [5] рассматривалось движение авторотирующей вертушки с четырьмя лопастями, помещенной в воздушный поток. При этом выражение для проекции аэродинамического момента на ось вращения задавалось в виде, аналогичном (3), где коэффициенты a, b имели несколько иную структуру. Если скорость потока поддерживается постоянной, возможно стационарное вращение системы с угловой скоростью, определяемой выражением (4).

Разумеется, используемая в настоящей работе модель не дает полного и точного описания взаимодействия спутника с набегающим потоком; тем не менее, ее применение может быть обосновано тем, что для движения твердого тела в плотных слоях атмосферы результаты анализа динамики при ее использовании достаточно хорошо согласуются с экспериментом. Заметим также, что предлагаемая модель достаточно близка модели, используемой в монографии [6] (вид компоненты, описывающей пропеллирующий эффект, совпадает вплоть до третьего порядка по косинусу угла между осью авторотации и направлением набегающего потока; компонента, описывающая демпфирующий эффект, имеет аналогичный вид в предположении, что форма спутника близка к цилиндрической).

Запишем динамические уравнения углового движения спутника в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_{\text{грав}} + \mathbf{M}_a, \quad (5)$$

где $\mathbf{J} = \text{diag}(A, B, C)$ - тензор инерции спутника, $\mathbf{M}_{\text{грав}}$ - гравитационный момент.

Далее предполагается:

- 1) атмосфера неподвижна (не увлекается Землей);
- 2) спутник движется по круговой орбите радиуса R ;
- 3) скорость центра давления G относительно набегающего потока совпадает со скоростью центра масс O спутника ($\mathbf{V}_D = \mathbf{V}$);
- 4) ось авторотации спутника Oz является осью динамической и аэродинамической симметрии, т.е. $A = B$, $c_x = c_y = c$;
- 5) центр давления лежит на оси симметрии и фиксирован, $\mathbf{d} = -d\mathbf{k}$.

Принимая во внимание, что угловая скорость ОСК и скорость центра давления (центра масс) относительно неподвижной атмосферы в проекциях на оси ССК определяются соотношениями $\omega_0(u_{21}, u_{22}, u_{23})^T$ и $V(u_{11}, u_{12}, u_{13})^T$, где $V = \omega_0 R$, ω_0 - орбитальная угловая скорость, динамические уравнения Эйлера принимают вид

$$\begin{aligned} A\dot{\omega}_x + (C - A)\omega_y\omega_z &= 3\omega_0^2(C - A)\cos\theta\sin\theta\cos\varphi - \frac{1}{2}\rho V S c d V_y - \frac{1}{2}\rho V^2 S L k_d \omega_x, \\ A\dot{\omega}_y + (A - C)\omega_x\omega_z &= 3\omega_0^2(A - C)\cos\theta\sin\theta\sin\varphi + \frac{1}{2}\rho V S c d V_x - \frac{1}{2}\rho V^2 S L k_d \omega_y, \\ C\dot{\omega}_z &= -\frac{1}{2}\rho V^2 S L \left(p_0 \frac{V_z}{V_m} + p_1 \omega_z \right). \end{aligned}$$

Перейдем к полусвязанным осям $Ox'y'z$, ориентация которых относительно ОСК определяется углами ψ, θ (Рис. 2). Проекции угловой скорости системы координат $Ox'y'z$ на ее оси обозначим $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$. Тогда, очевидно, имеют место соотношения

$$\omega_x = \bar{\omega}_x \cos \varphi + \bar{\omega}_y \sin \varphi, \quad \omega_y = -\bar{\omega}_x \sin \varphi + \bar{\omega}_y \cos \varphi, \quad \omega_z = \bar{\omega}_z$$

и уравнения движения удобно представить в виде

$$\begin{aligned} A\dot{\bar{\omega}}_x + A\bar{\omega}_y\dot{\varphi} + (C - A)\bar{\omega}_y\bar{\omega}_z &= 3\omega_0^2(C - A)\cos\theta\sin\theta + \mu\sin\psi\cos\theta - K\bar{\omega}_x, \\ A\dot{\bar{\omega}}_y - A\bar{\omega}_x\dot{\varphi} - (C - A)\bar{\omega}_x\bar{\omega}_z &= \mu\cos\psi - K\bar{\omega}_y, \\ C\dot{\bar{\omega}}_z &= -\tilde{K}(-\sigma\sin\psi\sin\theta + \bar{\omega}_z). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь введены обозначения

$$\mu = \frac{1}{2}\rho V^2 S c d, \quad K = \frac{1}{2}\rho V^2 S L k_d, \quad \tilde{K} = \frac{1}{2}\rho V^2 S L p_1, \quad \sigma = \frac{p_0}{p_1} \cdot \frac{V}{V_m}.$$

Дополняя (6) кинематическими соотношениями

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \bar{\omega}_x - \omega_0 \sin \psi, \\ \dot{\psi} &= (\bar{\omega}_y - \omega_0 \cos \psi \cos \theta) / \sin \theta, \\ \dot{\varphi} &= \bar{\omega}_z + \omega_0 \cos \psi \sin \theta - \dot{\psi} \cos \theta, \end{aligned} \quad (7)$$

получаем замкнутую систему уравнений движения спутника относительно центра масс.

Стационарные вращения

Будем искать решения вида $\dot{\psi} = 0, \dot{\theta} = 0, \dot{\varphi} = const$, соответствующие стационарным вращениям спутника в орбитальной системе координат. В этом случае из третьего уравнения (6) следует

$$\dot{\varphi} = \sin \theta (\omega_0 \cos \psi + \sigma \sin \psi),$$

а первые два уравнения приводятся к виду

$$\begin{aligned} \omega_0 \sin \psi \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= -\mu \cos \psi + K\omega_0 \cos \psi \cos \theta, \\ \omega_0 \cos \psi \cos \theta \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= \\ &= 3\omega_0^2 (C - A) \cos \theta \sin \theta + \mu \sin \psi \cos \theta - K\omega_0 \sin \psi. \end{aligned} \quad (8)$$

Преобразуем систему (8) следующим образом. Сложим уравнения (8) сначала с весами $\sin \psi \cos \theta$ и $\cos \psi$, а потом с весами $\sin \psi$ и $\cos \psi \cos \theta$. В результате получим

$$K \sin \psi \cos \psi \operatorname{tg} \theta = (3C - 4A) \omega_0 \cos \psi - C \sigma \sin \psi, \quad (9.1)$$

$$\begin{aligned} & \left[3(C - A) \omega_0^2 \cos \psi - (A \omega_0 \cos \psi + C \sigma \sin \psi) \omega_0 \cos^2 \psi \right] \sin^2 \theta + \\ & + \mu \sin \psi \cos \psi \sin \theta + C \sigma \omega_0 \sin \psi - (3C - 4A) \omega_0^2 \cos \psi = 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Заметим, что системы (8) и (9) эквивалентны только в случае ненулевого детерминанта матрицы весов, т.е. при

$$\sin \psi \cos \psi \sin \theta \neq 0.$$

Поэтому случаи $\sin \psi = 0$, $\cos \psi = 0$ и $\sin \theta = 0$ необходимо рассмотреть отдельно.

Пусть $\sin \psi = 0$. Из (8) получаем

$$\mu = K \omega_0 \cos \theta \text{ и } (3C - 4A) \cos \theta \sin \theta = 0,$$

откуда $\sin \theta = 0$ либо $\cos \theta = 0$ (здесь и далее предполагаем, что $3C \neq 4A$). Таким образом, этот случай возможен только при $\mu = 0$ либо $\mu = \pm K \omega_0$.

Пусть теперь $\cos \psi = 0$. Имеем $C \omega_0 \sigma \sin \theta = 0$ и $\mu \cos \theta = K \omega_0$. Отсюда следует $\sin \theta = 0$ и должно выполняться условие $\mu = \pm K \omega_0$.

Если $\sin \theta = 0$, то $(\pm K \omega_0 - \mu) \cos \psi = 0$ и $(\pm K \omega_0 - \mu) \sin \psi = 0$. Таким образом, и этот случай возможен только при $\mu = \pm K \omega_0$.

Центр давления совпадает с центром масс ($\mu = 0$).

Если $\mu = 0$, то система (8) имеет решение $\sin \psi = 0$, $\cos \theta = 0$ (ось авторотации направлена по нормали к плоскости орбиты). В этом случае относительно атмосферы спутник имеет нулевую угловую скорость, а относительно ОСК вращается с угловой скоростью ω_0 . Для нахождения остальных стационарных вращений воспользуемся системой (9). Исключая θ с помощью тождества $1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = 1/\sin^2 \theta$, приходим к уравнению

$$K^2 \cos^2 \psi = (A \omega_0 \cos \psi + C \sigma \sin \psi) \cdot [(3C - 4A) \omega_0 \cos \psi - C \sigma \sin \psi],$$

откуда

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0 (3C - 5A) \pm \sqrt{9(C - A)^2 \omega_0^2 - 4K^2}}{2C \sigma}. \quad (10)$$

Каждому вещественному значению $\operatorname{tg} \psi$ соответствуют два значения ψ и, соответственно, два значения θ , определяемых, например, из (9.1). Поэтому из (10) следует, что при $K < \frac{3}{2} \omega_0 |C - A|$ существует четыре «косых» равновесия,

при которых ось авторотации не лежит ни в одной из координатных плоскостей ОСК. При $K = \frac{3}{2}\omega_0|C - A|$ таких равновесий два (кратные решения). Таким образом, всего, с учетом двух тривиальных решений, в данном случае может быть 2, 4 или 6 стационарных вращений.

Случай $K = 0$.

В данном случае отсутствует демпфирование по осям Oy , Oz , поэтому его рассмотрение имеет скорее математический интерес, позволяя получить «предельные» стационарные вращения, когда $K \rightarrow 0$. Система (8) при $K = 0$ принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_0 \sin \psi \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= -\mu \cos \psi, \\ \omega_0 \cos \theta \cos \psi \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= \\ &= \cos \theta [3\omega_0^2 (C - A) \sin \theta + \mu \sin \psi]. \end{aligned} \quad (11)$$

Из второго уравнения следует, что необходимо рассмотреть два случая: $\theta = \pi/2$ и $\theta \neq \pi/2$. Пусть сначала $\theta = \pi/2$. Тогда из первого уравнения (11) получаем соотношение

$$A\omega_0^2 \sin \psi \cos \psi + C\sigma\omega_0 \sin^2 \psi = -\mu \cos \psi, \quad (12)$$

приводящее к уравнению 4-й степени относительно $u = \sin \psi$

$$C^2\sigma^2\omega_0^2 u^4 - (1 - u^2)(\mu + A\omega_0^2 u)^2 = 0.$$

Все вещественные корни этого уравнения, которых не менее двух, принадлежат интервалу $(-1, 1)$. Можно показать, что при $\mu \rightarrow \pm\infty$ имеется два вещественных корня

$$u_{1,2} = \pm \left(1 - C^2\sigma^2\omega_0^2 \frac{1}{2\mu^2} \right) + O(\mu^{-2})$$

и два комплексных

$$u_{3,4} = \frac{-A\omega_0^2 \pm iC\sigma\omega_0}{A^2\omega_0^4 + C^2\sigma^2\omega_0^2} \mu + O(1);$$

при $|\mu| \approx 0$ уравнение имеет четыре вещественных корня

$$u_{1,2} = \frac{\pm A\omega_0}{\sqrt{A^2\omega_0^2 + C^2\sigma^2}} + O(\mu), \quad u_{3,4} = -\frac{1}{A\omega_0^2} \mu \pm \frac{C\sigma}{A^3\omega_0^5} \mu^2 + O(\mu^2).$$

Отсюда следует существование такого $\mu_0 > 0$, что уравнение (12) имеет два вещественных корня при $|\mu| > \mu_0$ и четыре при $|\mu| < \mu_0$. Если $|\mu| = \mu_0$, то уравнение имеет три вещественных корня, один из которых двукратный. Поэтому значение μ_0 может быть получено в результате совместного решения (12) и уравнения, получаемого дифференцированием (12) по ψ . Таким образом, μ_0 должно удовлетворять уравнению

$$\begin{aligned} & \mu^6 \left[(-2C^2\sigma^2 + A^2\omega_0^2)\mu^2 + 2A^4\omega_0^6 + 2A^2C^2\sigma^2\omega_0^4 \right]^2 \times \\ & \times \left[\mu^6 + \mu^4(8C^2\sigma^2\omega_0^2 - 3A^2\omega_0^4) + \right. \\ & \left. + \mu^2(16C^4\sigma^4\omega_0^4 + 20A^2C^2\sigma^2\omega_0^6 + 3A^4\omega_0^8) - A^6\omega_0^{12} - A^4C^2\sigma^2\omega_0^{10} \right] = 0. \end{aligned}$$

Заметим, что при $\mu = 0$ число вещественных корней не изменяется (см. выше), поэтому $\mu_0 \neq 0$. Анализ показывает, что и второй сомножитель также не определяет μ_0 , поскольку при $\mu^2 = (2A^4\omega_0^6 + 2A^2C^2\sigma^2\omega_0^4) / (2C^2\sigma^2 - A^2\omega_0^2)$ уравнение (12) не имеет кратных корней. Следовательно, значение μ_0 определяется единственным положительным вещественным корнем уравнения

$$\begin{aligned} f(\mu^2) = & \mu^6 + \mu^4(8C^2\sigma^2\omega_0^2 - 3A^2\omega_0^4) + \\ & + \mu^2(16C^4\sigma^4\omega_0^4 + 20A^2C^2\sigma^2\omega_0^6 + 3A^4\omega_0^8) - A^6\omega_0^{12} - A^4C^2\sigma^2\omega_0^{10} = 0. \end{aligned}$$

Существование такого корня следует из $f(0) < 0$, а единственность вытекает из

$$\frac{df}{d\mu^2} = 3(\mu^2 - A^2\omega_0^4)^2 + 16C^2\sigma^2\omega_0^2\mu^2 + 16C^4\sigma^4\omega_0^4 + 20A^2C^2\sigma^2\omega_0^6 > 0.$$

Качественно изменение числа вещественных корней уравнения (12) при изменении μ иллюстрирует Рис. 3. При $\mu < -\mu_0 < 0$ существует два корня, при $\mu = -\mu_0$ рождается дополнительная пара вещественных корней, которая существует при $\mu \in (-\mu_0, \mu_0)$; при $\mu > \mu_0$ вещественных корней снова два.

Пусть теперь $\cos \theta \neq 0$. Тогда система (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_0 \sin \psi \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= -\mu \cos \psi, \\ \omega_0 \cos \psi \sin \theta (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) &= 3\omega_0^2 (C - A) \sin \theta + \mu \sin \psi. \end{aligned}$$

Складывая первое и второе уравнения с весами $\sin \psi$ и $\cos \psi$, находим

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0}{\sigma} \cdot \frac{3C - 4A}{C}; \quad (13)$$

складывая их с весами $\cos \psi$ и $-\sin \psi$, получаем

$$\sin \theta = \frac{-\mu}{3\omega_0^2 (C - A) \sin \psi}. \quad (14)$$

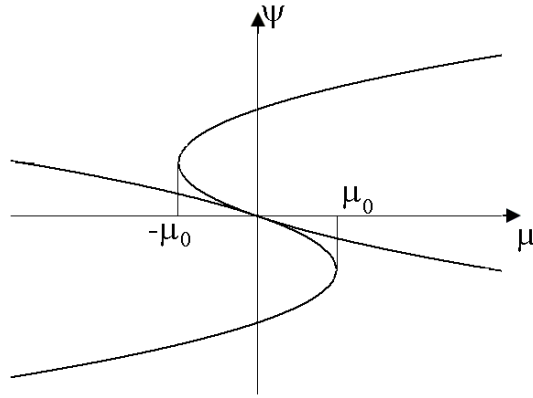


Рис. 3.

Заметим, что в случае $\cos \theta = 0$ ось авторотации лежит в плоскости, содержащей трансверсаль и нормаль к плоскости орбиты. Во втором случае ($\cos \theta \neq 0$) эта ось занимает некоторое «косое» положение в пространстве. Отметим также, что в первом случае стационарные вращения существуют при любом $\mu > 0$, а скорость авторотации неограниченно возрастает по модулю при увеличении σ . Что касается «косых» вращений, то они существуют только при $|\sin \theta| \leq 1$, откуда

$$|\mu| < \hat{\mu} = \frac{3\omega_0^3 |(C - A)(3C - 4A)|}{\sqrt{C^2 \sigma^2 + \omega_0^2 (3C - 4A)^2}}.$$

При этом скорость авторотации ограничена

$$|\dot{\phi}| = \frac{4\omega_0 \sigma |(C - A) \sin \theta|}{\sqrt{C^2 \sigma^2 + \omega_0^2 (3C - 4A)^2}} < 4\omega_0 \frac{|C - A|}{C}.$$

Здесь принято во внимание, что $\sin \theta \leq 1$ и $\sigma / \sqrt{C^2 \sigma^2 + \omega_0^2 (3C - 4A)^2} < 1/C$.

Таким образом, всего в случае $K = 0$ может быть 2, 4 или 6 стационарных вращений.

Случай $\mu = \pm K \omega_0$.

При $\mu = K \omega_0$ система (8) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[A\omega_0 \sin \psi \cos \psi + C\sigma \sin^2 \psi \right] \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = -2K \cos \psi \sin^2 \frac{\theta}{2}, \\ & \left[A\omega_0 \cos^2 \psi + C\sigma \sin \psi \cos \psi \right] \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta = \\ & = 3\omega_0 (C - A) \cos \theta \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - 2K \sin \psi \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Очевидно, при любом ψ существует решение $\theta = 0$, когда ось авторотации направлена по радиусу-вектору. Легко видно, что при $\theta \neq 0$ система не имеет решений, при которых $\cos \psi = 0$ или $\sin \psi = 0$. Поэтому для определения остальных равновесий можно воспользоваться системой (9). Прямой подстановкой можно убедиться, что в данном случае эта система имеет корень $\operatorname{tg} \psi = \omega_0 (3C - 4A) / C\sigma$, что соответствует $\sin \theta = 0$. При этом анализ якобиана системы (9) (по ψ, θ) показывает, что этот корень является простым. Таким образом, можно заключить, что случай $\mu = K\omega_0$ не является особым с точки зрения числа равновесий - при малом изменении μ число равновесий остается неизменным.

Аналогично может быть рассмотрен случай $\mu = -K\omega_0$. При этом существует решение $\theta = \pi$.

Исследование системы (9) в общем случае

Разрешим уравнение (9.2) относительно $\sin \theta$, после чего исключим θ с использованием (9.1) и тождества $1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = 1 / \sin^2 \theta$. После преобразований получим

$$\begin{aligned} & \omega_0^2 \sin^2 \psi \left\{ \left[(3C - 4A) \omega_0 \cos \psi - C\sigma \sin \psi \right] \times \right. \\ & \quad \left. \times (A\omega_0 \cos \psi + C\sigma \sin \psi) - K^2 \cos^2 \psi \right\}^2 = \\ & = \mu^2 \cos^2 \psi \left\{ \left[(3C - 4A) \omega_0 \cos \psi - C\sigma \sin \psi \right]^2 + K^2 \sin^2 \psi \cos^2 \psi \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Разделим (15) на $\cos^6 \psi$ и воспользуемся при преобразовании правой части тождеством $\cos^2 \psi \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \psi) = 1$; в результате окончательно приходим к уравнению 6-го порядка относительно $s = \operatorname{tg} \psi$

$$a_0 s^6 + a_1 s^5 + a_2 s^4 + a_3 s^3 + a_4 s^2 + a_5 s + a_6 = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
a_0 &= C^4 \sigma^4 \omega_0^2, \\
a_1 &= -2C^3 (3C - 5A) \sigma^3 \omega_0^3, \\
a_2 &= \left\{ -2C^2 \sigma^2 [(3C - 4A) A \omega_0^2 - K^2] + C^2 \sigma^2 \omega_0^2 (3C - 5A)^2 \right\} \omega_0^2 - \mu^2 C^2 \sigma^2, \\
a_3 &= 2C (3C - 5A) \sigma \omega_0^3 [(3C - 4A) A \omega_0^2 - K^2] + 2\mu^2 (3C - 4A) C \sigma \omega_0, \\
a_4 &= [(3C - 4A) A \omega_0^2 - K^2]^2 \omega_0^2 - \mu^2 [C^2 \sigma^2 + (3C - 4A)^2 \omega_0^2 + K^2], \\
a_5 &= 2\mu^2 (3C - 4A) C \sigma \omega_0, \\
a_6 &= -\mu^2 (3C - 4A)^2 \omega_0^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что коэффициенты a_0 и a_6 имеют разные знаки, потому уравнение (16), вообще говоря, может иметь 2, 4 или 6 вещественных корней. Каждому вещественному корню (16) отвечают два значения угла прецессии ψ , отличающиеся на π . Соответствующие значения угла нутации θ симметричны относительно $\pi/2$ и находятся из (9.1). Обратим внимание, что при получении уравнения (15) возводилось в квадрат выражения вида $h(\psi) = \mu \sqrt{g(\psi)}$, т.е. использовалось неравносильное преобразование. При этом $g(\psi + \pi) = g(\psi)$, но $h(\psi + \pi) = -h(\psi)$. Следовательно, из двух найденных пар (ψ, θ) и $(\psi + \pi, \pi - \theta)$, только одна будет решением исходной системы (8) (с учетом того, что в рассматриваемом случае $\mu \neq 0$). Таким образом, система допускает 2, 4 или 6 стационарных вращений. Приведем примеры, в которых реализуются все возможные варианты.

6 стационарных вращений. Как показано выше, при нулевом смещении центра давления ($\mu = 0$) и достаточно малом коэффициенте демпфирования имеется 6 различных стационарных вращений. Поэтому можно предположить, что такое же число решений будет и при малых смещениях центра давления.

Действительно, пусть

$$\mu/C\omega_0^2 \ll 1, \quad \mu/C\sigma^2 \ll 1, \quad \mu/K\omega_0 \ll 1; \quad K < \frac{3}{2}\omega_0|C - A|.$$

При $\mu = 0$ уравнение (14) имеет три корня

$$s_1 = 0, \quad s_{2,3} = \frac{\omega_0(3C - 5A) \pm \sqrt{9(C - A)^2 \omega_0^2 - 4K^2}}{2C\sigma}$$

кратности 2 каждый. При малых μ каждый из них расщепляется на два вещественных корня

$$s_{1,\pm} = \frac{\pm(3C-4A)\mu}{(3C-4A)A\omega_0^2 - K^2} + o\left(\frac{\mu}{C\omega_0^2}, \frac{\mu}{K\omega_0}, \frac{\mu}{C\sigma^2}\right),$$

$$s_{2,\pm} = s_2 \pm \frac{\sqrt{K^2 s_2^2 + (1+s_2^2)[(3C-4A)\omega_0 - C\sigma s_2]^2}}{|C(3C-5A)\omega_0^2 \sigma s_2|} \mu + o\left(\frac{\mu}{C\omega_0^2}, \frac{\mu}{K\omega_0}, \frac{\mu}{C\sigma^2}\right),$$

$$s_{3,\pm} = s_3 \pm \frac{\sqrt{K^2 s_3^2 + (1+s_3^2)[(3C-4A)\omega_0 - C\sigma s_3]^2}}{|C(3C-5A)\omega_0^2 \sigma s_3|} \mu + o\left(\frac{\mu}{C\omega_0^2}, \frac{\mu}{K\omega_0}, \frac{\mu}{C\sigma^2}\right).$$

2 стационарных вращения. Данный случай реализуется при большом смещении центра давления от центра масс

$$\mu/C\omega_0^2 \gg 1, \mu/C\sigma^2 \gg 1, \mu/K\omega_0 \gg 1.$$

При этом уравнение (14) имеет два вещественных корня порядка μ

$$\pm \frac{\mu}{C\sigma\omega_0} + o\left(\frac{\mu}{C\omega_0^2}, \frac{\mu}{K\omega_0}, \frac{\mu}{C\sigma^2}\right).$$

Отметим, что для этих двух корней, в соответствии с (9.1), $|\operatorname{tg}\theta| \gg 1$, т.е. $\theta \approx \pi/2$, а для угловой скорости собственного вращения (в предположении $\sigma/\omega_0 \gg 1$) имеем $\dot{\varphi} = \sin\theta(\omega_0 \cos\psi + \sigma \sin\psi) = \pm\sigma[1 + O(\omega_0/\sigma)]$.

Четыре других корня имеют нулевой порядок по μ , определяются уравнением

$$(s^2 + 1)[(3C-4A)\omega_0 - C\sigma s]^2 + K^2 s^2 = 0$$

и, очевидно, являются комплексными.

Случай четырех стационарных вращений может быть реализован при промежуточных значениях μ .

Численные примеры:

В рассмотренных далее численных примерах используются следующие параметры спутника (все величины в системе СИ):

$$m = 10, A = 0.15, C = 0.18, S = 0.2, L = 0.2, p_1 = 0.016, \sigma = 0.1;$$

высота орбиты $3 \cdot 10^5$, орбитальная угловая скорость $\omega_0 = 1.2 \cdot 10^{-3}$, скорость набегающего потока $V = 7.74 \cdot 10^3$, плотность атмосферы $\rho = 10^{-10}$.

а) $k = 0.004$, d варьируется (соответственно, изменяется параметр μ).

Расчеты показывают, что во всем рассматриваемом диапазоне изменения μ (за исключением случаев $\mu = \pm K\omega_0$, когда угол прецессии может принимать произвольные значения), значения ψ лежат в окрестности нуля или π . На Рис. 4 приведены соответствующие графики.

Как видим, численные результаты согласуются с выводами проведенного ранее анализа для случаев, когда $\mu \neq \pm K\omega_0$: при малых по модулю значениях μ ($|\mu| < \tilde{\mu}_1$) существует шесть решений, при больших μ ($|\mu| > \tilde{\mu}_0$) – два решения, в промежуточной области – четыре решения.

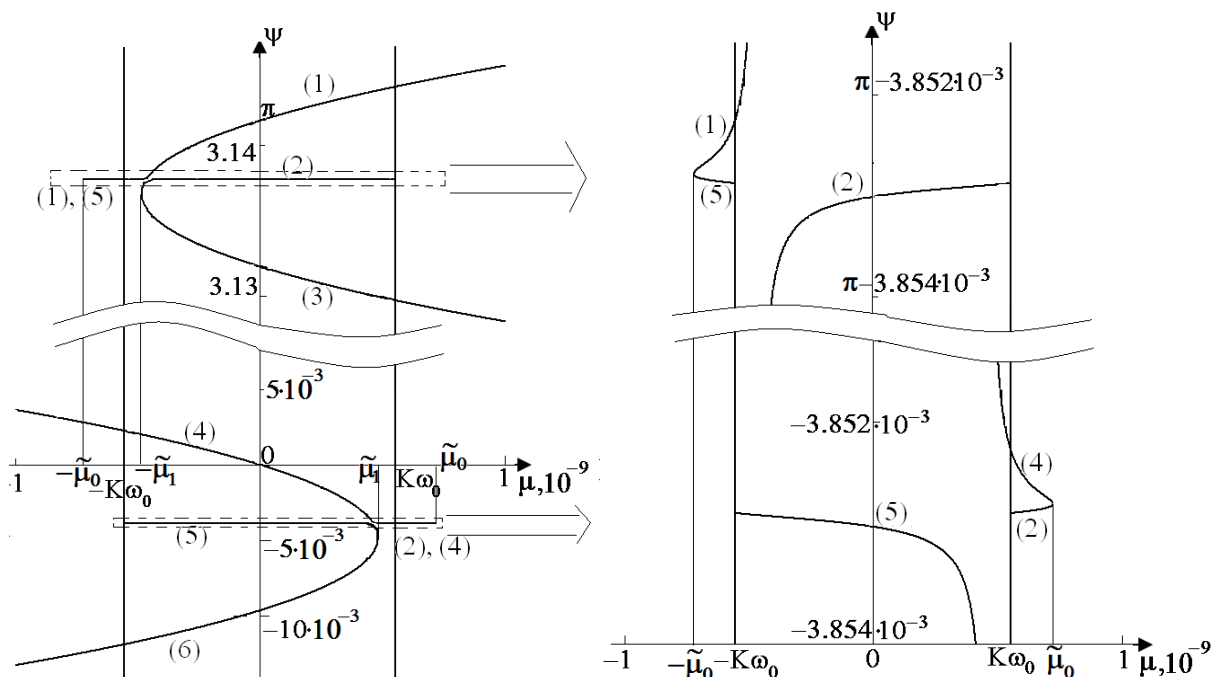


Рис. 4. Угол прецессии. Справа «горизонтальные» участки показаны в увеличенном масштабе (в скобках номера ветвей решений).

Приведем также результаты расчетов для угла нутации и угловой скорости собственного вращения (в единицах ω_0). При малых μ угол нутации изменяется в широких пределах, но при увеличении абсолютного значения этого параметра все решения лежат в окрестности $\theta = \pi/2$ (Рис. 5). Угловая скорость (Рис. 6) в рассматриваемом диапазоне малых значений μ имеет порядок ω_0 .

Таким образом, проведенный анализ показывает, что при различных значениях μ ось авторотации может располагаться в окрестности любой из осей ОСК. Если $\mu = 0$ (отсутствие консервативного аэродинамического момента), ось авторотации направлена по нормали к плоскости орбиты,

спутник покоится относительно атмосферы. Если $\mu = \pm K\omega_0$, ось авторотации направлена по радиусу-вектору, при этом в ОСК спутник покоится. Равновесие поддерживается за счет разнонаправленного действия консервативной и демпфирующей компонент аэродинамического момента. При $\mu \rightarrow \infty$, консервативная компонента аэродинамического момента является преобладающей, и ось авторотации асимптотически приближается к трансверсали.

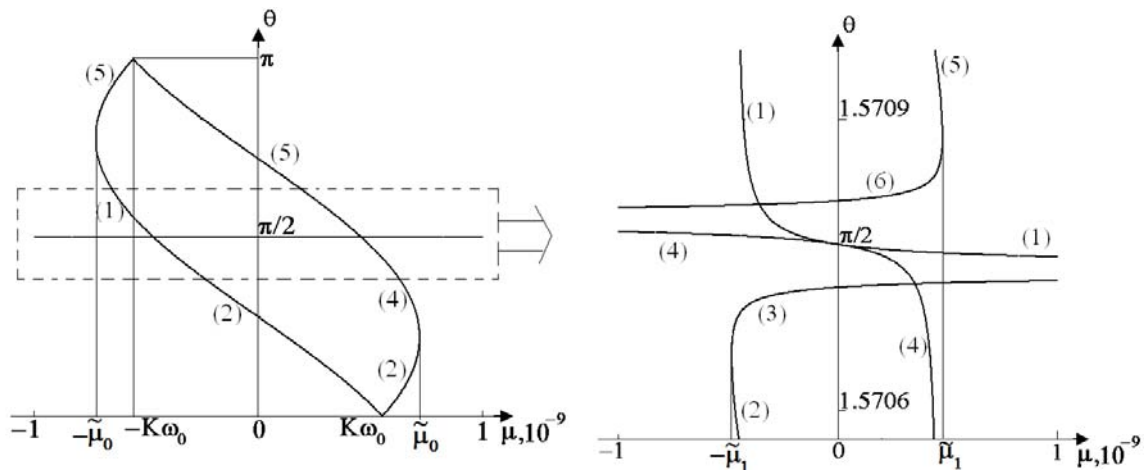


Рис. 5. Угол нутации, в т.ч. окрестность $\theta = \pi/2$.

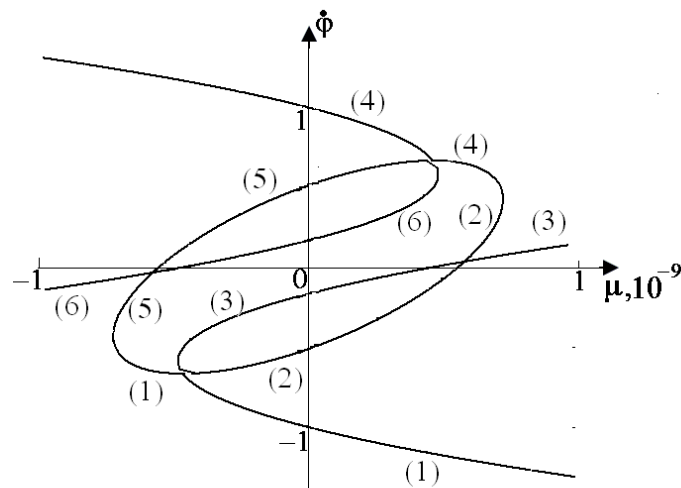


Рис. 6. Угловая скорость собственного вращения

б) $\mu = 3 \cdot 10^{-10}$, k варьируется (соответственно, изменяется параметр K). Расчеты показывают, что для всех равновесий угол прецессии (за исключением случая $K = \mu/\omega_0$) лежит в окрестности нуля или π (Рис. 7). При достаточно малых $\mu < \min\{\mu_0, \hat{\mu}\}$ (т.е. для случая, когда при $K = 0$ имеется 6

стационарных вращений) с ростом K количество стационарных вращений уменьшается с 6 до 2.

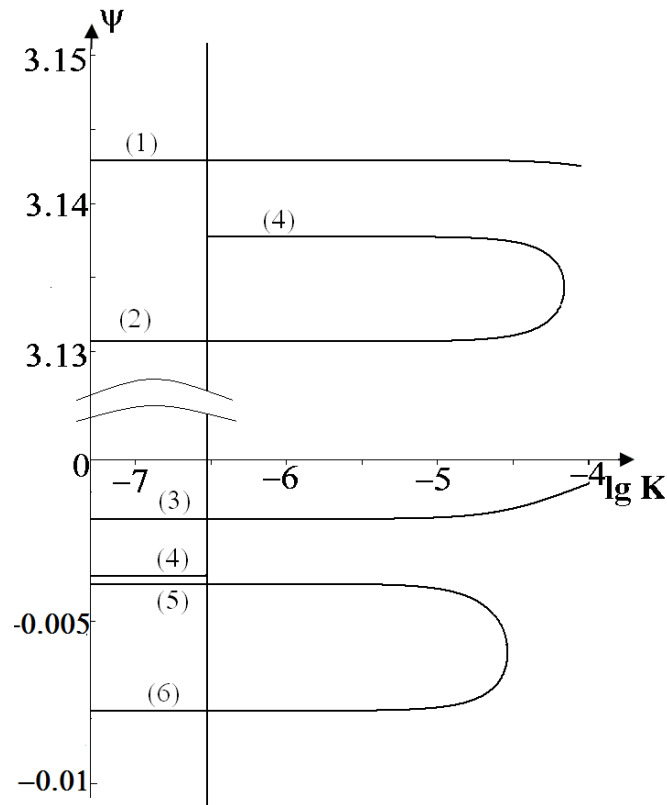


Рис. 7. Эволюция решений (угол прецессии).

При $K = 0$, в соответствии с полученными ранее результатами, для 4-х решений ось авторотации лежит в плоскости, содержащей нормаль к плоскости орбиты и трансверсаль, а еще для двух решений угол нутации определяется (14) (Рис. 8). При увеличении K углы нутации для первой группы остаются в окрестности $\pi/2$. Угловые скорости собственного вращения имеют порядок ω_0 (Рис. 9).

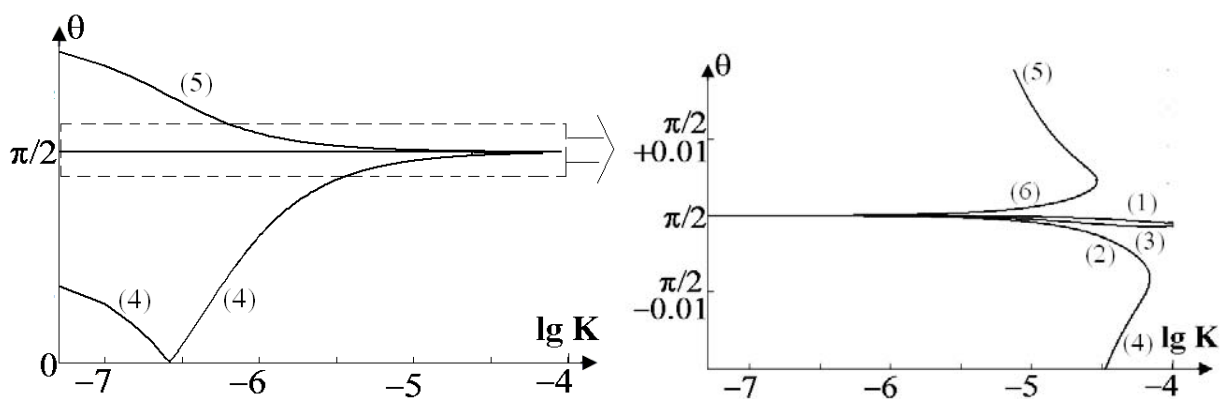


Рис. 8. Эволюция решений (угол нутации).

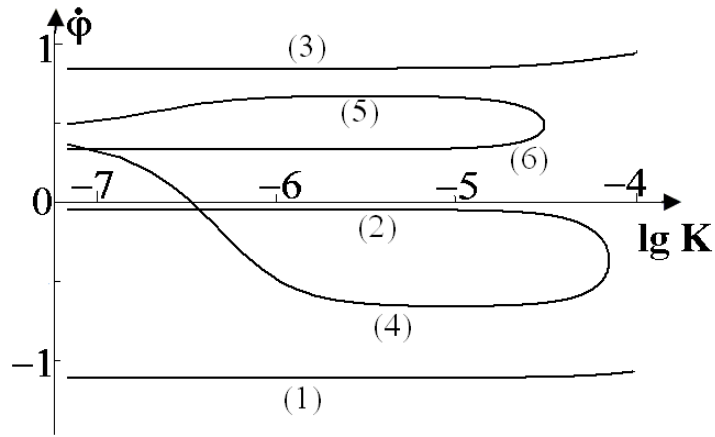


Рис. 9. Угловая скорость собственного вращения.

Устойчивость стационарных вращений

Для исследования устойчивости линеаризуем уравнения движения (6), (7) в окрестности стационарного вращения, характеризуемого углами ориентации оси вращения ψ_0, θ_0 . При этом последнее уравнение (7) отбрасывается, т.к. переменная φ является несущественной. Ненулевые элементы матрицы Λ линеаризованной системы имеют вид

$$l_{11} = \omega_0 \sin \psi_0 \operatorname{ctg} \theta_0,$$

$$l_{12} = \omega_0 \cos \psi_0,$$

$$l_{14} = 1/\sin \theta_0,$$

$$l_{21} = -\omega_0 \cos \psi_0,$$

$$l_{23} = 1,$$

$$l_{31} = \cos \psi_0 \cos \theta_0 [\mu + A\omega_0^2 \sin \psi_0 \sin \theta_0] / A,$$

$$l_{32} = [3\omega_0^2 (C - A) \cos 2\theta_0 - \mu \sin \psi_0 \sin \theta_0 - A\omega_0^2 \cos^2 \psi_0 \cos^2 \theta_0] / A,$$

$$l_{33} = -K/A,$$

$$l_{34} = -\sin \theta_0 [C\sigma \sin \psi_0 + A\omega_0 \cos \psi_0] / A,$$

$$l_{35} = -C\omega_0 \cos \psi_0 \cos \theta_0 / A,$$

$$l_{41} = \sin \psi_0 [-\mu - A\omega_0^2 \sin \psi_0 \sin \theta_0] / A,$$

$$l_{42} = \omega_0^2 \sin \psi_0 \cos \psi_0 \cos \theta_0,$$

$$l_{43} = \sin \theta_0 [C\sigma \sin \psi_0 + A\omega_0 \cos \psi_0] / A,$$

$$l_{44} = -K/A,$$

$$\begin{aligned}
l_{45} &= C\omega_0 \sin \psi_0 / A, \\
l_{51} &= \tilde{K}\sigma \cos \psi_0 \sin \theta_0 / C, \\
l_{52} &= \tilde{K}\sigma \sin \psi_0 \cos \theta_0 / C, \\
l_{55} &= -\tilde{K}/C.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим простейшие частные случаи.

1) Случай $\mu = 0$.

Для тривиальных стационарных вращений, когда ось авторотации направлена по нормали к плоскости орбиты, характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
(C\lambda + \tilde{K}) \cdot \left[A^2 \lambda^4 + 2AK\lambda^3 + (3\omega_0^2 AC - \omega_0^2 A^2 + K^2) \lambda^2 + \right. \\
\left. + \omega_0^2 (3C - A)K\lambda + \omega_0^2 (4\omega_0^2 A^2 - 3\omega_0^2 AC + K^2) \right] = 0.
\end{aligned}$$

Условия Рауса-Гурвица в этом случае выполнены при

$$C > A, \quad K^2 > (3C - 4A)A\omega_0^2.$$

Для «косых» вращений численные расчеты для сплюснутого спутника показывают следующую закономерность: при $K = K^* = \frac{3}{2}\omega_0(C - A)$ (верхнего предела существования таких вращений) выполнены необходимые условия устойчивости; при малом уменьшении K выполнены необходимые и достаточные условия устойчивости; при дальнейшем уменьшении K устойчивость теряется. С учетом того, что, как легко показать,

$\sqrt{(3C - 4A)A\omega_0^2} \leq \frac{3}{2}\omega_0(C - A)$, в определенном интервале значений K устойчивыми одновременно являются и тривиальные, и «косые» вращения.

Докажем возможность асимптотической устойчивости «косых» вращений. При $K = K^*$ имеем

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0(3C - 5A)}{2C\sigma}, \quad \operatorname{tg} \theta = \pm \frac{\sqrt{\omega_0^2(3C - 5A)^2 + 4C^2\sigma^2}}{\omega_0(3C - 5A)}, \quad \det \Lambda = 0.$$

В предположении $\sigma/\omega_0 \gg 1$ характеристическое уравнение (с учетом членов минимального порядка по ω_0/σ) имеет вид

$$\lambda(b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= 32A^2C^5\sigma^4, \\ b_1 &= 32\tilde{K}A^2C^4\sigma^4, \\ b_2 &= 96\tilde{K}(C-A)AC^4\sigma^4\omega_0, \\ b_3 &= 16\tilde{K}(9C^2-15AC+10A^2)C^4\sigma^4\omega_0^2, \\ b_4 &= 16\tilde{K}(9C^2-9AC-2A^2)C^4\sigma^4\omega_0^3. \end{aligned}$$

Анализ условий Рауса-Гурвица (в форме Лъенара-Шипара) показывает, что при $C > A(9 + \sqrt{153})/18 \approx 1.19A$ все корни многочлена

$$b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4$$

лежат левее мнимой оси. Таким образом, в этом случае при $K = K^*$ выполнены необходимые условия устойчивости; при малом уменьшении K косые вращения асимптотически устойчивы тогда и только тогда, когда $\det \Lambda < 0$.

Выясним, при каких условиях $\det \Lambda < 0$. Положим

$$K^2 = \frac{9}{4}\omega_0^2(C-A)^2 - \varepsilon^2,$$

тогда из (8)

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\omega_0(3C-5A) \pm 2\varepsilon}{2C\sigma}.$$

Определив приращения ψ и θ по сравнению со случаем $K = K^*$ (во втором случае, используя (9.1)), вычислим $\det \Lambda$ в минимальном порядке по ε . Символьные вычисления в среде MATLAB показывают, что для случая $\sigma/\omega_0 \gg 1$ с сохранением членов минимального порядка по ω_0/σ этот

детерминант имеет вид $\mp \frac{\varepsilon(3C-5A)}{A^2C} \omega_0^3 K$. Таким образом, для вращений,

отвечающих знаку «+» в формуле (10), асимптотическая устойчивость имеет место для «сильно сплюснутого» спутника ($3C > 5A$); напротив, для вращений, отвечающих знаку «-» в формуле (10), асимптотическая устойчивость имеет место для менее сплюснутого спутника, т.е. при $A(9 + \sqrt{51})/18 < C < 5A/3$.

2) Случай $K = 0$.

Пусть $\mu = 0$. Рассмотрим решения $\psi = 0, \theta = \pi/2$ и $\psi = \pi, \theta = \pi/2$; соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$(C\lambda + \tilde{K})[A^2\lambda^4 + A(3C-A)\omega_0^2\lambda^2 + A(4A-3C)\omega_0^4] = 0.$$

Необходимые условия устойчивости выполнены при $A < C < 4A/3$.

Рассмотрим теперь решения $\psi = -\arctg(A\omega_0/C\sigma)$, $\theta = \pi/2$ и $\psi = \pi - \arctg(A\omega_0/C\sigma)$, $\theta = \pi/2$. В этом случае для характеристического полинома не выполнены условия Рауса-Гурвица, а именно,

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = -A^4 C^3 \tilde{K} \omega_0^2 \sigma^2 / (C^2 \sigma^2 + A^2 \omega_0^2) < 0.$$

Следовательно, стационарные вращения неустойчивы.

Пусть $\mu \rightarrow +\infty$. Для решения $\psi \rightarrow -\pi/2$, $\theta = \pi/2$ характеристическое уравнение имеет вид

$$(C\lambda + \tilde{K})(a_0 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 + a_4) = 0,$$

при этом

$$a_2/a_0 = (-2A\mu + C^2 \sigma^2) / A^2 < 0.$$

Стационарное вращение неустойчиво.

Для решения $\psi \rightarrow \pi/2$, $\theta = \pi/2$ характеристическое уравнение (при удержании членов вплоть до нулевого порядка по $\mu/C\omega_0^2 \gg 1$, $\mu/C\sigma^2 \gg 1$) принимает вид

$$(C\lambda + \tilde{K}) \left[A^2 \lambda^4 + (2A\mu + C^2 \sigma^2 + \omega_0^2 (3AC - 2A^2)) \lambda^2 + (\mu + A\omega_0^2)(\mu + 3(C - A)\omega_0^2) \right] = 0.$$

Необходимые условия устойчивости выполнены.

Можно показать, что при $K \neq 0$ данное стационарное вращение становится асимптотически устойчивым. Действительно, в этом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$(C\lambda + \tilde{K})(b_0 \lambda^4 + b_1 \lambda^3 + b_2 \lambda^2 + b_3 \lambda + b_4) = 0, \quad (18)$$

где

$$b_0 = A^2,$$

$$b_1 = 2AK,$$

$$b_2 = 2A\mu + C^2 \sigma^2 + \omega_0^2 (3AC - 2A^2) + K^2,$$

$$b_3 = [2\mu + (3C - 2A)\omega_0^2]K,$$

$$b_4 = (\mu + A\omega_0^2)(\mu + 3(C - A)\omega_0^2).$$

Как легко видеть, все коэффициенты b_i положительны; кроме того,

$$b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 = AK^2 \left[(4C^2 \sigma^2 + 4K^2) \mu + \right. \\ \left. + A\omega_0^4 (3C - 4A)^2 + 2\omega_0^2 (3C - 2A)(C^2 \sigma^2 + K^2) \right] > 0$$

и, тем самым, выполнены условия Рауса-Гурвица в форме Лъенара-Шипара.

В заключение приведем результаты численного моделирования углового движения спутника с введенными выше параметрами и $d = 0.1$, что соответствует $\mu = 1.54 \cdot 10^{-4}$. В этом случае близкое к предельному положение равновесия $\psi_0 = 1.7041$, $\theta_0 = \pi/2 - 3.54 \cdot 10^{-6}$ ($\dot{\varphi} = 85.6\omega_0$) является единственным асимптотически устойчивым. На Рис. 10 показано изменение углов ориентации и компонент угловой скорости в полусвязанной системе координат (фактически, за исключением проекции ω_z , изображены их огибающие). На Рис. 11 для сравнения показана эволюция углов ориентации в окрестности неустойчивого положения равновесия.

Как видно из приведенных графиков, скорость переходных процессов крайне низка. Исключением является лишь процесс раскрутки вокруг оси авторотации. Поэтому на практике реализовать такой стационарный режим весьма затруднительно. Это объясняется тем, что степень устойчивости характеристического уравнения (16) чрезвычайно мала. С учетом членов первого порядка по $K/A\omega_0$ и нулевого порядка по $\mu/C\omega_0^2$, $\mu/C\sigma^2$ она равна $K/2A$. При малых d порядок степени устойчивости также составляет K/A (в частности, для $d = 0$ и тривиального вращения из соответствующего характеристического уравнения можно получить, что в первом порядке по $K/A\omega_0$ она также составляет $K/2A$). Таким образом, характерное время жизни колебаний в окрестности стационарного вращения составляет не менее 400 витков.

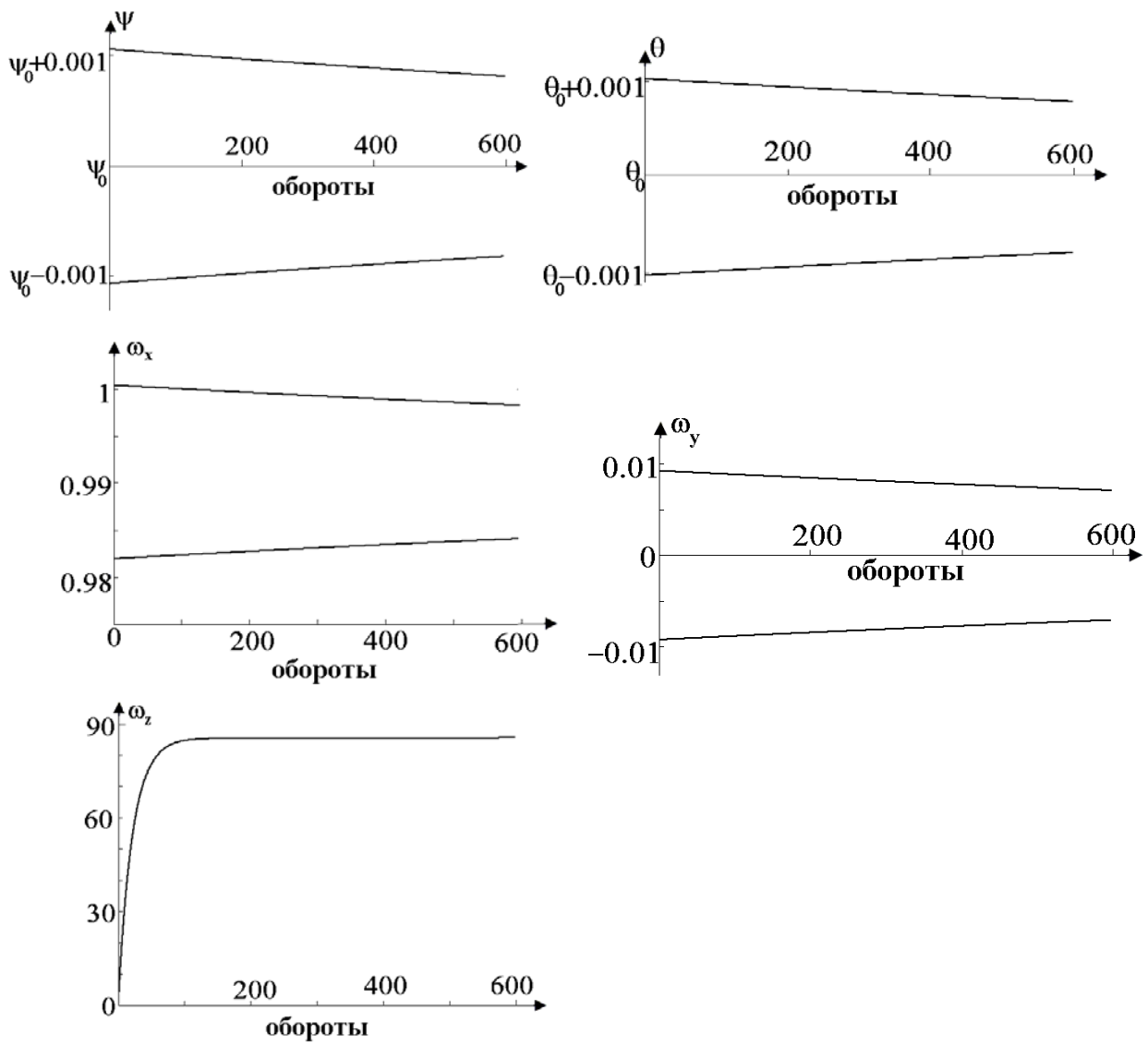


Рис. 10. Движение вблизи асимптотически устойчивого вращения.

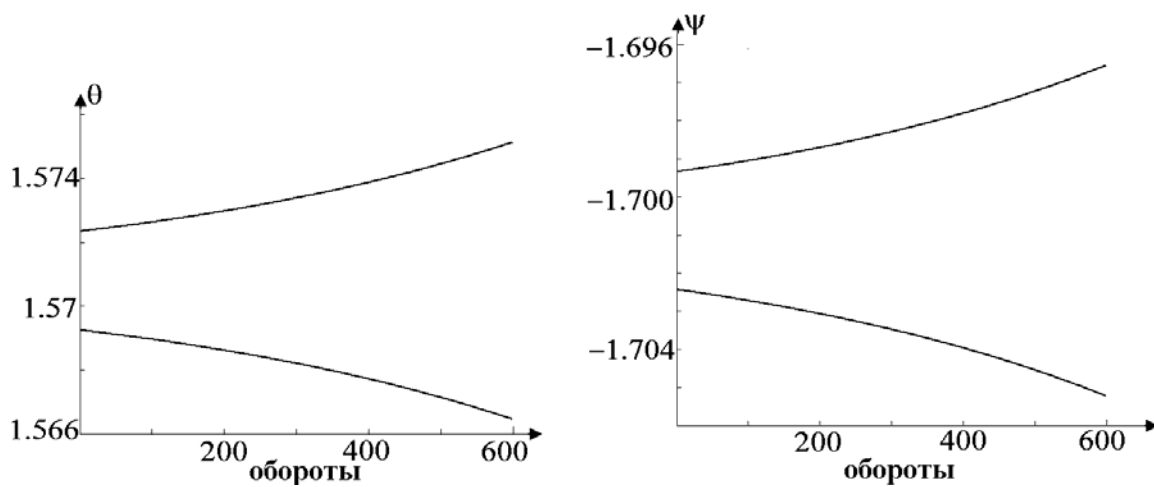


Рис. 11. Случай неустойчивого стационарного вращения.

Заключение

В работе предложена математическая модель динамики спутника специальной формы на низкой круговой орбите, на который действует вращающий аэродинамический момент. Исследованы стационарные вращения спутника в орбитальной системе координат. Показано, что в зависимости от значений параметров системы возможно от двух до шести стационарных вращений. Для некоторых простейших конфигураций системы проведено исследование устойчивости стационарных вращений в линейном приближении и получены оценки скорости протекания переходных процессов.

Литература

1. В.В. Белецкий. Оценка характера взаимодействия аэродинамического потока со спутником по анализу движения спутника «Протон-2» относительно центра масс. Космические исследования, т.8, №2, 1970.
2. В.А. Сарычев, С.А. Мирер, И.В. Янковский. Исследование одной формы авторотационного движения тела на струнном подвесе. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1987, №90.
3. С.А. Мирер, В.А. Тимофеев. Авторотационное движение твердого тела в атмосфере. Вертикальный режим. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР, 1991, №51.
4. Ф.Р. Гантмахер, А.М. Левин. Теория полета неуправляемых ракет. – М., Физматгиз, 1959.
5. Б.Я. Локшин, В.А. Привалов, В.А. Самсонов. Введение в задачу о движении тела в сопротивляющейся среде. – М., изд-во Моск. Университета, 1986.
6. В.В. Белецкий, А.М. Яншин. Влияние аэродинамических моментов на вращательное движение искусственных спутников. – Киев, Наукова Думка, 1984.