



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Символическая динамика и
порождающие решения
плоских периодических
орбит задачи Хилла

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Батхин А.Б. Символическая динамика и порождающие решения плоских периодических орбит задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 34. 31 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-34>

Публикации по материалам препринта

Батхин А. Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 4. С. 308-322. ISSN 0023-4206.

Batkhin A. B. Symmetric Periodic Solutions of the Hill's Problem. I // Cosmic Research. 2013. July. Vol. 51, no. 4. Pp. 275-288. ISSN 0010-9525.

DOI: [10.1134/S0010952513040035](https://doi.org/10.1134/S0010952513040035)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952513040035>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

СИМВОЛИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И
ПОРОЖДАЮЩИЕ РЕШЕНИЯ
ПЛОСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТ
ЗАДАЧИ ХИЛЛА

Москва, 2011 г.

УДК 521.1+531.314

А. Б. Батхин. Символическая динамика и порождающие решения плоских периодических орбит задачи Хилла. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается плоская круговая задача Хилла и ее предельный интегрируемый вариант, называемый промежуточной задачей Энона, для которой исходная задача Хилла является сингулярным возмущением. Среди решений промежуточной задачи Энона выделяется счетное число порождающих решений–дуг, однозначно определяемых условием последовательного прохождения через начало координат — особую точку уравнений движения задачи Хилла. Показано, что каждое из этих решений–дуг реализуется на некотором инвариантном многообразии, определяемом дополнительным первым интегралом уравнений движения промежуточной задачи Энона. Из порождающих решений–дуг, как из «букв» некоторого «алфавита», составляются по определенным правилам «слова» — порождающие решения семейств периодических орбит задачи Хилла. Последовательность «букв» в «слове» определяет порядок перехода орбиты с одного инвариантного многообразия на другое, а множество всех правильно заданных «слов» определяет символическую динамику системы.

A. B. Batkhin. Symbolic dynamics and generating planar periodic orbits of the Hill's problem. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

We consider the planar circular Hill's problem and its limiting case called the intermediate Hénon problem. The Hill's problem is a singular perturbation of the former. There is a countable set of generating arc-solutions each of them is defined by the condition of passing through the singular point of the Hill's problem. It is shown that each arc-solution has its own invariant manifold defined by the additional first integral of motion of the intermediate Hénon problem. The generating solutions of families of periodic orbits of the Hill's problem are built from the arc-solutions like words are composed from letters. The set of all the right composed "words" defines the symbolic dynamics of the system.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mail: batkhin@gmail.com

сайт: www.keldysh.ru

1. Задача Хилла и ее предельные случаи

1.1. Формулировка задачи Хилла и ее свойства. Задача Хилла обычно применяется для изучения относительного движения двух объектов, совершающих движение в центральном поле массивного тела. Если это движение круговое и осуществляется в плоскости орбиты, то задача называется *плоской круговой задачей Хилла*. Традиционно, уравнения движения задачи Хилла получают из уравнений известной ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ) применением *преобразования Хилла* с последующим предельным переходом $\mu \rightarrow 0$, где μ — массовый параметр в ОЗТТ (см., например, [20, § 10.4]). Следует отметить, что более эффективно вывод уравнений осуществляется с использованием гамильтонова формализма, когда преобразованиям подвергаются не исходные уравнения, а функция Гамильтона. Так, в [1] гамильтониан плоской задачи Хилла, а в [16] гамильтониан пространственной задачи Хилла получался из гамильтониана ОЗТТ как результат укорочения, соответствующего гипергранице носителя функции Гамильтона ОЗТТ в пространстве показателей степеней фазовых переменных и массового параметра (см. [18, гл. IV, § 4]). В [14, §3.2] предложен вывод гамильтониана пространственной задачи Хилла из гамильтониана ОЗТТ с помощью канонических преобразований.

Функция Гамильтона плоской круговой задачи Хилла имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2 - \frac{1}{r}, \quad (1)$$

где $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ — вектор координат, а $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ — вектор канонически сопряженных импульсов.

Канонические уравнения задачи Хилла, определяемые функцией Гамильтона (1), имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 + x_2, & \dot{y}_1 = y_2 + 2x_1 - \frac{x_1}{r^3}, \\ \dot{x}_2 = y_2 - x_1, & \dot{y}_2 = -y_1 - x_2 - \frac{x_2}{r^3}. \end{cases} \quad (2)$$

Уравнения движения (2) обладают единственным первым интегралом, который традиционно записывается в форме *интеграла Якоби* в переменных $(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$:

$$\mathcal{J} = 3x_1^2 + \frac{2}{r} - \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 = C, \quad (3)$$

где C — константа Якоби. Значение гамильтониана H связано со значением константы Якоби соотношением

$$H = -C/2. \quad (4)$$

Уравнения задачи Хилла (2) инвариантны относительно конечной группы 4 порядка линейных преобразований фазовых переменных (\mathbf{x}, \mathbf{y}) и времени t . Образующие этой группы обозначим Σ_1 и Σ_2 , а их действие на расширенном фазовом пространстве определяется соотношениями

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, x_1, -x_2, -y_1, y_2), \\ \Sigma_2 &: (t, x_1, x_2, y_1, y_2) \rightarrow (-t, -x_1, x_2, y_1, -y_2).\end{aligned}$$

Отметим, что инвариантность уравнений движения относительно преобразования Σ_1 является сущностным свойством уравнений ОЗТТ и, как следствие, уравнений движения всех задач, получаемых из уравнений ОЗТТ. Преобразование Σ_2 специфично лишь для кругового варианта задачи Хилла, а инвариантность уравнений движения относительно преобразования Σ_2 разрушается при учете поправок высоких порядков (эллиптичность движения тел, нецентральность поля тяготения и пр.). Композицию преобразований Σ_1 и Σ_2 обозначим $\Sigma_{12} \stackrel{\text{def}}{=} \Sigma_1 \circ \Sigma_2 = \Sigma_2 \circ \Sigma_1$, т. е. Σ_{12} определяет центральную симметрию в фазовом пространстве без обращения времени.

Понимание структуры семейств периодических решений задачи Хилла невозможно без учета симметрий уравнений движения относительно преобразований Σ_1 , Σ_2 и Σ_{12} . Все периодические решения задачи Хилла могут быть разделены на 3 группы в зависимости от того, как они меняются под действием указанных преобразований:

несимметричные решения, которые под действием любого из указанных преобразований переходят в другое решение;

однократно симметричные решения, которые под действием одного из указанных преобразований переходят сами в себя, при этом другие преобразования позволяют получить еще одно новое решение;

двукратно симметричные решения, инвариантные относительно любого из указанных преобразований.

Периодические решения уравнений движения, определяемые автономным гамильтонианом, не являются изолированными, а образуют семейства, число параметров которых равны числу независимых первых интегралов. В случае задачи Хилла все семейства периодических решений однопараметрические, а в качестве параметра может быть выбрана любая из характеристик периодического решения (период, одна из координат начального условия), но более адекватным параметром семейства периодических решений будет значение первого интеграла — интеграла Якоби (3). Все семейства периодических решений могут быть условно разделены на несколько групп в зависимости от того, как они ведут себя при продолжении по параметру C .

Замкнутые семейства существуют только на некотором интервале значений параметра C .

Полуоткрытые семейства, которые могут быть продолжены по C только в одну сторону либо до стягивания в точку, либо до окончания на другом семействе.

Открытые семейства, существующие при всех значениях C .

Поскольку все такие семейства продолжаются по параметру C до своих естественных концов, то все они являются *натуральными* (см. [19, п. 1.3]).

1.2. Области допустимого движения и кривая нулевой скорости.

Первый интеграл (3) задачи Хилла накладывает ограничения на возможные области движения в конфигурационном пространстве (пространстве положений). При фиксированном значении константы C движение может осуществляться в области

$$3x_1^2 + 2/r - C \geq 0, \quad (5)$$

называемой *областью Хилла* [12, гл. 2, § 5]. Очевидно, что равенство нулю в (5) достигается только при условии равенства нулю скорости тела, поэтому кривую, задаваемую неявным уравнением $3x_1^2 + 2/r - C = 0$ называют *кривой нулевой скорости*. Эта кривая имеет две особые точки, соответствующие коллинеарным точкам либрации $L_{1,2}$ с координатами $(\pm 3^{-1/3}, 0)$ при $C_{\text{lib}} = 3^{4/3}$. График кривой симметричен относительно координатных осей и при $C > 0$ имеет две вертикальные асимптоты $x = \pm \sqrt{C/3}$. При $C \geq C_{\text{lib}}$ график пересекает ось OX и делит конфигурационное пространство на три несвязных области: центральную, которая представляет собой область финитного движения спутника, и две области инфинитного движения. При $C \rightarrow +\infty$ центральная область финитного движения ограничена окружностью с радиусом $R_{\text{fin}} \approx 2/C$, т.е. при $C \gg C_{\text{lib}}$ периодические орбиты могут существовать лишь в малой окрестности начала координат. При $C \leq 0$ движение возможно во всем конфигурационном пространстве. Кривая Хилла и области Хилла показаны на рис. 1.

1.3. Предельные варианты задачи Хилла. Поскольку уравнения движения задачи Хилла неинтегрируемы (см. доказательство в [9]), то для исследования семейств периодических решений удобно использовать порождающие решения предельных задач, которые устроены существенно проще. Для получения гамильтонианов предельных задач используем степенную геометрию, а именно гамильтоновы укорочения гамильтоновых систем [18, гл. 4]. Такая работа была выполнена для случая пространственной задачи Хилла [16, раздел 2], поэтому здесь приведем лишь итоговые результаты для плоской

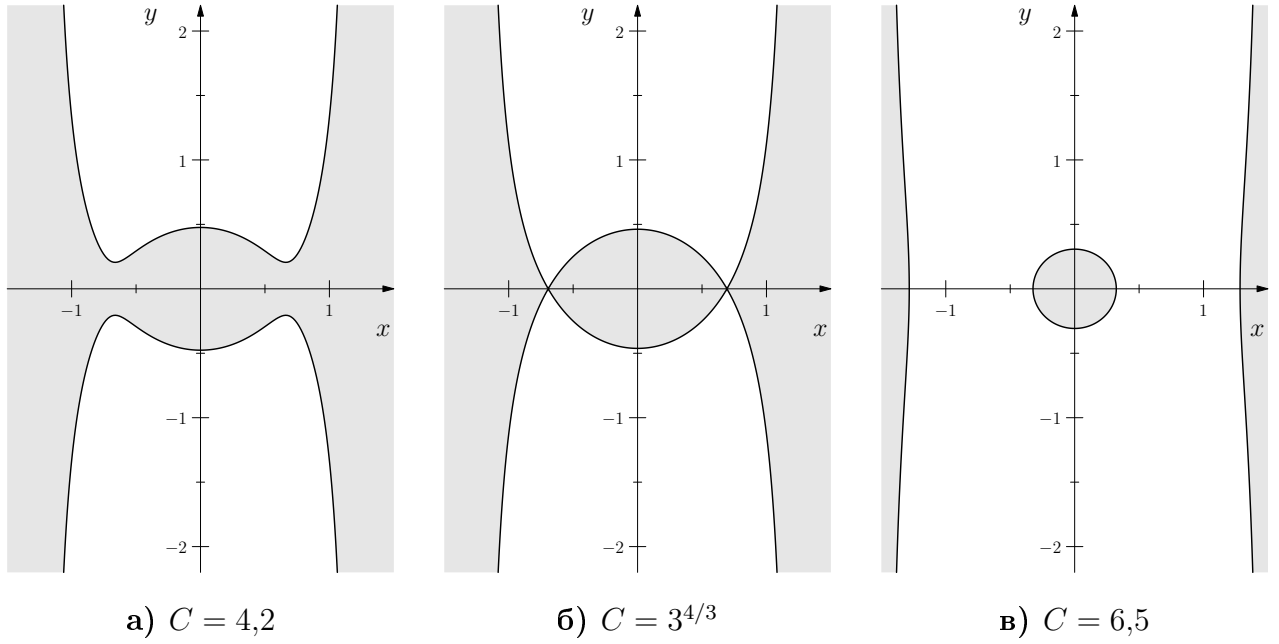


Рис. 1: Кривая нулевой скорости и области Хилла (показаны затенением) для различных значений C .

задачи Хилла. Отметим, что техника получения гамильтоновых укорочений функции Гамильтона подробно описана в указанной выше книге [18, гл. 4], а ее применение к ОЗТТ в плоском и пространственном вариантах дано в работах [16, 18, 19].

Для задачи Хилла можно указать два нетривиальных предельных случая. Первый дает описание движения в малой окрестности начала координат, т. е. при $x_1, x_2 \rightarrow 0$, второй описывает движение вдали от начала координат, т. е. при $x_1, x_2 \rightarrow \infty$.

1.3.1. Первая предельная задача получается в результате канонического преобразования с заменой независимой переменной

$$\mathbf{x} = \varepsilon_1 \mathcal{X}, \quad \mathbf{y} = \varepsilon_1^{-1/2} \mathcal{Y}, \quad t = \varepsilon_1^{3/2} s, \quad \varepsilon_1 \ll 1. \quad (6)$$

Тогда гамильтониан задачи Хилла примет вид

$$H_1 = H_{\text{Kepler}} + \varepsilon_1^{3/2} (\mathcal{X}_2 \mathcal{Y}_1 - \mathcal{X}_1 \mathcal{Y}_2) + \varepsilon_1^3 (-\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2/2), \quad (7)$$

где $H_{\text{Kepler}} = (\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2)/2 - 1/\rho$ и $\rho = \sqrt{\mathcal{X}_1^2 + \mathcal{X}_2^2}$. Невозмущенная часть H_{Kepler} гамильтониана H_1 есть функция Гамильтона интегрируемой задачи Кеплера в неподвижной (сидерической) системе координат. Интеграл Якоби (3) перепишется в виде

$$\varepsilon_1^{-1} (2/\rho - (\mathcal{X}_1')^2 - (\mathcal{X}_2')^2) + 3\varepsilon_1^2 \mathcal{X}_1^2 = C,$$

здесь $'$ обозначает дифференцирование по новой независимой переменной s . Полагая $\varepsilon_1 = |C|^{-1}$, получаем, что первая предельная задача соответствует случаю $C \rightarrow \infty$. Следовательно, задача Хилла представляется в виде регулярного по фазовым переменным возмущения интегрируемой задачи Кеплера, а порождающие решения следует искать среди периодических решений последней. Отметим, что задача Кеплера имеет периодические решения при условии, что интеграл энергии $h = H_{\text{Кеплер}}$ меньше 1.

Рассмотрим отдельно случаи $C \rightarrow -\infty$ и $C \rightarrow +\infty$.

При $C \rightarrow -\infty$ значение функции Гамильтона $H_{\text{Кеплер}}$ согласно (4) и (6) будет стремиться к величине $1/2$, т. е. все решения невозмущенной задачи будут гиперболическими, а значит непериодическими. Поскольку большая полуось a гиперболы связана с интегралом энергии h соотношением $a|h| = 1/2$, то в пределе $a = 1$.

Плоское движение по гиперболе определяется четырьмя параметрами a , e , ϖ и s_p , где e — эксцентриситет орбиты, ϖ — аргумент перицентра, s_p — момент прохождения перицентра (см., например, [21, часть II, гл. 2]). Уравнения движения записываются с помощью эксцентрической аномалии H следующим образом:

$$\begin{aligned}\xi &= a(e - \operatorname{ch} H), & \eta &= a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H, \\ s - s_p &= \varepsilon' a^{3/2}(e \operatorname{sh} H - H), & \varepsilon' &= \pm 1, \\ \mathcal{X}_1 &= \xi \cos \varpi - \eta \sin \varpi, & \mathcal{X}_2 &= \xi \sin \varpi + \eta \cos \varpi.\end{aligned}$$

Тогда $\rho = a(e \operatorname{ch} H - 1)$, а компоненты $(\mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_2)$ вектора обобщенной скорости задаются формулами

$$\begin{aligned}\xi' &= -\frac{\varepsilon' a^{1/2} \operatorname{sh} H}{\rho}, & \eta' &= \frac{\varepsilon' \sqrt{a(e^2 - 1)} \operatorname{ch} H}{\rho}, \\ \mathcal{X}'_1 &= \xi' \cos \varpi - \eta' \sin \varpi, & \mathcal{X}'_2 &= \xi' \sin \varpi + \eta' \cos \varpi.\end{aligned}\tag{8}$$

При $C \rightarrow +\infty$ значение функции Гамильтона $H_{\text{Кеплер}}$ будет стремиться к величине $-1/2$, т. е. все решения невозмущенной задачи будут финитными (круговыми или эллиптическими) и, в силу свойств задачи Кеплера, периодическими. Это согласуется с описанием области Хилла в п. 1.2. Получаем, что первая предельная задача дает описание периодического движения в центральной области финитного движения при $C \rightarrow +\infty$, и порождающие решения следует искать среди ее периодических орбит. Это частично сделано в [13].

1.3.2. Промежуточная задача Энона [3] получается в результате канонического преобразования с валентностью ε_2^{-2}

$$\mathbf{x} = \varepsilon_2 \mathbf{X}, \quad \mathbf{y} = \varepsilon_2 \mathbf{Y}\tag{9}$$

и приводит к функции Гамильтона

$$H_2 = H_{\text{Henon}} + \varepsilon_2^{-3}/R, \quad (10)$$

$$H_{\text{Henon}} = \frac{1}{2}(Y_1^2 + Y_2^2) + X_2Y_1 - X_1Y_2 - X_1^2 + \frac{1}{2}X_2^2. \quad (11)$$

Интеграл Якоби (3) переписывается в виде

$$\varepsilon_2^2 \left(3X_1^2 - \dot{X}_1^2 - \dot{X}_2^2 \right) + \frac{2}{\varepsilon_2 R} = C.$$

Полагая $\varepsilon_2 = \sqrt{|C|}$ и, повторяя рассуждения предыдущего пункта, получаем, что промежуточная задача Энона с гамильтонианом (11) является предельным случаем задачи Хилла при $C \rightarrow \pm\infty$. Однако случай $C \rightarrow +\infty$ не подходит для исследования периодических решений в силу описанной выше области Хилла для $C \gg 1$ (см. рис. 1).

Замечание 1.1. Учитывая валентность преобразования (9) и соотношение (4), получаем, что $H_2 = -\text{sign } C/2$. Следовательно, при $C \rightarrow -\infty$ имеем $H_{\text{Henon}} = 1/2$, а значит все решения промежуточной задачи Энона следует искать при фиксированном значении гамильтониана задачи, или, что равносильно, при значении интеграла Якоби, равном -1 .

Преобразование (9) при $\varepsilon = \sqrt{|C|}$ было применено L. Perko в [10, 11], а сама промежуточная задача Энона с гамильтонианом (11) была использована им для доказательства существования семейства f периодических решений первого вида и счетного числа семейств периодических решений второго вида в задаче Хилла.

Таким образом, задачу Хилла можно рассматривать как возмущение промежуточной задачи Энона функцией с особенностью в начале координат. В этом случае порождающими решениями могут быть как регулярные решения промежуточной задачи, так и сингулярные, т. е. проходящие через особую точку возмущающей функции.

2. Порождающие решения промежуточной задачи Энона

2.1. Порождающие решения. Пусть задача Хилла представлена в виде возмущения некоторой интегрируемой гамильтоновой системы — либо как возмущение задачи Кеплера (7), либо как возмущение задачи Энона (10). Пусть при некотором значении малого параметра $\varepsilon > 0$ имеется периодическое решение Ω_ε , которое может быть непрерывно продолжено при $\varepsilon \rightarrow 0$ до решения Ω_0 предельной задачи. Тогда решение Ω_0 называют *порождающим периодическим решением*. В случае регулярного возмущения порождающие решения могут быть найдены с помощью приведения гамильтониана задачи к нормальной форме (см. [17, гл. II, VII]).

Для ОЗТТ выделяют три вида порождающих периодических решений [5, 2.10], определения которых удобно дать в терминах расстояния от решения до особой точки. Пусть ρ'_ε и ρ''_ε — наименьшее и наибольшее расстояния от особой точки до точек некоторой орбиты Ω_ε , соответственно, а ρ'_0 и ρ''_0 их пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Определение 2.1. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой первого вида, если $\rho'_0 > 0$.

Определение 2.2. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой второго вида, если $\rho'_0 = 0$ и $\rho''_0 > 0$.

Определение 2.3. Предельная порождающая орбита Ω_0 называется орбитой третьего вида, если $\rho''_0 = 0$.

В этой работе будут рассмотрены порождающие решения промежуточной задачи Энона.

2.2. Общее решение промежуточной задачи Энона. Промежуточная задача Энона интегрируема и была подробно исследована в [3, 5, 10, 11]. Отметим, что в [13] было построено каноническое преобразование $S_2(\mathbf{X}, \mathbf{P})$, приводящее гамильтониан (11) промежуточной задачи к виду

$$H_{\text{Henon}} = \frac{1}{2} (Q_1^2 + P_1^2) - \frac{3}{2} P_2^2, \quad (12)$$

где новые переменные \mathbf{Q}, \mathbf{P} связаны со старыми \mathbf{X}, \mathbf{Y} соотношением

$$\begin{aligned} X_1 &= Q_1 + 2P_2, & Y_1 &= -P_1 - Q_2, \\ X_2 &= Q_2 + 2P_1, & Y_2 &= -P_2 - Q_1. \end{aligned}$$

В гамильтониане (12) координата Q_2 циклическая, поэтому канонически сопряженный импульс P_2 является первым интегралом системы уравнений (2) и в старых переменных имеет вид

$$F \stackrel{\text{def}}{=} X_1 + Y_2 = \text{const}. \quad (13)$$

Поскольку новые переменные \mathbf{Q}, \mathbf{P} «перемешивают» физические координаты и импульсы, то для интерпретации получаемых решений удобнее работать в исходных переменных.

Общее решение системы канонических уравнений, определяемой гамильтонианом (11), имеет вид

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1 \cos t + K_2 \sin t + 2K_3, \\ X_2 &= -2K_1 \sin t + 2K_2 \cos t - 3K_3 t + K_4, \\ Y_1 &= K_1 \sin t - K_2 \cos t + 3K_3 t - K_4, \\ Y_2 &= -K_1 \cos t - K_2 \sin t - K_3, \end{aligned} \quad (14)$$

а интеграл Якоби (3) и первый интеграл (13) будут равны соответственно

$$\mathcal{J} = 3K_3^2 - K_1^2 - K_2^2 = -1 \text{ и } \mathcal{F} = K_3. \quad (15)$$

2.3. Порождающие решения первого вида. Порождающие решения первого вида — это периодические решения, не проходящие через особую точку — начало координат. Условие периодичности будет выполнено при $K_3 = 0$, тогда орбита представляет собой эллипс с центром в точке $(0, K_4)$, с главными осями, параллельными осям координат и находящимися в отношении $1 : 2$. Период движения T по орбите равен 2π . Начало отсчета времени можно выбрать так, что $K_2 = 0$, тогда первые интегралы (15) будут равны $\mathcal{J} = -K_1^2 = -1$, $\mathcal{F} = 0$, и, следовательно $K_1 = 1$. Значит, семейство периодических решений первого вида запишется в виде

$$X_1 = \cos t, \quad X_2 = -2 \sin t + K_4, \quad Y_1 = \sin t - K_4, \quad Y_2 = -\cos t. \quad (16)$$

В [5, 5.3.1] показано, что из соображений симметрии порождающее решение должно быть Σ_1 -симметрично, что возможно лишь при $K_4 = 0$. В [13] порождающее решение найдено с использованием нормализации гамильтониана (1). Там же приведена асимптотика периода T при $C \rightarrow -\infty$. Укажем асимптотики индекса устойчивости и начальных условий периодических орбит порождаемого семейства для $C \rightarrow -\infty$. Формулы, для вычисления этих асимптотик приведены в [17, гл. 7] и определяются с помощью усреднения возмущающей функции $1/R$ вдоль порождающего решения (16).

$$x_1^0 \approx \sqrt{|C|} + O(|C|^{-5/2}), \quad y_2^0 \approx -\sqrt{|C|} - \frac{1}{2|C|} + O(|C|^{-5/2})$$

$$T = 2\pi - \frac{2K(\sqrt{3}/2)}{|C|^{3/2}} + O(|C|^{-3}),$$

$$s = 1 - \frac{2\pi^2}{|C|^{3/2}} \left(K(\sqrt{3}/2) - E(\sqrt{3}/2) \right) + O(|C|^{-3}).$$

где K и E — полные эллиптические интегралы I и II рода.

2.4. Порождающие решения второго вида. Согласно определению 2.2, решения второго вида должны хотя бы один раз проходить через особую точку — начало координат. Этому условию удовлетворяет либо периодическое решение, проходящее через особую точку, либо непериодическое, но проходящее через начало координат по крайней мере дважды за конечный промежуток времени. М. Энон предложил искать такие решения, которые для некоторого значения τ удовлетворяют условию

$$X_1(-\tau) = X_1(\tau) = X_2(-\tau) = X_2(\tau) = 0. \quad (17)$$

Условие (17) для общего решения (14) сводится к однородной системе линейных относительно постоянных интегрирования K_i , $i = 1, \dots, 4$ уравнений

$$\begin{aligned} K_1 \cos \tau + 2K_3 &= 0, & K_2 \sin \tau &= 0, \\ 2K_2 \cos \tau + K_4 &= 0, & 2K_1 \sin \tau + 3K_3 \tau &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Эта система совместна при условии равенства нулю ее определителя $D = (3\tau \cos \tau - 4 \sin \tau) \sin \tau$. Таким образом, возможны два случая существования нетривиальных решений второго вида.

Случай $3\tau \cos \tau - 4 \sin \tau = 0$. Тогда τ есть решение трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} \tau = 3\tau/4, \quad (19)$$

которое имеет счетное число корней $\tau_j \in (j\pi, (2j+1)\pi/2)$, $j \in \mathbb{Z}$. Значения первых десяти корней приведены в таб. 3 на стр. 29.

Из системы (18) получаем, что постоянные интегрирования общего решения (14) равны $K_2 = 0$, $K_3 = -(K_1/2) \cos \tau_j$, $K_4 = 0$, а первые интегралы есть

$$\mathcal{J} = -K_1^2 \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \tau_j\right) = -1, \quad \mathcal{F} = -\frac{1}{2} K_1 \cos \tau_j. \quad (20)$$

Следовательно, каждый корень τ_j уравнения (19) задает значение постоянной интегрирования K_1^j , которое определим так:

$$K_1^j = \operatorname{sign} j (-1)^{j+1} \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \tau_j\right)^{-1/2} = \frac{2 \operatorname{sign} j (-1)^{j+1}}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \tau_j}}. \quad (21)$$

Уравнение фазовой траектории есть

$$\begin{aligned} X_1 &= K_1^j (\cos t - \cos \tau_j), & X_2 &= 2K_1^j \left(-\sin t + \frac{t}{\tau_j} \sin \tau_j\right), \\ Y_1 &= K_1^j \left(\sin t - \frac{3}{2} t \cos \tau_j\right), & Y_2 &= K_1^j \left(\frac{1}{2} \cos \tau_j - \cos t\right) \end{aligned} \quad -\tau_j \leq t \leq \tau_j. \quad (22)$$

Орбита представляет собой дугу эпициклоиды, проходящую через начало координат в моменты времени $-\tau_j$ и $+\tau_j$. Такие решения будем называть решениями *первого типа*.

Случай $\sin \tau = 0$. Тогда $\tau = j\pi$, $j \in \mathbb{Z}$, а из системы (18) получаем, что постоянные интегрирования равны $K_1 = 0$, $K_3 = 0$, $K_4 = \pm 2K_2$. Первые интегралы движения равны

$$\mathcal{J} = -K_2^2 = -1, \quad \mathcal{F} = 0, \quad (23)$$

тогда $K_2 = \pm 1$. Фазовые траектории представлены уравнениями

$$X_1 = \pm \sin t, \quad X_2 = \pm 2(\cos t + 1), \quad Y_1 = \pm(2 - \cos t), \quad Y_2 = \mp \sin t. \quad (24)$$

Эти решения входят в описанное выше семейство (16) и соответствуют значениям $K_4 = \pm 2$. Их будем называть решениями *второго типа*.

Поскольку задача Хилла является предельным случаем ОЗТТ, то описанные выше решения второго вида могут быть получены из решений-дуг, начинающихся и заканчивающихся на меньшем из двух массивных тел круговой ограниченной задачи. Это сделано в [5, гл. 5]. В работе [6] М. Энон предложил обозначать решения (24) символами i и e , соответственно, а решения (22), $\pm j$, где j — номер корня уравнения (19). В данной работе будем придерживаться этих обозначений. Орбиты решений $\pm j$, $j = 1, 2, 3$, i и e показаны на рис. 2.

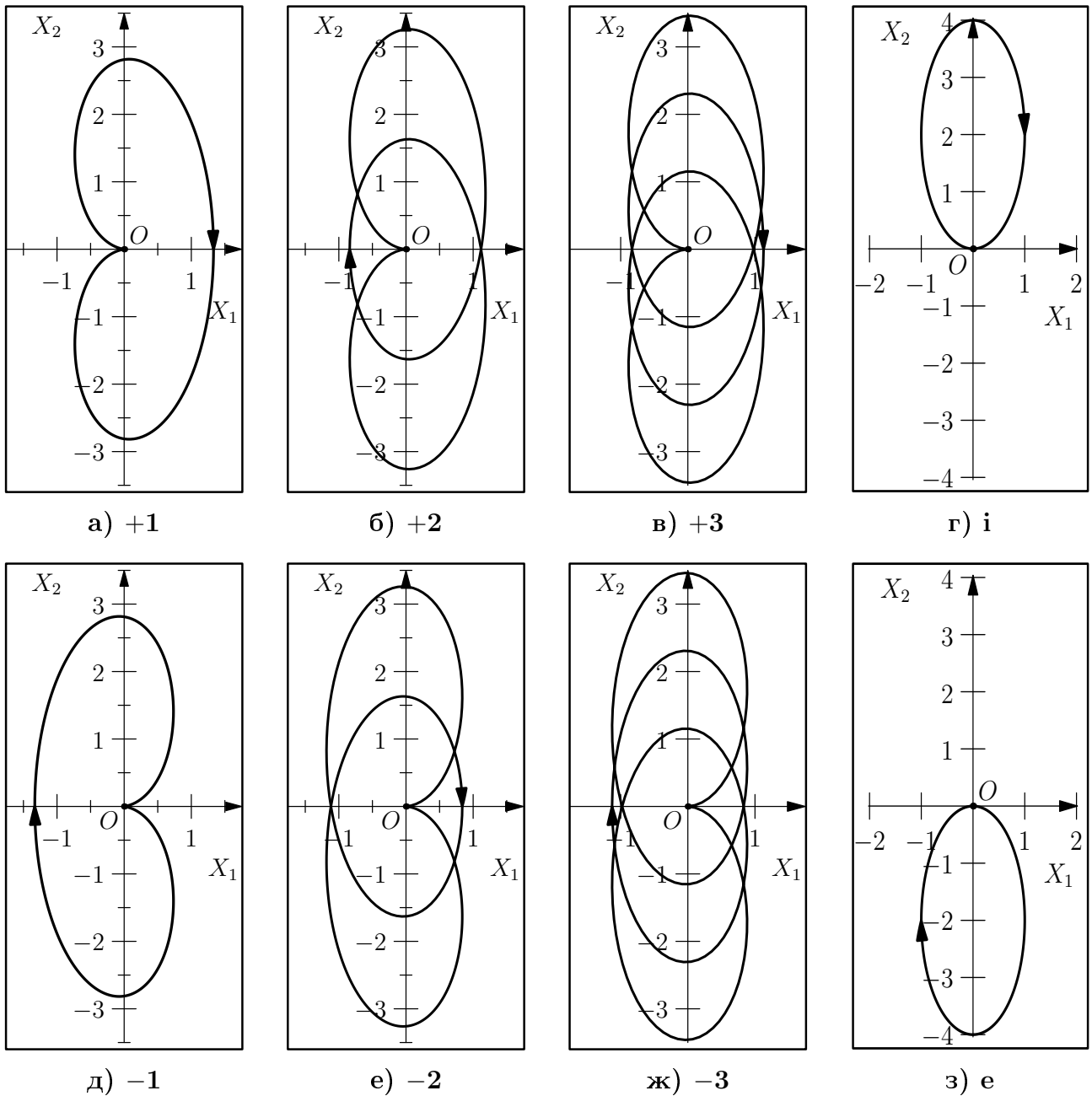


Рис. 2: Дуги предельных решений второго рода

Непосредственная проверка показывает, что решения i и e являются Σ_2 -симметричными и переходят друг в друга при преобразовании Σ_1 . Решения $\pm j$ являются Σ_1 -симметричными, а под действием преобразования Σ_2 решение $+j$ переходит в решение $-j$ и наоборот. В таблице 1, заимствованной из [6], дана сводная информация о преобразовании решений второго вида. В последней строке показано, как меняется независимая переменная t при преобразовании.

Таблица 1: Преобразование решений второго вида

Решение	Σ_1	Σ_2	Σ_{12}
$+j$	$+j$	$-j$	$-j$
$-j$	$-j$	$+j$	$+j$
i	e	i	e
e	i	e	i
t	$-t$	$-t$	t

Поскольку описанные выше решения второго вида симметричные, то их орбиты дважды ортогонально пересекают ось симметрии через половину периода. Это обстоятельство играет важную роль при построении порождающих решений. Определив начальные условия, лежащие на оси симметрии порождающего решения, можно с использованием преобразования (9) получить начальное приближение периодического решения для значения $C \ll -1$, затем уточнить его с помощью стандартной процедуры и, продолжив по C как по параметру, изучить все семейство периодических решений, а также его бифуркации.

Поскольку все описанные выше решения второго вида проходят через особую точку возмущающей функции, то можно построить бесконечное число решений, составленных из дуг $\pm j$, i , e , как из букв алфавита. Здесь уместен вопрос: *каждое ли решение, составленное из решений-дуг второго вида является порождающим для семейства периодических решений задачи Хилла?* Как отмечено в [5, р. 74] «...на сегодняшний день не доказано математически, что в общем случае решение второго вида будет порождающим...» Однако, если угол между траекторией входящей в особую точку и траекторией выходящей из особой точки (*угол отклонения*) не нулевой, то возможно применение процедуры, называемой “patched conic approximation” [2]. Она заключается в том, что точка столкновения заменяется вблизи особой точки участком гиперболической траектории, которая «сшивается» с входящим и исходящим участками траектории (подробнее см. п. 3.2). Начальные условия входящей и исходящей дуг подбираются таким образом, чтобы обеспечить вход и выход под правильным углом. Если же угол отклонения нулевой, то по-

строить гиперболическую траекторию не удастся, и согласно утверждениям 4.3.2 и 5.3.1 из [5], порождающее решение второго вида не может содержать двух одинаковых дуг i или e , идущих подряд. Итак, имеет место

Утверждение 2.1. Последовательность, составленная из дуг $\pm j, i, e$, в которой нет двух идущих подряд дуг i и нет двух идущих подряд дуг e будет порождающим решением семейства периодических орбит задачи Хилла.

Определение 2.4. Таковую последовательность будем называть *порождающей*.

Наверное, справедливо и обратное утверждение, а именно

Утверждение 2.2. Любое семейство периодических решений задачи Хилла, которое при продолжении по $C \rightarrow -\infty$ стремится к решению второго вида, в пределе описывается порождающей последовательностью дуг $\pm j, i, e$, т. е. удовлетворяющей утверждению 2.1.

Как следует из вышеизложенного, строгого математического доказательства этих утверждений нет. В работе [11] доказано, что решения, состоящие из единственной дуги $\pm j, j \in \mathbb{N}$, являются порождающими для Σ_1 -симметричных орбит, а решения $\{i, e\}$ и $\{-1, +1\}$ — порождающие для двойко симметричных орбит. Все известные на сегодня семейства периодических решений задачи Хилла (кроме семейства квазиспутниковых орбит f), продолжаемые по C до $-\infty$ стремятся к предельному решению в соответствии с утверждением 2.2.

3. Символическая динамика порождающих последовательностей

Изложение раздела 2, в основном, основано на результатах М. Энона [3–7] и Л. Перко [10, 11]. Этот и следующий разделы содержат новые результаты, полученные автором. Эти результаты докладывались на научных конференциях и семинарах, но в таком виде публикуются впервые.

3.1. Свойства порождающих последовательностей. Из утверждения 2.1 и определения 2.4 легко получить следующие следствия.

Следствие 3.1. *Порождающая последовательность определяется с точностью до циклической перестановки дуг.*

Например, последовательности $\{+1, e, -1\}$, $\{e, -1, +1\}$ и $\{-1, +1, e\}$ определяют одно и то же порождающее решение.

Следствие 3.2. *Порождающая последовательность не может состоять только из одной дуги второго типа.*

Отметим, что порождающая последовательность представляет только один период порожденного решения, но последовательность, повторенная n раз, определяет порожденное решение за n периодов. Следовательно, если бы последовательность, состоящая из одиночной дуги i или e была бы порождающим решением, то таким же свойством обладала бы и последовательность $\{i, i\}$ или $\{e, e\}$. Но в силу утверждения 2.1 и определения 2.4 такие последовательности не являются порождающими. Итак, дуги i и e могут входить в состав других порождающих последовательностей, но сами по отдельности не являются порождающими последовательностями, в отличие от дуг первого типа.

Следствие 3.3. *Используя лишь дуги второго типа i и e можно построить единственную порождающую последовательность $\{i, e\}$.*

В силу утверждения 2.1 в порождающей последовательности дуги второго типа должны чередоваться, следовательно, все последовательности, составленные из дуг i или e , являются кратным повторением порождающей последовательности $\{i, e\}$. Эта последовательность порождает двукратно симметричное семейство \mathbf{g} прямых однооборотных спутниковых орбит, подробно исследованных в [3]. Именно орбиты этого семейства исследовал Дж. Хилл в своем труде [8], посвященном одноименной задаче.

Поскольку уравнения движения задачи Хилла инвариантны относительно преобразований симметрии, то рассмотрим, как ведут себя порождающие последовательности при действии на них этих преобразований.

Следствие 3.4. *Порождающая последовательность под действием одного из преобразований Σ_1 или Σ_2 переходит в последовательность, в которой дуги исходной последовательности заменены согласно таблице 1 и записаны в обратном порядке. Преобразование Σ_{12} меняет дуги в последовательности согласно таблице, но не меняет их порядка.*

Рассмотрим, например, как изменится последовательность $\{+1, -2, e\}$ под действием преобразований Σ_1 , Σ_2 и Σ_{12} .

$$\begin{array}{ccc}
 \{+1, -2, e\} & \xleftrightarrow{\Sigma_1} & \{i, -2, +1\} \\
 \uparrow \Sigma_2 & \swarrow \Sigma_{12} & \uparrow \Sigma_2 \\
 \{e, +2, -1\} & \xleftrightarrow{\Sigma_1} & \{-1, +2, i\} \\
 & \nwarrow \Sigma_{12} & \\
 & & \downarrow \Sigma_2
 \end{array}$$

Если под действием одного из преобразований последовательность переходит сама в себя (с точностью до циклической перестановки), то она будет порождающей для семейства симметричных периодических решений, поскольку симметрия периодического решения гамильтоновой системы есть инвариант всего семейства, которому принадлежит симметричное решение.

Все порождающие последовательности можно отнести к одной из групп в зависимости от наличия (или отсутствия) симметрии.

- Несимметричные: $\{i, +1\}$, $\{-1, +1, +2\}$.
- Σ_1 -симметричные: $\{+1, +2\}$, $\{+1, i, e\}$.
- Σ_2 -симметричные: $\{+1, i, -1\}$.
- Двойко симметричные: $\{i, e\}$, $\{+1, -1\}$.
- Центально-симметричные: $\{+1, +2, -1, -2\}$.

Отметим, что на сегодняшний день неизвестно ни одного семейства центрально-симметричных периодических решений задачи Хилла.

Если порождающая последовательность однократно симметрична, то порожденное семейство состоит из орбит, ортогонально пересекающих соответствующую ось симметрии через половину периода. Такая орбита однозначно восстанавливается по своей половине, заключенной между двумя точками ортогонального пересечения оси симметрии. Если порождающая последовательность двукратно симметрична, то порожденное ей семейство состоит из орбит, которые последовательно ортогонально пересекают каждую из осей симметрии через четверть периода. Аналогично, двукратно симметричная орбита однозначно восстанавливается по своей четверти, заключенной между двумя последовательными точками ортогонального пересечения осей симметрии.

3.2. Согласование решений. Итак, при $C \rightarrow -\infty$ имеются два предельных случая задачи Хилла: задача Кеплера с гиперболическим движением и промежуточная задача Энона с решениями второго вида. Необходимо выполнить согласование этих решений таким образом, чтобы получить предельные порождающие решения. В начальном приближении такое согласование можно обеспечить потребовав, чтобы скорость гиперболического движения на бесконечности была равна скорости движения решения второго вида в нуле. Такой подход был использован в работе [3] для «сшивания» дуги j гиперболической траекторией, а также в работе [1] для «сшивания» симметричных дуг-решений в ОЗТТ.

Прежде, чем записать условия согласования решений, отметим, что с учетом канонических преобразований (6) и (9) вектор скорости в переменных задачи Хилла связан с векторами скорости в задаче Кеплера и в промежуточной задаче Энона следующими соотношениями

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_1 \mathcal{X}' \cdot \dot{s} = \varepsilon_1^{-1/2} \mathcal{X}' = |C|^{1/2} \mathcal{X}', \quad \dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_2 \dot{\mathbf{X}} = |C|^{1/2} \dot{\mathbf{X}}. \quad (25)$$

Следовательно, величины \mathcal{X}' и $\dot{\mathbf{X}}$ имеют одинаковый порядок по C .

Согласование решений первого типа. Скорость тела, движущегося по дуге $\pm j$, при переходе на гиперболическую траекторию (т. е. при $t = \tau_j$) есть

$$\dot{X}_1(\tau_j) = -K_1^j \sin \tau_j, \quad \dot{X}_2(\tau_j) = 2K_1^j \left(-\cos \tau_j + \frac{\sin \tau_j}{\tau_j} \right) = -\frac{1}{2}K_1^j \cos \tau_j,$$

а при уходе с гиперболической траектории на дугу $\pm j$ (т. е. при $t = -\tau_j$) есть

$$\dot{X}_1(-\tau_j) = K_1^j \sin \tau_j, \quad \dot{X}_2(-\tau_j) = -\frac{1}{2}K_1^j \cos \tau_j,$$

где коэффициент K_1^j определен формулой (21).

Процедура согласования решений для порождающей последовательности, состоящей из единственной дуги $\{\pm j\}$, была выполнена М. Эноном в [3]. Для дуги $\pm j$ «сшивающая» гипербола имеет перицентр, лежащий на оси OX , т. е. порождающее решение будет Σ_1 -симметричным. При этом параметры гиперболы следующие:

$$e = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \operatorname{ctg}^2 \tau_j} = \sqrt{1 + \frac{4}{9\tau_j^2}}, \quad \varepsilon' = 1, \quad \varpi = \begin{cases} 0, & \text{для } j > 0, \\ \pi, & \text{для } j < 0. \end{cases} \quad (26)$$

Расстояние до перицентра ρ_p и скорость в перицентре равны, соответственно

$$\rho_p = e - 1, \quad \mathcal{X}'_2(s_p) = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}. \quad (27)$$

Рассмотрим согласование входящей дуги j_1 и выходящей j_2 , $j_1 \neq j_2$. Согласно формулам (8) получаем, что

$$\mathcal{X}'_1(\mp\infty) = \pm \frac{\cos \varpi \mp \sqrt{e^2 - 1} \sin \varpi}{e}, \quad \mathcal{X}'_2(\mp\infty) = \pm \frac{\sin \varpi \mp \sqrt{e^2 - 1} \cos \varpi}{e}.$$

Условия согласования скоростей тела в конце входящей дуги j_1 и в начале «сшивающей» гиперболы, а также в начале выходящей дуги j_2 и в конце гиперболы приводят к системе уравнений относительно переменных e и ϖ , решая которую получим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varpi &= 2 \frac{K_1^{j_2} \sin \tau_{j_2} - K_1^{j_1} \sin \tau_{j_1}}{K_1^{j_2} \cos \tau_{j_2} + K_1^{j_1} \cos \tau_{j_1}}, \\ e &= \frac{2 \cos 2\varpi}{K_1^{j_2} \cos \tau_{j_2} \sin \varpi - 2K_1^{j_1} \sin \tau_{j_1} \cos \varpi}. \end{aligned} \quad (28)$$

Если $j_1 = j_2 = j$, то с учетом формулы (21) получим «сшивающую» гиперболу с параметрами, задаваемыми формулой (26). Если $j_1 = -j_2 = j$,

то получим, что $\operatorname{tg} \varpi = \pm\infty$, т. е. аргумент перицентра $\varpi = \pm\pi/2$, а значит перицентр орбиты лежит на оси OY . В этом случае, порождающая последовательность определяет двойку симметричное решение, а эксцентриситет согласующей гиперболы равен $e = \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \tau_j} = \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}$.

Поскольку корни τ_j уравнения (19) при $j \rightarrow \infty$ стремятся к величине $(2j + 1)\pi/2$ снизу, то из (28) следует, что $\operatorname{tg} \varpi \rightarrow 0$, если j_1 и j_2 одного знака (см. рис. 3а)), и $\operatorname{tg} \varpi \rightarrow \pm\infty$, если разных (см. рис. 3б)), при $|j_1|, |j_2| \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что эксцентриситет согласующей гиперболы будет стремиться к 1, если j_1 и j_2 одного знака, и будет стремиться к бесконечности, если знаки дуг различны, а их номера неограниченно возрастают.

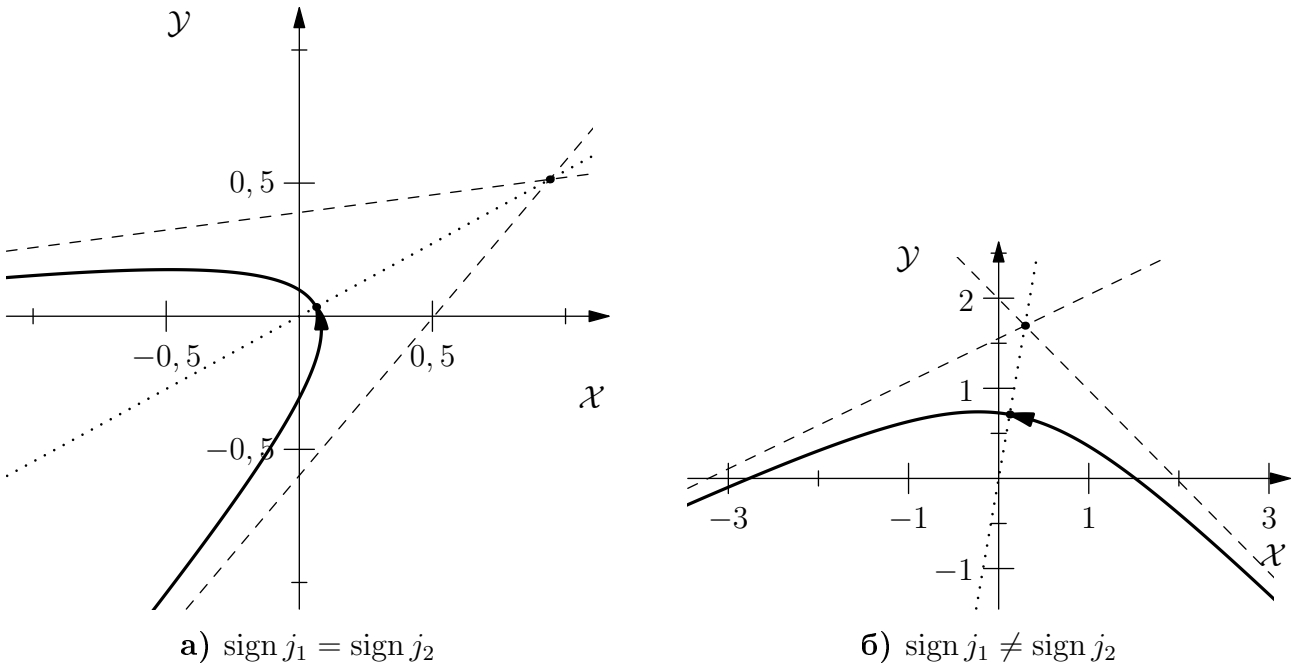


Рис. 3: Согласующие гиперболы для дуг первого типа j_1 и j_2 .

Согласование решений первого и второго типов проводится аналогично тому, как это сделано в предыдущем подпункте, только теперь используются уравнения (24), описывающие дуги i и e . Тогда параметры согласующей гиперболы следующие:

$$\operatorname{tg} \varpi = \frac{3}{2}\tau_j \mp \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \tau_j} = \frac{3}{2}\tau_j \mp \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}, \quad e = \frac{2 \cos \varpi}{1 \mp K_1^j \sin \tau_j}. \quad (29)$$

Знак в формулах (29) выбирается по правилу, которое сформулировано в работе М. Энона [6]. Если знаки ординат входящей и выходящей дуг различны, то выбирается знак «−», если совпадают, то выбирается знак «+». Эти знаки приведены в таблице 2, заимствованной из [6].

Таблица 2: Знаки ординат входящей и выходящей дуг

Дуга	Начало	Конец
$+j$	+	–
$-j$	–	+
i	+	+
e	–	–

Если знаки на концах дуг согласованы, то $\operatorname{tg} \varpi \sim 3\tau_j$, т. е. перицентр гиперболической орбиты стремится к $\pm\pi/2$. Анализ показывает, что эксцентриситет орбиты возрастает. Если знаки на концах дуг различны, то $\operatorname{tg} \varpi \sim -1/(3\tau_j)$, т. е. перицентр стремится к значениям 0 или π , а эксцентриситет в этом случае стремится к 1 сверху. Итак, согласующая гипербола не может ортогонально пересекать ни одну из осей симметрии.

Согласование решений второго типа уже нельзя выполнить с использованием только начального приближения дуг второго типа, поскольку в начале координат эти дуги имеют вертикальную скорость равную 0. В пределе переход от дуги i к дуге e или наоборот описывается вырожденной гиперболой с эксцентриситетом $e = 1$. Аргумент перицентра $\varpi = 0$ при переходе от дуги e к дуге i и равен π при переходе от i к e , т. е. гипербола может ортогонально пересекать ось OX и последовательность дуг $\{i, e\}$ может входить в симметричные порождающие последовательности.

«Сшивание» дуг второго типа с учетом возмущений первого порядка было выполнено в работе [11, § 3], где получены асимптотики начальных условий семейства \mathbf{g} . Если выбрать начальное условие орбиты семейства \mathbf{g} на оси OY , то через четверть периода орбита ортогонально пересечет ось OX в точке с абсциссой

$$x_1(T/4, C) = \pm \frac{B^2}{2C^4} + O\left(\frac{\ln|C|}{|C|^{11/2}}\right), \quad C \rightarrow -\infty,$$

где B — некоторая константа, определяемая значением несобственного интеграла:

$$B = \int_0^{\infty} \left[2 \frac{4 + 7 \cos t + 3 \cos^2 t}{(5 + 8 \cos t + 3 \cos^2 t)^{3/2}} - \frac{1}{\pi - t} \right] dt + 1 = \frac{7}{4} + \ln \frac{2}{\pi} \approx 1,29841729471.$$

С учетом преобразования (6) получаем, что расстояние до перицентра гиперболы, «сшивающей» дуги i и e , ведет себя как величина порядка $|C|^{-3}$, следовательно, эксцентриситет этой гиперболы задается асимптотикой $e = 1 + O(|C|^{-3})$.

3.3. Символическая динамика. Среди всех решений предельной промежуточной задачи Энона нас интересуют только те, которые при определенном выборе начального момента времени начинаются и заканчиваются в начале координат — особой точке возмущающей функции. В п. 2.4 показано, что такими решениями будут только дуги первого или второго типа, которым М. Энон присвоил символические обозначения $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, i и e — «буквы». Каждая из дуг лежит на пересечении двух инвариантных многообразий в фазовом пространстве, определяемых значениями первых интегралов $\mathcal{J} = -1$ и \mathcal{F} . Дуги $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$ первого типа однозначно определяются отличным от нуля значением интеграла \mathcal{F} согласно (20), а дуги i , e второго типа — значением $\mathcal{F} = 0$ согласно (23). На множестве символических последовательностей, составленных из «букв», рассматриваются только те, которые являются порождающими последовательностями периодических решений задачи Хилла. Условие периодичности требует, чтобы последовательность была инвариантна относительно сдвига на $k < \infty$ «букв», а значит, она должна состоять из повторяющегося конечного набора «букв» — «слова» длины k . Среди таких «слов» свойством порождающей последовательности обладают только те, которые удовлетворяют утверждению 2.1. Таким образом, мы имеем дело с символической динамикой на множестве последовательностей, составленных из «букв», на которые действует оператор сдвига, осуществляющий переход от одной дуги к другой.

Характер перехода с одного многообразия на другое зависит от параметров согласующей гиперболической траектории. С учетом формул (6), (9) и (25) значение интеграла \mathcal{F} в переменных первой предельной задачи есть

$$\mathcal{F} = X_1 + Y_2 = 2X_1 + \dot{X}_2 = 2|C|^{-3/2} \mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2'.$$

Следовательно, в пределе при $C \rightarrow -\infty$ получаем, что $\mathcal{F} = \mathcal{X}_2'$.

Если входящая и исходящая дуги имеют различные знаки ординат, то согласующая гипербола имеет аргумент перицентра близкий к величинам 0 или π , а эксцентриситет $e \approx 1$. Тогда, согласно (8), значение величины \mathcal{F} на гиперболе задается функцией $\pm \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H / (e \operatorname{ch} H - 1)$, которая в периферии принимает наибольшее по абсолютной величине значение $\mathcal{X}_2'(s_p) = \sqrt{(e + 1)/(e - 1)} \gg 1$ (см. (27)).

Если входящая и исходящая дуги имеют одинаковые знаки ординат, то согласующая гипербола имеет аргумент перицентра близкий к величинам $\pm\pi$, а эксцентриситет $e \gg 1$. Тогда, согласно (8), значение величины \mathcal{F} на гиперболе задается функцией $\pm \operatorname{sh} H / (e \operatorname{ch} H - 1)$, т. е. \mathcal{F} меняется вдоль согласующей гиперболы монотонно.

Идентификация порождающей последовательности периодического решения задачи Хилла, определяемого числом для значений интеграла Якоби $C \ll 0$, может быть проведена следующим образом. При численном интегрировании уравнений движения (2) вычисляется величина \mathcal{F} . В точках орбиты,

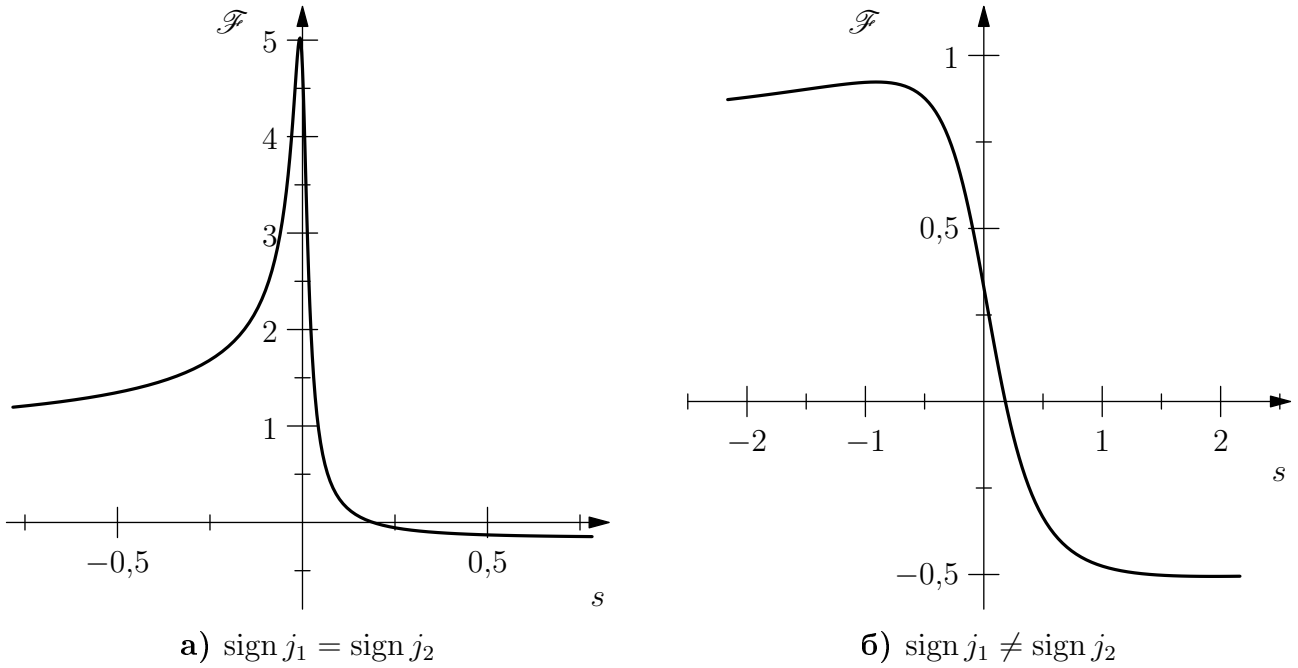


Рис. 4: Поведение интеграла \mathcal{F} вдоль согласующей гиперболы для дуг первого типа j_1 и j_2 .

удаленных от начала координат, отличные от нуля значения \mathcal{F} позволяют однозначно идентифицировать дуги первого типа. Если \mathcal{F} принимает значения близкие к нулю, тогда соответствующий участок траектории задается одной из дуг второго типа. Для ее идентификации достаточно отследить характер изменения величины \mathcal{F} при переходе от дуги $\pm j$ к дуге второго типа и воспользоваться таблицей 2 знаков ординат на концах дуг.

4. Свойства периодических решений, задаваемых порождающими последовательностями

Нас будут интересовать следующие свойства порожденных решений: тип симметрии, расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осью (осями) симметрии, глобальная кратность решения, а также асимптотика начальных условий и индекса устойчивости при $C \rightarrow -\infty$.

4.1. Симметрии порожденных решений. Тип симметрии порожденного решения, как уже было отмечено выше, определяется типом симметрии порождающей последовательности. Если порожденное решение несимметричное или однократно симметричное, то, применяя к нему преобразования симметрии, из него получаются либо три других решения для первого случая, либо еще одно решение для второго случая. Причем эти взаимно симметричные решения «устроены» совершенно одинаково (с точностью до симметрии), как и семейства периодических решений, которым они принадлежат.

Если порожденное решение Σ_1 - или Σ_2 -симметричное, то порождающую последовательность можно разбить на две взаимно симметричных подпоследовательности, которые соединяются друг с другом в точках ортогонального пересечения соответствующей оси симметрии. Например, Σ_1 -симметричная порождающая последовательность $\{+1, +2\}$ может быть представлена в виде двух взаимно симметричных относительно преобразования Σ_1 траекторий, состоящих из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги $+2$, заканчивающейся на оси OX . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{+1, +2\}$, с осью OX будут точки «внешнего» пересечения дуг $+1$ и $+2$.

Если порожденное решение двояко симметричное, то порождающую последовательность можно разбить на четыре подпоследовательности, которые начинаются на одной оси симметрии и заканчиваются на другой. Каждая из подпоследовательностей переводится в другую преобразованием Σ_1 или Σ_2 . Например, двояко симметричная порождающая последовательность $\{+1, i, -1, e\}$ может быть получена из траектории, состоящей из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги i , заканчивающейся на оси OY .

Поскольку порождающие дуги $\pm j, i, e$ сами являются симметричными, то самой короткой несимметричной порождающей последовательностью будет последовательность вида $\{\pm j, i(e)\}$. Отметим, что наличие в порождающей последовательности дуг только одного типа не гарантирует, что такая последовательность будет симметричной. Например, последовательность $\{-1, +1, +2\}$ перейдет в последовательность $\{+1, -1, +2\}$ при отображении Σ_1 или в последовательность $\{-1, +1, -2\}$ при отображении Σ_2 . Укажем условие, когда порождающая последовательность, состоящая из дуг первого типа, Σ_1 -симметрична.

Определение 4.1. Назовем порождающую последовательность *палиндромной*, если при записи ее в обратном порядке она не изменится. С учетом следствия 3.1 также будем называть *палиндромной* и такую порождающую последовательность, которую можно сделать с помощью циклической перестановки палиндромной.

Из следствия 3.4 легко получается следующее

Утверждение 4.1. Если порождающая палиндромная последовательность состоит только из дуг первого типа, то она Σ_1 -симметрична.

Пример 4.1. Последовательность $\{+1, +2, +1\}$ является Σ_1 -симметричной, но не обладает Σ_2 -симметрией, ибо согласно таб. 1

$$\Sigma_2(\{+1, +2, +1\}) = \{-1, -2, -1\}.$$

Более сильное условие Σ_1 -симметричности порождающей последовательности имеет вид

Утверждение 4.2. Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две палиндромные подпоследовательности, то такая последовательность Σ_1 -симметрична.

Доказательство. Пусть согласно условию утверждения порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где α_1 и α_2 — палиндромные подпоследовательности. Тогда при преобразовании Σ_1 получим, что $\Sigma_1(\omega) = \alpha_2\alpha_1$. Используя циклическую перестановку, поменяем местами подпоследовательности α_2 и α_1 , что всегда можно сделать в силу их палиндромности. Применяя следствие 3.1, получим доказательство утверждения. \square

Пример 4.2. Последовательность $\{+1, -1, +2, -1\}$ является Σ_1 -симметричной, поскольку состоит из двух палиндромных подпоследовательностей $\{+1\}$ и $\{-1, +2, -1\}$. Тогда

$$\Sigma_1(\{+1, -1, +2, -1\}) = \{-1, +2, -1, +1\} = \{+1, -1, +2, -1\}.$$

Из дуг первого типа можно составить такие порождающие последовательности, которые являются только Σ_2 -симметричными. Достаточно потребовать, чтобы они удовлетворяли условию:

Утверждение 4.3. Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_2 -симметричными, то такая последовательность также Σ_2 -симметрична.

Доказательство. Пусть согласно условию утверждения порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где $\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$. Тогда $\Sigma_2(\omega) = \Sigma_2(\alpha_1\alpha_2) = \Sigma_2(\alpha_2)\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_2$, т. е. она Σ_2 -симметрична. \square

Пример 4.3. Последовательность $\{+1, +2, -2, -1\}$ является Σ_2 -симметричной, поскольку $\Sigma_2(\{+1, +2\}) = \{-2, -1\}$, но не Σ_1 -симметрична, ибо

$$\Sigma_1(\{+1, +2, -2, -1\}) = \{-1, -2, +2, +1\} = \{+2, +1, -1, -2\}.$$

Два предыдущих утверждения позволяют сформулировать условие для двойко симметричных порождающих последовательностей:

Утверждение 4.4. Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две такие палиндромные подпоследовательности, что они будут взаимно Σ_2 -симметричны, то исходная порождающая последовательность является двойко симметричной.

Доказательство. Пусть согласно условию утверждения порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где $\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$, α_1 и α_2 — палиндромные подпоследовательности. Тогда в силу утверждения 4.2 последовательность ω является Σ_1 -симметричной, но в силу утверждения 4.3 последовательность ω одновременно Σ_2 -симметрична. \square

Пример 4.4. Последовательность $\{+1, +1, -1, -1\}$ является двояко симметричной, что следует из приведенной ниже коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\} \\
 \Sigma_2 \updownarrow & \begin{array}{c} \swarrow \Sigma_{12} \\ \searrow \Sigma_{12} \end{array} & \updownarrow \Sigma_2 \\
 \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\}
 \end{array}$$

Наконец, укажем условие, выделяющее класс таких порождающих последовательностей, составленных из дуг первого вида, что они обладают лишь одной центральной симметрией.

Утверждение 4.5. Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_{12} -симметричными, то такая последовательность также Σ_{12} -симметрична.

Пример 4.5. Последовательность $\{+1, +2, -1, -2\}$ является центрально симметричной, поскольку $\Sigma_{12}(\{+1, +2\}) = \{-1, -2\}$, но она не Σ_1 - и не Σ_2 -симметрична, ибо

$$\begin{aligned}
 \Sigma_1(\{+1, +2, -1, -2\}) &= \{+2, +1, -2, -1\}, \\
 \Sigma_2(\{+1, +2, -1, -2\}) &= \{+2, +1, -2, -1\}.
 \end{aligned}$$

Расположение точек ортогонального пересечения орбиты, порожденной палиндромной последовательностью, с осью (осями) симметрии можно выяснить с помощью следующего

Утверждение 4.6. 1. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 4.1, а число дуг, входящих в ее состав,

- а) четно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии OX есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними»;
- б) нечетно, то одна точка ортогонального пересечения с осью симметрии OX есть перицентр согласующей гиперболы, т. е. является «внутренней», а другая точка ортогонального пересечения с осью симметрии OX лежит на дуге $\pm j$, т. е. является «внешней».

2. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 4.2, а число дуг, входящих в состав ее палиндромных подпоследовательностей, нечетно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии OX лежат на дугах, каждая из которых центральная в своей подпоследовательности, т. е. точки пересечения являются «внешними».
3. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 4.3, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними».
4. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 4.4, то если число дуг последовательности
 - а) кратно 4, то пары точек ортогонального пересечения с осями симметрии OX и OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними»;
 - б) не кратно 4, то пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними», а другая пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OX лежит на дугах $\pm j$, т. е. являются «внешними».

Доказательство. Пусть порождающая палиндромная последовательность состоит из четного числа дуг первого типа, т. е. имеет вид $\omega_1 = \{j_1, \dots, j_k, j_k, \dots, j_1\}$, тогда в силу приведенных на стр. 21 рассуждений она однозначно определяется одной из своих подпоследовательностей, каждая из которых состоит из целого числа дуг, а начинается или заканчивается дугами j_1 и j_k . Следовательно, подпоследовательность $\{j_1, \dots, j_k\}$ соединяется с подпоследовательностью $\{j_k, \dots, j_1\}$ согласующими гиперболами, перицентры которых лежат на оси OX . Эти перицентры и есть точки ортогонального пересечения орбиты с осью симметрии.

Если порождающая палиндромная последовательность состоит из нечетного числа дуг первого типа, т. е. имеет вид $\omega_2 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1\}$, где j_k — центральная дуга палиндромной последовательности. Тогда последовательность ω_2 однозначно определяется подпоследовательностью, которая начинается целой дугой j_1 , а заканчивается половиной дуги j_k . Σ_1 -симметричная ей подпоследовательность будет начинаться половиной дуги j_k , а заканчиваться целой дугой j_1 . Следовательно, одна точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы, соединяющей две дуги j_1 , т. е. является «внутренней», а другая — точкой ортогонального пересечения дуги j_k с осью OX , координаты которой в первом приближении задаются формулой (22) при $t = 0$, т. е. является «внешней».

Если порождающая последовательность может быть представлена в виде двух палиндромных подпоследовательностей с нечетным числом дуг пер-

вого типа, т. е. $\omega_3 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1, j_2, \dots, j_l, \dots, j_2\}$, то ее Σ_1 -симметричная половина начинается половиной дуги j_k и заканчивается половиной дуги j_l . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной такой последовательностью, являются «внешними».

Если порождающая последовательность Σ_2 -симметрична, то она состоит из четного числа дуг и однозначно определяется подпоследовательностью, состоящей из целого числа дуг первого типа. Эта подпоследовательность соединяется с Σ_2 -симметричной ей подпоследовательностью, а значит согласующие гиперболы имеют перицентры лежащие на оси OY . Следовательно, точки ортогонального пересечения с осью симметрии являются «внутренними».

Наконец, пусть порождающая последовательность двояко симметрична, тогда она однозначно определяется своей четвертой частью. Если число дуг, входящих в порождающую последовательность кратно 4, то эта четвертая часть состоит из целого числа дуг, а подпоследовательности, получающиеся из этой четверти преобразованиями Σ_1 и Σ_2 соединяются согласующими гиперболой с перицентрами расположенными на осях симметрии OX и OY . Если же число дуг, входящих в порождающую последовательность не кратно 4 (но оно по прежнему четно!), то четвертая часть состоит из полужелого числа дуг, начинающихся на оси симметрии OX и заканчивающихся на оси симметрии OY . Следовательно, в первом случае обе пары ортогонального пересечения осей симметрии будут «внутренними», а во втором случае пара «внешних» точек пересечения лежит на оси OX , а пара «внутренних» — на оси OY . \square

4.2. Глобальная кратность порожденного решения.

Определение 4.2. Глобальной кратностью периодического решения будем называть число оборотов его орбиты вокруг начала координат.

Глобальная кратность порожденного решения определяется в два этапа: вначале вычисляется число точек пересечения орбиты решения с осью OX , а затем выясняется распределение этих точек на оси абсцисс.

М. Энон в [6] предложил считать число точек пересечения порождающей последовательности следующим образом:

- определяется число «внутренних» пересечений каждой согласующей гиперболы с осью абсцисс;
- для каждой дуги определяется число «внешних» пересечений с осью абсцисс вдали от начала координат;
- полученные числа пересечений суммируются.

Если знаки ординат входящей и выходящей дуг одинаковы, то как следует из предыдущего анализа, согласующая гипербола имеет аргумент перицентра близкий к $\pm\pi/2$ и, следовательно, пересекает ось абсцисс дважды. Если знаки ординат различны, то аргумент перицентра согласующей гиперболы близок к 0 или к π и, следовательно, гипербола пересекает ось абсцисс однократно. Каждая из дуг первого типа $\pm j$ имеет $2j - 1$ «внешних» пересечений, а дуги второго типа таких пересечений не имеют вовсе (см. рис. 2).

Например, порождающая последовательность $\{+1, -2, e\}$ состоит из трех дуг, соединенных тремя согласующими гиперболами. Пара дуг $+1$ и -2 имеет согласно таблице 2 одинаковые знаки ординат, а две другие пары $-2, e$ и $e, +1$ — разные. Следовательно, число «внутренних» пересечений равно $2+1+1 = 4$. Число «внешних» пересечений также равно $1+3+0 = 4$, значит общее число пересечений оси абсцисс порождающей последовательностью за один период равно 8. Если бы точки пересечения порождающей последовательности с осью абсцисс последовательно располагались по разные стороны от начала координат, тогда глобальная кратность порождающей последовательности была бы равна половине от общего числа пересечений. Однако, для приведенного выше примера это чередование точек ортогонального пересечения не соблюдается дважды, причем каждый раз из-за того, что точка пересечения согласующей гиперболы с осью абсцисс лежит по одну сторону от начала координат с последующей (предыдущей) точкой «внешнего» пересечения. Следовательно, число чередований точек пересечения будет равно $8 - 2 = 6$, а тогда глобальная кратность порождающей орбиты равна $6/2 = 3$.

Анализ показывает, что для определения глобальной кратности порожденного решения нужно руководствоваться следующим правилом: *найти абсолютную величину суммы числа «внешних» пересечений, взятых со знаком +, числа «внутренних» пересечений, взятых со знаком +, если знаки ординат дуг одинаковы, и числа «внутренних» пересечений, взятых со знаком —, если знаки ординат дуг различны, а затем разделить полученную сумму на 2.*

Данное правило позволяет сделать следующие выводы:

1. глобальная кратность Σ_1 -симметричного периодического решения, порожденного последовательностью $\{\pm j\}$, равна $j - 1$;
2. глобальная кратность двойко симметричного периодического решения, порожденного последовательностью $\{i, e\}$, равна 1;
3. глобальная кратность двойко симметричного периодического решения, порожденного последовательностью $\{+j, -j\}$ равна $2j + 1$.

Глобальная кратность орбиты не является инвариантом при продолжении вдоль семейства и может меняться, если при продолжении семейства по параметру встречаются орбиты соударения, однако является удобным для классификации периодических решений параметром.

4.3. Асимптотики начальных условий и индекса устойчивости.

Асимптотика координаты x точек ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX получена М. Эноном в [3]. Там же было проведено сравнение этой асимптотики с результатами численного интегрирования. В работе Л. Перко [11] получен следующий член асимптотики «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью симметрии, а также получены асимптотики начальных условий двояко симметричных орбит, порожденных последовательностями $\{+1, -1\}$ и $\{i, e\}$. К сожалению, в работе [11] отсутствуют даже попытки провести анализ качества полученных разложений (за исключением ссылки на личное сообщение от М. Энона о качестве асимптотики начальных условий для порождающей последовательности $\{i, e\}$), хотя на момент написания статьи (1981 год) результаты численного интегрирования рассматриваемых периодических решений задачи Хилла уже были получены и опубликованы (см. [3, 4]). Автор попытался выполнить такую работу, но не смог получить удовлетворительного согласия с результатами численного интегрирования.

Асимптотика «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX получается из (22) и с учетом преобразования (9) имеет вид

$$x_1(0) = \sqrt{|C|}K_1^j(1 - \cos \tau_j), \quad y_2(0) = \frac{1}{2}\sqrt{|C|}K_1^j(\cos \tau_j - 2). \quad (30)$$

«Внутренняя» точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы и его координаты определяются из формул (26), (27) и с учетом преобразования (6) имеют вид

$$x_1(T/2) = \pm \frac{1}{|C|}(e - 1), \quad y_2(T/2) = \pm \sqrt{|C|}\sqrt{\frac{e + 1}{e - 1}}, \quad (31)$$

где $e = \sqrt{1 + 4/(9\tau_j^2)}$.

Координаты перицентра орбиты, порожденной последовательностью $\{+j, -j\}$, задаются формулой (31), в которой x_1 и y_2 нужно заменить на x_2 и y_1 , соответственно, а эксцентриситет положить равным $e = \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}$.

Отметим, что величина $K_1^j(1 - \cos \tau_j)$ в (30) и величина $e - 1$ в (31) получены в [3], где они обозначены Q_1 и Q_2 , соответственно. Обозначим величину $K_1^j(\cos \tau_j - 2)/2$ в (30) через Q_4 и приведем значения величин $\tau_j, Q_i, i = 1, \dots, 4$ для первых десяти значений j в таблице 3.

Асимптотика индекса устойчивости S периодического решения, которое при $C \rightarrow -\infty$ стремится к порождающей дуге вида $\pm j$, получена в [3] и

описывается формулой

$$S = Q_3^j(-C)^{3/2}, \text{ где } Q_3^j = \frac{8 \sin^3 \tau_j (12\tau_j \sin \tau_j - 9 \cos \tau_j \sin^2 \tau_j + \cos \tau_j)}{(3 \sin^2 \tau_j + 1)^2}. \quad (32)$$

Численное исследование семейств периодических решений, стремящихся в пределе к последовательности дуг $\{\pm j_1, \pm j_2, \dots, \pm j_k\}$, показывает, что зависимость индекса устойчивости S от C хорошо аппроксимируется функцией вида $S(C) \sim A_k(-C)^{3k/2}$, где величина $A_k > 0$, но существенно зависит от чередования знаков дуг $\pm j_i$.

Для порождающих дуг i и e формулы, соответствующей (32), получено не было, но численное исследование семейств периодических решений, которые в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремятся к последовательности, включающей такие дуги, позволяет сделать вывод, что $S_{i,e} \sim A_{i,e}(-C)^{3/2}$, где $A_{i,e} < 0$. Таким образом, можно утверждать, что асимптотика индекса устойчивости периодического решения второго вида, состоящего в пределе из k дуг первого типа и l дуг второго типа будет иметь вид $S_{kl} \sim (-1)^l A(-C)^{3(k+l)/2}$. Следовательно, чем больше дуг входит в состав порождающей орбиты, тем быстрее по абсолютной величине будет возрастать индекс устойчивости S соответствующего семейства при стремлении $C \rightarrow -\infty$. При этом $S_{kl} \rightarrow +\infty$, если l четно, но $S_{kl} \rightarrow -\infty$ в противном случае.

Таблица 3: Значения величин τ , Q_i , $i = 1, \dots, 4$.

j	τ_j	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4
1	4.41937142208	1.33116224470	0.01131401101	24.30398023014	6.70405835849
2	7.68213064539	0.83823686389	0.00375844966	44.74488445135	11.56650532006
3	10.87356180294	1.12799347411	0.00187774354	64.27492963396	16.34096934498
4	14.04250089830	0.90852450294	0.00112629994	83.50219355682	21.08747544924
5	17.20140121226	1.07970211474	0.00075075259	102.59200625912	25.82147281317
6	20.35494153686	0.93613697979	0.00053620560	121.60785485918	30.54878395569
7	23.50528078428	1.05790698459	0.00040213260	140.57934147975	35.27209953612
8	26.65355462399	0.95092844010	0.00031275863	159.52212994316	39.99283612948
9	29.80041792721	1.04548094921	0.00025020066	178.44528585496	44.71181101676
10	32.94627500843	0.96015209697	0.00020470592	197.35442002826	49.42952895918

Заключение

Описанный выше подход позволил найти большое число новых семейств периодических решений задачи Хилла, дать их единую классификацию. Полное исследование семейств, полученных с помощью порождающих решений,

выполнено численно и будет дано в следующих работах. Многие из найденных семейств могут быть использованы при проектировании траекторий движения космических аппаратов для различных научных миссий. Отметим, что большая часть найденных семейств периодических решений являются «изолированными» в том смысле, что не имеют общих орбит с другими ранее найденными семействами, и, следовательно, не могли бы быть найдены в результате бифуркационного анализа уже известных семейств. Часть полученных результатов докладывалась на научных конференциях [15] и семинаре им. В. А. Егорова по механике космического полета (рук. В. В. Белецкий, М. П. Заплетин и В. В. Сазонов).

Автор выражает благодарность проф. А. Д. Брюно и доц. Н. В. Батхиной за ценные замечания, позволившие существенно улучшить представленную работу.

Список литературы

- [1] *Bruno A. D.* On periodic flybys of the Moon // *Celestial Mechanics*. — 1981. — Vol. 24. — Pp. 255–268.
- [2] *Dynamical Systems, the Three-Body Problem and Space Mission Design* / W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, S. D. Ross. — Marsden Books, 2006. — 331 pp.
- [3] *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability // *Astron. & Astrophys.* — 1969. — Vol. 1. — Pp. 223–238.
- [4] *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. Hill's case: non-periodic orbits // *Astron. & Astr.* — 1970. — no. 9. — Pp. 24–36.
- [5] *Hénon M.* *Generating Families in the Restricted Three-Body Problem*. — Springer, 1997. — 278 pp.
- [6] *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2003. — Vol. 85. — Pp. 223–246.
- [7] *Hénon M.* Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of threebodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2005. — Vol. 93. — Pp. 87–100.
- [8] *Hill G. W.* *Researches in the lunar theory* // *The Collected Mathematical Works of G. W. Hill*. — 1905. — Vol. 1. — Pp. 284–335.

- [9] *Morales-Ruiz J., Simó C., Simon S.* Algebraic proof of the non-integrability of Hill's Problem // *Ergodic Theory and Dynamical Systems*. — 2005. — Vol. 25, no. 4. — Pp. 1237–1256.
- [10] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem I: First species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* — 1981. — Vol. 104, no. 2. — Pp. 321–352.
- [11] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem II: Second species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* — 1981. — Vol. 104, no. 2. — Pp. 353–397.
- [12] *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики. — 3-е изд. — М.: Эдиториал УРСС, 2009. — 416 с.
- [13] *Батхин А. Б.* Порождающие плоские периодические орбиты задачи Хилла. Препринт № 47. — ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 24 с.
- [14] *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. — Волгоград: Волгоградское научное издательство, 2009. — 200 с.
- [15] *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Новые семейства периодических решений задачи Хилла // Труды XXXV академических чтений по космонавтике. — М.: Комиссия РАН, 2011. — С. 122–123.
- [16] *Батхина Н. В., Тимофеева И. А.* Гамильтоновы укорочения ограниченной задачи трех тел // *Вестник ВолГУ. Сер. 1. Математика. Физика*. — 2010. — № 13. — С. 5–14.
- [17] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990. — 296 с.
- [18] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Наука, 1998. — 288 с.
- [19] *Брюно А. Д., Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // *ПММ*. — 2007. — Т. 71, № 6. — С. 1034–1066.
- [20] *Себехей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. — М.: Наука, 1982. — 656 с.
- [21] Справочное руководство по небесной механике и астродинамике / Под ред. Г. Н. Дубошина. — 2-е, перераб. и дополн. изд. — «Наука», 1978. — 864 с.