



Подлазов А.В.

Двумерные
самоорганизованно
критические модели типа
кучи песка с анизотропной
динамикой распространения
активности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Подлазов А.В. Двумерные самоорганизованно критические модели типа кучи песка с анизотропной динамикой распространения активности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 63. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-63>

А.В. Подлазов

Двумерные самоорганизованно критические модели типа кучи песка
с анизотропной динамикой распространения активности

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена численному и аналитическому исследованию двух самоорганизованно критических моделей типа кучи песка, имеющих анизотропную динамику распространения активности, – модели Дхара–Рамасвами и дискретной модели Федеров. Теоретически определен полный набор критических показателей для этих моделей.

Дается систематическое изложение метода конечно-размерного скейлинга и его применения для решения самоорганизованно критических систем.

При изучении дискретной модели Федеров обнаружен и объяснен ряд нетривиальных явлений – таких как спонтанная анизотропия, аномальная диффузия и возникновение срединного рва заполнения.

Ключевые слова: самоорганизованная критичность, куча песка, масштабная инвариантность, степенные распределения, конечно-размерный скейлинг, аномальная диффузия, спонтанная анизотропия

A.V. Podlazov

Two-dimensional self-organized critical sandpile models with anisotropic dynamics
of the activity propagation

ABSTRACT

We numerically and analytically investigate two self-organized critical sandpile models with anisotropic dynamics of the activity propagation – Dhar–Ramaswamy and discrete Feder–Feder models. The full set of critical indices for these models is theoretically determined.

We also give systematic description of the finite-size scaling method and its use for the solving of self organized critical systems.

Studying the discrete Feder–Feder model we find and explain a number of nontrivial phenomena, such as spontaneous anisotropy, anomalous diffusion and the appearance of midline ditch of filling.

Keywords: self-organized criticality, sandpile models, scale invariance, power laws, finite-size scaling, anomalous diffusion, spontaneous anisotropy

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00786-а и 11-01-00887-а).

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ключевых признаков сложного поведения является *масштабная инвариантность* происходящих в рассматриваемой системе процессов, под которой понимается отсутствие у описывающих их переменных собственных характерных значений. Это означает степенной вид плотности распределения этих переменных:

$$u(x) \sim x^{-(1+\alpha)}. \quad (1)$$

Приведенная формула, разумеется, справедлива лишь в *промежуточной асимптотике*. Ее протяженность ограничена с обеих сторон: сверху – в силу конечности размеров системы, а снизу – в силу конечностью размеров слагающих ее элементов. И если нестепенное поведение функции $u(x)$ при малых x обычно не представляет особого интереса, то отклонение плотности от формулы (1) при больших x принципиально.

Метод конечно-размерного скейлинга

Влияние конечных размеров системы на распределение событий учитывается с помощью *конечно-размерного скейлинга* [3]. При этом плотность распределения записывается как

$$u(x) = L^{-\beta} \cdot g(xL^{-\nu}), \quad (2)$$

где L – размер системы, β и ν – *скейлинговые показатели*, а $g(\xi)$ – некоторая *скейлинговая функция*.

Вообще говоря, ниоткуда не следует, что плотность вероятности можно представить в виде (2), но для «хороших» систем и «хороших» переменных, описывающих происходящие в них события, это так. В данной работе рассматриваются только такие системы и такие переменные.

Присутствие размера системы в формулу (2) исключительно в виде степеней обусловлено отсутствием у величины x собственных характерных значений. Не из чего сформировать безразмерные комбинации, в состав которых величина L могла бы войти как аргумент какой-либо функции, отличной от степенной. При этом величина

$$x_1 \sim L^\nu$$

определяет размера события, крупного настолько, что оно уже не помещается в систему, из-за чего и нарушается степенной вид плотности распределения (1)

В промежуточной асимптотике записи (1) и (2) должны совпадать, что возможно лишь в случае, когда $g(\xi) \sim \xi^{-(1+\alpha)}$ в некотором диапазоне значений ξ и выполнено *основное скейлинговое соотношение*

$$\beta = \nu(1 + \alpha). \quad (3)$$

Оно существенно облегчает нахождение *характеристического показателя* α по результатам компьютерного эксперимента.

Если рассматривать выражение $L^\beta \cdot u(x)$ как функцию $L^{-\nu} \cdot x$, то графики, полученные при различных значениях L , совместятся (см. примеры на рис. 3 на стр. 8 и рис. 18 на стр. 25). Остается лишь, подобрав подходящие значения β и ν , воспользоваться формулой (3) для вычисления α . Без такой возможности для определения показателя пришлось бы каким-то образом компенсировать отклонение плотности от формулы (1), что представляет собой трудноразрешимую задачу, поскольку вид отклонения неизвестен.

Распределение (1) характеризуется бесконечным математическим ожиданием в практически важном случае $\alpha < 1$. Однако для распределения (2) математическое ожидание конечно и с учетом соотношения (3) находится как

$$\langle x \rangle = \int x \cdot L^{-\beta} g(xL^{-\nu}) dx \sim L^\sigma,$$

где $\sigma = \nu(1 - \alpha).$ (4)

Скейлинговые показатели σ и ν , связывающие характерные размеры $\langle x \rangle$ и x_1 , с обусловившим их появление конечным размером системы L , часто удается установить из общих соображений, что существенно облегчает теоретический анализ.

Еще одним важным аспектом изучения свойств масштабнo-инвариантных систем является анализ взаимосвязи между разными переменными, описывающими одно и то же событие.

Пусть имеются две величины x и y с характеристическими показателями α_x и α_y , соответственно. Зависимость между этими величинами будем понимать как условное среднее некоторой степени p :

$$y(x) = \sqrt[p]{\langle y^p \rangle_x} \cong c(p) \cdot x^{\gamma_{yx}}.$$

Практика показывает, что для величин, плотность которых записывается в скейлинговом виде (2), *показатель связи* γ не зависит от выбора p , что позволяет при проведении расчетов с точностью до коэффициента считать связь таких величин функциональной. В дальнейшем будем брать $p = 1$, понимая зависимости просто как условное среднее (см. рис. 4 на стр. 10 и рис. 17 на стр. 24).

Записав формулу преобразования вероятностей

$$u_x(x) dx = u_y(y) dy,$$

получаем соотношение на характеристические показатели

$$\gamma_{yx} = \alpha_x / \alpha_y. \quad (5)$$

С другой стороны, записав связь между размерами крупных событий

$$y_1 \sim x_1^\gamma,$$

получаем соотношение на скейлинговые показатели

$$\gamma_{yx} = \nu_y / \nu_x. \quad (6)$$

В комбинации формулы (5) и (6) дают инвариант

$$\varepsilon = \nu_x \alpha_x = \nu_y \alpha_y, \quad (7)$$

не зависящий от рассматриваемой переменной.

Универсальный показатель ε , определяет скейлинговое поведение доли сверхкрупных событий, которое находится с помощью формулам (2) и (3) как

$$\text{Prob}\{x > x_1\} = \int_{x_1}^{\infty} u(x) dx \cong \int_{L^\nu}^{\infty} L^{-\beta} g(xL^{-\nu}) dx = L^{\nu-\beta} \int_1^{\infty} g(\xi) d\xi \sim L^{-\varepsilon}.$$

Если событие не помещается в систему данного размера, то оно не помещается сразу по всем описывающим его переменным. Поэтому то, какая из них используется для расчета показателя ε , не влияет на его значение.

«Песочная» парадигма

Механизм возникновения масштабно-инвариантных свойств у динамических систем дает теория самоорганизованной критичности [1,2]. Ее базовой моделью является *куча песка*.

Рассмотрим уголок с песком, изображенный на рис. 1. Будем считать, что возможно лишь поверхностное перемещение песка, причем инерцией его движения можно пренебречь. Тогда состояние системы вполне определяется средним наклоном поверхности z . Если он невелик, то песок в целом неподвижен. А при превышении наклоном некоторого порогового значения z_c , возникает спонтанный ток песка J по поверхности, непрерывно возрастающий по мере увеличения z (см. врезку к рис. 1). То есть, налицо непрерывный фазовый переход, в котором *управляющим параметром* является наклон z , а *параметром порядка* – ток песка J .

Критические состояния соответствуют моменту отрыву параметра порядка от нуля. Обычные критические системы попадают в это состояние благодаря тонкой подстройке управляющего параметра к заранее неизвестному критическому значению. Однако в ряде систем оказывается возможным, устанавливая параметр порядка в $+0$, вынудить управляющий параметр *самостоятельно* отыскать критическую точку, что и называется самоорганизованной критичностью.

Иначе говоря, вместо того, чтобы крутить ручку прибора, можно начать сдвигать с нулевой отметки стрелку на его шкале, вынуждая ручку повернуться

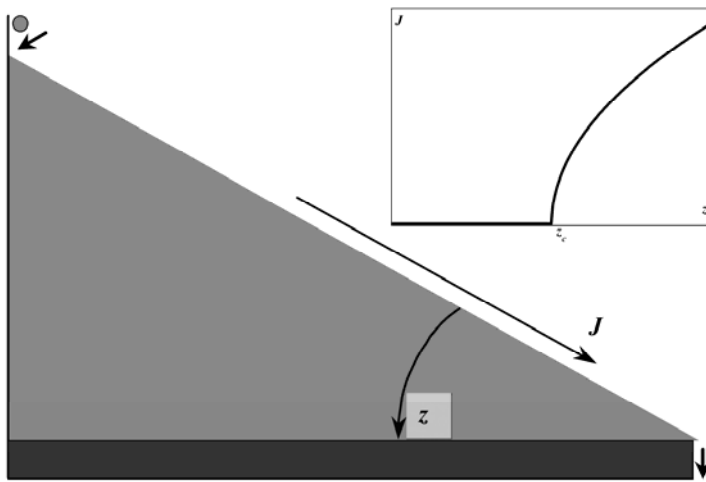


Рис. 1. Уголок с песком

Состояние песка определяется углом наклона поверхности z . При его изменении происходит непрерывный фазовый переход (зависимость параметра порядка от управляющего параметра приведена на врезке) от неподвижного состояния ($J = 0$) к состоянию непрерывного тока песка ($J > 0$).

При токе $J = +0$, соответствующем добавлению одной песчинки за один шаг, система самоорганизуется в состояние с критическим наклоном $z = z_c$.

– в среднем одна песчинка за один шаг рассмотрения.

Если наклон поверхности мал, то осыпание, вызванное добавленной песчинкой, скорее всего, не достигнет края кучи и наклон увеличится. При большом наклоне возможно возникновение глобального осыпания, в результате которого большое количества песка покинет систему и наклон уменьшится. Равновесие между количеством песка, добавляемого в систему, и количеством песка, покидающего ее, достигается при критическом наклоне поверхности, когда возмущение может распространяться по куче сколь угодно далеко, не затухая и не разрастаясь.

Таким образом, имеет место *отрицательная обратная связь*, вынуждающая наклон принять со временем значение $z = z_c$ вне зависимости от начального профиля поверхности. При этом куча песка, состоящая из локально взаимодействующих песчинок, начинает вести себя как единое целое. То есть, в результате самоорганизации в критическое состояние система приобретает свойства, которых не было у ее элементов, демонстрируя сложное целостное поведение.

DR–модель

Простейшей моделью, описывающей рассмотренную выше динамику кучи песка, является *DR–модель*, предложенная Д. Дхаром и Р. Рамасвами в 1989 году [4].

Правила модели формулируются как клеточный автомат на двумерной гексагональной решетке размерами $L \times L$ (см. рис. 2). В ячейках расположены

до нужного положения [7]. Такое управление параметром порядка обыкновенно достигается при помощи *разделения временных масштабов* [8], при котором время релаксации системы много меньше времени между последовательными возмущениями, т.е. когда события едва происходят.

Самоорганизации кучи песка в критическое состояние происходит при токе $J = +0$. Чтобы обеспечить такую величину параметра порядка, будем рассматривать динамику по шагам, добавляя песчинки по одной на вершину кучи (см. рис. 1) и дожидаясь завершения процесса релаксации. При этом ток песка через систему, очевидно, имеет минимально возможное значение

целые числа z_{ij} , характеризующие *локальный наклон* поверхности кучи. Горизонтальные слои решетки (с заданным i) условно соответствуют линиям уровня поверхности. Если число превышает пороговое значение $z_c = 1$, ячейка объявляется неустойчивой и *опрокидывается*. Опрокидывание ячейки заключается в уменьшении на 2 стоящего в ней числа с одновременным увеличением на 1 чисел в двух ячейках, примыкающих к данной снизу (рис. 2):

$$z_{i,j} \rightarrow z_{i,j} - 2$$

$$z_{i+1,j\pm 1/2} \rightarrow z_{i+1,j\pm 1/2} + 1$$

что символизирует пересыпание песчинок вниз по склону. При наличии нескольких неустойчивых ячеек они опрокидываются одновременно.

Элементарное событие состоит из *возмущения* и *релаксации*. Возмущение устойчивого состояния производится путем увеличения на единицу значения в случайно выбранной ячейке верхнего слоя, что соответствует добавлению одной песчинки на вершину кучи. Если в результате возмущения ячейка теряет устойчивость, то она опрокидывается и начинается процесс релаксации. Опрокидывание ячейки приводит к увеличению наклона в нижележащих ячейках, что, в свою очередь, способно нарушить их устойчивость и т.д. по принципу цепной реакции. Таким образом, потеря устойчивости одной ячейкой может вызвать *лаvinу опрокидываний*, продолжающуюся до тех пор, пока все ячейки вновь не обретут устойчивость. После этого релаксационный процесс считается завершенным и дается старт следующему событию.

Нижний край решетки является открытым, так что при опрокидывании ячейки из нижнего слоя две песчинки покидают систему. Это обеспечивает существование стационарного состояния и возможность самоорганизации. Ради простоты левый и правый края решетки отождествляются, т.е. она свернута в вертикальный цилиндр (периодические граничные условия).

Лавины в DR-модели распространяются строго сверху вниз, не затрагивая по два раза один слой (активность не возвращается). Поэтому их

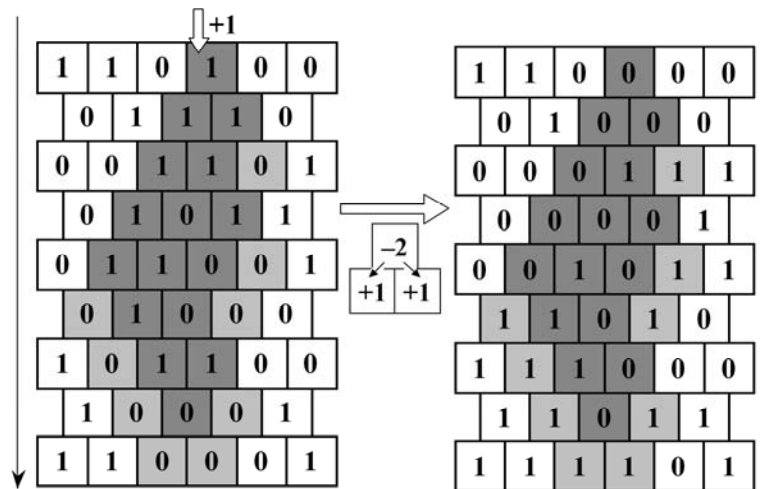


Рис. 2. DR-модель: правила и пример лавины

Устойчивыми считаются ячейки с нулевым или единичным наклоном. При потере ячейкой устойчивости из нее изымаются две песчинки и передаются в пару нижележащих ячеек. Лавина, инициируемая добавлением одной песчинки в случайно выбранную ячейку верхнего слоя, распространяется строго вниз.

Слева приведено состояние системы до лавины опрокидываний, справа – после. Темной заливкой показана область лавины, светлой – ячейки на ее границе, которые, получив песчинку, сохранили устойчивость.

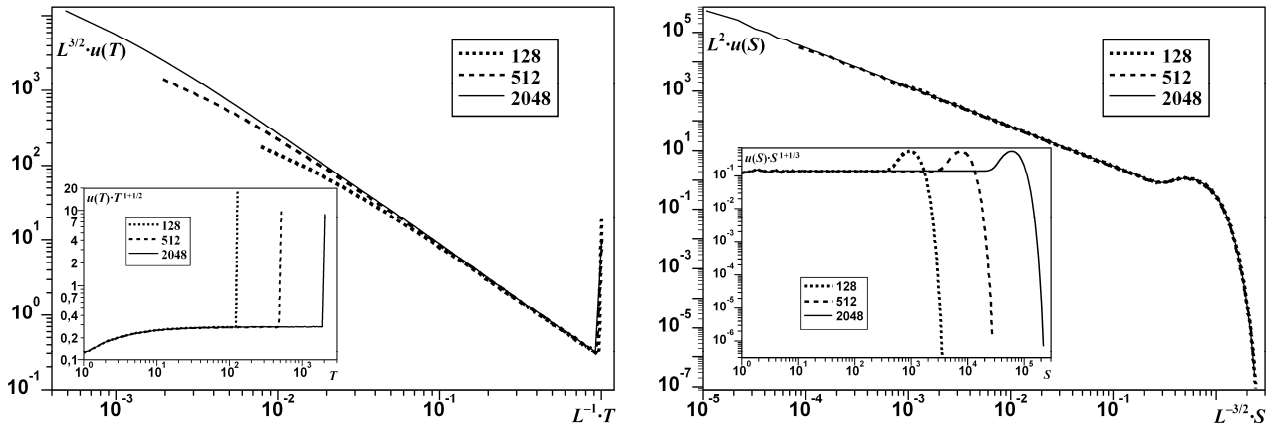


Рис. 3. Распределение лавин в DR–модели по длительности T и площади S

При правильном подборе скейлинговых показателей графики плотности распределения, полученные для систем различного размера, совмещаются. Правильность определения соответствующих характеристических показателей подтверждается врезками, на которых скомпенсирована степенная компонента плотности, в результате чего график в промежуточной асимптотике становится горизонтальным.

Пики (для длительности) и горбы (для площади) в правой части графиков соответствуют лавинам, которые не поместились в решетку, оборвавшись из-за достижения ее нижнего края.

вполне можно охарактеризовать всего двумя числами: длительностью T , определяемой как число шагов моделирования, в ходе которых происходили опрокидывания, и площадью S , определяемой как число опрокинувшихся ячеек. Длительность лавины для данной модели совпадает с числом затронутых ею слоев решетки, а площадь – с размером лавины N , определяемым как число опрокидываний.

Как показывает компьютерное моделирование, обработка результатов которого приведена на рис. 3, распределения лавин в DR–модели по длительности характеризуется скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\beta_T = 3/2$, а по площади – $\nu_S = 3/2$ и $\beta_S = 2$. Соответствующие характеристические показатели в соответствии с формулой (3) равны $\alpha_T = 1/2$ и $\alpha_S = 1/3$, а универсальный показатель, даваемый формулой (7), $\varepsilon = 1/2$.

Эти значения были рассчитаны еще авторами модели [4]. Однако их решение опирается на ряд нетривиальных математических результатов, которые, в действительности, являются излишними и только маскируют суть явления. Кроме того, решение Д. Дхара и Р. Рамасвами не может быть распространено на родственную DFF–модель, рассматриваемую далее. Поэтому мы здесь предлагаем альтернативное решение, дающее общее представление о том, как могут быть найдены показатели для самоорганизованно критических систем.

Решение DR–модели

Длительность лавин, крупных настолько, что они уже не помещаются в систему, определяется, очевидно, числом имеющихся в решетке слоев

$$T_1 = L,$$

т.е. $v_T = 1$. (8)

На каждом шаге в систему добавляется одна песчинка, поэтому в стационарном режиме в среднем одна песчинка будет ее и покидать. Чтобы пройти все L слоев решетки, каждой песчинке необходимо участвовать в L опрокидываниях. Поэтому средняя площадь области лавины S , равная среднему количеству опрокидываний:

$$\langle S \rangle = L/2,$$

т.е. $\sigma_S = 1$. (9)

Чтобы завершить решение, необходимо установить связь между площадью и длительностью лавин. Для этого вспомним, что мы имеем дело с самоорганизованно критической системой.

На каждом слое l , который проходит лавина, она имеет некоторую *ширину* $w(l)$, определяемую как число опрокинувшихся ячеек данного слоя. Среднее изменение ширины лавины от слоя

$$\langle \Delta w \rangle = 0. \quad (10)$$

В самом деле, будь оно отрицательно, вероятность достижения лавиной слоя l экспоненциально бы убывала с его номером, а будь оно положительно, лавина бы с ненулевой вероятностью неограниченно распространялась. Поскольку в первом случае количество песка в системе увеличивается, а во втором – уменьшается, возникает отрицательная обратная связь, подстраивающая систему в критическое состояние. В нем при прохождении лавины по слоям ее ширина изменяется лишь диффузионным образом (как координата частицы, совершающей несмещенные случайные блуждания).

Следовательно, типичная ширина лавины, достигшей слоя l , определяется формулой Эйнштейна–Смолуховского

$$w(l) \sim \sqrt{l}. \quad (11)$$

Суммирование ширин по слоям дает типичную площадь лавины, достигшей слоя T ,

$$S(T) \sim \int_0^T w(l) dl \sim T^{3/2},$$

что подтверждается рис. 4.

Таким образом, показатель связи

$$\gamma_{ST} = 3/2, \quad (12)$$

что позволяет легко найти приведенные выше значения показателей как решение системы уравнений (4)–(5)–(7)–(8)–(9)–(12).

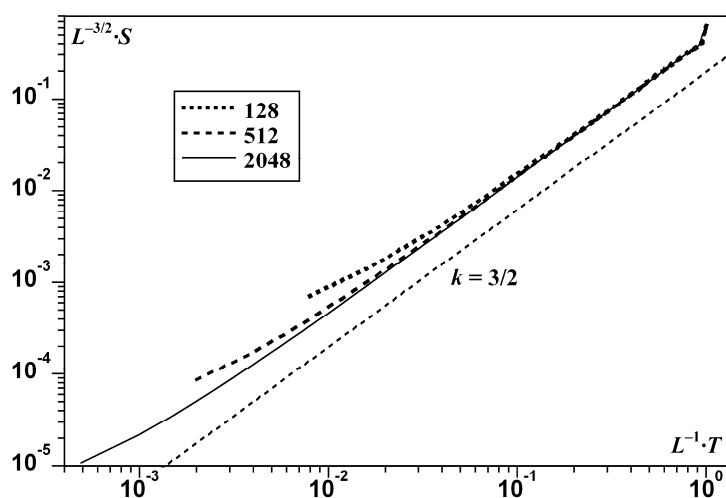


Рис. 4. Зависимость площади лавины от ее длительности для DR-модели

Зависимость понимается в смысле условного среднего, т.е. типичной площади лавины при заданной ее длительности.

Для наглядности обе переменные отмасштабированы на размер системы со скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\nu_S = 3/2$, в результате чего графики, полученные при разных L , совместились.

Пунктиром дан график с показателем (12).

удовлетворить запросы верхних смежников¹. Таким образом, продукция распространяется по системе снизу–вверх, а запросы – сверху–вниз.

Слои решетки можно трактовать как различные уровни передела, т.е. внизу системы находятся сырьевые и добывающие отрасли, в середине – перерабатывающие, наверху – производители готовой продукции. При этом добавление единичек в верхний слой следует рассматривать как запрос на единицу товара от конечного потребителя.

Отклик такой модели экономики на элементарное воздействие не имеет собственного характерного размера, и поэтому в ней возможны гигантские события без отчетливых причин, которые можно интерпретировать как кризисы или бумы. И хотя ничто не мешает экономистам *a posteriori* указать на ту конкретную песчинку, которая сорвала лавину (что обычно и делается при анализе кризисных явлений), причина лавины вовсе не в песчинке, а целостном критическом поведении системы, склонной к катастрофическому поведению.

Следствием степенных распределений, описывающих систему, естественно, является ее склонность к катастрофам. В этом смысле очень наглядной является экономическая интерпретация модели [2].

Каждая ячейка рассматривается как экономический агент – производитель определенного вида продукции, для создания двух единиц которой он использует по единице продукции каждого из двух нижележащих агентов. Число в ячейке определяет количество единиц продукции, запрошенной смежниками сверху. Как только накапливается более одного запроса, агент, в свою очередь, посылает по запросу смежникам снизу, чтобы произвести свою продукцию и

¹ При таких правилах между получением запроса и его удовлетворением может проходить, вообще говоря, произвольное время. Чтобы избежать этого, агентам достаточно иметь склады готовой продукции единичной емкости. Тогда все запросы будут удовлетворяться немедленно, что, однако, никак не скажется на динамике их распространения.

ДФФ–МОДЕЛЬ

Сравнительная простота теоретического исследования DR–модели связана с тем, что в ней лавина не затрагивает повторно одну и ту же ячейку в силу существенной анизотропии правил. Оказывается, существует самоорганизованно критическая модель с очень похожими свойствами, но при этом с изотропными правилами. Это дискретный вариант модели, предложенной Х. и Е. Федерами в 1991 году [5], – DFF–модель.

Правила модели

ДФФ–модель представляет собой клеточный автомат с двумерной ортогональной решеткой размерами $L \times L$. Находящиеся в ячейках целые числа $z_{i,j}$ интерпретируются как количество песчинок, способных участвовать в процессах пересыпания. Выделенного направления склона нет. Если $z_{i,j}$ превышает пороговое значение $z_c = 3$, ячейка объявляется неустойчивой и опрокидывается. Опрокидывание заключается в обнулении стоящего в ячейке числа с одновременным увеличением на 1 значений в четырех ячейках, имеющих с данной общую сторону (см. рис. 5 в центре):

$$\begin{aligned} z_{i,j} &\rightarrow 0 \\ z_{i\pm 1, j\pm 1} &\rightarrow z_{i\pm 1, j\pm 1} + 1 \end{aligned}$$

Если есть несколько неустойчивых ячеек они опрокидываются одновременно.

Принципиально, что правила опрокидывания неконсервативны, т.е. не предполагают сохранения количества песчинок при их раздаче соседям. Если теряет устойчивость ячейка, содержащая более 4 песчинок, то их излишек необратимо теряется, т.е. происходит диссипация². Пример развития лавины, в ходе которой происходит событие диссипации, приведен на рис. 5.

Возмущение устойчивого состояния производится путем добавления одной песчинки в случайно выбранную ячейку. Принципиальна равномерность возмущения по пространству, т.е. все ячейки решетки должны выбираться для вброса песчинок с равной вероятностью.

Может показаться, что в силу наличия в системе диссипации для достижения стационарного состояния открытый край не нужен. Однако если отождествить противоположные края решетки, свернув ее в тор, то система в какой-то момент впадает в бесконечный цикл. То есть количество песка, достаточное для того, чтобы сколь угодно долго поддерживать развитие лавины, оказывается не достаточным для возникновения диссипации³.

² Можно считать, что в момент опрокидывания ячейки под ней открывается люк, через который высыпается излишек песка, не перешедший в соседние ячейки.

³ Этим DFF–модель, имеющая пороговую диссипацию, принципиально отличается от OFC–модели [6], где диссипация линейна. Для последней модели на торе имеет место прямо обратная ситуация: заполнение ячеек оказывается недостаточным, чтобы поддерживать развитие лавины, и крупных лавин в системе не возникает вовсе.

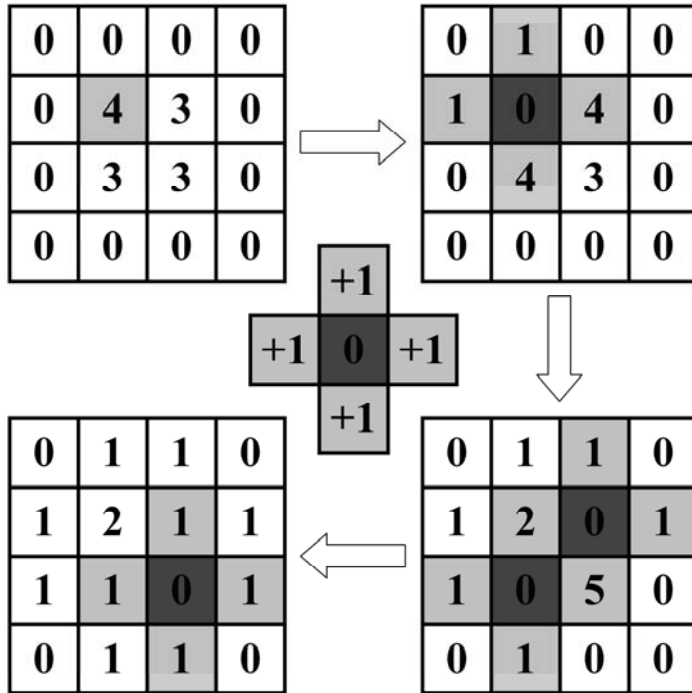


Рис. 5. DFF–модель: правила и пример развития лавины

Устойчивыми считаются ячейки со значениями 0, 1, 2 или 3. При опрокидывании неустойчивой ячейки из нее изымаются четыре песчинки и передаются соседям, а ее значение обнуляется. Лавина инициируется добавлением одной песчинки в случайно выбранную ячейку.

Светлой заливкой выделены ячейки, только что получившие песчинки, темной – только что опрокинувшиеся. На третьем шаге лавины опрокидывается ячейка с 5 песчинками, одна из которых утрачивается.

свернув ее в вертикальный цилиндр. Такая топология решетки наиболее удобна для анализа, поскольку система становится квазиодномерной, распадаясь на слои ячеек, находящихся на одинаковом удалении от края.

В качестве основных характеристик лавины рассматриваются ее длительность T – число шагов моделирования, в ходе которых происходили опрокидывания, размер N – число событий опрокидывания и площадь S – число опрокинувшихся ячеек (без учета кратности опрокидывания). Кроме указанных величин интерес представляют также диссипация D – число песчинок, утраченных при опрокидывании, и падение F – число песчинок, вывалившихся за край.

Роль открытого края

Кроме перечисленных величин интерес представляют также диссипация D – число песчинок, утраченных при опрокидывании, и падение F – число песчинок, вывалившихся за край.

Примечательно, что во время бесконечной лавины среднее заполнение ячеек $\langle z \rangle = z_\infty = 2$ точно (без дисперсии). Объясняется данное значение устройством бесконечной лавины, которая представляет собой один или несколько фронтов опрокидывания, циклически обходящих решетку. При этом каждая ячейка, потерявшая устойчивость, должна при опрокидывании в среднем вернуть назад (туда, откуда фронт уже ушел) столько же песчинок, сколько она передает вперед (туда, куда смещается фронт). А вперед передается столько песчинок, сколько в среднем не хватает ячейке до потери устойчивости. В сочетании с отсутствием диссипации два указанных обстоятельства и приводят к значению $\langle z \rangle = (z_c + 1)/2 = 2$.

В дальнейшем мы будем полагать верхний и нижний края решетки открытыми, а левый и правый отождествим,

У каждой песчинки, попавшей в систему, есть два пути ее покинуть: диссипация при опрокидывании ячейки с избытком песчинок или падение за край при опрокидывании краевой ячейки. Чтобы понять соотношение этих двух путей, рассмотрим число падений в ходе одной лавины, инициированной вбросом песчинки на заданном слое l_0 , который вычисляется как расстояние до ближайшего края решетки (изменяется в диапазоне от 1 до $L/2$).

Рис. 6 дает наглядное представление о том, что падение за край как механизм выбытия песчинок из системы значимо только для событий, начинающихся в непосредственной близости от края. Это обусловлено неконсервативностью правил, ограничивающей длину свободного пробега песчинок по решетке, в результате чего они покидают ее на сравнительно небольшом расстоянии от места вброса. Поэтому почти все песчинки выбывают в результате диссипации, а за край падают только те из них, кому удается его достичь.

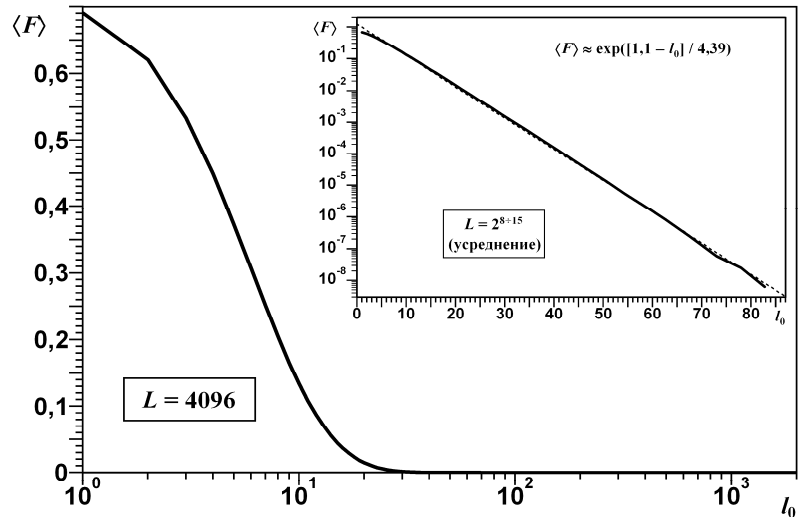


Рис. 6. Среднее число падений за край в зависимости от слоя вброса

По мере удаления точки вброса от края число падений стремительно (в 10 раз на 10 слоев) уменьшается.

На врезке – аналогичные данные (собранные для решеток различного размера) в полулогарифмическом масштабе.

Вместе с тем, край решетки очень важен, поскольку он играет роль источника активности. Как можно видеть из рис. 7, лавина легко распространяется вглубь решетки, но чрезвычайно неохотно идет в обратную сторону.

Самые крупные лавины, происходящие в системе, начинаются вблизи ее края и завершаются в ее глубине. На рис. 8 показано распределение средних размеров лавины по слоям вброса. Чем ближе к середине решетки вброшена инициирующая песчинка, тем меньше получается лавина, что связано с сокращением открывающегося перед ней пространства для развития.

Рис. 9 демонстрирует типичный пример развития крупной лавины, которое, несмотря на изотропию правил модели, оказывается отчетливо анизотропным. Такое поведение модели в самоорганизованно критическом состоянии уместно характеризовать как *спонтанную анизотропию*. Она связана с распространением краевых эффектов на всю систему (точнее говоря, на ближайшую к данному краю ее половину).

Следует отметить, что спонтанная анизотропия DFF-модели, хоть и является очень похожей анизотропию, изначально заложенную в правила DR-модели, все-таки отличается тем, что имеет место лишь в глобальном масштабе.

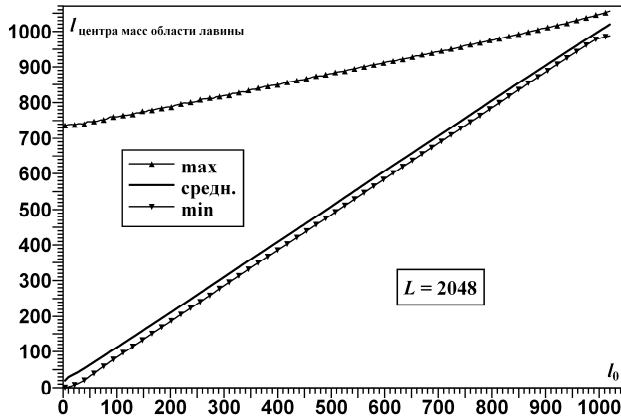


Рис. 7. Слой центра масс области лавины в зависимости от слоя вброса

Среднее положение центра масс почти совпадает с точкой вброса инициирующей песчинки, т.к. лавины в своем большинстве невелики по размеру.

Наибольшее зарегистрированное смещение центра масс от его среднего положения к краю решетки весьма незначительно (не превышает нескольких десятков слоев). Однако смещение центра масс от края макроскопически велико (может достигать порядка трети линейного размера решетки).

При этом локальная динамика остается изотропной, что приводит к такому важному явлению, отсутствующему в DR-модели, как *возвращению активности* на уже пройденные лавиной слои. Как будет показано, далее именно возвращение активности обуславливает различия в значениях показателей распределений для этих моделями.

Кратность опрокидывания. Площадь и размер лавин

Показанный на рис. 9 вариант развития лавины, идущей одним фронтом, является хотя и типичным, но не единственно возможным. Рис. 10 демонстрирует пример альтернативной ситуации, когда фронтов оказывается более одного. Для их возникновения необходимо, чтобы лавина, инициированная вбросом песчинки на некотором отдалении от края, на начальном этапе успешно развивалась сразу во все стороны, а не только в глубину. При этом возможен ее распад на набор несвязанных между собой лавин, каждая из которых в дальнейшем начинает движение в глубину решетки. Если они отстают одна от другой, то и получается несколько фронтов.

Как нетрудно понять, реализация описанного сценария маловероятна, поэтому последовательные фронты опрокидывания наблюдаются сравнительно редко. И в силу анизотропного характера развития лавин редким явлением должны быть вообще повторные опрокидывания ячеек, что подтверждается рис. 11.

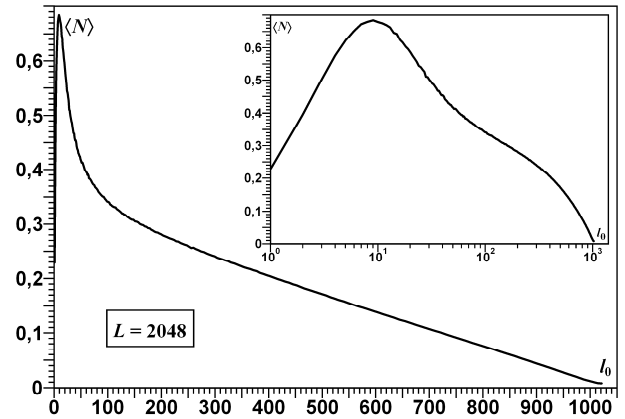


Рис. 8. Средний размер лавины в зависимости от слоя вброса

Положение максимума не зависит от размера решетки. Он отстоит от края на такое расстояние, на котором становятся пренебрежимо малы потери от падений, препятствующие развитию крупной лавины.

После прохождения максимума график спадает линейно практически до нуля, проходящегося на песчинки, вбрасываемые в середине решетки.

На врезке – те же данные, но в полулогарифмическом масштабе.

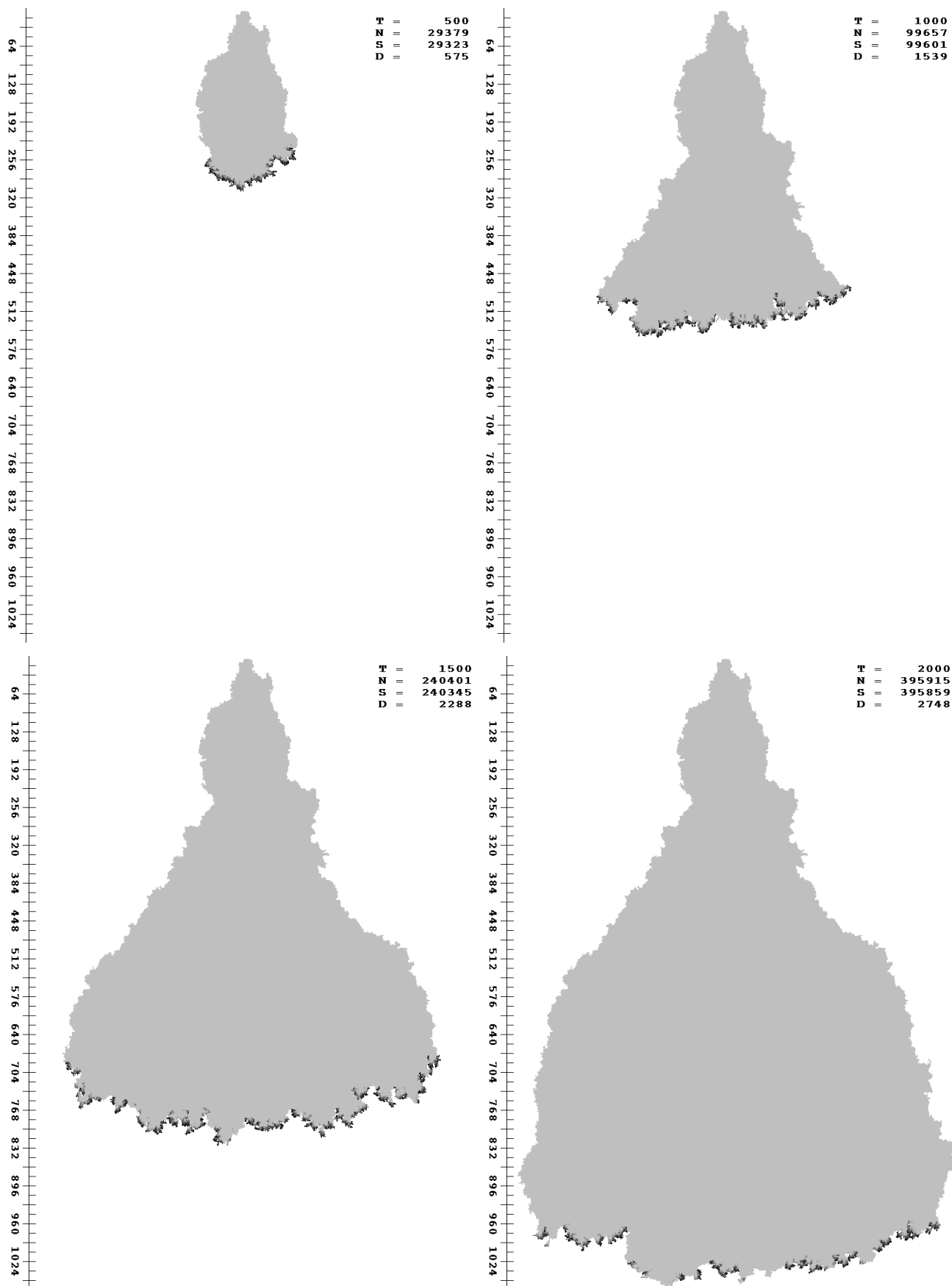


Рис. 9. Типичное развитие крупной лавины

Черным цветом показаны ячейки, опрокидывающиеся в настоящий момент, серым – опрокинувшиеся ранее. Лавина идет одним фронтом от края к середине решетки, где обрывается.
 Поле: $L = 2048$. Лавина: $T = 2\ 166$, $N = 407\ 148$, $S = 407\ 092$, $D = 2\ 764$.

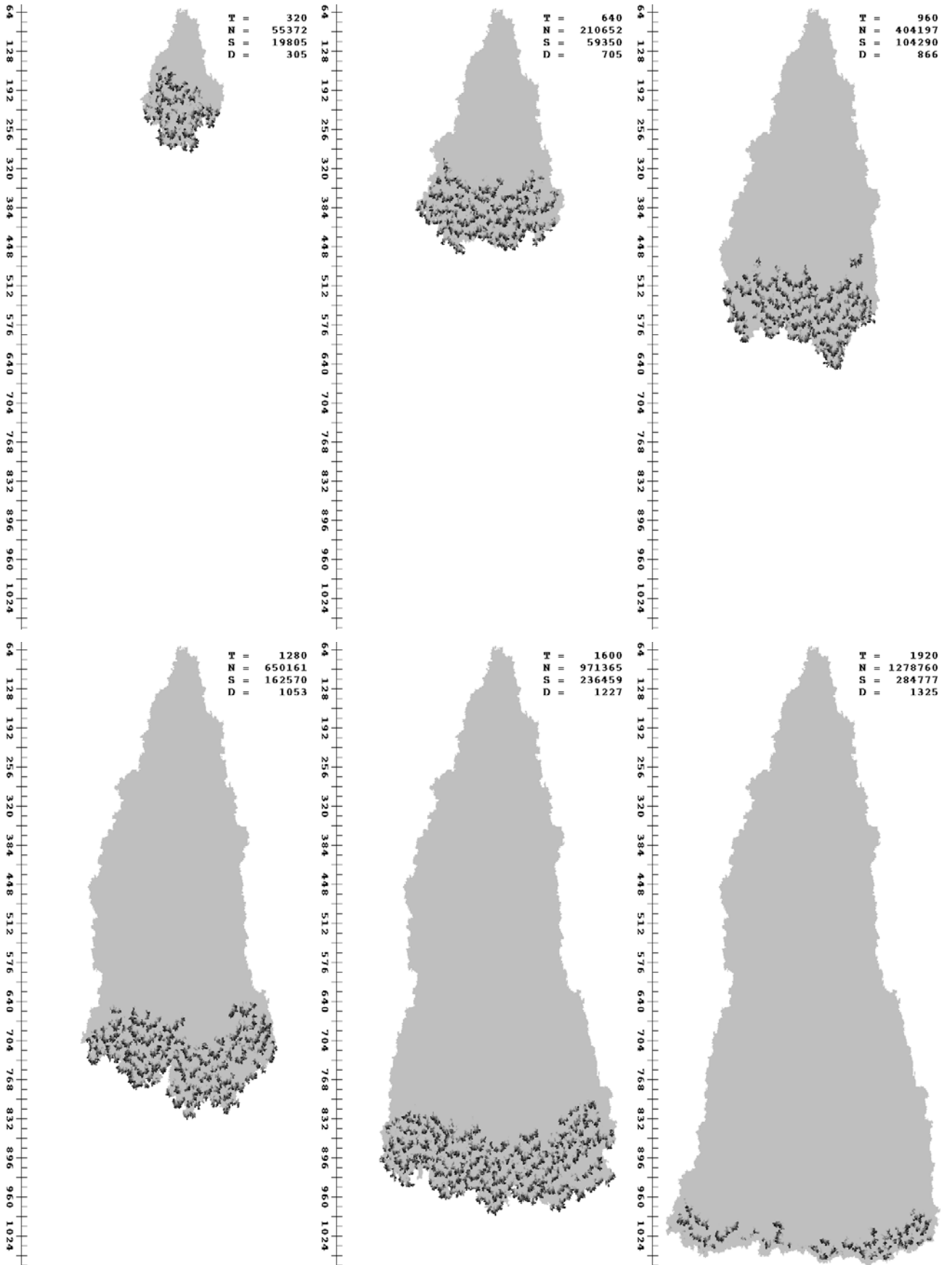


Рис. 10. Развитие крупной лавины со множественными опрокидываниями

Лавина представляет собой последовательный набор приблизительно эквидистантных фронтов, идущих от края решетки к ее середине, преодолеть которую они не могут.

Поле: $L = 2048$. Лавина: $T = 2\ 022$, $N = 1\ 287\ 730$, $S = 284\ 777$, $D = 1\ 325$.

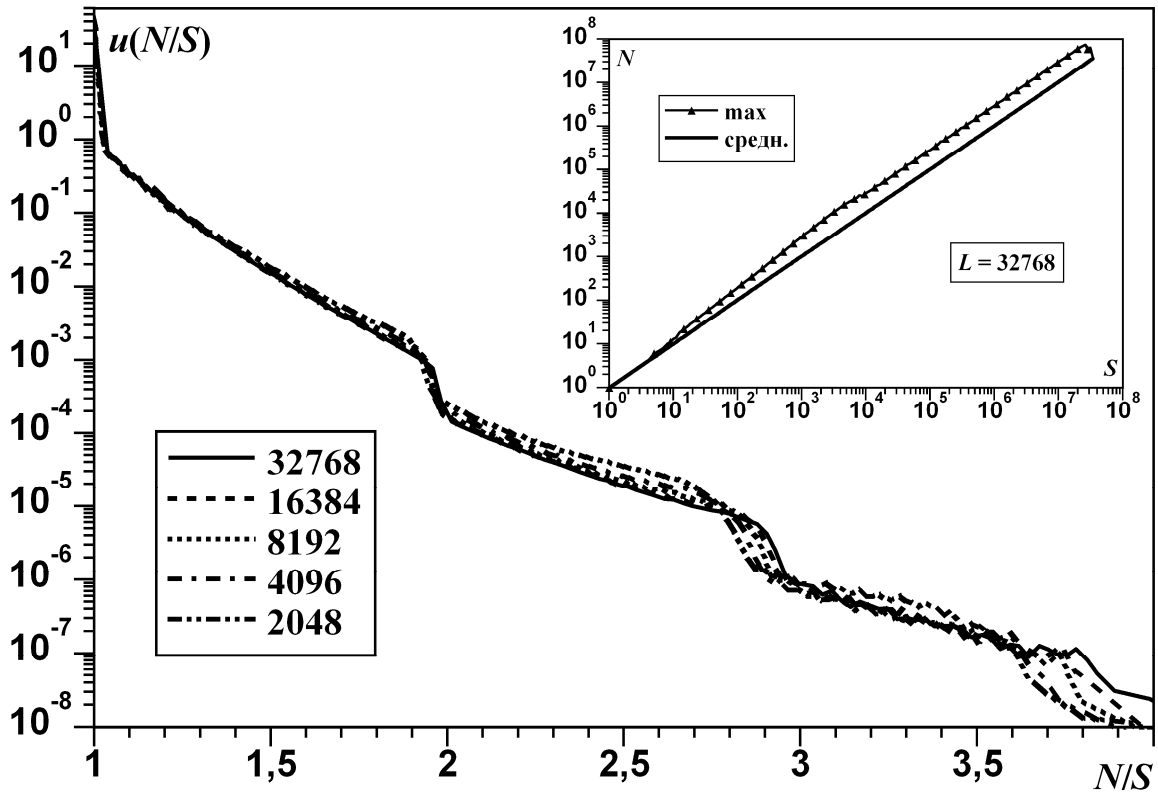


Рис. 11. Роль множественных опрокидываний

Львиная доля лавин характеризуется отношением размера к площади, очень близким к 1.

Лавинам, в ходе которых возник второй фронт, соответствует диапазон значений отношения размера к площади, лежащим в диапазоне от 1 до 2 (чем дольше существовал второй фронт и чем большую часть площади он прошел, тем ближе отношение к 2), лавинам, в ходе которых возник третий фронт, – от 2 до 3 и т.д.

На врезке – связь размера лавины с ее площадью. График условного среднего неотличим от тождественной зависимости. Условный максимум размера лишь незначительно превосходит его среднее значение за счет редких повторных опрокидываний.

Отсюда следует, что можно не различать размер лавин N и их площади S . И в самом деле, как показывают результаты моделирования, эти характеристики лавины описываются одними и теми же показателями распределения.

Кроме того, поскольку пространственное развитие лавины направлено к середине решетки и ею же и ограничено, а повторных опрокидываний практически не происходит, длительность самых крупных лавин

$$T_1 \sim L,$$

т.е. $v_T = 1,$ (13)

что полностью аналогично формуле (8).

Распределение опрокидываний по слоям

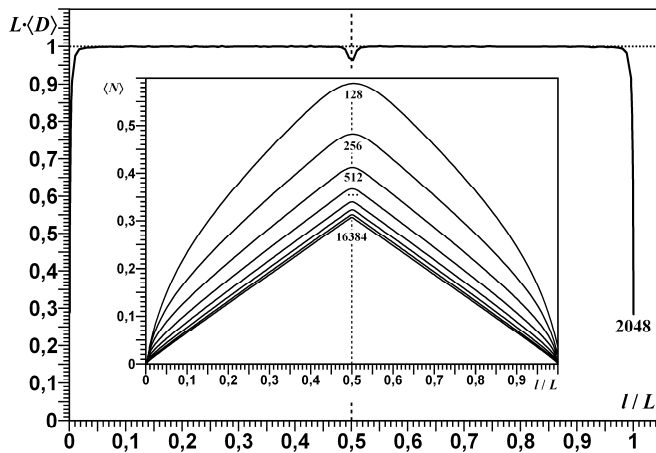


Рис. 12. Распределение активности по слоям решетки

Средняя диссипация равна одной выбывшей песчинки на одну вброшенную на каждый слой (учитывается домножением на L) по всей решетке за исключением краев и середины.

На врезке – зависимость среднего числа опрокидываний на слое при разных размерах решетки. Чем больше размер системы, тем меньшую его долю составляют прикраевые и срединная области и тем точнее выполняется формула (15).

$$\frac{d^2}{dl^2} \langle N(l) \rangle \approx \langle N(l-1) \rangle - 2\langle N(l) \rangle + \langle N(l+1) \rangle = 0,$$

где угловые скобки означают усреднение по всем лавинам. Интегрируя его, получаем поток песчинок, направленный к краю решетки:

$$\frac{d}{dl} \langle N(l) \rangle = \text{const}. \quad (14)$$

Возникновение потока обусловлено тем, что часть песчинок покидает систему через открытый край, подтягивая на свое место песчинки из более глубоких слоев.

Обратим внимание на сходство с экономической интерпретацией DR-модели, при которой запросы (песчинки) распространялись по системе сверху-вниз, а продукция – снизу-вверх. Точно также и в DFF-модели активность распространяется от краев к середине, а песчинки перемещаются навстречу ей – от середины к краям.

Учитывая, что при $l = 0$ (т.е. сразу за краем) опрокидываний нет, интегрированием уравнения (14) получаем зависимость

Песчинки не могут далеко перемещаться по системе, поэтому каждая из них покидает систему примерно там же, где и была вброшена. Процессы добавления песчинок и их диссипационного выбытия уравнивают друг друга всюду за исключением узких областей, находящихся в середине решетки и вблизи ее краев (см. рис. 12). Соответственно, должны уравниваться и процессы передачи/получения песчинок в ходе опрокидываний.

Пусть $N(l)$ – число опрокидываний, произошедших на слое l в ходе лавины. В их результате слой l передает соседним слоям по $N(l)$ песчинок, получая от них $N(l-1) + N(l+1)$. Поскольку песчинки не могут накапливаться на каком-либо слое, выполнено балансовое соотношение

$$\langle N(l, L) \rangle \sim l/L \quad (15)$$

с коэффициентом пропорциональности, не зависящим от L в пределе бесконечного размера, в чем дает возможность убедиться врезка к рис. 12. Такой вид коэффициента объясняется тем, что среднее число опрокидываний, происходящих на слое l за время L событий, соответствующее одному вбросу инициирующей песчинки на каждый слой, не зависит от размера системы.

Интегрированием формулы (15) находим средний размер лавины

$$\langle N \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle N(l, L) \rangle dl \sim L,$$

т.е. $\sigma_N = 1$. (16)

Как уже было сказано, хотя для DFF–модели площадь лавин и не равна их размеру, принципиальной разницы между этими величинами нет. Т.е. формула (16) выступает аналогом формулы (9) для DR–модели. Тем не менее, природа этих формул существенно отличается.

Распределение диссипации по слоям

Поскольку лавины распространяются от края в глубину, то среднее число опрокидываний в слое l , вызванных вбросом инициирующей песчинки на слой l_0 , есть

$$\langle N(l, l_0, L) \rangle = \theta(l - l_0) \cdot f(l, L),$$

где θ – функция Хевисайда. Интегрирование этой формулы по слоям вброса должно дать формулу (15), откуда немедленно получается

$$f(l, L) \sim 1/L,$$

что дает окончательное соотношение

$$\langle N(l, l_0, L) \rangle \sim \frac{\theta(l - l_0)}{L} \quad (17)$$

для среднего числа опрокидываний, произошедших на слое l в результате вброса инициирующей песчинки на слой l_0 при размере системы L .

Полученное соотношение позволяет найти среднее число опрокидываний в системе в целом, вызванных вбросом на слой l_0 :

$$\langle N(l_0, L) \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle N(l, l_0, L) \rangle dl \sim \frac{1}{2} - \frac{l_0}{L},$$

что объясняет линейное спадание правой части графика на рис. 8 на стр. 22.

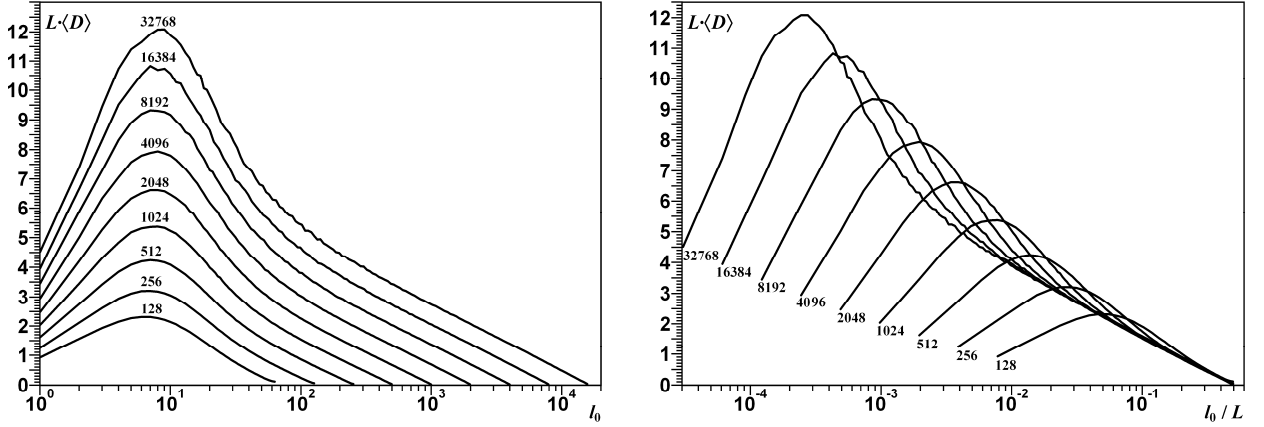


Рис. 13. Диссипация в зависимости от слоя вброса при разных размерах решетки

Графики чем-то схожи с изображенным на рис. 8 – выраженный пик на небольшом удалении от края с дальнейшим убыванием до нуля. Однако в отличие от среднего размера лавины, убывающего линейно с номером слоя вброса, средняя диссипация убывает лишь логарифмически.

Справа – те же зависимости, но с масштабирование по оси абсцисс на размер системы.

По аналогии с формулой (17) для $\langle N(l, l_0, L) \rangle$ найдем выражение и для $\langle D(l, l_0, L) \rangle$ – среднего числа песчинок, диссипировавших в слое l в результате вброса инициирующей песчинки на слой l_0 при размере системы L .

Средняя диссипация в слое, происходящая за время L событий, соответствующее одному вбросу инициирующей песчинки на этот слой, не зависит от L и равна 1. Соответственно, средняя диссипация в слое l за один шаг

$$\langle D(l, L) \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle D(l, l_0, L) \rangle dl_0 = \frac{1}{L} \quad (18)$$

Доля опрокидываний, сопровождающихся диссипацией, определяется шансами встретить локальный избыток песка, которые зависят только от номера слоя, т.е.

$$\langle D(l, l_0, L) \rangle = \langle N(l, l_0, L) \rangle \cdot h(l).$$

В сочетании с формулами (17) и (18) это дает

$$h(l) \sim 1/l \quad (19)$$

и, следовательно,

$$\langle D(l, l_0, L) \rangle \sim \frac{\theta(l - l_0)}{lL}.$$

Полученная общая формула позволяет найти среднюю диссипацию, вызванную вбросом песчинки на слой l_0 :

$$\langle D(l_0, L) \rangle = 2 \int_1^{L/2} \langle D(l, l_0, L) \rangle dl \sim \frac{1}{L} \ln \frac{L}{2l_0}.$$

Логарифмическое поведение этой величины подтверждается рис. 13.

Заполнение решетки

Наличие выделенного направления, в котором распространяются лавины, приводит к неравномерному распределению песка по слоям решетки, которое представлено на рис. 14. Распределение имеет антиинтуитивный вид. Казалось бы, меньше всего песчинок, способных участвовать в процессах пересыпания, должно быть у открытого края, а больше всего – в глубине. Однако возрастание их количества по мере удаления от края происходит всего лишь на нескольких слоях решетки, сменяясь затем плавным убыванием, которое продолжается почти до самой ее середины, где становится скачкообразным. В середине открыт своеобразный *ров* – область шириной в несколько десятков слоев со значительным дефицитом песка (врезка к рис. 14).

Срединный ров заполнения может служить яркой и наглядной иллюстрацией самоорганизационного возникновения целостных свойств, т.е. свойств, имеющих у системы, но в принципе отсутствовавших у ее составных частей. Правила DFF–модели вполне локальны – при опрокидывании неустойчивой ячейки песчинки из нее передаются лишь ее ближайшим соседям. Более того, дистанция, проходимая каждой отдельной песчинкой от места вброса до места выбытия, ограничена несколькими десятками ячеек. Тем не менее, система умеет найти свою середину, отстоящую от краев на многие тысячи ячеек, что представляется воистину удивительным!

Структура заполнения решетки вполне определяется особенностью распределения активности по слоям. Так, ров отрывается потоками песка, направленными от середины решетки к ее краям. При этом следует заметить, что крупные лавины немного перехлестывают за середину решетки, т.е. те песчинки, которые они выносят там на свою границу, оказываются по другую сторону рва, перемещая песчинки сразу по направлению к обоим краям. В противном случае, рва бы не образовывалось, поскольку правила модели изотропны и суммарный перенос песка любой лавиной равен нулю.

Несколько менее очевидной оказывается ситуация с уменьшением заполнения по мере удаления от края решетки, что находится в кажущемся противоречии с преимущественным распространением лавин в ее глубину. На первый взгляд, при опрокидывании ячейки те из ее соседей должны чаще терять устойчивость, которые имеют в среднем большее заполнение, т.е. лавина, скорее, должна идти туда, где песка больше, а не меньше.

Однако, как уже было сказано ранее, поддержание лавины не столь требовательно к заполнению ячеек, как диссипация. Поэтому именно последняя управляет структурой заполнения. Увеличение по мере углубления числа опрокидываний, происходящих на слое, ведет к уменьшению вероятности диссипа-

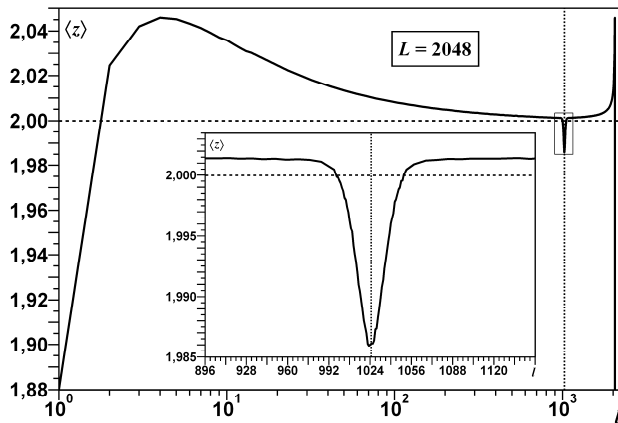


Рис. 14. Среднее заполнение ячеек по слоям решетки

Заполнение максимально вблизи края, а по мере по мере удаления от него уменьшается, стремясь к предельному значению $z_\infty = 2$.

Вблизи середины решетки график имеет резкий провал, увеличенный на врезке.

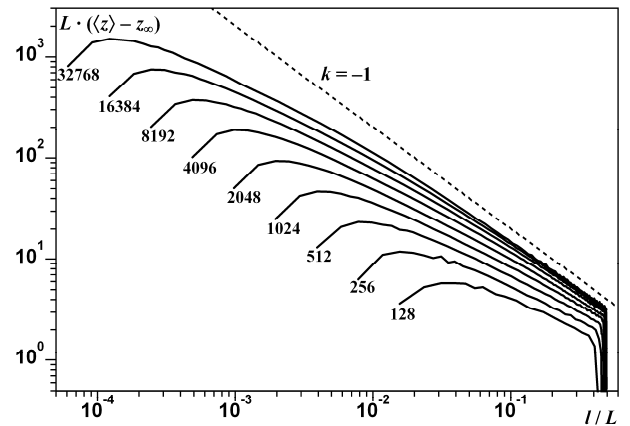


Рис. 15. Избыточное среднее заполнение ячеек

В глубине решетки среднее заполнение приближается к предельному по гиперболическому закону.

Область построения графиков ограничена серединой решетки.

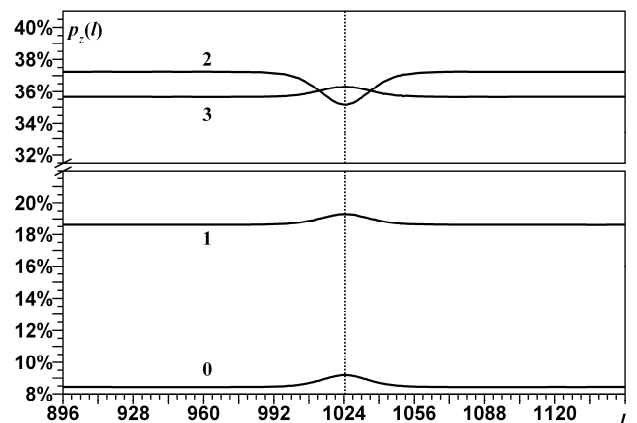
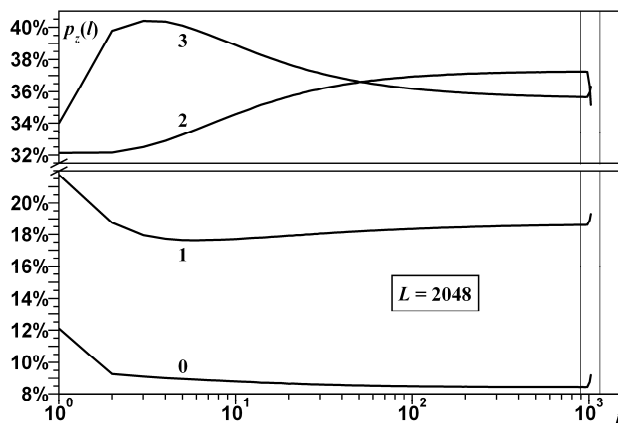


Рис. 16. Распределение ячеек по числу содержащихся песчинок в зависимости от номера слоя

Вне края решетки доли «двоек» и «троек» изменяются в противофазе. «Двойки» отвечают за поведение среднего заполнения (см. рис. 14) в области рва, а «тройки» – вне ее.

Область построения графиков на левом рисунке для читаемости ограничена серединой решетки. Область вокруг рва в границах, отмеченных слева, дана крупно на правом рисунке.

ции при единичном опрокидывании, что возможно лишь при соответствующем уменьшении заполнения ячеек.

Естественным представляется предположение, что доля опрокидываний, сопровождающихся диссипацией прямо пропорциональна избыточному заполнению ячеек, т.е.

$$h(l) \sim \langle z \rangle - z_\infty.$$

В силу формулы (19) левая часть обратно пропорциональна l . Поведение правой, преданное на рис. 15, подтверждает сделанное предположение.

Отдельный интерес представляет изменение долей ячеек, содержащих различное число песчинок, в зависимости от слоя. Как можно видеть из рис. 16, доля «двоек» и «троек», являющихся основными проводниками активности, существенно превосходит долю «нулей» и «единиц».

За исключением области срединного рва график среднего заполнения ячеек (см. рис. 14 на стр. 22) качественно очень похож на график доли «троек», являющихся единственно реальными кандидатами на диссипацию (им для этого нужно получить одновременно всего лишь две песчинки от соседней). Чем глубже, тем меньше «троек» и, соответственно, тем реже происходят события диссипации.

Вторым примечательным обстоятельством оказывается поведение графиков в области срединного рва, где «нули» (как бывшие «тройки») и «единицы» (как бывшие «нули») увеличивают свою долю по сравнению с ее величиной в глубине решетки, а вот «двойки» – резко уменьшают. В сочетании с и без того низким количеством «троек» это делает ров практически непреодолимым для лавин. Кроме того, весьма низкое заполнение здесь приводит к тому, что уровень диссипации оказывается ниже, чем в глубине решетки (см. рис. 12 на стр. 18). Поэтому часть песчинок покидают область рва не посредством диссипации, а двигаясь в направлении краев решетки.

Решение модели

Для определения набора показателей модели осталось найти связь между размером лавины и ее длительностью.

На каждом слое l , затронутом лавиной, инициированной на слое l_0 , определим ее *ширину* $w(l, l_0)$ как число опрокинувшихся ячеек данного слоя. Как и в случае DR–модели, пребывание системы в самоорганизованно критическом состоянии влечет диффузионное изменение ширины лавины по мере ее продвижения по слоям. Однако в силу изотропии правил DFF–модели в ней возможно возвращение активности на уже пройденные слои, в силу чего формула (11) оказывается неприменимой.

Далее будет показано, что

$$w(l, l_0) \sim (l - l_0)^{2/3}. \quad (20)$$

Поскольку, как уже отмечалось, различия между площадью лавины и ее размером не принципиальны, суммированием ширин по слоям находим

$$N(T) \sim S(T) \sim \int_{l_0}^{l_0+T} w(l, l_0) dl \sim T^{5/3},$$

что подтверждается рис. 17.

Таким образом, показатель связи

$$\gamma_{NT} = 5/3, \tag{21}$$

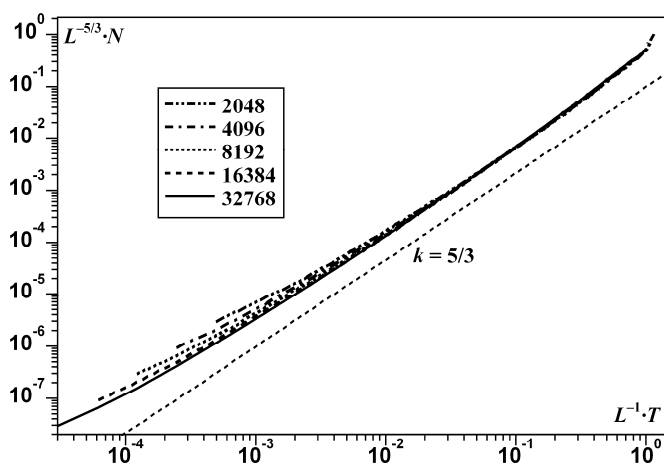


Рис. 17. Зависимость размера лавины от ее длительности для DFF–модели

Переменные отмасштабированы на размер системы со скейлинговыми показателями $\nu_T = 1$ и $\nu_N = 5/3$.

Пунктиром дан график с показателем (21).

Ср. с рис. 4 на стр. 10.

что замыкает систему уравнений (4)–(5)–(7)–(13)–(16)–(21), из которой находятся скейлинговый показатель $\nu_N = 5/3$ и характеристические показатели $\alpha_T = 2/3$ и $\alpha_N = 2/5$. Рис. 18 позволяет убедиться в правильности полученных значений.

Универсальный показатель $\varepsilon = 2/3$ оказывается для DFF–модели больше, чем для DR–модели. Соответственно, доля лавин, не помещающихся в решетку, – меньше, что понятно, поскольку развитие лавин ограничивается не только конечностью размеров системы, но и диссипацией. Это имеет качественно следствие в виде отсутствия пиков и горбов на графиках плотности.

АНОМАЛЬНАЯ ДИФфуЗИЯ

Если в случае DR–модели можно строго показать, что область лавина является односвязной и не имеет дырок, то в случае DFF–модели односвязность, вообще говоря, ниоткуда не следует. Однако возникновение дырок в этой модели является, по-видимому, событием весьма маловероятным. В ходе компьютерного исследования модели автору ни разу не встретились дырявые лавины, зато неоднократно наблюдалось зарастание уже, казалось бы, почти оформившейся дырки. Поэтому будем считать, что дырок нет, и изменение ширины области лавины обусловлено исключительно сдвигом ее границ при прохождении лавины по слоям.

Уширение области лавины

Без потери общности можно следить лишь за одной границей области лавины, поскольку полностью аналогичные эволюции второй границы могут сказаться лишь на коэффициенте, но не на показателе зависимости (20). Соответственно, нет необходимости различать ширину области лавины и положение ее границы. Обозначим последнюю через w_l .

Сдвиг границы при переходе лавины со слоя l на слой $l+1$ представляет собой шаг случайного блуждания

$$w_{l+1} = w_l + \delta_l, \tag{22}$$

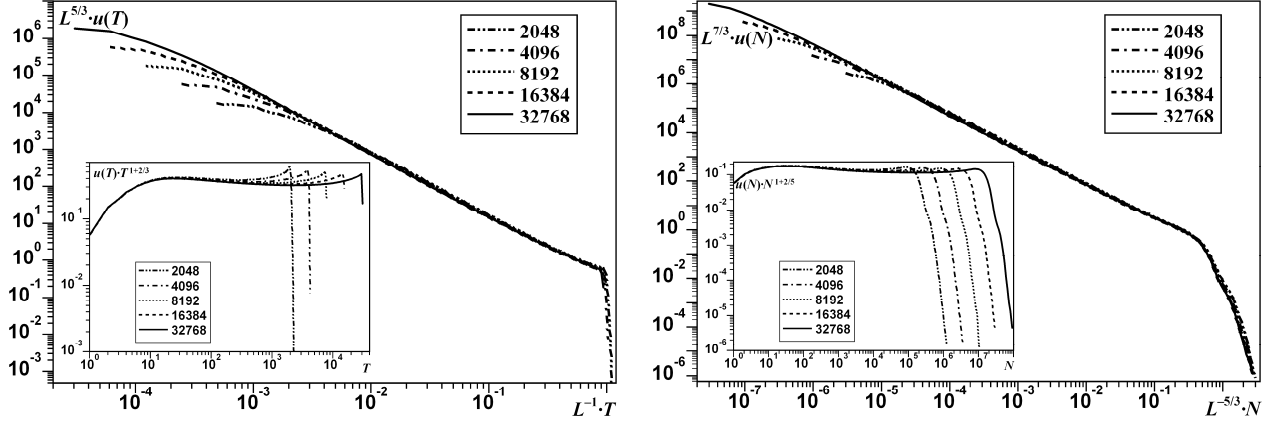


Рис. 18. Распределение лавин в DFF–модели по длительности и размеру

Совмещение графиков при конечно-размерном скейлинге демонстрирует правильность определения скейлинговых показателей, а появление горизонтальных участков на графиках со скомпенсированной степенной компонентой плотности (врезки) – правильность определения характеристических показателей.

Ср. с рис. 3 на стр. 8.

которое является несмещенным

$$\langle \delta_l \rangle = \langle \Delta w_l \rangle = 0 \quad (23)$$

в силу природы самоорганизованно критического состояния. Кроме того, оно должно быть и некоррелированным

$$\langle w_l \cdot \delta_l \rangle = \langle w_l \rangle \cdot \langle \delta_l \rangle, \quad (24)$$

т.к. лавина «не знает» своей ширины.

Принципиальным отличием DFF–модели от DR–модели является возможность многократного сдвига границы области лавины вовне из-за возвращения активности на уже посещенные слои. При этом блуждания оказываются несимметричными. Так, если происходит уменьшение ширины области лавины, ее граница сдвигается внутрь один раз на некоторое расстояние, которое для простоты примем за единицу. А, если происходит увеличение ширины, то граница может сдвигаться несколько раз, фактически совершая скачок на некоторое расстояние n_l .

Иными словами,

$$\delta_l = \begin{cases} +n_l & p_l \\ -1 & 1 - p_l \end{cases}, \quad (25)$$

где вероятность совершения скачка однозначно определяется из условия несмещенности блужданий (23):

$$p_l = \frac{1}{n_l + 1}. \quad (26)$$

Возведем формулу (22) в квадрат и усредним по реализациям

$$\langle w_{l+1}^2 \rangle = \langle w_l^2 \rangle + 2\langle w_l \cdot \delta_l \rangle + \langle \delta_l^2 \rangle.$$

Как следует из формул (23) и (24) второй член в правой части равен нулю, а

$$\langle \delta_l^2 \rangle = n_l$$

в силу формул (25) и (26).

Таким образом, изменение среднего квадрата ширины при переходе к следующему слою совпадает с длиной скачка, который может совершить граница на данном слое:

$$\Delta \langle w_l^2 \rangle = n_l.$$

Если предположить степенное возрастание длины скачка по мере удаления от стартового слоя

$$n_l \sim (l - l_0)^a, \tag{27}$$

то
$$\langle w_l^2 \rangle = \sum_{i=l_0}^l n_i \sim (l - l_0)^{1+a},$$

что ведет к степенной зависимости ширины от номера слоя

$$w(l) \sim (l - l_0)^{\frac{1+a}{2}}. \tag{28}$$

В тривиальном случае $a = 0$ получается формула (11), а при нетривиальных значениях a возникает *аномальная диффузия*, характеризуемая значением показателя в формуле (28), отличным от $1/2$.

Однако и нетривиальные значения a , и даже сама зависимость (27), явным образом предполагающая, что блуждатель умеет измерять сделанное им число шагов, нуждаются в объяснении, которое в общем случае предложить не удастся.

Самосогласованный рост ширины

Для DFF–модели величина скачка определяется, конечно, же, числом пройденных слоев, а локальными условиями. Возможность совершения границей длинного скачка вовне области лавины обуславливается возвращениями активности со следующих слоев. Чем больше раз активность вернется, принося на слой дополнительные песчинки, тем длиннее может быть скачок.

Успешному, т.е. приводящему к новым опрокидываниям, возвращению активности способствует медленный рост ширины области лавины по слоям, поскольку вдоль менее крутой границы активность может возвратиться на большее число слоев. Схематично эта ситуация представлена на рис. 19.

В некотором приближении можно считать, что длина скачка пропорциональна обратному локальному градиенту границы (или, что то же самое, числу слоев, на которых активность может вернуться, сдвигая границу, за один раз):

$$n_l \sim \left(\frac{\delta w}{\delta l} \right)^{-1} \sim (l - l_0)^{\frac{1-a}{2}}. \quad (29)$$

Сопоставление полученного выражения с формулой (27) приводит к нетривиальному значению $a = 1/3$. Соответственно, формула (28), определяющая зависимость ширины лавины от номера слоя запишется в виде (20).

ВЫВОДЫ

Модель Дхара–Рамасвами и дискретная модель Федеров имеют анизотропную динамику, что делает их свойства во многом схожими и позволяет исследовать эти модели одними и теми же методами. Однако если в случае первой анизотропия явным образом заложена в правила, то в случае второй она возникает как результат самоорганизации в критическое состояние в условиях диссипации. При этом лавины распространяются от открытого края в глубину решетки, где возникает непреодолимый для них ров заполнения.

Методика решения самоорганизованно критических моделей основана на совместном рассмотрении конечно-размерного скейлинга для двух различных характеристик происходящих событий. Анализ правил моделей позволяет установить для каждой из этих характеристик по одному скейлинговому показателю, а учет природы самоорганизованно критического состояния дает показатель связи между ними.

Анизотропное распространение лавин дает возможность рассматривать формирование их области как процесс блуждания границы при продвижении лавины по слоям решетки, которое в критическом состоянии оказывается несмещенным. Изменение ширины области лавины представляет собой диффузию – обычную для модели Дхара–Рамасвами и аномальную

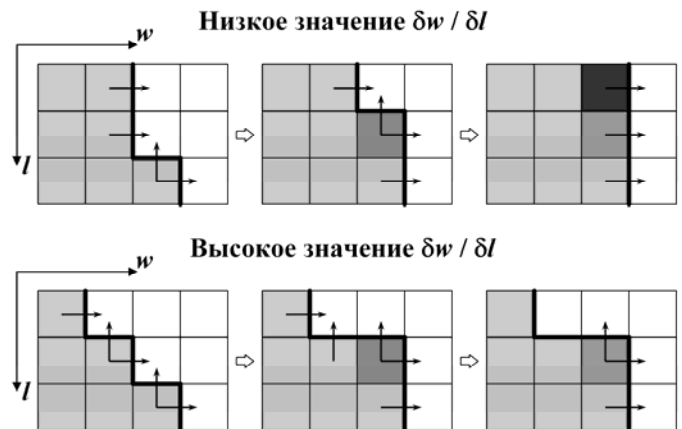


Рис. 19. Пример возвращения активности

Стрелками показана передача песчинок при опрокидывании ячеек. Светлой заливкой отмечены ячейки, опрокинувшиеся при первом же прохождении лавины по слоям, промежуточной – ячейка, опрокидывание которой происходит при возвращении активности на один слой, а темной – ячейка, опрокидывание которой происходит (вверху) или не происходит (внизу) при возвращении активности на два слоя.

Жирной линией показана граница области лавины. Чем быстрее она смещается вонне при движении по слоям, тем ниже шансы на успешное возвращение активности.

для дискретной модели Федеров. Аномальный характер диффузии в последнем случае объясняется возможностью возвращения активности на уже пройденные слои, вследствие чего блуждание границы становится несимметричным.

Полагая длину скачку, совершаемого границей вовне области лавины, обратно пропорциональной градиенту границы, удастся замкнуть уравнения для аномальной диффузии, получая нетривиальное значение ее показателя без предположений о лежащих в ее основе каких-либо степенных закономерностях.

Литература

1. *Bak P., Tang C., Wiesenfeld K.* Self-organized Criticality// *Phys. Rev. A.* 1988. V.38, N1, p.364-374.
2. *Bak P.* How nature works: The science of self-organized criticality. Springer-Verlag, New York, Inc. 1996.
3. *Kadanoff L.P., Nagel S.R., Wu L., Zhou S.* Scaling and universality in avalanches// *Phys. Rev. A.* 1989. V.39, N12, p.6524-6537.
4. *Dhar D., Ramaswamy R.* Exactly solved model of self-organized critical phenomena// *Phys. Rev. Lett.* 1989. V.63, N16, p.1659-1662.
5. *Feder H.J.S., Feder J.* Self-organized criticality in a stick-slip process// *Phys. Rev. Lett.* 1991. V.66, N20, p.2669-2672.
6. *Olami Z, Feder H.J.S., Christensen K.* Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes// *Phys. Rev. Lett.* 1992. V.68, N8, p.1244-1247.
7. *Sornette D., Johansen A., Dornic I.* Mapping self-organized criticality onto criticality. *J. Phys. I (France).* 1995. V.5, p.325.
8. *Clar S., Drossel B., Schwabl F.* Forest fires and other examples of self-organized criticality// *J. Phys.: Cond. Mat.* 1996. V.8, p.6803.

Содержание

Введение	3
Метод конечно-размерного скейлинга	3
«Песочная» парадигма.....	5
DR–модель	6
Решение DR–модели.....	8
DRF–модель	11
Правила модели.....	11
Роль открытого края	12
Кратность опрокидывания. Площадь и размер лавин.....	14
Распределение опрокидываний по слоям.....	18
Распределение диссипации по слоям.....	19
Заполнение решетки	21
Решение модели	23
Аномальная диффузия	24
Уширение области лавины.....	24
Самосогласованный рост ширины	26
Выводы.....	27