



Давыдов А.А., Сазонов В.В.

Исследование режима гашения угловой скорости космического аппарата в нештатной ситуации

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Давыдов А.А., Сазонов В.В. Исследование режима гашения угловой скорости космического аппарата в нештатной ситуации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 70. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-70>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В.Келдыша

**А.А. Давыдов, В.В. Сазонов**

**ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМА ГАШЕНИЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ  
КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В НЕШТАТНОЙ СИТУАЦИИ**

Москва – 2011

## Аннотация

Нештатная ситуация на космическом аппарате (КА), оснащённом двигателями-маховиками, связана с отсутствием измерений компоненты угловой скорости КА относительно одной из его связанных осей. Исследовано функционирование штатного алгоритма управления в режиме гашения угловой скорости КА. Показано, что такое гашение возможно не при всех начальных условиях движения. В общем случае реализуется один из двух возможных финальных режимов, описываемых устойчивыми стационарными решениями уравнений движения. С помощью численных расчетов получены оценки областей притяжения этих стационарных решений. Предложен простой способ, позволяющий вывести начальные условия режима гашения угловой скорости из области притяжения нежелательного решения. Проведена реконструкция нескольких имевших место реализаций этого режима. Реконструкция выполнена посредством аппроксимации решениями уравнений вращательного движения КА телеметрических значений компонент угловой скорости и суммарного кинетического момента двигателей-маховиков, полученных в нештатной ситуации.

**A.A. Davydov, V.V. Sazonov. The investigation of damping of the spacecraft's angular rates in the off-optimum situation.** The off-optimum situation on the spacecraft, equipped with reaction wheels, is the lack of measurements of one component of the angular rate of the spacecraft relative to one of its body axes. We investigate the full-time algorithm's operation in the damping of the spacecraft's angular rates. We show that this damping is not possible for all initial conditions of motion. In general case, it is realized one of two possible final modes, described by the stable stationary solutions of the equations of motion. With using of numerical calculations, we have obtained the estimates of the domains of attraction of stationary solutions. We propose a simple way to bring the initial conditions for the spacecraft's damping mode out from the domain of attraction of undesirable solutions. We reconstruct some implementations of this mode, which were took place. The reconstruction was performed by approximation of telemetry data of the components of the angular rates and the total angular momentum of the reaction wheels by equations of rotational motion of the spacecraft.

**1. Уравнения вращательного движения КА и их стационарные решения.** КА представляет собой гиростат. Он состоит из твердого главного тела, на котором установлены три двигателя-маховика. Каждый маховик имеет относительно главного тела одну степень свободы – может вращаться вокруг собственной оси материальной симметрии.

Систему координат, образованную главными центральными осями инерции КА, обозначим  $x_1x_2x_3$ . В этой системе тензор инерции КА задается матрицей  $\hat{I} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ,  $\mathbf{H} = (h_1, h_2, h_3)$  – собственный кинетический момент маховиков (гиростатический момент КА),  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  – абсолютная угловая скорость главного тела. По физическому смыслу  $I_i > 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Оси вращения маховиков параллельны осям  $x_i$ , так что каждая компонента гиростатического момента  $h_i$  создается собственным маховиком.

В режиме гашения угловых скоростей управление кинетическим моментом маховиков можно с приемлемой точностью описать уравнениями  $\dot{h}_i = k_i \omega_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Здесь и ниже точка над символом означает дифференцирование по времени  $t$ ,  $k_i$  – положительные параметры. Для реализации такого управления измерялись компоненты угловой скорости  $\omega_i$ . Как уже говорилось, в нештатной ситуации измерения величины  $\omega_3$  отсутствовали, и маховик, создававший компоненту гиростатического момента  $h_3$ , не управлялся. Значение этой компоненты оставалось неизменным:  $h_3 = h_{30} = \text{const}$ .

Уравнения вращательного движения КА в рассматриваемой нештатной ситуации запишем в виде

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + k_1 \omega_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + h_2 \omega_3 - h_{30} \omega_2, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + k_2 \omega_2 &= (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 + h_{30} \omega_1 - h_1 \omega_3, \\ I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + h_1 \omega_2 - h_2 \omega_1, \\ \dot{h}_1 &= k_1 \omega_1, \quad \dot{h}_2 = k_2 \omega_2. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих уравнениях пренебрегается действующими на КА внешними механическими моментами и влиянием вращательного движения КА на изменение собственных кинетических моментов маховиков. Первое из этих упрощений оправдано тем, что даже в нештатной ситуации гашение угловых скоростей КА происходит на сравнительно коротком промежутке времени, в течение которого кинетический момент вращательного движения остается практически неизменным. Адекватность второго упрощения установлена в заключительном разделе статьи, где исследованы более полные уравнения движения рассматриваемого КА.

Уравнения (1) допускают первый интеграл

$$G^2 = (I_1 \omega_1 + h_1)^2 + (I_2 \omega_2 + h_2)^2 + (I_3 \omega_3 + h_{30})^2, \quad (2)$$

выражающий постоянство модуля кинетического момента КА в его движении относительно центра масс. Ниже используется функция

$$T = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2). \quad (3)$$

Её производная по времени в силу уравнений (1) имеет вид

$$\dot{T} = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2. \quad (4)$$

Вследствие последнего соотношения, произвольное решение уравнений (1), оставаясь на интегральной поверхности (2) с неизменным значением  $G$ , с течением времени стремится к решению, в котором  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Подставив последние соотношения в уравнения (1), получим

$$\omega_3 h_1 = \omega_3 h_2 = 0, \quad \dot{\omega}_3 = 0, \quad \dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0.$$

Выписанным соотношениям удовлетворяют два стационарных решения уравнений (1). Точнее, два семейства таких решений. Одно из них

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0, \quad h_1 = h_{10}, \quad h_2 = h_{20}, \quad (5)$$

другое

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega_{30}, \quad h_1 = h_2 = 0. \quad (6)$$

Здесь  $h_{10}$ ,  $h_{20}$  и  $\omega_{30}$  – произвольные постоянные, которые с постоянной  $G$  в (2) связаны соотношениями:  $h_{10}^2 + h_{20}^2 + h_{30}^2 = G^2$ ,  $(I_3\omega_{30} + h_{30})^2 = G^2$ . В случае решения (6) примем  $G = I_3\omega_{30} + h_{30}$ .

**2. Устойчивость стационарных решений.** Вследствие существования у системы (1) первого интеграла (2) асимптотическая устойчивость решений (5) и (6) невозможна. Здесь можно говорить только об условной асимптотической устойчивости или асимптотической устойчивости по части переменных. Начнем с решения (6) при  $G \neq 0$ .

Решение (6) назовем условно асимптотически устойчивым, если любое решение системы (1), начальные условия которого лежат в достаточно малой окрестности точки (6) и на той же самой интегральной поверхности (2), стремится к (6) при  $t \rightarrow +\infty$ . Чтобы исследовать такую устойчивость, можно с помощью интеграла (2) при  $G = I_3\omega_{30} + h_{30}$  исключить  $\omega_3$  из системы (1) и исследовать обычную асимптотическую устойчивость стационарного решения  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ,  $h_1 = h_2 = 0$  получившейся системы. В данном случае нет необходимости выполнять это понижение порядка в явном виде. Достаточно исследовать поведение функции  $T$  на поверхности интеграла (2) в окрестности точки (6) и воспользоваться результатами Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского [1].

Положим  $\eta = \omega_3 - \omega_{30}$  и разрешим соотношение (2) относительно  $\eta$ . Получим

$$\eta = -\frac{(I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2}{2I_3G} + \dots$$

Здесь и ниже многоточие означает члены третьей и более высокой степени относительно  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $h_1$  и  $h_2$ . Подставим  $\omega_3 = \omega_{30} + \eta$  с учетом выписанного выражения для  $\eta$  в выражение для  $T$ . Будем иметь

$$T_G = \frac{1}{2}I_3\omega_{30}^2 + \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2) - \frac{\omega_{30}}{2G}[(I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2] + \dots.$$

Возьмем функцию Ляпунова в виде

$$V = 2T_G - I_3\omega_{30}^2 = \left[ I_1\omega_1^2 - \frac{\omega_{30}}{G}(I_1\omega_1 + h_1)^2 \right] + \left[ I_2\omega_2^2 - \frac{\omega_{30}}{G}(I_2\omega_2 + h_2)^2 \right] + \dots.$$

Ее производная по времени в силу системы, полученной из (1) исключением  $\omega_3$ , имеет вид (ср. (4))  $\dot{V} = -2k_1\omega_1^2 - 2k_2\omega_2^2$ . Условие положительной определенности квадратичных слагаемых  $V$  выражается неравенством  $G\omega_{30} < 0$ . Множество  $\dot{V} = 0$  при  $\omega_{30} \neq 0$  не содержит целых траекторий новой системы кроме ее тривиального стационарного решения. По теореме Барбашина – Красовского при  $G\omega_{30} < 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$  это тривиальное решение асимптотически устойчиво. Если же  $G\omega_{30} > 0$ ,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ , то согласно теореме Красовского рассматриваемое тривиальное решение неустойчиво.

Исследуем теперь устойчивость положения равновесия (5). Воспользуемся обобщением теоремы Барбашина – Красовского для задачи устойчивости по части переменных [2]. Фазовые переменные системы (1) разобьем на две группы, называемые переменными  $\mathbf{y}$  и  $\mathbf{z}$ :  $\mathbf{y} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\mathbf{z} = (h_1, h_2)$ . Функция (3) при некотором положительном коэффициенте  $I$  удовлетворяет условию  $T \geq I \|\mathbf{y}\|^2$ . Здесь и ниже  $\|\mathbf{x}\|$  – евклидова норма вектора  $\mathbf{x}$ . Все решения системы (1) ограничены. В самом деле, в силу последнего неравенства и неравенства  $\dot{T} \leq 0$  норма  $\|\mathbf{y}\|$  ограничена. Отсюда в силу интеграла (2) следует ограниченность  $\|\mathbf{z}\|$ . Множество  $\dot{T} = 0$  в случае,  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $|h_{10}| + |h_{20}| > 0$  не содержит целых траекторий уравнений движения кроме стационарного решения (5). Следовательно, это решение асимптотически  $\mathbf{y}$ -устойчиво (теоремы 19.1 и 19.2 в [2]). Иными словами, в любом решении системы (1) с начальными условиями из достаточно малой окрестности точки (5)  $\mathbf{y}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Отыскание стационарных решений системы (1) и исследование их устойчивости допускают обычную для задач такого рода интерпретацию в терминах задачи на условный экстремум [3, 4]. Согласно соотношению (4) устойчивым стационарным решениям системы (1) отвечают точки минимума функции (3) на поверхности интеграла (2), т. е. точки условного минимума этой функции. Точки невырожденного условного экстремума этой функции должны отвечать стационарным решениям этой системы.

Для отыскания указанных точек условного экстремума воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа. Составим выражение

$$L = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + \frac{\lambda}{2}[(I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2 + (I_3\omega_3 + h_{30})^2 - G^2],$$

где  $\lambda$  – множитель Лагранжа, и будем искать его безусловный минимум. Поиск приводит к уравнениям

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad \frac{\partial L}{\partial h_j} = 0 \quad (j = 1, 2),$$

явный вид которых

$$\begin{aligned} I_1\omega_1 + \lambda I_1(I_1\omega_1 + h_1) &= 0, & I_2\omega_2 + \lambda I_2(I_2\omega_2 + h_2) &= 0, & (7) \\ I_3\omega_3 + \lambda I_3(I_3\omega_3 + h_{30}) &= 0, & \lambda(I_1\omega_1 + h_1) &= 0, & \lambda(I_2\omega_2 + h_2) &= 0. \end{aligned}$$

Решение полученной системы начнем с двух последних уравнений. Есть две возможности их удовлетворить.

Первая возможность:  $\lambda = 0$ . В этом случае из первых трех уравнений (7) получаем  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ . Переменные  $h_1$  и  $h_2$  могут принимать любые значения. Это стационарное решение (5). Вторая возможность:  $I_1\omega_1 + h_1 = 0$ ,  $I_2\omega_2 + h_2 = 0$ . Здесь из первых двух уравнений (7) получаем  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ ; из третьего уравнения и условия (2) находим  $\omega_3 = (G - h_{30})/I_3 \equiv \omega_{30}$ . Далее имеем  $h_1 = h_2 = 0$ . Пришли к стационарному решению (6). В обоих случаях надо полагать  $G \neq 0$ . При  $G = 0$  оба найденных экстремума вырождены.

Анализ устойчивости решений (5), (6), показал, что эти решения являются единственно возможными финальными движениями системы (1). Иными словами, любое решение системы (1) с течением времени приходит в малую окрестность одного из этих решений. Оценим области притяжения решений (5), (6).

**3. Области притяжения стационарных решений.** Построение этих областей выполнялось посредством численного интегрирования уравнений (1) при различных начальных условиях. Некоторые результаты такого интегрирования приведены на рис. 1 – 4. Каждый рисунок естественным образом разбивается на три части: левую, среднюю и правую. Левые и средние части рисунков иллюстрируют проекции вычисленных траекторий системы (1) на плоскости  $(\omega_1, \omega_2)$  и  $(\omega_1, \omega_3)$  соответственно. В правых частях рисунков изображены проекции этих траекторий на плоскость  $(h_1, h_2)$ . Начальные точки траекторий помечены маркером в виде кружка. На рисунках и далее в тексте угловые скорости выражены в град./с, компоненты гиростатического момента – в Нмс. Траектории построены при  $I_1 = 643 \text{ кгм}^2$ ,  $I_2 = 720 \text{ кгм}^2$ ,  $I_3 = 253 \text{ кгм}^2$ ,  $k_1 = k_2 = 3 \text{ кгм}^2/\text{с}$ . Начальные условия траекторий указаны в подписях к рисункам. При  $t \rightarrow +\infty$  траектории на рис. 1, 2 стремятся к решению (5), траектория

на рис. 3, 4 – к решению (6). Как видно из рисунков, траектории системы (1) весьма разнообразны.

Используя векторные обозначения предыдущего раздела, перепишем систему (1) в виде:  $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ ,  $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Ограничимся рассмотрением решений системы (1), для которых в (2)  $G \neq 0$ . При  $t \rightarrow +\infty$  для таких решений из области притяжения решения (5)  $\lim \|\mathbf{y}(t)\| = 0$ ,  $\lim \|\mathbf{z}(t)\| > 0$ , а для решений из области притяжения решения (6)  $\lim \|\mathbf{y}(t)\| > 0$ ,  $\lim \|\mathbf{z}(t)\| = 0$ . Положим  $\kappa = \lim (\|\mathbf{y}(t)\| - \|\mathbf{z}(t)\|)$ . Значения  $\kappa > 0$  отвечают решениям из области притяжения решения (5), значения  $\kappa < 0$  – решениям из области притяжения решения (6). Решения, для которых  $\kappa \approx 0$ , лежат вблизи границы этих областей. Что представляет собой эта граница, неизвестно. Однако, как показывают расчеты, она располагается в малой окрестности некоторой гладкой поверхности. Величина  $\kappa$  зависит от начальных условий решения и параметров системы (1). Она рассчитывалась следующим образом. Система (1) интегрировалась из начальной точки  $t = 0$  до тех пор, пока выполнялось хотя бы одно из неравенств  $\|\mathbf{Y}[\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)]\| > 10^{-8} \text{ с}^{-2}$ ,  $\|\mathbf{Z}[\mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)]\| > 10^{-8} \text{ Нм}$  и  $t < 3600 \text{ с}$ . В точке окончания интегрирования  $t = t_*$  принималось  $\kappa = \|\mathbf{y}(t_*)\| - \|\mathbf{z}(t_*)\|$ .

Исследуя зависимость величины  $\kappa$  от начальных условий решения системы (1) и ее параметров, можно получить оценки областей притяжения стационарных решений (5), (6). В общем случае такие области следует рассматривать в 11-мерном пространстве, координатами в котором служат 5 начальных условий и 6 параметров. Однако, учитывая механический смысл задачи, размерность исследуемого пространства целесообразно уменьшить. Во-первых, поскольку рассматривается конкретный КА, параметры  $I_1, I_2, I_3, k_1, k_2$  следует фиксировать. В расчетах использовались их значения, указанные выше. Во-вторых, процесс гашения угловых скоростей в нештатной ситуации начинался после «выбега» маховиков, то есть после остановки последних под действием трения. По этой причине следует принять  $h_1(0) = h_2(0) = 0$ . В результате указанного сокращения числа параметров области притяжения будем строить в 4-мерном пространстве величин  $\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0)$  и  $h_{30}$ .

«Граница» областей притяжения строилась так. Фиксировались какие-либо три параметра, оставшийся параметр варьировался. Находились два значения этого параметра, которым отвечали значения  $\kappa$  разных знаков. Методом деления отрезка пополам находился «корень» уравнения  $\kappa = 0$ . Соответствующая точка в пространстве  $R^4[\omega_1(0), \omega_2(0), \omega_3(0), h_{30}]$  считалась принадлежащей искомой «границе».

Результаты построения «границы» представлены на рис. 5 – 8. На рис. 5 представлена часть «границы», лежащая в гиперплоскости  $\omega_2(0) = 0$ . По существу это поверхность в пространстве  $R^3[\omega_1(0), \omega_3(0), h_{30}]$ . Она симметрична относительно плоскости  $\omega_1(0) = 0$ . Сечение этой поверхности плоскостью

$\omega_1(0) = 0$ , т.е. пересечение исходной «границы» в четырехмерном пространстве с подпространством  $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$ , представляет собой прямые  $\omega_3(0) = 0$  и  $\omega_3(0) = -h_{30}/I_3$ . Это следует из найденного выше условия  $G\omega_{30} < 0$  условной асимптотической устойчивости решения (6). В данном случае кавычки в слове «граница» можно опустить: полученный результат – точный.

На рис. 6 представлена часть «границы», лежащая в гиперплоскости  $\omega_1(0) = 0$ . Это – поверхность в пространстве  $R^3[\omega_2(0), \omega_3(0), h_{30}]$ . Рассматриваемая поверхность аналогична поверхности на рис. 6. В частности, ее сечение плоскостью  $\omega_2(0) = 0$  представляет собой те же прямые  $\omega_3(0) = 0$  и  $\omega_3(0) = -h_{30}/I_3$ . Рисунок 7 демонстрирует зависимость проекции «границы» на пространство  $R^3[\omega_2(0), \omega_3(0), h_{30}]$  при  $\omega_1(0) \neq 0$ , а рисунок 8 – ту же зависимость при  $h_1(0) \neq 0$  и  $h_2(0) \neq 0$ .

Расчеты выявили достаточно большую область притяжения стационарного решения (6), в которой сохраняется ненулевая компонента угловой скорости  $\omega_3$ . Этот факт говорит о достаточно большой вероятности того, что полное гашение угловых скоростей в сложившейся ситуации окажется невозможным. Однако (см. выше), если процесс гашения начать после выбега маховиков, т.е. при  $h_1(0) = h_2(0) = h_{30} = 0$ , то движение системы будет стремиться к стационарному решению (5). Это наблюдение подтверждено эксплуатацией рассматриваемого КА.

**4. Реконструкция фактических реализаций режима гашения угловой скорости.** Чтобы показать, что система (1) правильно описывает движение КА, аппроксимируем ее решениями телеметрические значения компонент угловой скорости и гиросtatического момента, полученные в нештатной ситуации. Представим эту систему в виде:

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \mu\omega_2\omega_3 + h_2\omega_3 - h_{30}\omega_2 - k_1\omega_1, \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}\omega_3\omega_1 + \frac{\lambda}{1+\lambda\mu}(h_{30}\omega_1 - h_1\omega_3 - k_2\omega_2), \\ \dot{\omega}_3 &= -(1-\lambda+\lambda\mu)\omega_1\omega_2 + \lambda(h_1\omega_2 - h_2\omega_1), \\ \dot{h}_1 &= k_1\omega_1, \quad \dot{h}_2 = k_2\omega_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь  $\lambda = I_1/I_3$ ,  $\mu = (I_2 - I_3)/I_1$ , величины  $h_i$ ,  $k_i$  и  $h_{30}$  – это прежние одноименные величины, деленные на  $I_1$ . При построении аппроксимации телеметрических данных параметры системы (8)  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  и  $h_{30}$  выступают в роли параметров согласования.

Телеметрическая информация об угловой скорости КА и гиросtatическом моменте КА (суммарном кинетическом моменте маховиков) в обработанном виде представляет собой последовательности чисел

$$t_n, \omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, h_1^{(n)}, h_2^{(n)}, h_3^{(n)} \quad (n=1, 2, \dots, N). \quad (9)$$

Здесь  $\omega_i^{(n)}$  и  $h_j^{(n)}$  – измерения величин  $\omega_i$  и  $h_j$ , выполненные в момент времени  $t_n$ ,  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ . Разности  $t_{n+1} - t_n$  обычно не превышают нескольких секунд. Продолжительность  $t_N - t_1$  обрабатываемых отрезков данных составляет от 3 до 6 мин. На самом деле телеметрические значения компонент угловой скорости и гиросtatического момента относятся к так называемой строительной системе координат КА, которая связана с элементами конструкции его корпуса. Однако оси этой системы были практически параллельны осям системы  $x_1x_2x_3$ , поэтому ниже данные телеметрии будем относить к системе  $x_1x_2x_3$ . В принятой модели  $h_3 = h_{30} = \text{const}$ , поэтому последовательность данных  $h_3^{(n)}$  будем аппроксимировать константой  $h_{30}$ .

Аппроксимацию телеметрических данных (9) будем строить методом максимального правдоподобия. Примем, что ошибки в данных  $\omega_i^{(n)}$ ,  $h_j^{(n)}$  независимы и имеют нормальные распределения с нулевыми средними значениями. Стандартные отклонения ошибок в данных  $\omega_i^{(n)}$  одинаковы и равны  $\sigma_\omega$ , стандартные отклонения ошибок в данных  $h_j^{(n)}$  также одинаковы и равны  $\sigma_h$ . Значения этих стандартных отклонений неизвестны. Аппроксимацией данных (9) будем считать соответствующие компоненты фазового вектора в решении системы (8), заданном на отрезке  $t_1 \leq t \leq t_N$  и доставляющем минимум функционалу [5]

$$\Phi = 2N \ln \Phi_\omega + 3N \ln \Phi_h + \ln(\nu + \Phi_p), \quad (10)$$

$$\Phi_\omega = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^2 [\omega_i^{(n)} - \omega_i(t_n)]^2, \quad \Phi_h = \sum_{n=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^2 [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 + [h_3^{(n)} - h_{30}]^2 \right\}$$

$$\Phi_p = w_1(\lambda - \lambda_0)^2 + (\mu - \mu_0)^2 + w_2 \sum_{i=1}^2 (k_i - k_{i0})^2.$$

Последний член в (10) служит для учёта априорной информации о некоторых уточняемых параметрах и регуляризации задачи поиска минимума. В расчётах принимались:  $\lambda_0 = 2.54$  и  $\mu_0 = 0.73$ ,  $k_{10} = k_{20} \approx 0.12$  (проектные значения этих параметров),  $\nu = 10^{-6}$ ,  $w_1 = 10^{-5}$ ,  $w_2 = 10^{-4}$ . Минимизация  $\Phi$  проводится по начальным условиям решения системы (8) в точке  $t_1$  и параметрам  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $h_{30}$ . Для простоты письма все уточняемые величины объединим в вектор  $q \in R^{10}$  и будем считать функционал (10) функцией этого вектора:  $\Phi = \Phi(q)$ . Аппроксимирующее решение отвечает значению  $q_* = \arg \min \Phi(q)$ .

Минимизация функционала (4) выполнялась в несколько этапов. Сначала методом случайного поиска находилась грубая оценка  $q_*$ , которая затем уточнялась методом Гаусса-Ньютона [5]. Точность аппроксимации данных (9) и разброс в определении компонент  $q_*$  будем характеризовать соответствующими стандартными отклонениями. Оценки стандартных отклонений ошибок в значениях  $\omega_i^{(n)}$  и  $h_j^{(n)}$  находятся по формулам [5]

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{\Phi_\omega}{2N}}, \quad \sigma_h = \sqrt{\frac{\Phi_h}{3N}},$$

стандартные отклонения компонент вектора  $q_*$  равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы  $C^{-1}(q_*)$ , где

$$C(q) = \frac{2N}{\Phi_\omega(q)} C_\omega(q) + \frac{3N}{\Phi_h(q)} C_h(q) + \frac{1}{2(\nu + \Phi_p)} \frac{\partial^2 \Phi_p(q)}{\partial q^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi(q)}{\partial q^2},$$

$C_\omega(q)$  и  $C_h(q)$  – матрицы систем нормальных уравнений, возникающих при минимизации выражений  $\Phi_\omega(q)$  и  $\Phi_h(q)$  методом Гаусса-Ньютона. Стандартные отклонения величин  $\omega_i(t_1)$ ,  $h_j(t_1)$ ,  $\lambda$  и т. п. будем обозначать  $\sigma_{\omega i}$ ,  $\sigma_{h j}$ ,  $\sigma_\lambda, \dots$

Аппроксимация данных (9) была построена на трех интервалах времени. На всех этих интервалах представлена заключительная часть процесса гашения угловой скорости. Основные характеристики интервалов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Интервалы определения вращательного движения КА

№ инт.	Дата	$t_1$ , ч:мин.с	$t_N - t_1$ , с	$N$
1	08.06.2009	10.50.11	368	215
2	22.06.2009	00.36.10	205	53
3	07.07.2009	10.09.11	121	36

Здесь для каждого интервала указаны: дата и декретное московское время момента  $t_1$ , длина интервала  $t_N - t_1$ , число  $N$  включённых в обработку моментов времени с измерениями. Результаты аппроксимации представлены на рис. 9. Здесь сплошные кривые – графики решения системы (8) (на нижних графиках – прямые  $h_3 = h_{30}$ ), маркерами обозначены точки  $(t_n, \omega_i^{(n)})$  и  $(t_n, h_j^{(n)})$  – аппроксимируемые телеметрические данные. Как видно из рисунка, на всех трех интервалах движение КА стремится к стационарному решению (5).

Стандартные отклонения ошибок в телеметрических данных и найденных оценок параметров приведены в табл. 2. Здесь  $\sigma_\omega$ ,  $\sigma_h$ ,  $\sigma_{\omega i}$ ,  $\sigma_{h i}$  и  $\sigma_{k j}$  выражены в  $\text{с}^{-1}$ . Как видно из таблицы, наиболее точная аппроксимация построена для интервала 1. Оценки параметров системы (8) для этого интервала  $\lambda = 2.617$ ,

$\mu = 0.770$ ,  $h_{30} = 0.0014 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_1 = 0.129 \text{ с}^{-1}$ ,  $k_2 = 0.131 \text{ с}^{-1}$ . Для интервалов 2 и 3 оценки параметров не приводим, так как их точность невысока. Эти интервалы отвечают окончанию процесса гашения угловой скорости, и относительные ошибки в данных  $\omega_1^{(n)}$ ,  $\omega_2^{(n)}$  на них выше, чем на интервале 1. Основываясь на результатах, полученных для интервала 1, можно сделать вывод об адекватности уравнений (8) и (1).

Таблица 2. Стандартные отклонения оцениваемых величин

№ инт.	$\sigma_\omega$	$\sigma_h$	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	$\sigma_{\omega 3}$	$\sigma_{h1}$
1	5.3e-5	1.2e-4	3.7e-5	3.8e-5	4.1e-5	4.4e-5
2	7.4e-5	1.2e-4	3.8e-5	4.6e-5	5.8e-5	4.7e-5
3	1.3e-4	1.4e-4	6.6e-5	7.3e-5	1.6e-4	6.9e-5

№ инт.	$\sigma_{h2}$	$\sigma_{h3}$	$\sigma_\lambda$	$\sigma_\mu$	$\sigma_{k1}$	$\sigma_{k2}$
1	5.7e-5	8.3e-6	8.78e-3	9.71e-3	5.1e-4	6.6e-4
2	6.8e-5	1.7e-5	6.1e-1	1.2e-1	3.6e-3	3.1e-3
3	6.7e-5	2.5e-5	4.3e-1	6.5e-2	2.5e-3	3.4e-3

**5. Исследование стационарных вращений КА с учётом инерционных характеристик маховиков.** Уравнения вращательного движения КА с явным учетом моментов инерции маховиков можно записать в виде уравнений Эйлера-Лагранжа [6]. Кинетическую энергию движения КА относительно центра масс представим в виде

$$T_r = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2) + J(\omega_1\dot{\varphi}_1 + \omega_2\dot{\varphi}_2 + \omega_3\dot{\varphi}_3) + \frac{J}{2}(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2).$$

Здесь и ниже без дополнительных пояснений используются введенные выше обозначения; новые обозначения:  $J$  – осевой момент инерции каждого маховика (маховики полагаем одинаковыми),  $\varphi_i$  – угол поворота маховика, ось которого параллельна оси  $x_i$ , относительно главного тела.

Уравнения Эйлера-Лагранжа имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \omega_1} + \omega_2 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_3} - \omega_3 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} + \omega_3 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_1} - \omega_1 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_3} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \omega_3} + \omega_1 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_2} - \omega_2 \frac{\partial T_r}{\partial \omega_1} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}_i} - \frac{\partial T_r}{\partial \varphi_i} &= Q_i \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned}$$

Здесь  $Q_i$  – механические моменты, приложенные к маховикам относительно их осей. Следуя сделанным ранее предположениям, примем  $Q_1 = k_1\omega_1$ ,  $Q_2 = k_2\omega_2$ ,  $Q_3 \equiv 0$ . В силу последнего соотношения  $\varphi_3$  – циклическая координата, и ее можно исключить из уравнений движения методом Рауса.

Выписанные уравнения допускают циклический первый интеграл

$$\frac{\partial T_r}{\partial \dot{\varphi}_3} \equiv J(\omega_3 + \dot{\varphi}_3) = h_{30}.$$

Введем функцию Рауса  $R = T_r - h_{30}\dot{\varphi}_3$  и исключим из нее переменную  $\dot{\varphi}_3$  с помощью циклического интеграла. Уравнения вращательного движения КА можно записать в виде уравнений Эйлера-Лагранжа, заменив функцию  $T_r$  на  $R$  и опустив уравнение для  $\varphi_3$ . Явный вид этих уравнений

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + J\ddot{\varphi}_1 + (I_3 - I_2 - J)\omega_2\omega_3 + h_{30}\omega_2 - J\dot{\varphi}_2\omega_3 &= 0, \\ I_2\dot{\omega}_2 + J\ddot{\varphi}_2 + (I_1 - I_3 + J)\omega_3\omega_1 + J\dot{\varphi}_1\omega_3 - h_{30}\omega_1 &= 0, \\ (I_3 - J)\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_2\omega_2 + J(\dot{\varphi}_2\omega_1 - \dot{\varphi}_1\omega_2) &= 0, \\ J(\dot{\varphi}_1 + \dot{\omega}_1) = k_1\omega_1, \quad J(\dot{\varphi}_2 + \dot{\omega}_2) = k_2\omega_2. \end{aligned}$$

Сделаем в последних уравнениях замену переменных  $h_1 = J\dot{\varphi}_1$ ,  $h_2 = J\dot{\varphi}_2$  и преобразуем их к виду

$$\begin{aligned} (I - J)_1\dot{\omega}_1 + k_1\omega_1 &= (I_2 - I_3 + J)\omega_2\omega_3 + h_2\omega_3 - h_{30}\omega_2, \\ (I_2 - J)\dot{\omega}_2 + k_2\omega_2 &= (I_3 - I_1 - J)\omega_3\omega_1 + h_{30}\omega_1 - h_1\omega_3, \\ (I_3 - J)\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 + h_1\omega_2 - h_2\omega_1, \\ \dot{h}_1 + J\dot{\omega}_1 &= k_1\omega_1, \quad \dot{h}_2 + J\dot{\omega}_2 = k_2\omega_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Для рассматриваемого КА  $J \ll \min(I_1, I_2, I_3)$ . При  $J = 0$  уравнения (11) переходят в уравнения (1).

Уравнения (11) допускают первый интеграл (интеграл кинетического момента)

$$\left(\frac{\partial R}{\partial \omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \omega_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \omega_3}\right)^2 = G^2,$$

явный вид которого

$$G^2 = (I_1\omega_1 + h_1)^2 + (I_2\omega_2 + h_2)^2 + [(I_3 - J)\omega_3 + h_{30}]^2. \tag{12}$$

При  $J = 0$  этот интеграл переходит в интеграл (2). Введем функцию

$$T' = \frac{1}{2} \left[ (I_1 - J)\omega_1^2 + (I_2 - J)\omega_2^2 + (I_3 - J)\omega_3^2 \right].$$

Ее производная по времени в силу уравнений (11) имеет вид

$$\dot{T}' = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2. \quad (13)$$

В силу последнего соотношения произвольное решение уравнений (11), оставаясь на поверхности интеграла (12) с неизменным значением  $G$ , стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к решению, в котором  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ . Подставив последние соотношения в уравнения (11), получим  $\omega_3 h_1 = \omega_3 h_2 = 0$ ,  $\dot{\omega}_3 = 0$ ,  $\dot{h}_1 = \dot{h}_2 = 0$ . Выписанным соотношениям удовлетворяют два семейства стационарных решения уравнений (11). Они имеют вид (5) и (6). Произвольные постоянные в этих решениях связаны с постоянной  $G$  в (12) соотношениями:  $h_{10}^2 + h_{20}^2 + h_{30}^2 = G^2$ ,  $(I_3 - J)\omega_{30} + h_{30} = G$ . Исследование устойчивости решений (5), (6) системы (11) выполняется по изложенной выше схеме. Приведем результат, полагая  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ ,  $0 \leq J < \min(I_1, I_2, I_3)$  и  $G \neq 0$ .

Решение (6) условно асимптотически устойчиво при  $G\omega_{30} < 0$  и неустойчиво при  $G\omega_{30} > 0$ . Решение (5) асимптотически устойчиво по переменным  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  при  $|h_{10}| + |h_{20}| > 0$ . Таким образом, переход к системе (11) не вносит существенно нового в результаты, полученные для системы (1).

Заметим, что штатное гашение угловой скорости описывается приведенными выше уравнениями Эйлера-Лагранжа при  $Q_3 = k_3\omega_3$ ,  $k_3 > 0$ . В силу этих уравнений  $\dot{T}' = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2 - k_3\omega_3^2$ , и они допускают устойчивое в целом по переменным  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  семейство стационарных решений в котором  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$ .

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00262).

### Список литературы

1. Барбашин Е.А. Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
2. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987.
3. Румянцев В.В. Стационарные движения спутников. М.: ВЦ АН СССР, 1967.
4. Карапетян А.В. Устойчивость стационарных движений. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
5. Й. Бард. Нелинейное оценивание параметров. М.: Статистика, 1979.
6. Лурье А.И. Аналитическая механика. М.: Физматгиз, 1961.

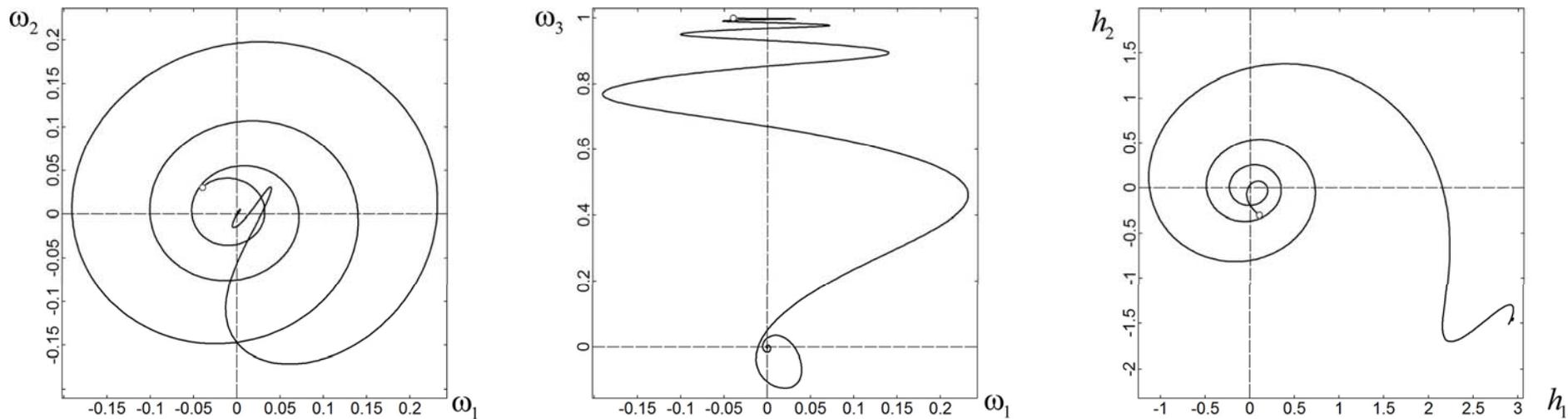


Рис. 1. Пример траектории системы (1), стремящейся к стационарному решению (5),  $h_{30} = -1$ ,  $\omega_1(0) = -0.04$ ,  $\omega_2(0) = 0.03$ ,  $\omega_3(0) = 1$ ,  $h_1(0) = 0.1$ ,  $h_2(0) = -0.3$ .

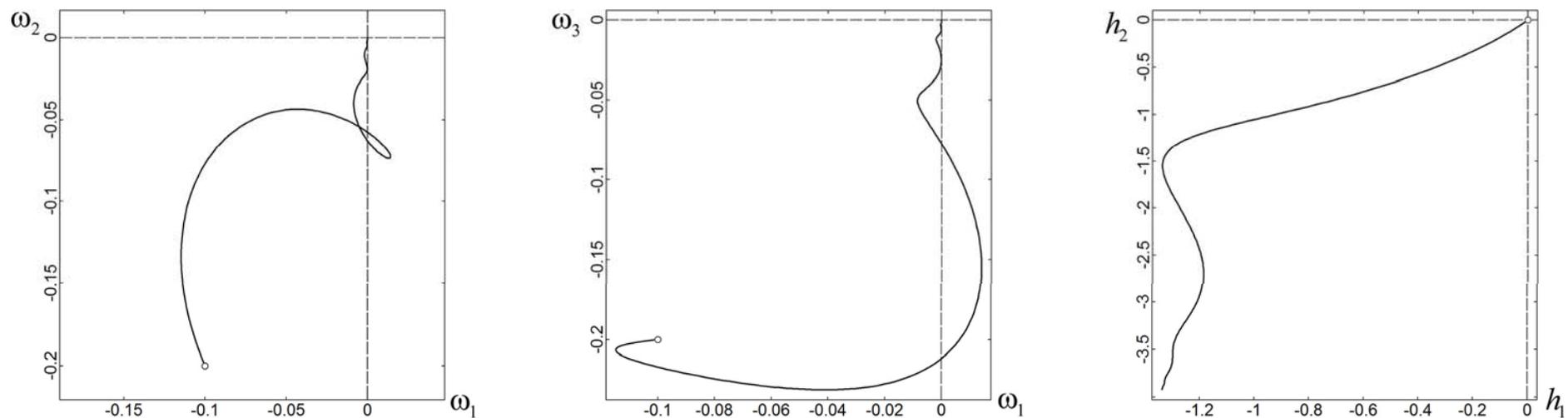


Рис. 2. Пример траектории системы (1), стремящейся к стационарному решению (5),  $h_{30} = -5$ ,  $\omega_1(0) = -0.1$ ,  $\omega_2(0) = -0.02$ ,  $\omega_3(0) = -0.2$ ,  $h_1(0) = 0$ ,  $h_2(0) = 0$ .

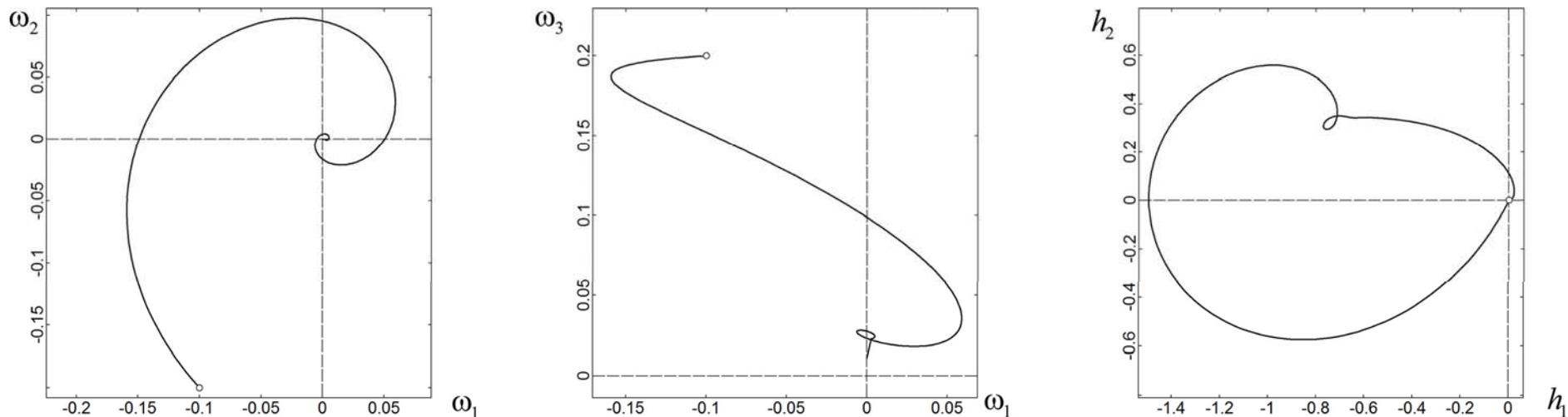


Рис. 3. Пример траектории системы (1), стремящейся к стационарному решению (6),  $h_{30} = -5$ ,  $\omega_1(0) = -0.1$ ,  $\omega_2(0) = -0.2$ ,  $\omega_3(0) = 0.2$ ,  $h_1(0) = h_2(0) = 0$ .

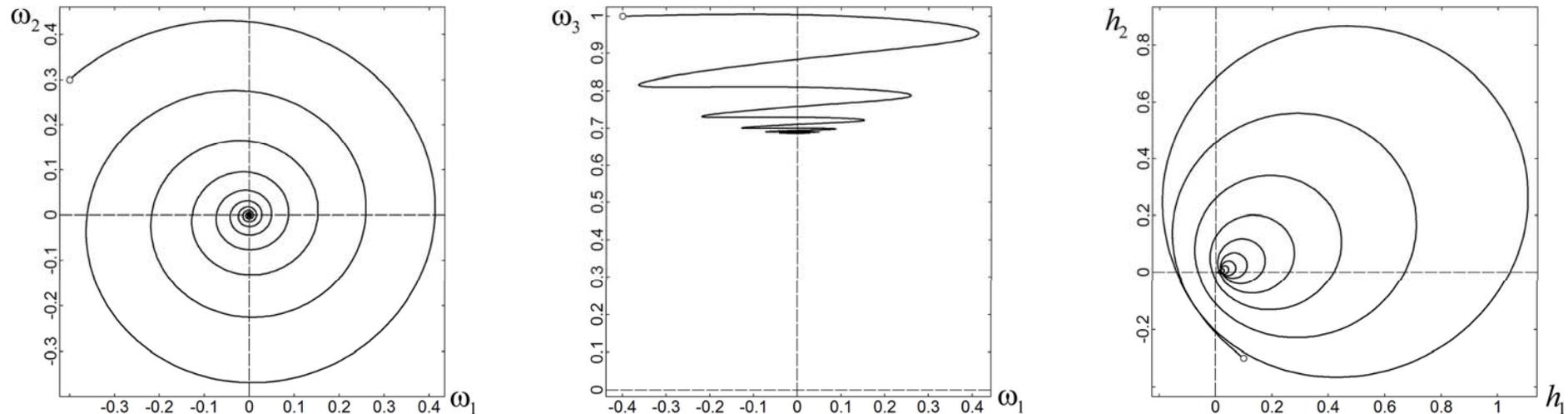


Рис. 4. Пример траектории системы (1), стремящейся к стационарному решению (6),  $h_{30} = -15$ ,  $\omega_1(0) = -0.4$ ,  $\omega_2(0) = 0.3$ ,  $\omega_3(0) = 1$ ,  $h_1(0) = 0.1$ ,  $h_2(0) = -0.3$ .

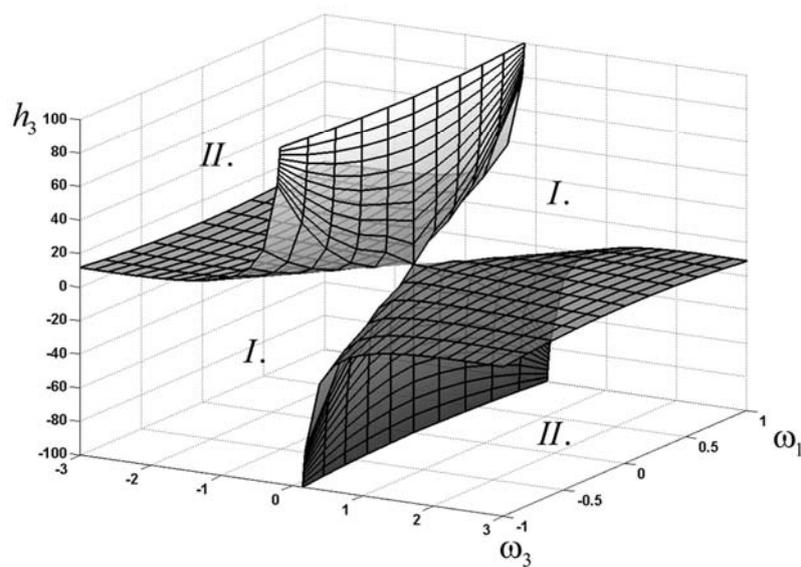
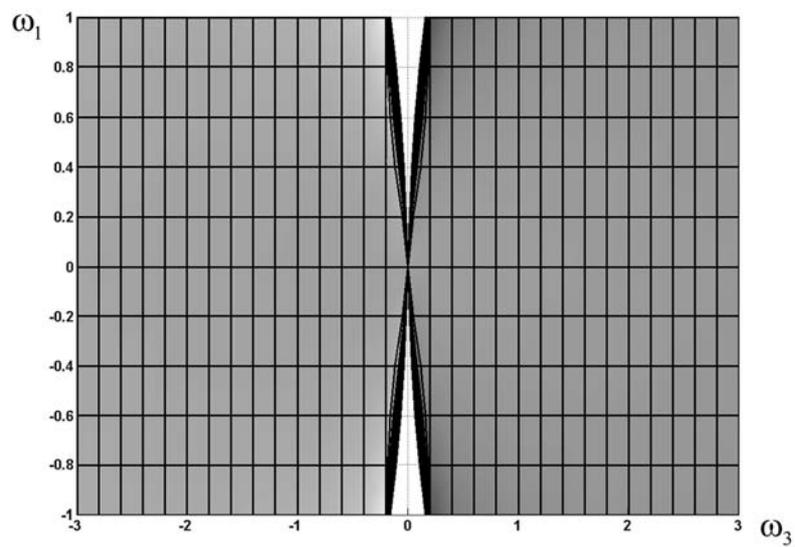
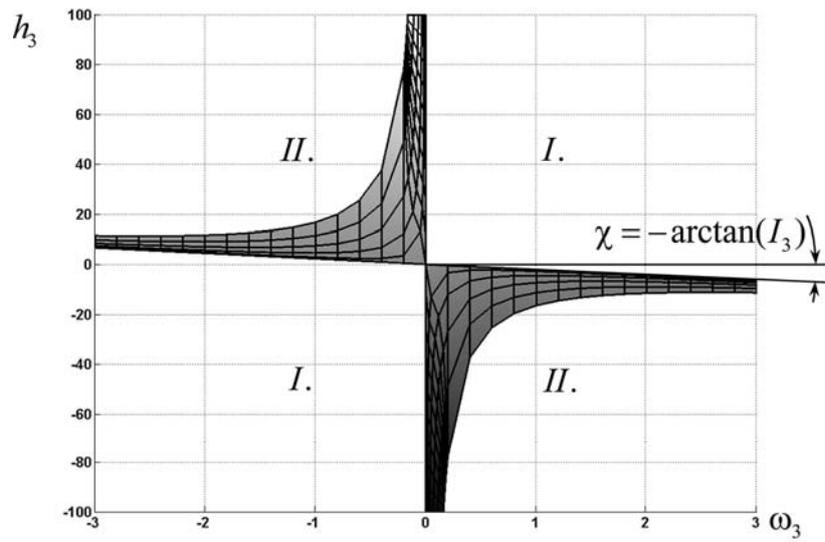


Рис. 5. Области притяжения стационарных решений при  $\omega_2(0) = 0$ :  
*I* – решения (5), *II* – решения (6).

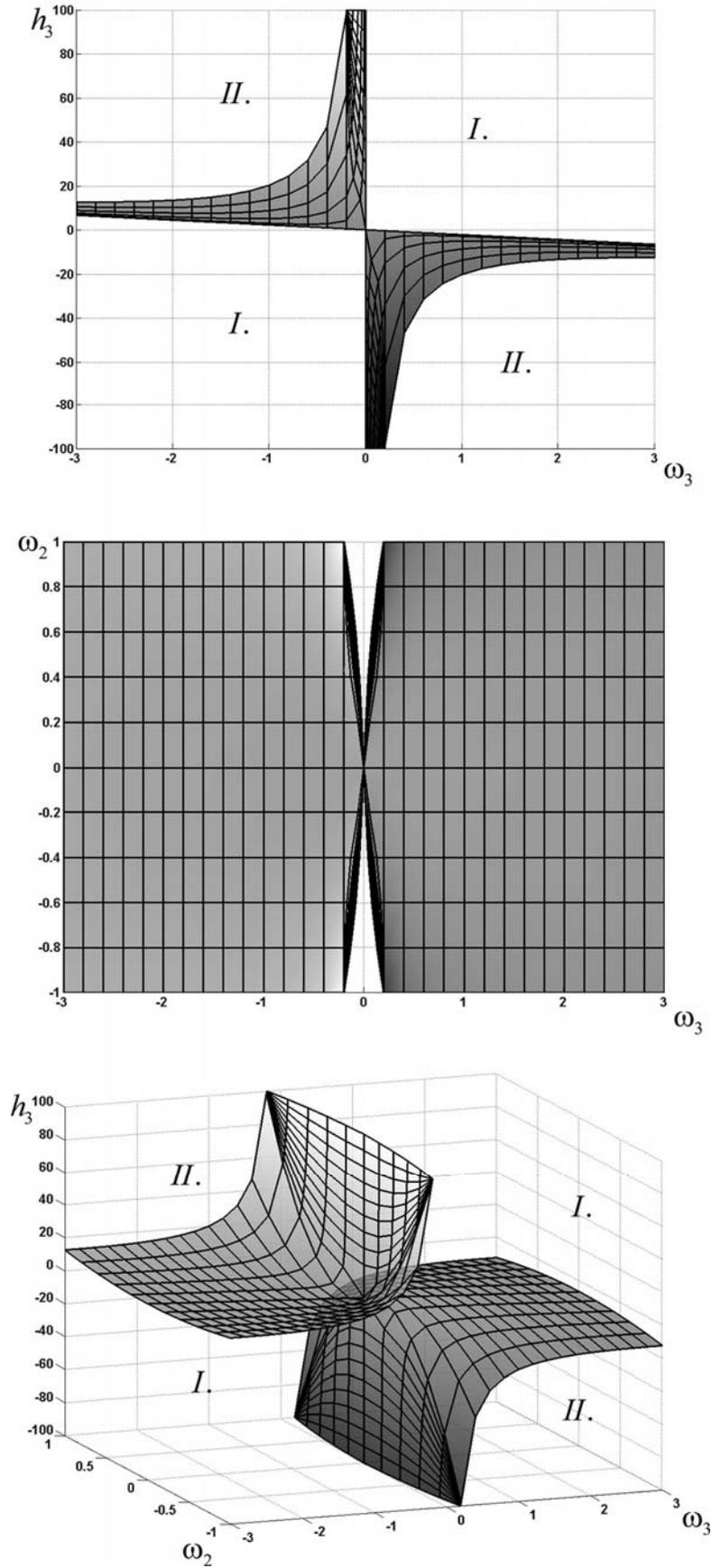


Рис. 6. Области притяжения стационарных решений при  $\omega_1(0) = 0$ :  
 I – решения (5), II – решения (6).

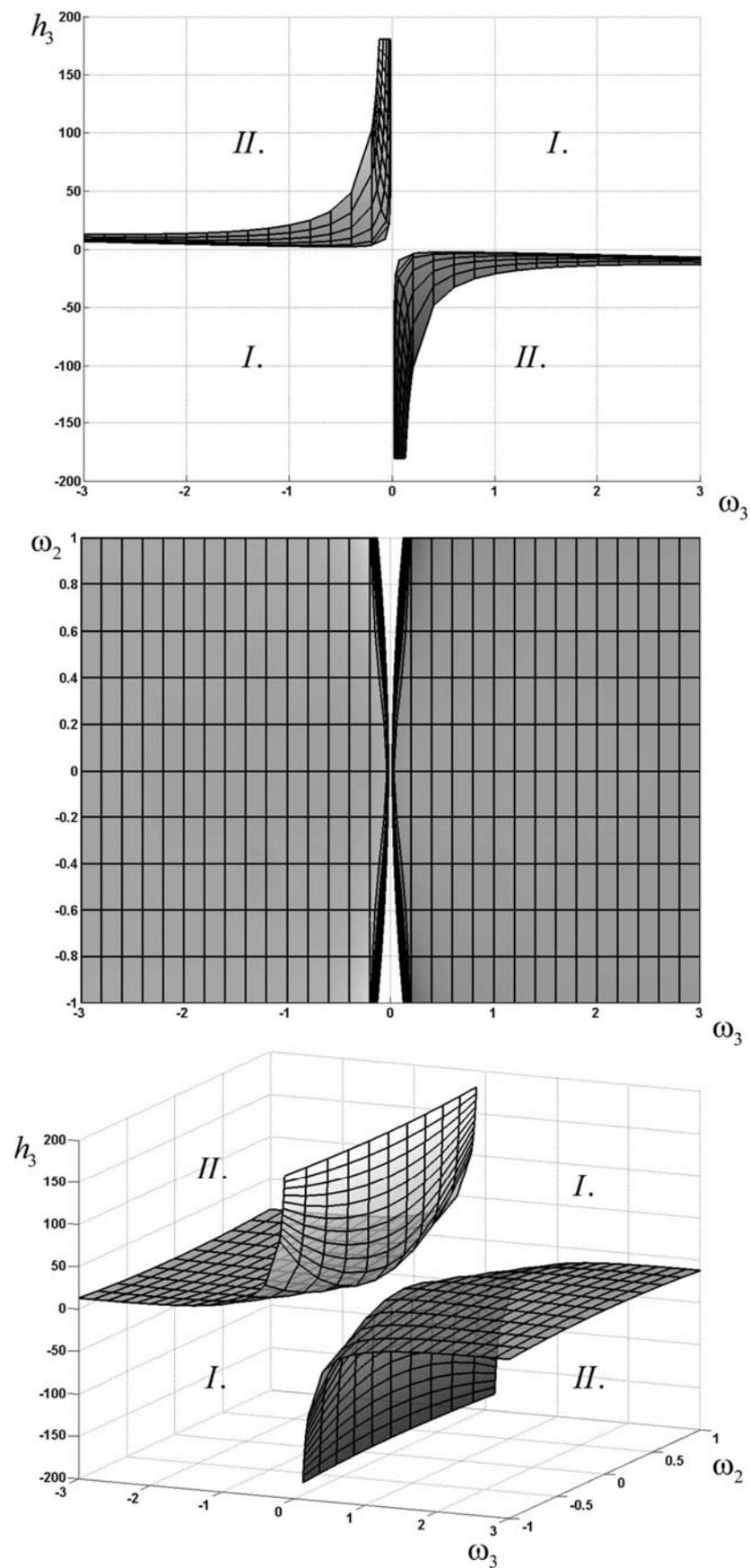


Рис. 7. Области притяжения стационарных решений при  $\omega_1(0) = -0.3$  :  
*I* – решения (5), *II* – решения (6).

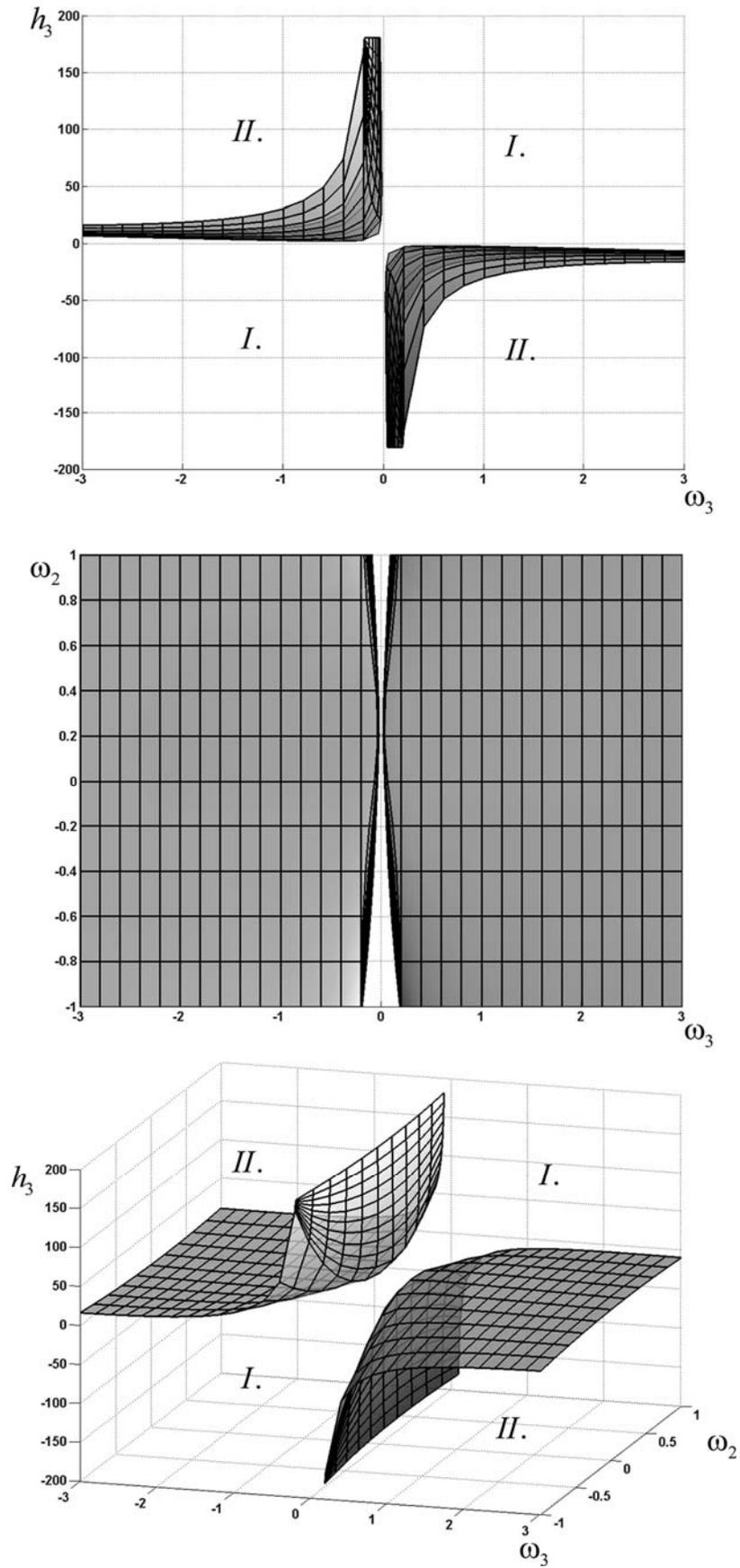


Рис. 8. Области притяжения стационарных решений при  $\omega_1(0) = 0$ ,  $h_1(0) = h_2(0) = 2$ : *I* – решения (5), *II* – решения (6).

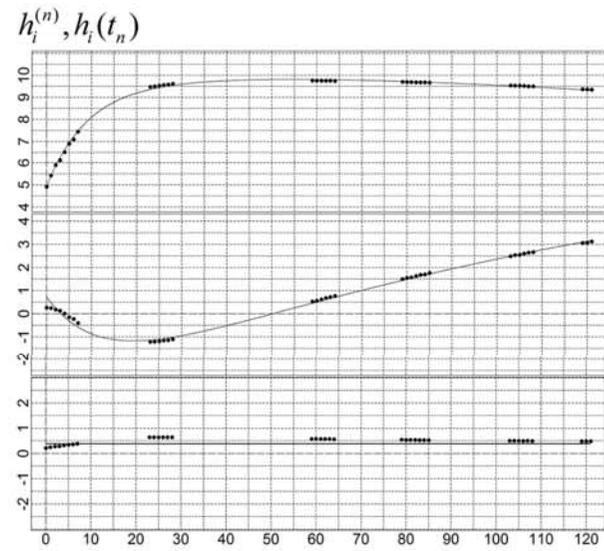
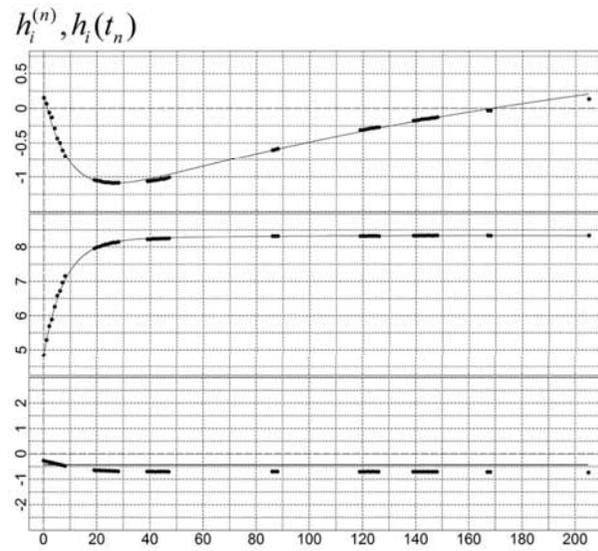
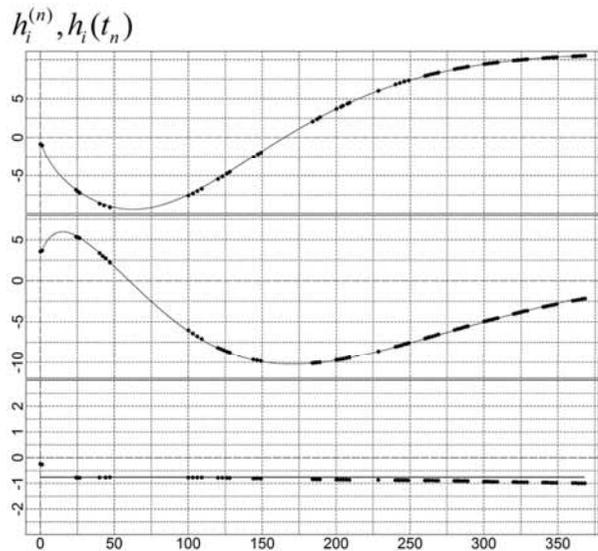
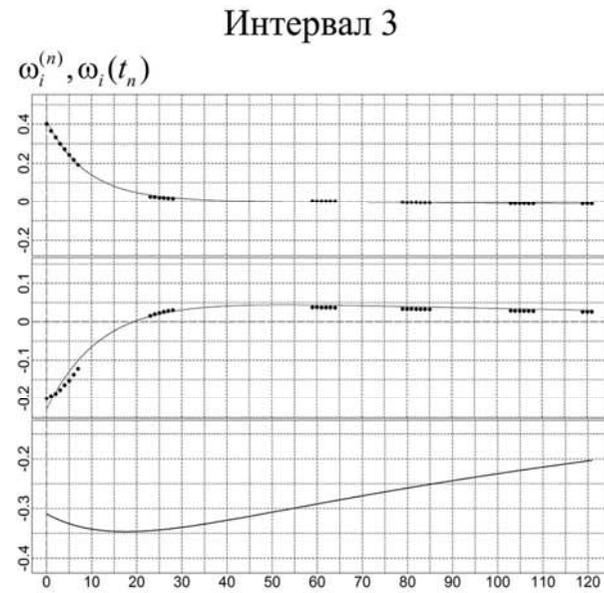
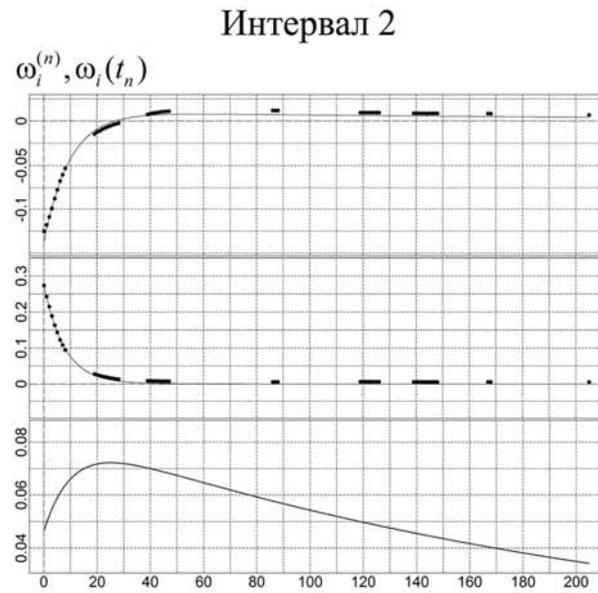
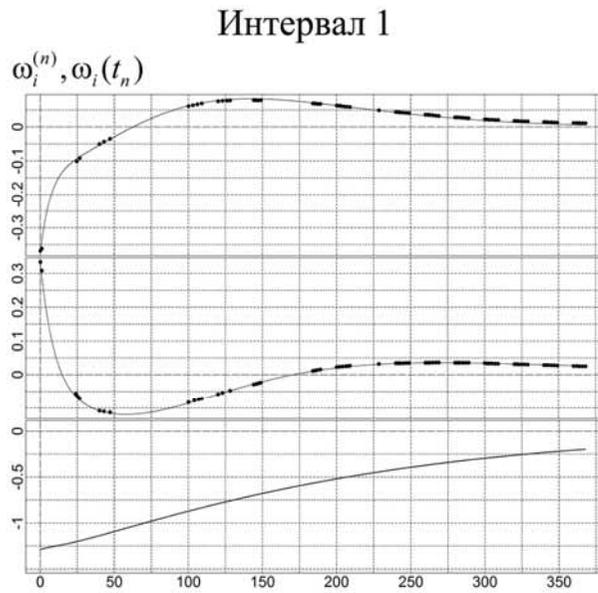


Рис. 9. Результаты аппроксимации телеметрических данных.