ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 62 за 2011 г.

Рыков Ю.Г.

Вариационное представление обобщенных решений квазилинейных гиперболических систем и возможные алгоритмы для гибридных вычислительных комплексов

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНТСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ ИМ. М. В. КЕЛДЫША

Ю. Г. Рыков

ВАРИАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ВОЗМОЖНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ГИБРИДНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Москва, 2011

Ю.Г. Рыков. *Вариационное представление обобщенных решений квазилинейных гиперболических систем и возможные алгоритмы для гибридных вычислительных комплексов.*

Аннотация. В работе сформулирован новый подход к рассмотрению систем квазилинейных гиперболических уравнений. Этот подход базируется на представлении обобщенных решений как набора функций, определенных на некоторых семействах кривых. Эти функции и кривые (которые оказываются характеристиками) ищутся как решения некоторой вариационной задачи. В результате задача поиска обобщенных решений может быть представлена как некоторый набор независимых вариационных задач. Это указывает путь к возможному эффективному алгоритму для расчета на гибридных вычислительных комплексах. Работа написана на «физическом» уровне строгости.

Yu.G. Rykov. *A variational representation of generalized solutions to quasi-linear hyperbolic systems and possible algorithms for hybrid supercomputers.*

Abstract. In the present work the new approach to the study of quasi-linear hyperbolic systems is formulated. This approach is based on the representation of generalized solutions as the set of functions on certain families of curves. Such functions and curves (which occur to be characteristics) are found as the solutions of some variational problem. As a consequence the problem of finding of generalized solutions can be formulated as a set of independent variational problems. The situation highlights the way to possible robust algorithm for calculations with the aid of hybrid supercomputers. The work is written at “physical” level of rigor.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 09-01-00288 и № 11-01-12045 офи_м.

Вводные замечания

Целью этой небольшой работы является фиксация размышлений автора на тему поиска нового подхода к теории квазилинейных систем гиперболических уравнений. В результате этих размышлений сформировалась некоторая концепция, которая существенно, насколько известно автору, отличается от предложенных ранее. Поскольку работа находится в самом начале и, на самом деле, пока не очень ясно, к каким последствиям эти исследования могут привести, то никакого обзора литературы и состояния дел в этой обширной области не приводится. В последующих параграфах будет сформулирован и проиллюстрирован взгляд на *обобщенные решения квазилинейных гиперболических систем как на составленные из решений набора экстремальных задач для некоторых функционалов на пространстве траекторий*. Отметим лишь, что из известной автору литературы наиболее близкой, и в некотором роде базисной, является старая работа О.А.Олейник, посвященная одному уравнению [1]. На данном этапе автор не стремился максимально использовать утонченный арсенал теории функциональных пространств и вариационного исчисления и добиваться высокого уровня строгости рассуждений. *Задача заключается в предварительном осмыслении возможных направлений развития теории и подготовке рабочего материала.* Поэтому все результаты получены в предположении кусочной гладкости соответствующих функций, что неявно предполагается во всех последующих рассуждениях. Также предполагаются известными общепринятые определения и факты из теории гиперболических систем уравнений и вариационного исчисления. Общее направление исследований – последовательно перейти от общего взгляда к построению конкретных вариационных принципов. В сильно сокращенном виде полученные результаты изложены в докладе автора [2].

§1. Формулировка общего взгляда на природу квазилинейных гиперболических систем уравнений

Рассмотрим задачу Коши для следующей системы квазилинейных уравнений, которая предполагается строго гиперболической

$$U_t + F\left(U\right)_x = 0, \tag{1.1}$$

здесь $\left(t,x\right)\in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$, $U\left(t,x\right)=\left(u_1,...,u_n\right)$, а F – достаточно гладкая вектор-функция. Решения системы (1.1) понимаются в обобщенном смысле, то есть допускают разрывы. Будем также предполагать, что решение этой системы принимает (в некотором пространстве, например, L_1) заданные начальные значения $U\left(0,x\right)=U_0\left(x\right)$.

Систему уравнений (1.1), вообще говоря, можно заменить интегральным тождеством, которое предполагается справедливым для любого замкнутого контура C, не пересекающегося с осью $t=0$, см., например, [1],

$$\oint_C U dx - F(U)\, dt = 0\,. \qquad (1.2)$$

Сделаем следующий шаг и изучим вектор-функционал $\vec{J}$ на траекториях $\left(x(\tau), U(\tau)\right)$

$$\vec{J} \equiv \int_0^y U_0(s) ds + \int_0^t \left\{ U\dot{x} - F(U) \right\} d\tau\,, \qquad (1.3)$$

здесь $x(0) = y$, $x(t) = x$, $U(0) = U_0(y)$. То есть значение функционала $\vec{J}$ определяется точкой y и конкретными траекториями $x(\tau)$ и $U(\tau)$. Таким образом, если мы определим из каких-нибудь соображений траектории $x(\tau)$ и $U(\tau)$, то фактически на отрезке $[0,t]$ получим функцию $U(\tau, x(\tau))$. Если теперь при фиксированном t менять конечную точку x, то получим набор траекторий (при этом будет меняться и точка y) и значения функции U вдоль этих траекторий. Значит, вообще говоря, мы получим функцию $U(t,x)$.

Для выбора нужных (которые будут использоваться для конструирования решений) траекторий сформулируем общий принцип.

Принцип 1. *Для конструирования обобщенных решений системы (1.1) необходимо ограничиться траекториями, являющимися критическими для функционала* $\vec{J}$*, т.е. должно выполняться соотношение* $\delta\vec{J} = 0$.

Траектории, вообще говоря, могут быть негладкими, т.е. $x(\tau)$ может иметь изломы (непрерывность все же сохраняется), а $U(\tau)$ может иметь и скачки (т.е. быть разрывной). Пусть пока все гладко, подсчитаем в этом случае вариацию $\delta\vec{J}$

$$\delta\vec{J} = \left[U_0(y) - U(0, y; t, x)\right]\delta y + \int_0^t \left[\left(\dot{x} - F'(U)\right)\delta U - \dot{U}\delta x\right] d\tau\,. \qquad (1.4)$$

Из формулы (1.4) сразу следует, что, если вариация обращается в ноль, то траектории должны соответствовать начальным условиям $U(0,y) = U_0(y)$. Однако, больше полезной информации извлечь не удается, поэтому придется сформулировать следующий общий принцип.

Принцип 2. *При поиске критических точек функционала должно выполняться соотношение* $\delta U = \dfrac{\delta U \cdot l_k}{r_k \cdot l_k} r_k + \vec{\Phi}(\tau, U) \cdot \delta x$*, где* $\vec{\Phi}$ *– некоторая вектор-функция, удовлетворяющая условию* $l_k \cdot \vec{\Phi} = 0$*,* r_k *– один из правых собственных векторов матрицы* F'*, а* l_k *– соответствующий левый.*

При условии соблюдения Принципа 2 посмотрим к чему приводит равенство нулю вариации (1.4). Подставив величину δU в (1.4), легко видеть, что подынтегральное выражение в (1.4) выглядит так

$$\frac{\delta U \cdot l_k}{r_k \cdot l_k}\left(\dot{x} - \lambda_k\right) r_k + \delta x\left[\left(\dot{x} - F'(U)\right)\vec{\Phi} - \dot{U}\right], \qquad (1.5)$$

где λ_i является соответствующим собственным числом матрицы F'. Вследствие независимости и произвольности величин $\delta U \cdot l_k$ и δx для обращения в нуль выражения (1.5) должны выполняться соотношения $\dot{x} = \lambda_k$, $\dot{U} \cdot l_k = 0$. Это не что иное, как соотношения на характеристике системы (1.1). Таким образом, Принципы 1 и 2 дают нам возможность взглянуть на гладкие (без разрывов) решения системы (1.1) как на составленные из набора в некотором особом смысле критических траекторий вектор-функционала $\vec{J}$.

§2. Изучение функционала $\vec{J}$ в случае негладких траекторий

При наличии излома у траектории $x(\tau)$ и разрыва у траектории $U(\tau)$ фактически возникает задача вариационного исчисления с подвижными концами. Пусть точка $(\tilde{t},\tilde{x})$ представляет собой точку излома траектории, тогда из стандартных формул вариационного исчисления получаем для вариации

$$\begin{gathered}\delta\vec{J} = \left[U_0(y) - U(0,y;t,x)\right]\delta y + \int\limits_{[0,t]\setminus\{\tilde{t}\}} \left[\left(\dot{x} - F'(U)\right)\delta U - \dot{U}\delta x\right]d\tau + \\ F(U)\Big|_{\tilde{t}-0}^{\tilde{t}+0}\delta\tilde{t} - U\Big|_{\tilde{t}-0}^{\tilde{t}+0}\delta\tilde{x}\end{gathered}. \quad (2.1)$$

Если мы продолжаем придерживаться Принципов 1 и 2, то: 1) величина $\delta\vec{J}$ должна обращаться в нуль, 2) сумма первых двух членов также должна быть равна нулю. Значит, из (2.1) следует, что

$$F(U)\Big|_{\tilde{t}-0}^{\tilde{t}+0}\delta\tilde{t} - U\Big|_{\tilde{t}-0}^{\tilde{t}+0}\delta\tilde{x} = 0. \quad (2.2)$$

Если предположить, что точка излома $(\tilde{t},\tilde{x})$ может двигаться только вдоль некоторой кривой $\tilde{x}(\tilde{t})$, то соотношения (2.2) представляют собой ни что иное как соотношения Ренкина-Гюгонио для гиперболических систем. Это означает, что изломы характеристик должны возникать на разрывах обобщенных решений, что и соответствует обычным выводам теории.

Теперь рассмотрим случай пересечения характеристик одного семейства, т.е. тот случай, когда в данную точку могут приходить две или более критические в описанном выше смысле траектории.

Принцип 3. *Из всех критических траекторий, которые приходят в точку с координатами (t,x), формирующими разрыв будут те, на которых значения вектор-функционала $\vec{J}$ совпадают.* (Более тонкие вопросы, типа: является ли это значение реальным экстремумом, что делать, если найдется не одна пара таких траекторий, на данном уровне изложения не рассматриваем.)

Посмотрим, какие следствия вытекают из Принципа 3 относительно возможных линий разрыва. Вдоль возможного разрыва $X(t)$ имеем (будем считать, что приходящие траектории гладкие)

$$\int_0^{y_+} U_0(s)ds + \int_0^t \left\{ U^+\dot{x}^+ - F\left(U^+\right) \right\} d\tau = \int_0^{y_-} U_0(s)ds + \int_0^t \left\{ U^-\dot{x}^- - F\left(U^-\right) \right\} d\tau\,, \quad (2.3)$$

здесь $x^{\pm}\left(\tau, y^{\pm}\right)$ и $U^{\pm}\left(\tau, y^{\pm}\right)$ – соответственно характеристические кривые одного семейства, приходящие с разных сторон разрыва, и значения U на этих кривых, кроме того $X(t) = x^{\pm}\left(t, y^{\pm}\left(t, X(t)\right)\right)$.

Продифференцируем соотношение (2.3) по переменной t.

$$\begin{gathered} U_0^+ \frac{dy^+}{dt} + \left[U^+\dot{x}^+ - F\left(U^+\right) \right] + \int_0^t \left\{ \frac{dU^+}{dt}\dot{x}^+ + U^+\frac{d\dot{x}^+}{dt} - F'\left(U^+\right)\frac{dU^+}{dt} \right\} d\tau = \\ U_0^- \frac{dy^-}{dt} + \left[U^-\dot{x}^- - F\left(U^-\right) \right] + \int_0^t \left\{ \frac{dU^-}{dt}\dot{x}^- + U^-\frac{d\dot{x}^-}{dt} - F'\left(U^-\right)\frac{dU^-}{dt} \right\} d\tau \end{gathered}\,. \quad (2.4)$$

Интегрируя по частям, получим выражения для правой и левой стороны равенства (2.4)

$$U^{\pm}\frac{dx^{\pm}}{dt} + \left[U^{\pm}\dot{x}^{\pm} - F\left(U^{\pm}\right) \right] + \int_0^t \left\{ \frac{dU^{\pm}}{dt}\dot{x}^{\pm} - \dot{U}^{\pm}\frac{dx^{\pm}}{dt} - F'\left(U^{\pm}\right)\frac{dU^{\pm}}{dt} \right\} d\tau\,. \quad (2.5)$$

Заметим, что $\dfrac{dx^{\pm}}{dt} = \dfrac{\partial x^{\pm}}{\partial y} \cdot \dfrac{dy^{\pm}}{dt}$, то есть вместо (2.5) имеем

$$\left[U^{\pm}\frac{dX}{dt} - F\left(U^{\pm}\right) \right] + \int_0^t \left\{ \left[\dot{x}^{\pm} - F'\left(U^{\pm}\right) \right]\frac{dU^{\pm}}{dt} - \dot{U}^{\pm}\frac{dx^{\pm}}{dt} \right\} d\tau\,. \quad (2.6)$$

Далее относительно выражения (2.6) проведем эвристическое рассуждение. Если мы используем характеристики, то $\dot{x}^{\pm}$ равно соответствующему собственному числу, например λ_k, а $\dot{U}^{\pm}$ разлагается по подпространству правых собственных векторов, кроме r_k. Но тогда можно предположить, что выражение под интегралом в (2.6) обращается в ноль (в следующем параграфе справедливость возможности такого предположения показана для частного случая систем 2x2). В этом случае соотношения (2.4) представляют собой соотношения Ренкина-Гюгонио.

Итак, в случае негладких траекторий (если выполнен Принцип 3) вариационный подход, вообще говоря, приводит к необходимости выполнения соотношений Ренкина-Гюгонио, то есть к концепции обобщенного (слабого) решения.

§3. Частный случай одного уравнения и системы уравнений 2x2

Рассмотрим случай одного уравнения. Ограничим множество допустимых кривых характеристиками этого уравнения. Тогда в выражении для δJ (теперь изучаемый функционал не будет вектором) (1.4) интегральный член обращается в ноль, а оставшееся выражение

$\delta J=\left[U_0\left(y\right)-U\left(0,y;t,x\right)\right]\delta y$ после интегрирования приводит к известному вариационному принципу, по крайней мере, для выпуклой функции потока.

Случай системы из двух уравнений представляется принципиально более сложным. Рассмотрим здесь только гладкие решения. Опять ограничим множество допустимых кривых характеристиками, которые составляют какое-нибудь решение системы (1.1), т.е. начальные функции не принимаются во внимание.

Изучим подробнее это множество. Как хорошо известно, существует два семейства характеристик. Справедливы следующие соотношения для соответствующего семейства:

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=\lambda_1\left(U\right),\dot{U}_2=k_2\left(t,y_1\right)r_2\left(U_2\right),x_1\left(0\right)=y_1,U_2\left(0\right)=U_0\left(y_1\right)\\&\dot{x}_2=\lambda_2\left(U\right),\dot{U}_1=k_1\left(t,y_2\right)r_1\left(U_1\right),x_2\left(0\right)=y_2,U_1\left(0\right)=U_0\left(y_2\right)\end{aligned},\quad (3.1)$$

здесь k_1 и k_2 – некоторые, вообще говоря, произвольные функции, которые должны быть определены. Записывая соотношения (3.1) в интегральной форме, получим следующие два представления для предполагаемого решения, которые связаны с соответствующим полем характеристик

$$\begin{aligned}&x_1\left(\tau,y_1\right)=y_1+\int_0^\tau\lambda_1\left(U_2\left(s,U_0\left(y_1\right)\right)\right)ds,\\&U_2\left(\tau,y_1\right)=U_0\left(y_1\right)+\int_0^\tau k_2\left(s,y_1\right)r_2\left(U_2\left(s,U_0\left(y_1\right)\right)\right)ds;\\&x_2\left(\tau,y_2\right)=y_2+\int_0^\tau\lambda_2\left(U_1\left(s,U_0\left(y_2\right)\right)\right)ds,\\&U_1\left(\tau,y_2\right)=U_0\left(y_2\right)+\int_0^\tau k_1\left(s,y_2\right)r_1\left(U_1\left(s,U_0\left(y_2\right)\right)\right)ds\end{aligned}.\quad (3.2)$$

Если мы имеем дело с решениями системы (1.1), то эти два представления должны совпадать, то есть при пересечении характеристик разных семейств должно получаться одно значение соответствующей вектор-функции. То есть должны выполняться равенства

$$x_1\left(\tau,y_1\right)=x_2\left(\tau,y_2\right),U_1\left(\tau,y_2\right)=U_2\left(\tau,y_1\right).\quad (3.3)$$

При наших предположениях выражение под интегралом в формуле (1.4) для первого характеристического поля принимает вид

$$\left[\left(\lambda_1-F'\left(U_2\right)\right)U_{2y_1}-k_2r_2x_{1y_1}\right]\delta y.\quad (3.4)$$

Подставляя в (3.4) величину U_{2y_1} в форме $U_{2y_1}=\dfrac{\left(l_1\cdot U_{2y_1}\right)}{\left(l_1\cdot r_1\right)}r_1+\dfrac{\left(l_2\cdot U_{2y_1}\right)}{\left(l_2\cdot r_2\right)}r_2$,

придем к выражению

$$\left[\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\frac{\left(l_2\cdot U_{2y_1}\right)}{\left(l_2\cdot r_2\right)}-k_2x_{1y_1}\right]r_2\delta y.\quad (3.5)$$

С другой стороны из соотношений (3.3) имеем

$$\begin{aligned} x_{1\tau}d\tau + x_{1y_1}dy_1 = x_{2\tau}d\tau + x_{2y_2}dy_2 \\ U_{2\tau}d\tau + U_{2y_1}dy_1 = U_{1\tau}d\tau + U_{1y_2}dy_2 \end{aligned}. \qquad (3.6)$$

Умножая второе уравнение в (3.6) на вектор l_2 и используя соотношения (3.2), получаем

$$\begin{aligned} (\lambda_1 - \lambda_2)d\tau + x_{1y_1}dy_1 = x_{2y_2}dy_2 \\ k_2(l_2 \cdot r_2)d\tau + \left(l_2 \cdot U_{2y_1}\right)dy_1 = \left(l_2 \cdot U_{1y_2}\right)dy_2 \end{aligned}. \qquad (3.7)$$

Через каждую точку характеристики первого семейства проходит характеристика второго семейства. Вдоль кривых из второго характеристического поля $dy_2 = 0$. То есть, из (3.7) следует, что выполнено соотношение $(\lambda_1 - \lambda_2)\left(l_2 \cdot U_{2y_1}\right) - k_2(l_2 \cdot r_2)x_{1y_1} = 0$, а это означает обращение в ноль выражения (3.5).

Рассматривая выражение под интегралом в формуле (1.4) для второго характеристического поля, таким же образом находим, что и оно обращается в ноль.

Значит, положения Принципа 2 выполняются автоматически и в формуле для вариации $\delta\vec{J}$ интегральный член обращается в ноль подобно тому, как это было для одного уравнения. Также отметим, что и в формуле (2.6) будет обращаться в ноль интегральный член; это приводит к тому, что в случае систем 2x2 из Принципа 3 вытекают соотношения Ренкина-Гюгонио.

Отметим здесь также, что вариационная формулировка демонстрирует два «качественных перехода» в изучении гиперболических систем. Первое усложнение возникает при переходе от одного уравнения к системе, т.к. обычный функционал переходит в векторную форму, что затрудняет постановку задач на экстремум. Второе усложнение возникает при переходе от систем 2x2 к системам 3x3, т.к. в этом случае уже не выполняются простые соотношения типа (3.1), можно лишь утверждать, что вдоль характеристики $\left(l_k \cdot \dot{U}\right) = 0$. Далее принципиальных различий пока не просматривается, поскольку все формулы приобретают свой общий вид, усложнения должны возникать просто от увеличения количества степеней свободы (количества характеристических полей).

§4. Замечание о связи предлагаемого подхода с вычислениями на гибридных машинах

Здесь сделаем одно замечание, которое представляется важным. Из изложенного в предыдущих параграфах материала можно увидеть следующий абрис алгоритма поиска обобщенных решений гиперболических систем уравнений. Фиксируем момент времени T. Рассмотрим точку (T, x). Для этой точки решим некую экстремальную задачу для вектор-функционала $\vec{J}$. Для каждого характеристического поля найдем соответствующий набор траекторий и значения неизвестных функций на них. Так необходимо сделать для каждого x. Таким образом, мы для каждого характеристического поля найдем набор «кандидатов в решение» при $0 \le t \le T$. Теперь осталось лишь найти те из этих «кандидатов», которые дадут совпадающие функции для различных характеристических полей. Отметим, что все расчеты для разных точек (T, x) можно делать *независимо* друг от друга (внутренняя связь заложена в форму функционала $\vec{J}$). Это минимизирует обмены и позволяет разбить задачу на множество независимых подзадач, что позволяет наиболее удобным образом работать на архитектуре, связанной с расчетами на графических платах.

Отметим также, что изложенный подход, вообще говоря, переносится и на многомерные системы уравнений, важна только дивергентная форма. Это обстоятельство является важным при оценке возможной практической значимости предлагаемой трактовки природы обобщенных решений гиперболических систем, поскольку важные для практики задачи, как правило, многомерны.

Список Литературы

[1] О.А.Олейник, Задача Коши для нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка с разрывными начальными условиями. *Труды Моск. Мат. Об-ва*, т.**5**, с. 433 – 454 (1956).

[2] Ю.Г.Рыков, О представлении решений квазилинейных гиперболических систем как набора критических точек вектор-функционалов на траекториях. *Материалы международной конференции «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной 110-ой годовщине со дня рождения академика И.Г.Петровского, 30 мая – 4 июня 2011 г., МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва (2011)*, 325 – 326.