



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Батхин А.Б., Брюно А.Д.,  
Варин В.П.**

**Множества устойчивости  
многопараметрических  
гамильтоновых систем**

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки***

Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 42. 32 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-42>

***Публикации по материалам препринта***

Батхин А.Б., Брюно А.Д. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых задач // Вестник ННГУ им. Н.И.Лобачевского. 2011. 4. часть 2. С. 57-58. ISSN 1993-1778.

Батхин А.Б., Брюно А.Д., Варин В.П. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем // Прикл. мат. мех. 2012. Т. 76. № 1. С. 80-133. ISSN 0032-8235.

Batkhin A.B., Bruno A.D., Varin V.P. Stability sets of multiparameter Hamiltonian systems // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2012. Vol. 76. no. 1. Pp. 56-92. ISSN 0021-8928.

DOI: [10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006](https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2012.03.006)

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021892812000329>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Б. Батхин, А. Д. Брюно, В. П. Варин

МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ  
МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ  
ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Москва, 2011 г.

УДК 521.1+531.314

А. Б. Батхин, А. Д. Брюно, В. П. Варин. Множества устойчивости многопараметрических гамильтоновых систем. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается вещественная линейная система Гамильтона с постоянными коэффициентами, зависящими от нескольких вещественных параметров. Формулируются условия, необходимые и достаточные для устойчивости неподвижного решения этой системы при фиксированных значениях параметров. Предлагается метод вычисления множества всех значений параметров, при которых это решение устойчиво (т. е. множества устойчивости). Применение метода демонстрируется на одной гироскопической задаче, описываемой системой Гамильтона с четырьмя степенями свободы и с тремя параметрами. В вычислениях используется компьютерная алгебра, в частности, базис Грёбнера.

A. B. Batkhin, A. D. Bruno, V. P. Varin. Sets of stability of multiparameter Hamiltonian systems. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

We consider a real linear Hamiltonian system with constant coefficients depending on real parameters. We state the necessary and sufficient conditions for stability of the stationary solution of this system at the certain parameter point. The method for computing the set of all the parameter points, at which the stationary solution is stable (i. e. the set of stability), is proposed. The application of the method is demonstrated on a gyroscope problem with four degrees of freedom and with three parameters. Computer algebra, in particular, the Gröbner basis is used in computations.

© ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011 г.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 11-01-00023.

E-mail: [batkhin@gmail.com](mailto:batkhin@gmail.com), [abruno@keldysh.ru](mailto:abruno@keldysh.ru), [varin@keldysh.ru](mailto:varin@keldysh.ru)

Сайт: [www.keldysh.ru](http://www.keldysh.ru),

Персональная страница: [en.wikipedia.org/wiki/Alexander\\_Dmitrievich\\_Bruno](http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno)

## 1. Введение

**1.1. Об устойчивости общей линейной системы.** Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} \stackrel{\text{def}}{=} dX/dt = A(P)X, \quad (1.1)$$

где  $X = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ ,  $A(P)$  — вещественная постоянная матрица, элементы которой зависят от вещественных параметров  $P = (p_1, \dots, p_n) \in \Pi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.1.** *Множество устойчивости*  $\Sigma$  системы (1.1) — это множество значений параметров  $P \in \Pi$ , для которых стационарное решение  $X = 0$  системы (1.1) устойчиво по Ляпунову.

Условия не асимптотической устойчивости системы (1.1) при фиксированных значениях параметров  $P = \text{const}$  редко формулируются. Только в [1] они сформулированы и доказаны в устаревших терминах и, по мнению авторов, недостаточно четко. Поэтому сформулируем их здесь.

**Теорема 1.1.** *Для устойчивости стационарного решения  $X = 0$  линейной системы*

$$\dot{X} = AX$$

*с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно выполнения двух условий:*

1. *Все собственные числа  $\lambda_k$  матрицы  $A$  имеют неположительные вещественные части:  $\text{Re } \lambda_k \leq 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ .*
2. *Все элементарные делители матрицы  $A$ , соответствующие собственным числам  $\lambda_k$  с нулевой вещественной частью  $\text{Re } \lambda_k = 0$ , являются простыми.*

Поэтому граница  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$  может быть найдена по расположению множеств значений параметров  $P$ , дающих критические собственные значения  $\lambda = 0$  и  $\lambda = \pm i\omega$  матрицы  $A(P)$ , т. е. непосредственно из характеристического многочлена

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^m f_k(P)\lambda^k, \quad f_m = 1 \quad (1.2)$$

матрицы  $A(P)$ . Сама эта матрица используется лишь для выделения тех участков границы  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$ , на которых выполнено второе условие теоремы 1.1.

А именно, в пространстве  $\Pi$  параметров  $P$  находятся гиперповерхности, соответствующие критическим собственным значениям  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ . Они разбивают пространство параметров на куски  $W_k$ . В каждом куске  $W_k$  берётся одна внутренняя точка  $P_k$ , и в ней вычисляются корни характеристического многочлена (1.2). Те куски, в которых у всех корней  $\lambda_j(P_k)$  вещественные части отрицательны, относятся к множеству устойчивости. На границах выбранных частей вычисляются собственные числа  $\lambda_k$  с нулевой вещественной частью и ранги матриц  $A - \lambda_k E$ , где  $E$  — единичная матрица.

Для общих (негамильтоновых) систем (1.1) эта процедура описана в [2, раздел 2] вместе с примерами. В § 2 здесь подробно описана аналогичная процедура для гамильтоновых систем (1.1).

В докорской диссертации [3] и в книге [4] для изучения особенностей границы  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$  системы (1.1) развита довольно громоздкая теория, которая включает изучение для матрицы  $A(P)$ :

- а) зависимости собственных чисел и собственных подпространств от параметров для случаев жордановых клеток разных размерностей;
- б) бифуркаций собственных значений;
- в) сильного и слабого взаимодействий собственных значений;
- г) версальных деформаций;

и вычисление кратных собственных значений итерационным методом Ньютона.

На самом деле в этом нет необходимости, а граница множества устойчивости находится, как уже было сказано, непосредственно из характеристического многочлена (1.2) матрицы  $A(P)$ . Сама эта матрица используется только для выделения тех частей границы  $\partial\Sigma$ , которые относятся к множеству устойчивости  $\Sigma$ .

*Цель работы:* изложить теорию и методы вычислений, необходимые и достаточные для вычисления множеств устойчивости конкретных гамильтоновых систем (1.1), а также продемонстрировать их применение на одной задаче, в которой элементы матрицы  $A$  суть рациональные функции параметров  $P$ .

**1.2. Обзор результатов работы.** В § 2 формулируется и доказывается теорема о двух необходимых и достаточных условиях для устойчивости решения  $X = 0$  гамильтоновой системы (1.1), аналогичная теореме 1.1. Первое из этих условий формулируется в терминах инноров вспомогательной матрицы, построенной по характеристическому многочлену матрицы  $A$ . Там же объясняется что такое инноры и как ими пользоваться. Второе из условий сводится к вычислению рангов некоторых матриц.

В § 3 рассматривается конкретная гироскопическая задача, которая описывается линейной гамильтоновой системой с четырьмя степенями свободы. В ней элементы матрицы  $A$  суть рациональные функции трех параметров (т. е.  $n = 3$ ). Для нее полностью вычисляется множество устойчивости  $\Sigma$ . При этом используется компьютерная алгебра, включая базис Грёбнера. Оказывается, что граница  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$  состоит из частей множества  $\mathcal{G}$ , на котором аннулируется дискриминант характеристического многочлена матрицы  $A$ . Вычисление множества  $\mathcal{G}$  начинается с вычисления его особых точек. Показывается, что множество  $\mathcal{G}$  содержит два одномерных семейства  $\mathcal{P}_{1,2}$  и линейчатую поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$ , которые просто параметризуются. Множество устойчивости  $\Sigma$  состоит из двух трехмерных областей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$  и одномерной открытой перемычки  $\mathcal{P}_1^0$ , которая является пересечением их границ. Из множества устойчивости выделяется подмножество физических значений параметров. Результаты по этой задаче, полученные в [3] и [4] с помощью численного расчета собственных чисел по сетке в пространстве параметров  $\Pi$ , оказываются маленьким кусочком области  $\Sigma_1$ .

Предварительные результаты настоящей работы опубликованы в препринтах [2, 5–7].

Формулы, теоремы, определения, подпункты и замечания имеют двойную нумерацию, где первый номер — это номер параграфа.

## 2. Вычисление множеств устойчивости гамильтоновых систем

**2.1. Устойчивость линейных гамильтоновых систем.** Пусть задана гамильтонова система линейных дифференциальных уравнений

$$dX/dt = JA(P)X, \quad X = (Y, Z)^T, \quad Y, Z \in \mathbb{R}^m \quad (2.1)$$

с постоянной симметричной матрицей  $A$ , где  $J$  — симплектическая единица, а  $P = (p_1, \dots, p_n)$  — вектор параметров. Здесь  $m$  — число степеней свободы, а  $n$  — число независимых параметров.  $AX = \partial H / \partial X$ , где функция Гамильтона  $H$  является квадратичной формой от  $X$ .

Характеристический многочлен

$$\check{f}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{2m} \check{f}_k(P)\lambda^k, \quad \check{f}_{2m} = 1 \quad (2.2)$$

матрицы  $JA(P)$  содержит только четные степени  $\lambda$ , т. е. является многочленом от  $\mu = \lambda^2$

$$f(\mu) = \sum_{k=0}^m f_k(P)\mu^k, \quad f_m = 1. \quad (2.3)$$

**Теорема 2.1.** *Положение равновесия  $X = 0$  линейной гамильтоновой системы (2.1) устойчиво по Ляпунову тогда и только тогда, когда*

- 1) все корни  $\mu_k$  характеристического многочлена (2.3) вещественны и неположительны и
- 2) все элементарные делители матрицы  $JA$  просты.

Эта теорема следует из теоремы 1.1. В [6, п. 5.2] дано доказательство для условия 2) с помощью нормальной формы линейной системы Гамильтона из [8].

Таким образом, критическими корнями многочлена (2.3), при переходе через которые устойчивость может измениться, являются нулевой  $\mu = 0$  и отрицательный двукратный  $\mu = -\omega^2 < 0$ , который соответствует двукратным  $\lambda = \pm i\omega$ . Поэтому граница  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$  состоит из частей гиперповерхностей

$$F_0 = \{P : f_0(P) = 0\} \quad (2.4)$$

и

$$F_2 = \{P : D(f) = 0\}. \quad (2.5)$$

Здесь и далее  $D(f)$  — дискриминант многочлена  $f(\mu)$ , он отличается от результата многочленов  $f(\mu)$  и  $f'(\mu)$  множителем  $(-1)^{m(m-1)/2}$  [9, гл. XI, § 53].

Укажем способ выделения множеств устойчивости  $\Sigma$  в пространстве  $\Pi$  параметров  $P$ .

Гиперповерхности  $F_0$  и  $F_2$  делят пространство  $\Pi$  параметров  $P$  на части  $W_k$ . В каждой из этих частей  $W_k$  устойчивость и неустойчивость одинаковы во всех внутренних точках  $P \in W_k$ . Поэтому, если внутри каждой из этих частей  $W_k$  взять по одной точке  $P_k$ , и в точках  $P_k$  вычислить корни многочлена (2.3), то можно выделить все части  $W_k$ , в которых имеется устойчивость. Теперь надо выделить те части поверхностей  $F_0$  и  $F_2$ , которые относятся к множеству  $\Sigma$ .

Гиперповерхности  $F_0$  и  $F_2$  делятся на участки  $U_k$  размерности  $n - 1$  семействами взаимных пересечений и самопересечений размерностей меньше  $n - 1$ . На каждом участке  $U_k$  вычисляются корни многочлена (2.3) и выделяются все те участки, которые дают устойчивость. На гиперповерхности  $F_0$  характеристический многочлен (2.3) эквивалентен многочлену меньшей степени, ибо  $f_0 = 0$ . Кроме того, на ней надо выделить участки с простыми и непростыми элементарными делителями матрицы  $JA$ , соответствующими нулевым корням  $\lambda_j = 0$ .

На гиперповерхности  $F_2$  имеется кратное значение

$$\mu_{mul} = \mu_{1,2} = \tilde{g}(P). \quad (2.6)$$

Способ вычисления функции  $\tilde{g}(P)$  указан в п. 2.4. На гиперповерхности  $F_2$  остальные корни  $\mu_3, \dots, \mu_l$  многочлена (2.3) являются корнями многочлена  $\tilde{h}(\mu)$ , который получается в результате деления с остатком многочлена  $f(\mu)$

из (2.3) на  $(\mu - \tilde{g}(P))^2$ , т. е.

$$f(\mu) = (\mu - \tilde{g}(P))^2 \tilde{h}(\mu) + \tilde{c}(\mu), \quad (2.7)$$

где функция  $\tilde{c}(\mu)$  линейна по  $\mu$ . Только те части гиперповерхности  $F_2$  могут относиться к множеству  $\Sigma$ , на которых выполнены три условия:

- 1)  $\mu_{mul} \leq 0$ , ибо критическое  $\mu = (\pm i\omega)^2 = -\omega^2$ ,
- 2) все корни многочлена  $\tilde{h}(\mu)$  также вещественны и неположительны,
- 3) матрица  $JA - \sqrt{\mu_{mul}}E$  имеет только простые элементарные делители, соответствующие числу  $\mu_{mul}$ .

При этом размерности исследуемых множеств и степени исследуемых многочленов от  $\mu$  меньше, чем у исходных. Надо продолжить такую процедуру до исчерпания размерностей и степеней.

Рассмотрим условия устойчивости для различных значений  $m$ .

Если  $m = 1$  и  $f_0 \neq 0$ , то условие  $f_0 > 0$  необходимо и достаточно для устойчивости. Если  $m = 1$  и  $f_0 = 0$ , то условие  $A = 0$  необходимо и достаточно для устойчивости.

**Теорема 2.2.** *Если  $m = 2$  или  $m = 3$ , то условия*

$$f_0(P) \geq 0, \quad f_k(P) \geq 0, \quad k = 1, \dots, m-1 \quad (2.8)$$

и

$$D(f) \geq 0 \quad (2.9)$$

вместе с условием простоты элементарных делителей для  $\lambda = 0$  матрицы  $JA$  при  $f_0 = 0$  и для  $\lambda = \sqrt{\mu_{mul}}$  матрицы  $JA - \lambda E$  при  $D(f) = 0$  необходимы и достаточны для устойчивости.

*Доказательство.* Условие (2.9) необходимо и достаточно для вещественности всех корней, а условие (2.8) необходимо и достаточно для отсутствия нулевого и вещественного положительного корня.  $\square$

*Пример к теореме 2.2.* Рассмотрим пример, приведённый в [4, п. 7.8.1]. Этот пример изучался в статье [10], где рассматривались малые колебания упругой шарнирно опертой трубы, проводящей жидкость, относительно стационарного состояния. Эти колебания описываются линейными каноническими уравнениями с гамильтоновой матрицей

$$JA = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 + \Lambda - \alpha\Lambda/4 & 0 & 0 & \sqrt{\alpha\Lambda}/2 \\ 0 & -16 + 4\Lambda - \alpha\Lambda/4 & -\sqrt{\alpha\Lambda}/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$



Характеристический многочлен (2.2) матрицы (2.10) в этом случае есть

$$\lambda^4 + \lambda^2(17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda) + 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda).$$

Здесь два параметра  $p_1 = \Lambda \geq 0$  и  $p_2 = \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = (16/(3\pi))^2 \approx 2,882$ . В записи (2.3) характеристический многочлен есть

$$f(\mu) = \mu^2 + (17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)\mu + 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda), \quad (2.11)$$

т. е.  $f_0 = 4(1 - \Lambda)(4 - \Lambda)$  и  $f_1 = 17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda$ . Кривая (2.4) состоит из двух прямых  $\Lambda = 1$  и  $\Lambda = 4$ ,  $f_0 > 0$  при  $\Lambda < 1$  и  $\Lambda > 4$ . Коэффициент  $f_1 \geq 0$  при  $\alpha \geq 5 - 17/\Lambda$ . Дискриминант многочлена  $f(\mu)$  есть

$$D(f) = (17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)^2 - 16(1 - \Lambda)(4 - \Lambda). \quad (2.12)$$

Кривая  $D = 0$ , т. е.  $\mathcal{F}_2$  из (2.5), состоит из двух ветвей

$$\alpha = \varphi_{\pm}(\Lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{5\Lambda - 17 \pm 4\sqrt{(1 - \Lambda)(4 - \Lambda)}}{\Lambda}. \quad (2.13)$$

При  $\Lambda$ ,  $\alpha \geq 0$  они вещественны только для  $\Lambda \geq 4$ . При  $\Lambda = 4$  эти ветви встречаются в точке  $\alpha = 3/4$ , касаясь вертикали  $\Lambda = 4$ . При  $\Lambda$ ,  $\alpha \geq 0$  неравенство  $f_1 \geq 0$  выполнено только на верхней ветви  $\alpha = \varphi_+(\Lambda)$ . Следовательно, граница области устойчивости состоит из прямой  $\Lambda = 1$ , полупрямой  $\Lambda = 4$ ,  $\alpha \geq 3/4$  и верхней полуветви  $\alpha = \varphi_+(\Lambda)$ ,  $\Lambda \geq 4$  кривой (2.13). Простая проверка показывает, что в полуполосе  $\Lambda \geq 0$ ,  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1 = 2,882$  множество устойчивости  $\Sigma$  состоит из двух кусков:  $\Sigma_1$ , т. е. прямоугольника  $0 \leq \Lambda < 1$ ,  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ , и  $\Sigma_2$ , т. е. криволинейного треугольника  $4 < \Lambda < \Lambda_1 = 4,781$ ,  $\alpha \geq \varphi_+(\Lambda)$ . Значение  $\Lambda_1 = 4,781$  найдено согласно (2.12) как единственный положительный корень квадратного по  $\Lambda$  уравнения  $D = 0$  при  $\alpha = \alpha_1 = 2,882$ . Точка  $\Lambda = 4$ ,  $\alpha = 3/4$  является особой на границе множества устойчивости. В ней касаются кривые  $\mathcal{F}_0$  и  $\mathcal{F}_2$ , и обе они в ней регулярны. При  $f_0 = 0$ , т. е. при  $\Lambda = 1$  и  $\Lambda = 4$  с  $\alpha \neq 3/4$ , матрица (2.10) имеет единственный собственный вектор с нулевым собственным значением. Поэтому нулевому собственному числу соответствует непростой элементарный делитель матрицы (2.10). Следовательно, прямые  $\Lambda = 1$  и  $\Lambda = 4$  не входят в множество устойчивости  $\Sigma$ .

Согласно (2.11) в кратных корнях уравнения  $f(\mu) = 0$ , т. е. при  $D = 0$ , имеем  $\mu = \mu_{mul} = -(17 - 5\Lambda + \alpha\Lambda)/2$ . На верхней ветви кривой  $F_2$  имеем  $\alpha\Lambda = 5\Lambda - 17 + 4\sqrt{(1 - \Lambda)(4 - \Lambda)}$ . Следовательно, на ней  $\mu_{mul} = -2\sqrt{(1 - \Lambda)(4 - \Lambda)} < 0$ . На этой ветви при  $\Lambda > 4$  ранг матрицы  $JA - \sqrt{\mu_{mul}}E$  равен единице, т. е. соответствующий элементарный делитель непрост. В точке  $\Lambda = 4$ ,  $\alpha = 3/4$  многочлен (2.11) имеет двукратный нулевой корень и матрица (2.10) ненулевая, т. е. там также имеется непростой элементарный делитель. Следовательно, вся верхняя ветвь кривой  $F_2$  не лежит в множестве устойчивости  $\Sigma$ , т. е. это множество состоит только из внутренних точек двух кусков  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ , указанных выше. ■

**2.2. Критерий устойчивости при  $m > 3$ .** Первое условие теоремы 2.1 об устойчивости линейной гамильтоновой системы в случае ненулевых корней может быть сформулировано в виде условий на коэффициенты характеристического многочлена  $f(\mu)$  матрицы  $JA$  с использованием техники инноров [11].

**Определение 2.1.** Пусть  $\Delta_m$  — произвольная квадратная матрица размером  $m \times m$ , тогда матрица  $\Delta_{m-2}$ , образованная из исходной вычеркиванием первых и последних строк и столбцов, называется *иннором* матрицы  $\Delta_m$ . Продолжая указанную процедуру к полученному иннору  $\Delta_{m-2}$ , получим следующую матрицу  $\Delta_{m-4}$  и т. д. Любой элемент получившейся последовательности  $\Delta_{m-2k}$  называется *иннором* матрицы  $\Delta_m$ .

Будем обозначать через  $I_m$  определитель иннора  $\Delta_m$ .

**Определение 2.2.** Матрица  $\Delta_m$  называется *иннорно-положительной*, если ее определитель и определители всех ее инноров положительны.

Критерий принадлежности корней многочлена  $F(z)$  отрицательной вещественной полуоси может быть сформулирован следующим образом.

**Теорема 2.3** ([12]). *Все  $m$  корней многочлена  $F(z)$  с вещественными положительными коэффициентами различны и лежат на отрицательной вещественной полуоси тогда и только тогда, когда все корни многочлена*

$$\widehat{F}(z) = F(iz) + i \frac{dF(iz)}{d(iz)} \quad (2.14)$$

*принадлежат открытой левой полуплоскости.*

Для вспомогательного многочлена  $\widehat{F}(z)$  теперь может быть применена теорема Гурвица (см. [13, гл. XVI, § 6, теорема 5]), которую мы сформулируем в иннорной форме, поскольку многочлен  $\widehat{F}(z)$  имеет комплексные коэффициенты.

Пусть  $\widehat{F}(z)$  — многочлен степени  $m$  с комплексными коэффициентами.

**Теорема 2.4.** *Для того, чтобы все корни многочлена  $\widehat{F}(z)$  принадлежали открытой левой полуплоскости, необходимо и достаточно, чтобы матрица  $\Delta_{2m}$  многочлена*

$$\widetilde{F}(w) = \widehat{F}(iw) = (b_m + ic_m)w^m + (b_{m-1} + ic_{m-1})w^{m-1} + \dots + b_0 + ic_0 \quad (2.15)$$

была иннорно-положительна. Матрица  $\Delta_{2m}$  строится по схеме

$$\Delta_{2m} = \begin{pmatrix} c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & c_{m-3} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_m & c_{m-1} & c_{m-2} & \dots & c_0 \\ 0 & \dots & 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 \\ 0 & \dots & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & b_{m-3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & b_0 & \dots & 0 \\ b_m & b_{m-1} & b_{m-2} & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Доказательство следует из замечания 1 § 2.1 книги [11].

Из (2.14) и (2.15) следует, что  $x = -w$ , и  $\tilde{F}(w) = F(-w) + iF'(-w)$ . Поэтому, если  $F(x) = a_mx^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$ , то

$$\begin{aligned} b_k &= (-1)^k a_k, & k &= m, \dots, 0, \\ c_m &= 0, \quad c_l = (-1)^l (l+1) a_{l+1}, & l &= m-1, \dots, 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и элементы  $b_j, c_j$  матрицы (2.16) легко записываются через коэффициенты  $a_j$  исходного многочлена  $F(x)$ . При этом предполагается, что все  $a_j \geq 0$ .

### 2.3. Иннорная техника.

**Квадратный многочлен.** Пусть  $F(x) = x^2 + a_1x + a_0$ , тогда согласно (2.17) и (2.16) матрица  $\Delta_4$  вспомогательного многочлена  $\tilde{F}(w)$  имеет вид

$$\Delta_4 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & a_1 \\ 0 & 1 & -a_1 & a_0 \\ 1 & -a_1 & a_0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку  $I_2 = 2$ , то условие вещественности и неположительности корней многочлена  $F(x)$  сводится к неравенствам

$$a_1 \geq 0, \quad a_0 \geq 0, \quad I_4 \equiv a_1^2 - 4a_0 \geq 0.$$

Здесь  $I_4$  — это дискриминант многочлена  $F(x)$ .

**Кубический многочлен.** Пусть

$$F(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2.18)$$

тогда согласно (2.17) и (2.16) матрица  $\Delta_6$  вспомогательного многочлена  $\tilde{F}(w)$  имеет вид

$$\Delta_6 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & -1 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 \\ -1 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Матрица  $\Delta_6$  имеет два нетривиальных иннора, определители которых равны

$$I_6 = -27a_0^2 + 18a_0a_2a_1 + a_2^2a_1^2 - 4a_2^3a_0 - 4a_1^3, \\ I_4 = -6a_1 + 2a_2^2.$$

Определитель  $I_6$  совпадает с дискриминантом многочлена (2.18), т. е. условие  $I_6(a_0, a_1, a_2) = 0$  выделяет в пространстве параметров — коэффициентов уравнения — множество корней кратности 2 и выше. Докажем, что из системы неравенств  $a_i \geq 0$ ,  $I_6 \geq 0$  следует выполнение неравенства  $I_4 \geq 0$ . Заметим, что определитель  $I_4$  пропорционален дискриминанту многочлена  $F'(x) = 3x^2 + 2a_2x + a_1$ . Пусть многочлен (2.18) с неотрицательными коэффициентами имеет вещественные и неположительные корни, но тогда корни многочлена  $F'(x)$  также вещественны и отрицательны, поскольку корни производной от функции являются точками экстремума самой функции и располагаются между корнями последней. Следовательно, из неравенства  $I_6 \geq 0$  следует неравенство  $I_4 \geq 0$  при условии неотрицательности коэффициентов.

Итак, для вещественности и неположительности корней многочлена (2.18) необходимо и достаточно выполнения условий

$$a_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \quad D(F) \geq 0,$$

как было указано в теореме 2.2. Система уравнений

$$I_4(a_0, a_1, a_2) = 0, \quad I_6(a_0, a_1, a_2) = 0$$

определяет в пространстве параметров однопараметрическое семейство, на котором уравнение (2.18) имеет корень кратности 3:

$$a_0 = a_2^3/27, \quad a_1 = a_2^2/3, \quad x_{1,2,3} = -a_2/3.$$

**Многочлен четвертой степени.** Пусть

$$F(x) = x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad (2.19)$$

тогда согласно (2.17) и (2.16) матрица  $\Delta_8$  вспомогательного многочлена  $\tilde{F}(w)$  имеет вид

$$\Delta_8 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3a_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 3a_3 & -2a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 3a_3 & -2a_2 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 3a_3 & -2a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \\ 0 & 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 \\ 0 & 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 \\ 1 & -a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Определитель  $I_8$  матрицы  $\Delta_8$  совпадает с дискриминантом многочлена (2.19), а определители двух других инновов суть

$$I_6 = -6a_1a_3^3 + 2a_2^2a_3^2 - 12a_0a_3^2 + 28a_1a_2a_3 - 8a_2^3 + 32a_0a_2 - 36a_1^2, \quad (2.21)$$

$$I_4 = -8a_2 + 3a_3^2. \quad (2.22)$$

Отметим, что  $I_4$  кратен дискриминанту многочлена  $F''(x) = 12x^2 + 6a_3x + 2a_2$ . Система уравнений

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_4(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0 \quad (2.23)$$

выделяет в пространстве параметров однопараметрическое семейство  $\mathcal{J}_1$ , на котором уравнение (2.19) имеет корень кратности 4:

$$a_0 = a_3^4/256, \quad a_1 = a_3^3/16, \quad a_2 = 3a_3^2/8, \quad x_{1,2,3,4} = -a_3/4.$$

Решения системы уравнений

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) = I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) = 0 \quad (2.24)$$

определяют два двухпараметрических семейства  $\mathcal{J}_2$  и  $\mathcal{J}_3$  в пространстве параметров, на которых уравнение (2.19) имеет корни с кратностью больше 2. На семействе  $\mathcal{J}_2$

$$a_0 = a_3^3/64 - a_2a_3^2/8 + a_2^2/4, \quad a_1 = a_3(4a_2 - a_3^2)/8$$

имеется пара двукратных корней

$$x_{1,2} = -(a_3 + \sqrt{I_4})/4, \quad x_{3,4} = -(a_3 - \sqrt{I_4})/4.$$

Нетрудно убедиться, что условием  $I_4 \geq 0$  обеспечивается вещественность и неположительность этих корней.

На семействе  $\mathcal{J}_3$

$$a_0 = -a_2^2/12 + a_3 a_1/4, \quad a_1 = a_3(4a_2 - a_3^2)/8 + \sqrt{3I_4^3}/72$$

имеется корень тройной кратности

$$x_{1,2,3} = -a_3/4 + \sqrt{3I_4^3}/12, \quad x_4 = -a_3/4 - \sqrt{3I_4^3}/4.$$

Семейства  $\mathcal{J}_2$  и  $\mathcal{J}_3$  пересекаются по семейству  $\mathcal{J}_1$ .

Итак, можно сформулировать следующую теорему.

**Теорема 2.5.** *Многочлен (2.19) имеет вещественные неположительные корни тогда и только тогда, когда все его коэффициенты неотрицательны и удовлетворяют неравенствам*

$$I_8(a_0, a_1, a_2, a_3) \geq 0, \quad I_6(a_0, a_1, a_2, a_3) \geq 0, \quad I_4(a_0, a_1, a_2, a_3) \geq 0.$$

*При этом многочлен (2.19) имеет корень кратности 4 при выполнении условия (2.23), пару двукратных корней или корень кратности 3 при выполнении условия (2.24) и корень кратности 2 при выполнении условия  $I_8 = 0$ .*

**Многочлены степени  $m > 4$ .** Описанные выше результаты для многочленов малых степеней могут быть обобщены на случай многочлена произвольной степени  $m$ . Сформулируем некоторые утверждения, доказательства которых вполне элементарны.

Пусть

$$F_m(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + a_{m-2}x^{m-2} + \dots + a_0 \quad (2.25)$$

многочлен с вещественными коэффициентами, тогда определитель  $I_{2m}$  его иннора  $\Delta_{2m}$ , составленного по схеме (2.17) и (2.16), совпадает с его дискриминантом, определитель  $I_2 = m$ , а определитель  $I_4$  пропорционален дискриминанту его  $(m-2)$ -й производной.

Условие

$$I_{2m} = I_{2m-2} = \dots = I_4 = 0$$

выделяет в пространстве параметров — коэффициентов многочлена (2.25) — однопараметрическое семейство, на котором многочлен  $m$ -й степени имеет корень  $x = -a_{m-1}/m$  кратности  $m$ .

Условие  $I_{2m} = 0$  выделяет в пространстве параметров множество, на котором многочлен (2.25) имеет двукратный корень. Каждое следующее условие  $I_{2(m-k)} = 0$ ,  $k = 1, \dots, m-2$  вместе с предыдущими выделяет множества, на которых многочлен (2.25) имеет корни большей кратности.

В [14] вычислены определители инноров многочлена (2.25) для  $m = 3, 4, 5$ . Но там рассматривается только задача о вещественности всех корней, без их неположительности.

## 2.4. Вычисление кратного корня характеристического многочлена

(2.3). Для исключения  $\mu$  из уравнений  $f(\mu) = 0$  и  $f'(\mu) = 0$  составляется однородная система  $2m - 1$  линейных уравнений относительно  $\mu^{2m-2}, \dots, \mu, 1$  с  $(2m - 1) \times (2m - 1)$  матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & f_{m-1} & f_{m-2} & \dots & f_1 & f_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & f_{m-1} & \dots & f_2 & f_1 & f_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_0 \\ m & (m-1)f_{m-1} & (m-2)f_{m-2} & \dots & f_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m & (m-1)f_{m-1} & \dots & 2f_2 & f_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & f_1 \end{pmatrix}. \quad (2.26)$$

В ней  $m - 1$  первых строк составлены из коэффициентов многочлена (2.3), а последние  $m$  строк — из коэффициентов его производной  $f'(\mu)$ . Если в каждой строке матрицы (2.26) добавить слева элемент 0, сверху добавить строку длины  $2m$ :

$$1 \ f_{m-1} \ f_{m-2} \ \dots \ f_1 \ f_0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0,$$

затем,  $k$ -ю строку сверху передвинуть на  $k$ -ю строку снизу ( $k \leq m$ ), а  $k$ -ю строку снизу передвинуть на  $m - k + 1$ -ю строку сверху, то полученная  $(2m) \times (2m)$  матрица будет отличаться от матрицы (2.16) со свойством (2.17) только знаками «минус» при некоторых элементах.

Определитель матрицы (2.26) — это результат многочленов  $f(\mu)$  и  $f'(\mu)$ , который отличается от дискриминанта  $D(f)$  множителем  $(-1)^{m(m-1)/2}$ . Если  $D(f) = 0$ , то одна из строк матрицы (2.26) линейно выражается через остальные строки. Можно из однородной системы  $2m - 1$  уравнений выбросить одно уравнение и оставшиеся  $2m - 2$  уравнений рассматривать как неоднородную линейную систему относительно переменных  $\mu^{2m-2}, \dots, \mu$ . Из этой системы можно найти  $\mu$  как рациональную функцию от коэффициентов  $f_j$ . Это и будет  $\mu_{mul}$  на множестве  $D = 0$ .

Так для  $m = 4$  выражение для  $\mu_{mul}$  задается следующей формулой

$$\mu_{mul} = \frac{-32 f_3 f_0 f_2 + 48 f_0 f_1 + 9 f_3^3 f_0 - f_1 f_2 f_3^2 - 3 f_3 f_1^2 + 4 f_1 f_2^2}{28 f_3 f_2 f_1 - 36 f_1^2 - 6 f_1 f_3^3 + 2 f_3^2 f_2^2 + 32 f_2 f_0 - 8 f_2^3 - 12 f_3^2 f_0}. \quad (2.27)$$

## 2.5. Проверка простоты элементарных делителей. Обозначим

$$M_A(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} JA - \sqrt{\mu}E.$$

Пусть  $\mu = 0$  — корень уравнения (2.3) кратности  $k$ , т. е.  $f_0 = \dots = f_{k-1} = 0$ ,  $f_k \neq 0$ . Все соответствующие элементарные делители матрицы  $JA$  просты тогда и только тогда, когда  $\text{rank } M_A(0) = 2m - 2k$ .

Аналогично, если  $\mu_{mul} < 0$  — корень многочлена (2.3) кратности  $k$ , то все соответствующие элементарные делители матрицы  $JA$  просты тогда и только тогда, когда  $\text{rank } M_A(\mu) = 2m - k$ . Поскольку непростые элементарные делители возможны только при  $k \geq 2$ , то  $D(f) = 0$ , и  $\mu_{mul}$  вычисляется так, как описано в п. 2.4.

Отметим, что в диссертации [3] и в книге [4] написано, что для анализа устойчивости требуется вычислять жорданову форму матрицы  $JA$ . На самом деле, это не нужно, достаточно вычислить ранг соответствующей матрицы, что с вычислительной точки зрения гораздо проще. Так, в системе компьютерной алгебры Maple ранг матрицы, элементы которой заданы символьно, вычисляется с помощью метода Гаусса [15].

## 2.6. Вычисление множества устойчивости.

**Определение 2.3.** Пусть  $\varphi(P)$  — некоторый многочлен. Точка  $P = P^0$  множества  $\varphi(P) = 0$  называется *особой точкой  $k$ -того порядка*, если в этой точке аннулируются все частные производные многочлена  $\varphi(P)$  по  $p_1, \dots, p_n$  до  $k$ -того порядка включительно и не аннулируется хотя бы одна частная производная порядка  $k + 1$ .

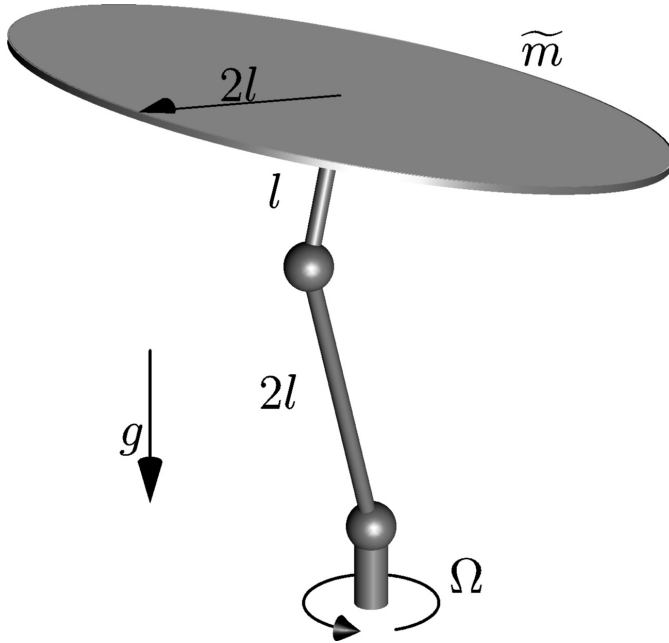
Можно предложить следующую алгоритмическую схему исследования устойчивости линейных гамильтоновых систем вида (2.1).

- 1) Вычисляются характеристический многочлен  $f(\mu)$  матрицы  $JA(P)$  и его дискриминант  $D(f)(P)$ .
- 2) Для множеств  $F_0$  и  $F_2$  находятся их особые точки порядков  $k = 1, 2, \dots$  пока они не исчерпаются. Непрерывные множества особых точек параметризуются, возможно, используя  $\mu$ .
- 3) Параметризуются части множеств  $F_0$  и  $F_2$ .
- 4) Методами локального анализа (см. [16, 17]) исследуются множества  $F_0$  и  $F_2$  вблизи их пересечений, вблизи их особых точек и в бесконечности. Этим проверяется полнота найденных частей множеств  $F_0$  и  $F_2$ .
- 5) Находятся пересечения множеств  $F_0$  и  $F_2$ , а также их самопересечения.
- 6) Рассматриваются куски  $W_j$  разбиения пространства  $\mathbb{R}^n$  гиперповерхностями множеств  $F_0$  и  $F_2$ , вычисляются собственные числа  $\lambda$  в одной точке  $P_j$  каждого куска  $W_j$ . Таким образом выделяются все куски  $W_j$ , принадлежащие множеству устойчивости  $\Sigma$ .
- 7) На множестве  $F_0$  вычисляется  $D(\hat{f})$  и выделяются те части  $F_0$ , где  $D(\hat{f}) \geq 0$ .



- 8) На множестве  $F_2$  вычисляются кратное  $\mu_{mul}$  из (2.6), многочлен  $\tilde{h}(\mu)$  из (2.7) и  $D(\tilde{h})$ . Выделяются те части множества  $F_2$ , где  $\mu_{mul} \leq 0$ ,  $D(\tilde{h}) \geq 0$  и все коэффициенты многочлена  $\tilde{h}(\mu)$  неотрицательны.
- 9) На множествах  $F_0$  и  $F_2$  вычисляются подмножества, где просты соответствующие элементарные делители матрицы  $M_A(\mu)$ .
- 10) Выделяются те части множеств  $F_0$  и  $F_2$ , все точки которых дают устойчивость.

### 3. Исследование устойчивости одной гироскопической системы



**Рис. 1:** Массивный диск, прикрепленный к ротору двигателя посредством упругих шарниров Кардано–Гука.

Рассмотрим механическую систему в поле силы тяжести, состоящую из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано–Гука (см. рис. 1). Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длины  $2l$  посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний стержень длины  $l$  жестко прикреплен к центру плоского диска массы  $\tilde{m}$  и диаметра  $kl$ ,  $k = 4$ , перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора вращается с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ . Такие механические системы, являющиеся статически неуравновешенными, ранее рассматривались в [18], а анализ устойчивости вращения такой системы относительно вертикальной оси был проведен численно в [19, п. 6] и в [3, гл. 3, п. 3.5.2] или в [4, п. 7.8.2]. Там же приведен и вывод уравнений движения, но для цельности изложения повторим его здесь.

В качестве обобщенных координат выбраны *углы Крылова* (см., например, [20, п. 2.5])  $\alpha_{1,2}, \beta_{1,2}$ , задающие положение каждого стержня относительно вертикальной оси в системе отсчета, вращающейся вместе с ротором, и

#### 3.1. Постановка задачи.

Рассмотрим механическую систему в поле силы тяжести, состоящую из осесимметричных тел, связанных между собой универсальными шарнирами Кардано–Гука (см. рис. 1). Центры каждого из шарниров находятся на осях симметрии соответствующих тел. Нижнее тело — невесомый стержень длины  $2l$  посредством шарнира прикреплен к оси ротора вертикально поставленного мотора, а верхний стержень длины  $l$  жестко прикреплен к центру плоского диска массы  $\tilde{m}$  и диаметра  $kl$ ,  $k = 4$ , перпендикулярно его плоскости. Ротор мотора

углы  $\gamma_{1,2}$ , задающие кручение в шарнирах. Вертикальное положение равновесия системы задается углами  $\alpha_{1,2} = \beta_{1,2} = \gamma_{1,2} = 0$ , а ее функция Лагранжа  $L$ , записанная с точностью до членов второго порядка, есть

$$\begin{aligned} L = & \frac{A}{2} \left( (\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2)^2 + (\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2)^2 \right) + \\ & + \frac{\tilde{m}l^2}{2} \left( (2(\dot{\alpha}_1 - \Omega\beta_1) + (\dot{\alpha}_2 - \Omega\beta_2))^2 + (2(\dot{\beta}_1 + \Omega\alpha_1) + (\dot{\beta}_2 + \Omega\alpha_2))^2 \right) + \\ & + \frac{B}{2} (\Omega^2 (1 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) + \Omega (\dot{\alpha}_2\beta_2 - \alpha_2\dot{\beta}_2) + \dot{\gamma}_2^2) - \\ & - \tilde{m}gl \left( (2 - \alpha_2^2 - \beta_2^2) / 2 + (2 - \alpha_1^2 - \beta_1^2) \right) - \\ & - \frac{C_1}{2} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) - \frac{C_2}{2} ((\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_1 - \beta_2)^2) - \frac{C'_1}{2} \gamma_1^2 - \frac{C'_2}{2} (\gamma_2 - \gamma_1)^2, \end{aligned}$$

где  $A = \tilde{m}l^2$  и  $B = 2\tilde{m}l^2$  — главные моменты инерции массивного диска,  $C_{1,2}$  и  $C'_{1,2}$  — коэффициенты жесткости на изгиб и кручение в шарнирах, соответственно,  $g$  — ускорение свободного падения.

Уравнения движения рассматриваемой системы могут быть расщеплены на две подсистемы. Первая подсистема зависит только от углов  $\gamma_{1,2}$  и имеет вид

$$\gamma_1 = \frac{C'_2}{C'_1 + C'_2} \gamma_2, \quad \ddot{\gamma}_2 + \frac{C'_1 C'_2}{B(C'_1 + C'_2)} \gamma_2 = 0.$$

Она устойчива при  $C'_{1,2} > 0$ .

Вторая подсистема после введения безразмерного времени  $\tau = \Omega t$  сводится к системе гироскопического движения с четырьмя степенями свободы

$$M\ddot{Y} + G\dot{Y} + RY = 0, \quad (3.1)$$

где  $Y \in \mathbb{R}^m$  — вектор обобщенных координат,  $M$  — симметричная положительно определенная матрица масс,  $R$  — симметричная матрица потенциальных сил,  $G$  — кососимметричная матрица гироскопических сил,  $\dot{Y} = dY/dt$ .

Если ввести фазовый вектор  $X = (Y, \dot{Y})$ , то функция Гамильтона имеет вид

$$H(X) = \frac{1}{2} X^T A X, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} R - GM^{-1}G/4 & GM^{-1}/2 \\ -M^{-1}G/2 & M^{-1} \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

а система канонических уравнений имеет вид

$$\dot{X} = JAX$$

с постоянной матрицей  $A$ , где  $J$  — симплектическая единица.

В рассматриваемой системе (3.2) число степеней свободы  $m = 4$ ,

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \frac{1}{\tilde{\Omega}^2} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 - 2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 - 2 & 0 & -c_2 \\ -c_2 & 0 & c_2 - 1 & 0 \\ 0 & -c_2 & 0 & c_2 - 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а безразмерные параметры  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\tilde{\Omega}$  выражаются через исходные следующим образом:

$$c_1 = \frac{C_1}{\tilde{m}gl}, \quad c_2 = \frac{C_2}{\tilde{m}gl}, \quad \tilde{\Omega} = \Omega\sqrt{l/g}. \quad (3.3)$$

Область физических значений параметров — это положительный октант

$$\Phi = \{c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \tilde{\Omega} > 0\}.$$

Выполним следующую замену параметров:

$$p = c_1/\tilde{\Omega}^2, \quad q = c_2/\tilde{\Omega}^2, \quad r = 1/\tilde{\Omega}^2 \quad (3.4)$$

Таким образом, вектор параметров  $\mathbf{P} = (p, q, r)$ . Физические значения параметров образуют область  $\Phi : \mathbf{P} > 0$ .

Характеристический многочлен (2.3) теперь имеет следующие коэффициенты:

$$f_0 = \frac{1}{16} (2r^2 - rp - 3rq + pq + 4r - 8q - 4)^2,$$

$$f_1 = -2r^3 + \frac{3}{2}r^2p + \frac{11}{2}r^2q - \frac{1}{4}rp^2 - 3rpq - \frac{15}{4}rq^2 + \frac{1}{4}p^2q + \frac{5}{4}pq^2 +$$

$$+ 5r^2 - 2rp - 14rq + \frac{1}{4}p^2 + \frac{5}{2}pq + \frac{41}{4}q^2 - 8r + p + 13q + 4,$$

$$f_2 = 5r^2 - \frac{5}{2}rp - \frac{23}{2}rq + \frac{1}{4}p^2 + 3pq + \frac{25}{4}q^2 - 10r + 2p + 14q + 6,$$

$$f_3 = -4r + p + 5q + 4.$$

В дальнейшем все вычисления с многочленами делаются с помощью пакета компьютерной алгебры Maple. Системы алгебраических уравнений решаются с помощью базиса Грёбнера.

**3.2. Введение удобных параметров.** Поскольку свободный член  $f_0$  является полным квадратом, то удобно ввести и исследовать многочлен

$$f_{00} = \sqrt{f_0} = \frac{1}{2}r^2 - \frac{1}{4}rp - \frac{3}{4}rq + \frac{1}{4}pq + r - 2q - 1.$$

Нуль этого квадратичного многочлена определяет коническую поверхность в пространстве параметров  $\mathbf{P}$  с особой точкой  $P_0 = (2, -2, -2)$ . Эта точка также является особой для полинома третьей степени  $f_1(\mathbf{P})$ . Следовательно, чтобы упростить формулы для коэффициентов, надо сделать параллельный перенос начала координат пространства параметров в точку  $P_0$ . Будем обозначать эти координаты буквами  $x, y$  и  $z$ , соответственно, а знак тильда над  $f_i$  будет означать, что коэффициент записывается в новых координатах  $\mathbf{Q} = (x, y, z)$ , т. е.  $\mathbf{P} = P_0 + \mathbf{Q}$ .

В новых координатах  $\mathbf{Q}$  коэффициенты характеристического многочлена (2.3) имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{f}_{00} &= \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{4}zx - \frac{3}{4}zy + \frac{1}{4}xy, & \tilde{f}_0 &= \tilde{f}_{00}^2, \\ \tilde{f}_1 &= (\tilde{f}_3 - 4)\tilde{f}_0 + \tilde{f}_4^2, \\ \tilde{f}_2 &= 5z^2 - \frac{5}{2}zx - \frac{23}{2}zy + \frac{1}{4}x^2 + 3xy + \frac{25}{4}y^2 - 12z + 2x + 18y, \\ \tilde{f}_3 &= -4z + x + 5y + 4,\end{aligned}$$

где

$$\tilde{f}_4 = 3z - \frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y.$$

В новых координатах уравнение  $\tilde{f}_{00} = 0$  определяет конус  $\mathcal{C}_0$  с центром в начале координат  $Q_0 = 0$ .

**Замечание 3.1.** В рассматриваемой задаче анализ устойчивости на конусе  $\mathcal{C}_0 : \tilde{f}_{00}(\mathbf{Q}) = 0$  не имеет самостоятельного значения, ибо  $\tilde{f}_0 = \tilde{f}_{00}^2$  и  $\tilde{f}_0 > 0$  вблизи поверхности  $\tilde{f}_{00} = 0$ . Поэтому никакая часть этой поверхности не является односторонней границей множества устойчивости.

**3.3. Исключительная плоскость.** Дискриминант характеристического многочлена (2.3) имеет вид

$$D(f) = l^4(\mathbf{Q}) \cdot g(\mathbf{Q})/256, \quad (3.5)$$

где

$$l(\mathbf{Q}) = 2z - x - 3y, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned}
g(\mathbf{Q}) = & 512z^6 - 4352z^5y - 768z^5x + 14848z^4y^2 + 5376z^4yx + \\
& + 512z^4x^2 - 25408z^3y^3 - 14656z^3y^2x - 2752z^3yx^2 - 192z^3x^3 + \\
& + 21800z^2y^4 + 19168z^2y^3x + 5360z^2y^2x^2 + 736z^2yx^3 + \\
& + 40z^2x^4 - 7500zy^5 - 11700zy^4x - 4376zy^3x^2 - \\
& - 904zy^2x^3 - 92zyx^4 - 4zx^5 + 2500y^5x + 1200y^4x^2 + \\
& + 344y^3x^3 + 48y^2x^4 + 4yx^5 - \\
& - 256z^5 + 2880z^4y + 1344z^4x - 14976z^3y^2 - 6720z^3yx - \\
& - 1344z^3x^2 + 37928z^2y^3 + 13816z^2y^2x + 5144z^2yx^2 + 456z^2x^3 - \quad (3.7) \\
& - 45120zy^4 - 14464zy^3x - 6784zy^2x^2 - 1152zyx^3 - 64zx^4 + \\
& + 20250y^5 + 6490y^4x + 3156y^3x^2 + 740y^2x^3 + 82yx^4 + 2x^5 + \\
& + 1872z^4 + 2016z^3y - 5088z^3x - 35496z^2y^2 + 15888z^2yx + \\
& + 2200z^2x^2 + 67608zy^3 - 12936zy^2x - 5176zyx^2 - 344zx^3 - \\
& - 37827y^4 + 828y^3x + 2782y^2x^2 + 412yx^3 + 13x^4 - \\
& - 13824z^3 + 62208z^2y + 6912z^2x - 93312zy^2 - 20736zyx - \\
& - 1152zx^2 + 46656y^3 + 15552y^2x + 1728yx^2 + 64x^3.
\end{aligned}$$

Обозначим множества

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{Q} : g(\mathbf{Q}) = 0\}, \quad \mathcal{L} = \{\mathbf{Q} : l(\mathbf{Q}) = 0\}. \quad (3.8)$$

Задача об устойчивости на исключительной плоскости

$$\mathcal{L} : l(\mathbf{Q}) \equiv 2z - x - 3y = 0 \quad (3.9)$$

рассмотрена в [5, п. 4.3]. Оказалось, что на плоскости  $\mathcal{L}$  множество устойчивости  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  лежит в множестве устойчивости  $\Sigma$ , соответствующем множителю  $g(\mathbf{Q})$  дискриминанта (3.5). Кроме того, область устойчивости  $\Sigma_{\mathcal{L}}$  лежит вне области  $\Phi = \{\mathbf{Q} > (-2, 2, 2)\}$  физических значений параметров.

**3.4. Особые точки множества  $\mathcal{G}$ .** Рассмотрим особые точки множества  $\mathcal{G}$  из (3.7), (3.8). Особенности первого порядка (см. определение 2.3) удовлетворяют системе уравнений

$$g(\mathbf{Q}) = 0, \quad \partial g / \partial x = 0, \quad \partial g / \partial y = 0, \quad \partial g / \partial z = 0. \quad (3.10)$$

Особенности второго порядка множества  $\mathcal{G}$  должны удовлетворять системе (3.10), к которой добавлено условие, что все вторые частные производные равны нулю. Этой системе удовлетворяют только четыре точки:

$$Q_0 = 0, \quad Q_1 = (-2, 2, 2), \quad Q_2 = (7/2, 7/2, 6), \quad Q_3 = (-5/2, 3/2, 2). \quad (3.11)$$

В этих точках  $\mu_{1,2,3,4}(Q_1) = -1$ ,  $\mu_{1,2,3,4}(Q_{2,3}) = -1/4$ ,  $\mu_{1,2,3}(Q_0) = 0$ ,  $\mu_4(Q_0) = -4$ .

Особенностей третьего порядка у множества  $\mathcal{G}$  нет.

С помощью базиса Грёбнера удалось найти все решения системы (3.10). Они расположены на трех однопараметрических семействах  $\mathcal{P}_1$ ,  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$ .

Семейство  $\mathcal{P}_1$  определяется системой

$$x + 3y - 2z = z^2 - 4zy + 4z + 4y^2 - 6y = 0. \quad (3.12)$$

Это семейство представляет собой параболу  $\mathcal{P}_1$ :

$$x = -2t^2, \quad y = -2t^2 - 4t, \quad z = -4t^2 - 6t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

Первый из многочленов системы (3.12) совпадает с линейной функцией, определяющей исключительную плоскость (3.6). Вдоль этой параболы корни характеристического многочлена принимают значения  $\mu_{1,2,3} = -t^2$ ,  $\mu_4 = -(t+2)^2$ , т. е. всем точкам параболы  $\mathcal{P}_1$  кроме  $t = 0$  и  $t = 2$  соответствует устойчивость. Парабола  $\mathcal{P}_1$  соединяет особые точки  $Q_1$  и  $Q_0$ , которые разбивают ее на три части  $\mathcal{P}_1^-$ ,  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_1^+$ :

$$\mathcal{P}_1^- \text{ при } t < -1, \quad \mathcal{P}_1^0 \text{ при } -1 < t < 0, \quad \mathcal{P}_1^+ \text{ при } t > 1.$$

Вершина параболы находится в точке  $Q_4 = (-1/2, 3/2, 2)$ . Вся парабола  $\mathcal{P}_1$  лежит в плоскости  $\mathcal{L}$  (см. (3.9)).

Семейство  $\mathcal{P}_2$  определяется системой

$$-z + 2y - 1 = x^2 + 8x + 28 - 2xy - 16y + y^2 = 0. \quad (3.14)$$

Семейство  $\mathcal{P}_2$  представляет собой параболу

$$x = 3v + v^2/2, \quad y = 2 + v + v^2/2, \quad z = 3 + 2v + v^2, \quad v \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

На ней корни характеристического многочлена суть

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2}, \quad \mu_{3,4} = \frac{1}{4}v^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-v^2}. \quad (3.16)$$

Корни (3.16) вещественны и неположительны при условии  $-1 \leq v \leq 1$  и принимают значения из интервала  $[-1; 0]$ . Таким образом, семейство  $\mathcal{P}_2$  разбивается на три части  $\mathcal{P}_2^-$ ,  $\mathcal{P}_2^0$ ,  $\mathcal{P}_2^+$ :

$$\mathcal{P}_2^- \text{ при } v < -1, \quad \mathcal{P}_2^0 \text{ при } -1 < v < 1, \quad \mathcal{P}_2^+ \text{ при } v > 1.$$

Семейство  $\mathcal{P}_2$  соединяет особые точки  $Q_2$  и  $Q_3$ , а ее вершина — это точка  $Q_5 = (0, 2, 3)$ . Парабола  $\mathcal{P}_2$  лежит в плоскости  $\mathcal{M} = \{\mathbf{Q} : 2y = z + 1\}$  (см. (3.14)).

Семейство  $\mathcal{F}$  представляет собой криволинейный четырехугольник, проходящий через особые точки  $Q_0$ ,  $Q_3$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ . Его параметрическое представление имеет вид

$$\mathcal{F} : \begin{cases} x = 2 \sin^4 \varphi (4 \cos^2 \varphi - 1) - 3 \sin^3 2\varphi, \\ y = 2 + 6 \cos^4 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - \sin^3 2\varphi, \\ z = 2 + 6 \cos^2 \varphi - 8 \cos^6 \varphi - 2 \sin^3 2\varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi < \pi. \quad (3.17)$$

На семействе (3.17) корни характеристического многочлена (2.3) суть

$$\mu_{1,2,3} = -\sin^4 \varphi, \quad \mu_4 = -(3 \sin^2 \varphi - 2)^2.$$

Кроме решений системы (3.11) были изучены решения неполных систем вида

$$g(\mathbf{Q}) = 0, \quad \partial g(\mathbf{Q})/\partial s = 0, \quad \partial g(\mathbf{Q})/\partial t = 0, \quad (3.18)$$

где  $s, t$  — две координаты из набора  $x, y, z$ . Анализ решений всех систем вида (3.18) с помощью базиса Грёбнера показал, что нет других решений, кроме найденных ранее семейств особых точек первого порядка множества  $\mathcal{G}$ . Итак, справедлива

**Теорема 3.1.** *Все особые точки множества  $\mathcal{G}$  исчерпываются двумя параболлами  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  и кривой  $\mathcal{F}$ . Неполные системы (3.18) не дают других решений.*

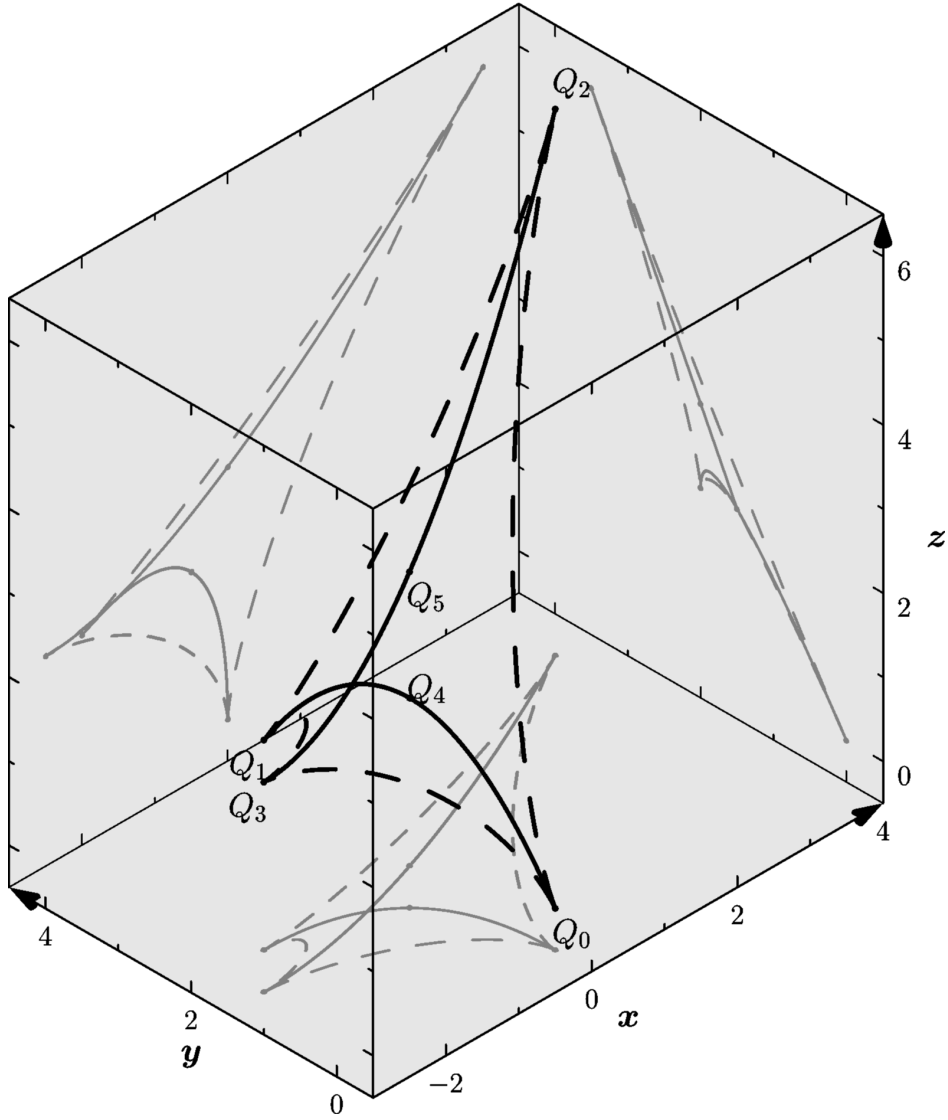
Таким образом, особенности множества  $\mathcal{G}$  сосредоточены на семействах  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$ , которые своими интервалами  $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$  и кривой  $\mathcal{F}$  формируют «каркас» поверхности в форме криволинейного тетраэдра (см. рис. 2). Детальный анализ (см. п. 3.5) показывает, что множество  $\mathcal{G}$  содержит несколько компонент размерностей 1 и 2. Четыре компоненты размерности 1 представляют собой части  $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$  парабол  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ . При этом плоскости  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{M}$ , в которых лежат семейства  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , пересекаются по прямой, проходящей через точки  $Q_4$  и  $Q_5$  — вершины этих парабол.

**3.5. Глобальное строение множества  $\tilde{\mathcal{G}}$ .** В множестве  $\mathcal{G}$  было найдено несколько прямых. Это позволило выдвинуть гипотезу о линейчатой структуре подмножества множества  $\mathcal{G}$ , которая была найдена средствами базиса Грёбнера. Подмножество, соответствующее линейчатой поверхности, обозначим  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

Компонента  $\tilde{\mathcal{G}}$  размерности 2 множества  $\mathcal{G}$  является разворачивающейся линейчатой поверхностью (см., например, [21, гл. VII, §5] или [22, гл. 4]) и состоит из касательных семейства  $\mathcal{F}$ . Каждая из касательных проходит через две точки, которые лежат на частях  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$ , соответственно. Положения точек на указанных выше семействах задаются через параметры  $t$  и  $v$  следующим образом

$$t = -\sin^2 \varphi, \quad v = -\sin 2\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi. \quad (3.19)$$

Подставляя  $t$  и  $v$  из (3.19) в формулы (3.13) и (3.15) соответственно, получим координаты пары точек, определяющих прямую линейчатой поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$ .

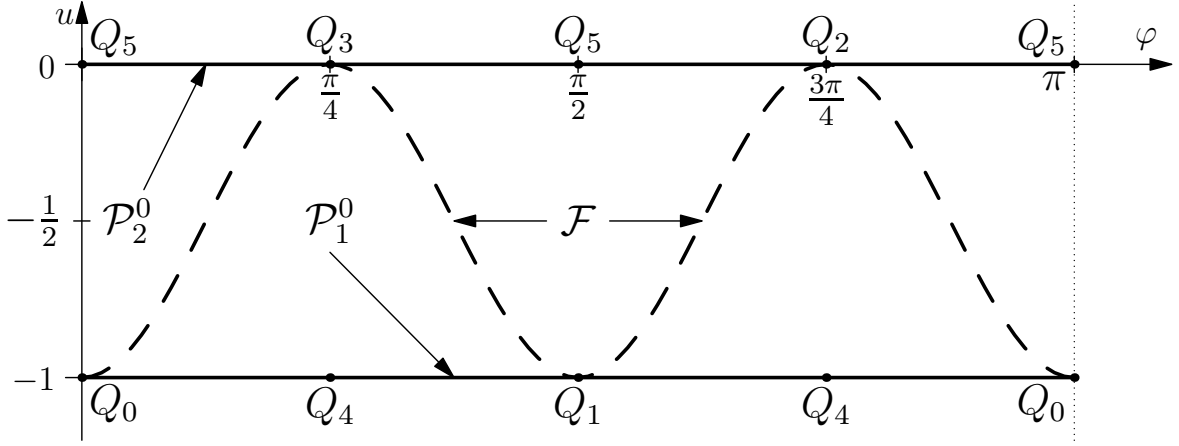


**Рис. 2:** Каркас криволинейного тетраэдра  $\Sigma_1$ , образованный интервалами  $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$  (сплошные линии) и семейством  $\mathcal{F}$  (пунктирная линия). Показаны его проекции на три координатные плоскости.

Параметрическое представление последней задается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x &= -3(u+1)\sin 2\varphi + 2u\sin^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi, \\
 y &= -(u+1)\sin 2\varphi + 2u\cos^2 \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 2\varphi + 2, \\
 z &= -2(u+1)\sin 2\varphi + u(1+2\cos^2 \varphi) + \sin^2 2\varphi + 3,
 \end{aligned}
 \quad \begin{aligned}
 0 \leq \varphi < \pi, \\
 u \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}
 \quad (3.20)$$





**Рис. 3:** Семейства особых точек  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$  на развертке цилиндра  $(\varphi, u)$ .

В координатах  $\varphi$ ,  $u$  на развертке поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  семейства особых точек выглядят очень просто:

$$\mathcal{P}_1^0 : u = -1, \quad \mathcal{P}_2^0 : u = 0, \quad \mathcal{F} : u = -\cos^2 2\varphi.$$

Они показаны на рис. 3. Поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  можно представить себе в виде однополостного гиперболоида с двумя склейками. Одна склейка, расположенная на уровне  $u = 0$  с крайними точками  $Q_2$  и  $Q_3$ , повернута относительно другой склейки с крайними точками  $Q_0$  и  $Q_1$ , расположенной на уровне  $u = -1$ . Следует отметить, что поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  топологически эквивалентна так называемой *линейчатой ротативной поверхности Лусты* (см. [23, с. 422]), которая задается образующей прямой, лежащей в меридиональной плоскости подвижного цилиндра, при внутреннем обкатывании последним неподвижного цилиндра вдвое большего радиуса. Итак, доказана

**Теорема 3.2.** *Множество  $\mathcal{G}$  содержит четыре одномерные компоненты  $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$  с параметризациями (3.13) и (3.15) и двумерную линейчатую поверхность  $\tilde{\mathcal{G}}$  с параметризацией (3.20).*

На самом деле, множество  $\mathcal{G}$  состоит из четырех однопараметрических компонент  $\mathcal{P}_{1,2}^\pm$  и двумерной линейчатой поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Это доказано средствами степенной геометрии в препринте [7]. В дальнейших рассмотрениях множества устойчивости  $\Sigma$  используется этот результат.

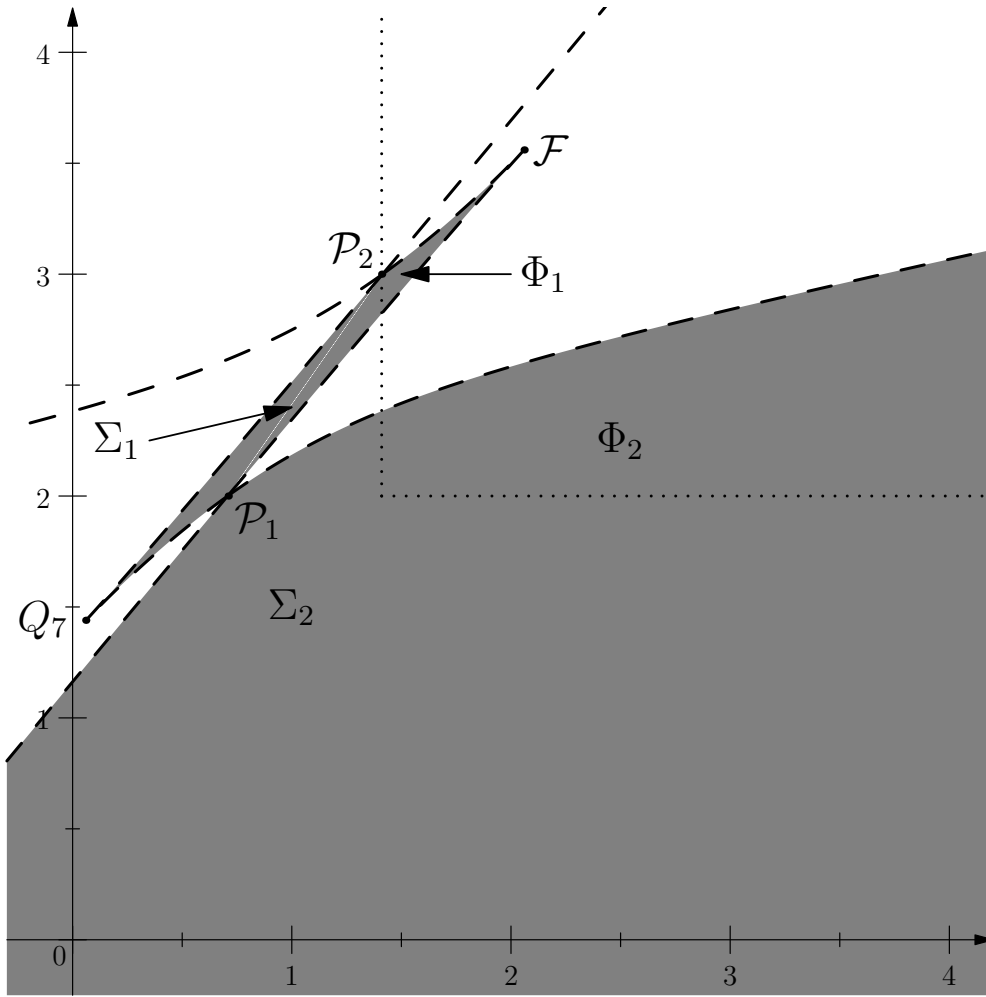
Определим поведение корней характеристического многочлена (2.3) на границе множества устойчивости так, как это описано в п. 2.4. Выражение для кратного корня  $\mu_{mul}$  уравнения 4-го порядка довольно громоздко и задается формулой (2.27). Однако, параметризация (3.20) позволяет его существенно упростить, и кратный корень на поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  равен

$$\mu_{mul} = -\sin^4 \varphi \leq 0, \quad (3.21)$$

а квадратичный множитель, определяющий другую пару корней характеристического многочлена имеет вид

$$\mu^2 + 2(\cos^4 \varphi - u)\mu + (u + \cos^4 \varphi)^2. \quad (3.22)$$

Дискриминант многочлена (3.22) имеет вид  $\tilde{D} = -16u \cos^4 \varphi$ . Согласно теореме 2.1 и (3.5), условия вещественности и неположительности корней многочлена (3.22) выполнены либо при  $u \leq 0$ , либо при  $\cos \varphi = 0$ . Последнее условие приводит к прямой  $x = 0, y = 2z/3$ , на которой устойчивость достигается при  $u \leq 0$ .



**Рис. 4:** Сечение множества  $\mathcal{G}$  плоскостью  $\mathcal{K} : \{\mathbf{Q} : x - y + 2 = 0\}$ . Показаны сечения областей устойчивости  $\Sigma_1, \Sigma_2$ , пересечения с кривой  $\mathcal{F}$  и точка  $Q_7$ . Отмечены области устойчивости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  для физических значений параметров. Абсцисса:  $(x + y)/\sqrt{2}$ ; ордината:  $z$ .

Уравнения (3.20) при  $u \leq 0$  определяют границу области  $\mathcal{H}$ . Непосредственная проверка показывает, что коэффициенты  $f_i, i = 1, 2, 3$  многочлена (2.3) неотрицательны ( $f_0 \geq 0$  всегда) на той части поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$ , где

$u \leq 0$ , и на  $\mathcal{P}_1$ . По теореме 2.3 корни этого многочлена (2.3) вещественны и неположительны на замыкании  $\overline{\mathcal{H}}$ . Следовательно, по теореме 2.1 замыкание  $\overline{\mathcal{H}}$  содержит в себе область устойчивости. Заметим, что условие неотрицательности  $f_i, i = 0, \dots, 3$  не вносит дополнительных ограничений на строение множества  $\overline{\mathcal{H}}$ .

Таким образом, множество устойчивости  $\Sigma$  состоит из двух частей  $\Sigma_1$  и  $\Sigma_2$ . Первая часть  $\Sigma_1$  представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на интервалы  $\mathcal{P}_1^0, \mathcal{P}_2^0$  и кривую  $\mathcal{F}$ . Его поверхности  $\partial\Sigma_1$  соответствуют значения параметра  $-1 \leq u \leq 0$  в параметризации (3.20). Вторая часть  $\Sigma_2$  ограничена частью линейчатой поверхности, соответствующей значениям параметра  $u \leq -1$  в параметризации (3.20). Первая часть  $\Sigma_1$  и вторая часть  $\Sigma_2$  множества  $\Sigma$  пересекаются по интервалу  $\mathcal{P}_1^0$ . На рис. 4 показано сечение множества устойчивости  $\Sigma$  плоскостью  $\mathcal{K} = \{\mathbf{Q} : x - y + 2 = 0\}$ , проходящей через прямую  $[Q_4, Q_5]$ .

**3.6. Устойчивость в случаях нулевых и кратных корней.** Рассмотрим структуру элементарных делителей матрицы  $JA$  в особых точках, сосредоточенных на семействах  $\mathcal{P}_{1,2}, \mathcal{F}$ , и в точках, соответствующих кратным корням, которые принадлежат множествам  $\mathcal{G}, \mathcal{L}$  и  $F_0$ . Для этого вычислим ранг матрицы  $M_A(\mu)$  для всех нулевых и кратных корней характеристического многочлена (2.3).

**Теорема 3.3.** *Если  $f_{00}(\mathbf{Q}) = 0$ , то матрица  $JA$  имеет простые элементарные делители всюду кроме исключительной прямой*

$$\mathcal{C}_1 : y = 2z/3, \quad x = 0. \quad (3.23)$$

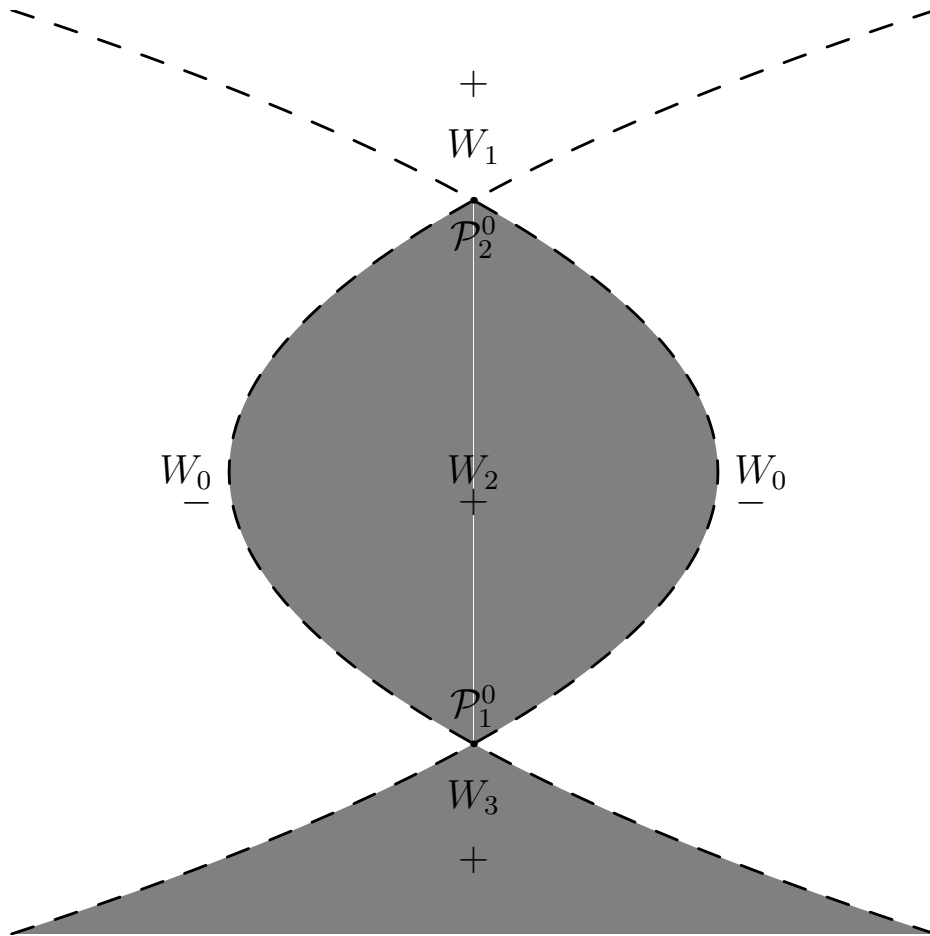
**Теорема 3.4.** *На границе  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$ , задаваемой частью поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  за исключением интервала  $\mathcal{P}_1^0$ , элементарные делители матрицы  $JA$  непростые, а на  $\mathcal{P}_1^0$  — простые.*

Доказательства теорем 3.3 и 3.4 см. в [6].

**3.7. Эффективное выделение множества устойчивости.** В п. 3.5 было дано описание множества устойчивости задачи. Здесь приведем систему неравенств, которая позволяет эффективно определять принадлежность произвольной точки  $\mathbf{Q}$  пространства параметров множеству устойчивости  $\Sigma$ . Для этого напомним основные свойства множества устойчивости  $\Sigma$  задачи.

Границей  $\partial\Sigma$  множества устойчивости  $\Sigma$  служит двумерная компонента  $\tilde{\mathcal{G}}$  множества  $\mathcal{G}$ , которая является линейчатой поверхностью. Ее параметризация задается формулой (3.20). Эта поверхность имеет участки самопересечения вдоль сегментов  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$  однопараметрических семейств особых точек первого порядка и делит пространство параметров на 4 области:  $W_i$ ,

$i = 0, 1, 2, 3$ . Область  $W_1$  выделяется поверхностью  $\tilde{\mathcal{G}}$  при значениях параметра  $u > 0$ . Эта область содержит «рога» — одномерные компоненты  $\mathcal{P}_2^\pm$ . Область  $W_2$  представляет собой криволинейный тетраэдр, натянутый на сегменты  $\mathcal{P}_1^0$ ,  $\mathcal{P}_2^0$  и кривую  $\mathcal{F}$ , его поверхность соответствует значениям параметра  $-1 < u < 0$ . Область  $W_3$  выделяется поверхностью  $\tilde{\mathcal{G}}$  при значениях параметра  $u < -1$ . Эта область содержит «копыта» — одномерные компоненты  $\mathcal{P}_1^\pm$ . Область  $W_2$  «соединяется» с областями  $W_1$  и  $W_3$  вдоль сегментов  $\mathcal{P}_1^0$  и  $\mathcal{P}_2^0$  соответственно. Наконец, область  $W_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3)$  — внешняя часть, дополняющая пространство параметров  $\mathbb{R}^3$ . Схематически деление пространства параметров на области  $W_i$  показано на рис. 5, где знаки  $+$  и  $-$  в каждой из областей указывают знак дискриминанта  $D(f)$ .



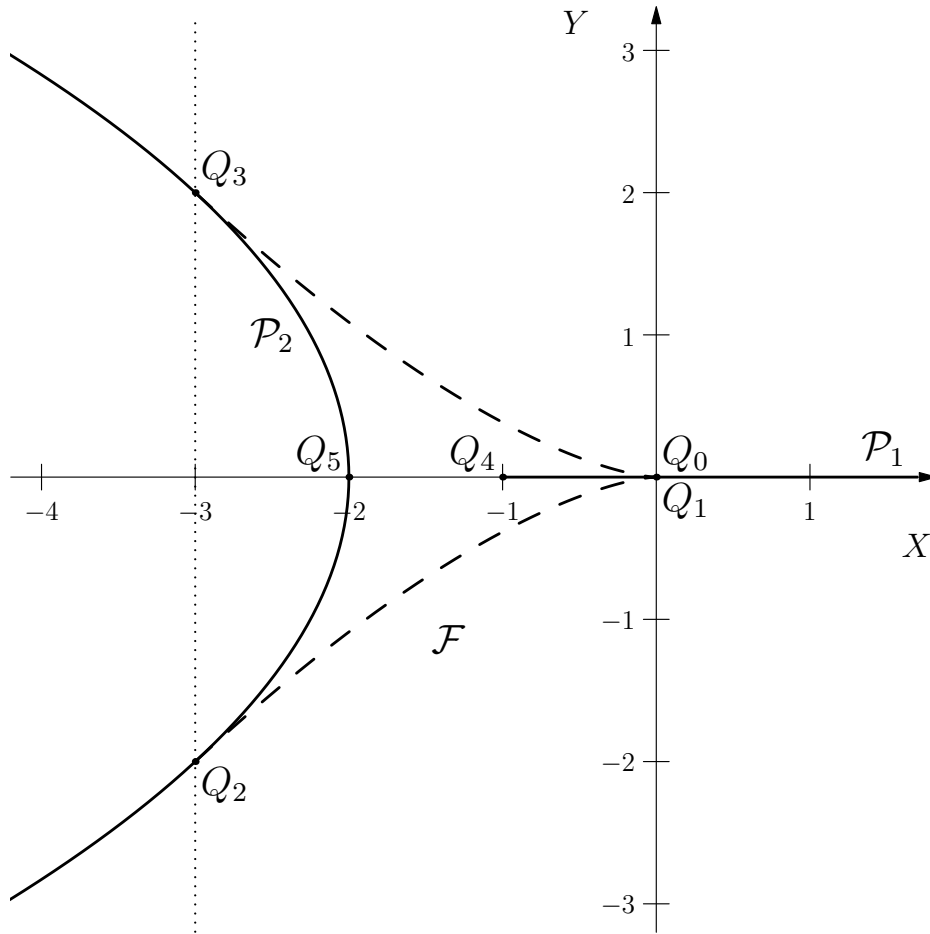
**Рис. 5:** Схематическое деление пространства параметров  $\Pi$  поверхностью  $\tilde{\mathcal{G}}$  на части. Знаки  $+$  и  $-$  в каждой из частей указывают знак дискриминанта. Затенением выделены части множества устойчивости  $\Sigma$ .

Дискриминант  $D(f)$  принимает неотрицательные значения в областях  $W_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , однако в области  $W_1$  многочлен  $f(\mu)$  имеет две пары комплексно сопряженных корней, поэтому эта область не входит в множество устойчивости. Сформулируем неравенства, позволяющие отделить область

$W_1$  от области неотрицательных значений дискриминанта. Для этого введем косоугольную систему координат с базисом

$$R_1 = (Q_1 - Q_0)/2, \quad R_2 = (Q_2 - Q_3)/2, \quad R_3 = 2(Q_5 - Q_4).$$

Точки  $Q_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$  являются особыми точками второго порядка множества  $\mathcal{G}$ , а точки  $Q_4$  и  $Q_5$  суть вершины парабол  $\mathcal{P}_1$  и  $\mathcal{P}_2$ , соответственно. Рассмотрим проекцию семейств особых точек множества  $\mathcal{G}$  на плоскость  $\mathcal{T}$ , натянутую на векторы  $R_2$  и  $R_3$  (см. рис. 6). Координаты  $X, Y$  на плоскости  $\mathcal{T}$  определяются равенствами  $X = (\mathbf{Q}, R_1, R_2)$ ,  $Y = (\mathbf{Q}, R_3, R_1)$ , где  $(\cdot, \cdot, \cdot)$  — смешанное произведение в  $\mathbb{R}^3$ , т. е. определитель из указанных векторов. Проекция семейства  $\mathcal{P}_2$  на плоскость  $\mathcal{T}$  задается уравнением  $Y^2 + 4X + 8 = 0$ .



**Рис. 6:** Проекция семейств особых точек на плоскость  $\mathcal{T}$ .

Особые точки  $Q_2$  и  $Q_3$ , выделяющие на параболе  $\mathcal{P}_2$  сегмент  $\mathcal{P}_2^0$ , перейдут при проектировании в точки с координатами  $(X, Y) = (-3, -2)$  и  $(-3, 2)$ , соответственно. Следовательно, область  $W_1$  отделяется двумя неравенствами:  $Y^2 + 4X > -8$ ,  $X > -3$ . В исходных переменных  $\mathbf{Q}$  эти неравенства записываются в виде

$$\begin{aligned} x^2 + 6xy - 4xz + 9y^2 - 12yz + 4z^2 + 4x + 20y - 16z + 8 &> 0, \\ x + 5y - 4z + 3 &> 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Поскольку  $\mathcal{H} = \tilde{\Sigma}$ , где  $\tilde{\Sigma}$  задается неравенствами  $g(\mathbf{Q}) > 0$  и (3.24), то из рассуждений на стр. 25 после рисунка 4 следует, что множество устойчивости  $\Sigma$  отличается от замыкания  $\overline{\mathcal{H}}$  отсутствием границы, кроме перемычки  $\mathcal{P}_1^0$ .

**Теорема 3.5.** *Множество устойчивости  $\Sigma$  гироскопической системы есть  $\tilde{\Sigma} \cup \mathcal{P}_1^0$ .*

### 3.8. Исследование множества устойчивости с помощью инноров.

Применим описанную выше иннорную технику для выделения множества устойчивости задачи. В выражения для определителей инноров  $I_8$ ,  $I_6$  и  $I_4$  подставим значения коэффициентов характеристического многочлена  $f(\mu)$ . Как было отмечено выше,  $I_8$  совпадает с дискриминантом  $D(f)$ , вид которого задается формулами (3.5)–(3.7). Два других выражения в координатах  $\mathbf{Q} = (x, y, z)$  задаются следующим образом

$$\begin{aligned} I_4 &= 8z^2 - 4zx - 28zy + x^2 + 6yx + 25y^2 + 8x - 24y + 48. \\ I_6 &= -32z^5 + 232z^4y + 40z^4x - 640z^3y^2 - 232z^3yx - 24z^3x^2 \\ &\quad + 805z^2y^3 + 495z^2y^2x + 99z^2yx^2 + 9z^2x^3 - 410zy^4 - 456zy^3x \\ &\quad - 132zy^2x^2 - 24zyx^3 - 2zx^4 + 125y^5/4 + 605y^4x/4 + 109y^3x^2/2 \\ &\quad + 33y^2x^3/2 + 9/4yx^4 + 1/4x^5 - \\ &\quad - 4z^4 - 32z^3y - 80z^3x + 454z^2y^2 + 212z^2yx + 86z^2x^2 - 1156zy^3 - \\ &\quad - 160zy^2x - 196zyx^2 - 24zx^3 + 3371y^4/4 + 41y^3x + \\ &\quad + 225y^2x^2/2 + 25yx^3 + 11/4x^4 - \\ &\quad - 192z^3 - 192z^2y + 448z^2x + 1968zy^2 - 992zyx - 144zx^2 - \\ &\quad - 1872y^3 + 464y^2x + 176yx^2 + 16x^3 + \\ &\quad + 1152z^2 - 3456zy - 384zx + 2592y^2 + 576yx + 32x^2. \end{aligned}$$

Обозначим множества

$$\mathcal{I}_6 = \{\mathbf{Q} : I_6(\mathbf{Q}) = 0\}, \quad \mathcal{I}_4 = \{\mathbf{Q} : I_4(\mathbf{Q}) = 0\}.$$

Множества  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{I}_6$  и  $\mathcal{I}_4$  пересекаются в точках  $Q_1, Q_2, Q_3$ , в которых многочлен  $f(\mu)$  имеет корень четвертой кратности. Пересечением множеств  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{I}_6$  служат семейства  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$ , причем на семействе  $\mathcal{P}_1$  происходит касание первого порядка, а на семействах  $\mathcal{P}_2$  и  $\mathcal{F}$  пересечение. Взаимное расположение множеств  $\mathcal{G}$  и  $\mathcal{I}_6$  легко определить, воспользовавшись параметризацией (3.20) двумерной компоненты  $\tilde{\mathcal{G}}$ . Для упрощения выражений перейдем от тригонометрической к рациональной параметризации:

$$\cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + s^2}, \quad \sin^2 \varphi = \frac{s^2}{1 + s^2},$$

тогда на поверхности  $\tilde{\mathcal{G}}$  выражение  $I_6(\mathbf{Q})$  имеет вид

$$I_6(u, s) = \frac{32u(u+1)^2(-s^4 - us^4 - 2us^2 + 2s^2 - 1 - u)^2}{(1+s^2)^6},$$

откуда следует, что  $I_6 < 0$  при  $u > 0$ , т.е. на границе области  $W_1$ . Следовательно, неравенства  $I_6 \geq 0$  и  $I_8 \geq 0$  выделяют области в пространстве параметров, в которых характеристический многочлен  $f(\mu)$  имеет неотрицательные вещественные корни. Остается заметить, что неравенство  $I_4 \geq 0$  позволяет отделить неустойчивые сегменты  $\mathcal{P}_2^\pm$  семейства  $\mathcal{P}_2$ , поскольку на них функции  $g(\mathbf{Q})$  и  $I_6(\mathbf{Q})$  обнуляются.

Таким образом, с учетом теорем 3.3 и 3.4 справедлива

**Теорема 3.6.** *Множество устойчивости  $\Sigma$  гироскопической задачи есть  $\hat{\Sigma} \cup \mathcal{P}_1^0$ , где  $\hat{\Sigma}$  определяется системой неравенств*

$$g(\mathbf{Q}) > 0, \quad I_6(\mathbf{Q}) > 0, \quad I_4(\mathbf{Q}) > 0.$$

Заметим, что в теореме 3.5 второе и третье неравенства существенно проще, чем в теореме 3.6.

**3.9. Физические значения.** Множество устойчивости  $\Sigma \cap \Phi$  для физических значений параметров  $\mathbf{Q}$  получается отсечением плоскостями  $x = -2$ ,  $y = 2$ ,  $z = 2$ . Эти плоскости выделяют две области устойчивости. Первая область  $\Phi_1$  представляет собой часть криволинейного тетраэдра  $\Sigma_1$  от его вершины  $Q_2$  до плоскости  $y = 2$ , которая проходит через точки  $Q_1$  и  $Q_5$ . Эта область ограничена и представляет собой криволинейный трехгранный клин. Вторая область  $\Phi_2$  ограничена сверху участком линейчатой поверхности (3.20) при  $u < -1$ , а снизу — плоскостью  $z = 2$ . Границы этих областей имеют общую точку  $Q_1$ .

В исходных физических параметрах  $\tilde{m}$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $C_1$  и  $C_2$  неравенства (3.24), выделяющие области устойчивости  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ , с учетом замен переменных (3.3) и (3.4) записываются в виде

$$\begin{aligned} & 4\tilde{m}l [l\Omega^2(C_1 + 5C_2) - g(C_1 + 3C_2) + \tilde{m}l ((g - 2\Omega^2l)^2 - 2\Omega^4l^2)] + \\ & + (C_1 + 3C_2)^2 > 0 \\ & \tilde{m}l (3l\Omega^2 - 4g) + C_1 + 5C_2 > 0. \end{aligned}$$

**3.10. Сравнение с известными результатами.** В [3, стр. 181–185] (см. также [4, п. 7.8.2]) было проведено аналитическое исследование устойчивости вблизи двух точек, одна из которых  $Q_2$ , а другая была взята на сегменте

$\mathcal{P}_2^0$ , с координатами  $(1/4 + 3\sqrt{2}/2, 9/4 + \sqrt{2}/2, 7/2 + \sqrt{2}/2)$ . Вблизи этих точек область устойчивости приблизительно выделялась посредством вычисления корней характеристического многочлена (2.3) по сетке в пространстве параметров. Также был выполнен численный анализ небольшой области в диапазоне изменения исходных параметров задачи:  $1,36 \leq c_1 \leq 1,56$ ,  $0,3 \leq c_2 \leq 0,38$ ,  $0,5 \leq \tilde{\Omega} \leq 0,7$ , что соответствует интервалам  $0,78 \leq x \leq 4,24$ ,  $2,61 \leq y \leq 3,52$ ,  $4,04 \leq z \leq 6,00$  в параметрах  $\mathbf{Q}$ . На стр. 214 в [4] авторы отмечают, что «... область устойчивости является очень узкой, что требует тонкой настройки коэффициентов жесткости в шарнирах.» На самом деле, второе множество устойчивости  $\Phi_2$  обладает достаточной «мощностью», позволяя выбирать параметры в широком диапазоне значений. Еще раз отметим, что представленные выше формулы (3.13), (3.15), (3.17), (3.20) дают точное и исчерпывающее описание границы множества устойчивости движения гироскопической системы (3.1).

### Литература

- [1] Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966. — 531 с.
- [2] Брюно А. Д. Множества устойчивости многопараметрических задач. Препринт № 3. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 14 с.
- [3] Майлыбаев А. А. Многопараметрические задачи теории устойчивости: Дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.02.01. — СПб., 2008. — 296 с.
- [4] Майлыбаев А. А., Сейранян А. П. Многопараметрические задачи устойчивости. Теория и приложения в механике. — М.: Физматлит, 2009. — 400 с.
- [5] Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Множество устойчивости одной гироскопической задачи. Препринт № 4. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 30 с.
- [6] Брюно А. Д., Батхин А. Б., Варин В. П. Вычисление множеств устойчивости в многопараметрических задачах. Препринт № 23. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2010. — 22 с.
- [7] Брюно А. Д., Батхин А. Б. Разрешение алгебраической сингулярности алгоритмами степенной геометрии. Препринт № 10. — М.: ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. — 30 с.
- [8] Брюно А. Д. Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. — М.: Наука, 1990. — 296 с.
- [9] Курош А. Г. Курс высшей алгебры. — М.: Изд-во «Наука», 1971. — 432 с.



- [10] *Herrmann G., Jong I.-C.* On the destabilizing effect of damping in nonconservative elastic systems // *Trans. AMSE, J. Appl. Mech.* — 1965. — Vol. 32. — Pp. 592–597.
- [11] *Дэжури Э.* Инноры и устойчивость динамических систем. — М.: Наука, 1979. — 304 с.
- [12] *Романов М. И.* Об аналитических условиях апериодичности линеаризованных систем // *Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика.* — 1959. — № 5. — С. 162–174.
- [13] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — 5-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
- [14] *Коваль В. И.* О действительности всех корней характеристического многочлена уравнений первого приближения в динамике твердого тела // *Механика твердого тела (Донецк).* — 1999. — № 28. — С. 130–145.
- [15] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра: Учебник для вузов. — 6-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 280 с.
- [16] *Брюно А. Д.* Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. — 252 с.
- [17] *Брюно А. Д.* Степенная геометрия в алгебраических и дифференциальных уравнениях. — М.: Физматлит, 1998. — 288 с.
- [18] *Барняк М. А., Стороженко В. А.* К исследованию устойчивости вертикального вращения статически неуравновешенной системы шарнирно-связанных осесимметричных тел // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1988. — № 4. — С. 51–58.
- [19] *Майлыбаев А. А., Сейранян А. П.* Об областях устойчивости гамильтоновых систем // *ПММ.* — 1999. — Т. 63, № 4. — С. 568–579.
- [20] *Голубев Ю. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд., перераб. и дополн. изд. — М.: Изд-во МГУ, 2000. — 719 с.
- [21] *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. — 6-е изд. — М.: Наука, 1974. — 176 с.
- [22] *Фиников С. П.* Теория поверхностей. — М.: ГТТИ, 1934. — 203 с.
- [23] *Кривошапко С. Н., Иванов В.* Энциклопедия аналитических поверхностей. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 560 с.