



Максимов Д.Ю., Филатов М.А.

Исследование нелинейных
многосеточных методов
решения задач однофазной
фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Максимов Д.Ю., Филатов М.А.
Исследование нелинейных многосеточных методов решения задач однофазной фильтрации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 43. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-43>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

Д. Ю. Максимов, М. А. Филатов

**Исследование нелинейных многосеточных
методов решения задач однофазной
фильтрации**

Москва 2011

Д. Ю. Максимов, М. А. Филатов, Исследование нелинейных многосеточных методов решения задач однофазной фильтрации.

Аннотация. Работа посвящена исследованию применения обобщения геометрического многосеточного метода на нелинейные задачи математической физики, такие как задача однофазной фильтрации, включающая зависимость параметров от давления. Существенным преимуществом таких методов является отсутствие необходимости линеаризации и построения якобиана. Обобщения сравнивались с многосеточными методами, применёнными к линеаризованным задачам и с методами крыловского типа, использующими ILU-предобуславливатели. Результатом является вывод о применимости нелинейного полного многосеточного метода, скоростные показатели которого примерно соответствуют методу FGMRes с прекондиционером ILUT¹.

D. Yu. Maksimov, M. A. Filatov, Investigation of nonlinear multigrid methods for solving one-phase filtration problem.

Abstract. The paper considers generalizations of geometric multigrid method onto non-linear problems of mathematical physics such as one-phase filtration problem which includes dependence of parameters on pressure. Essential advantage of these methods is that linearization and Jacobian construction are not required. Generalizations were compared against multigrid methods applied to the linearised problem and against Krylov-type methods with ILU preconditioners. The resulting conclusion is applicability of the non-linear full multigrid method. The speed characteristics approximately correspond to those of FGMRes method with ILUT preconditioner.

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Методы решения	7
4	Результаты расчетов	20
5	Заключение	24

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00823).

При подготовке работы использовалась вычислительная система СКИФ МГУ «Чебышев».

1 Введение

В настоящее время наиболее широко распространённым классом методов, применяемых для решения систем линейных алгебраических уравнений, являются методы крыловских подпространств [1]. Однако для многих практических задач их производительность не является удовлетворительной и возникает необходимость в поиске и разработке новых, более эффективных методов.

Одним из таких методов является многосеточный метод [2], который, как известно, является оптимальным с точки зрения числа операций, затрачиваемых для получения решения с заданной точностью. Однако теоретически его применимость обоснована для симметричных и положительно определённых задач [3], которые составляют важный, но далеко не полный класс задач математической физики.

Поэтому представляет интерес экспериментальное исследование применимости многосеточных методов. В данной работе это сделано для модельных задач теории фильтрации — однофазной однокомпонентной задачи, в которой свойства флюида и среды зависят от давления.

Многосеточные методы (multigrid) делятся на две основные группы: геометрические (geometric multigrid, GMG) и алгебраические (algebraic multigrid, AMG). В силу упрощённой постановки задачи в настоящей работе исследование ограничивается вариантами геометрических многосеточных методов.

Наибольшее развитие многосеточные методы получили применительно к линейным задачам математической физики. Вместе с тем большинство реальных прикладных проблем имеют, как правило, нелинейный характер [4].

В настоящей работе исследуются вопросы обобщения и применимости многосеточных методов для нелинейных задач. Важным преимуществом таких методов является отсутствие необходимости построения якобиана [5] при условии использования таких сглаживателей, как нелинейный метод Гаусса–Зейделя.

В данной работе рассматривается однофазная задача фильтрации лёгких углеводородов, называемых сокращённо газом. Такая постановка имеет реальную физическую интерпретацию и описывает процессы добычи и закачки в чисто газовых месторождениях. Существенная нелинейность обусловливается сильной сжимаемостью газовой фазы по сравнению с нефтяной и водяной фазами, также присутствующими в задачах подземной гидродинамики.

Для исследования эффективности применения многосеточных методов в нелинейных задачах рассматриваются, во-первых, независимое расцепле-

ние на метод Ньютона и последующее решение СЛАУ методом мультигрида, во-вторых, модификация мультигрида для учёта нелинейности уравнения.

В первом случае к полученным после линеаризации уравнениям применяются стандартные V-циклы и W-циклы многосеточного метода, а также каскадный и полный многосеточный метод (Full Multi-Grid, FMG).

Второй подход состоит в прямом использовании многосеточных итераций для решения нелинейных задач. Аналогом V-цикла в этом случае будет схема полной аппроксимации (Full Approximation Scheme, FAS), в которой, по сравнению с линейным случаем, появляются существенные различия в сглаживании и коррекции решения. Как обобщение полного линейного многосеточного метода рассмотрен метод FMG для нелинейного оператора.

Помимо сравнения многосеточных методов между собой, важно сравнить их с итерационными методами в пространствах Крылова, использующими для ускорения сходимости предобуславливатели. Будут рассмотрены наиболее часто используемые для данного класса задач итерационные методы BiCGStab и FGMRes с предобуславливанием типа неполной LU-факторизации [6].

2 Постановка задачи

2.1 Уравнения и граничные условия

Рассматривается двумерная задача однофазной фильтрации. Учётом гравитации пренебрегаем, предполагая пласт расположенным горизонтально.

Уравнение неразрывности для флюида записывается в виде

$$\frac{\partial m\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho u = Q, \quad (2.1)$$

определяющее соотношение — закон Дарси

$$u = -\frac{K}{\mu} \nabla P. \quad (2.2)$$

Здесь u — скорость фильтрации, P — поровое давление, $m = m(P)$ — пористость, K — абсолютная проницаемость, $\rho = \rho(P)$ — плотность, $\mu = \mu(P)$ — вязкость, Q — массовая мощность источника (массовый дебит фазы). В многофазном случае в закон Дарси (2.2) вводится также относительная фазовая проницаемость, зависящая от насыщенности фазы.

Пористость задается функцией

$$m = m(P) = m_0(1 + C(P - P_0)), \quad (2.3)$$

где C — сжимаемость породы, P_0 — давление приведения, m_0 — пористость при давлении приведения, которые будем считать постоянными.

Вязкость в общем случае задаётся в виде таблицы зависимости от давления, но зачастую с определённой точностью может быть описана в виде линейной зависимости от давления

$$\mu = \mu(P) = aP + b, \quad (2.4)$$

где a и b — некоторые коэффициенты.

Плотность описывается формулой

$$\rho = \rho(P) = \frac{\rho_g^{\text{STC}}}{B_G(P)}, \quad (2.5)$$

где ρ_g^{STC} — плотность газовой фазы в поверхностных условиях (STC — Stock-tank conditions), а $B_G(P)$ — объёмный фактор, или коэффициент объёмного расширения, отношение плотности фазы на поверхности и в резервуаре, на практике также задаваемый таблично.

В правой части (2.1) — точечный источник или сток Q , описывающий перфорации добывающих или нагнетательных скважин. Для добывающих скважин Q имеет название дебит, для нагнетательных — приёмистость.

Помимо скорости притока, работа скважины характеризуется заданным предельным давлением $P_{\text{ВН}}^{\text{lim}}$ на определённой глубине: по скважине будет ненулевая добыча или закачка, если давление $P_{\text{ВН}}$ в ней будет больше или меньше установленной планки, для добывающей и нагнетательной соответственно.

В качестве области рассмотрения выберем прямоугольник размером $L \times W$, временной промежуток T . На границе заданы условия непротекания

$$(\vec{u}, \vec{n}) = u_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.6)$$

где \vec{n} — внешняя нормаль к границе области.

Начальное условие — постоянное давление, значение которого находится внутри пределов работы скважин. Такое начальное условие можно трактовать как равновесное.

2.2 Разностная аппроксимация

Область покрыта равномерной сеткой с узлами:

$$\begin{aligned} x_i &= kh_x, & i &= 0, \dots, N_x; \\ y_j &= mh_y, & j &= 0, \dots, N_y; \\ h_x &= L/N_x, & h_y &= W/N_y, & \tau &= T/N_t; \end{aligned} \quad (2.7)$$

где N_t, N_x, N_y — количество шагов по времени и вдоль осей x и y .

Решение будем искать в виде сеточной функции $P_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}$, значения которой относятся к центрам ячеек, на которые разбита область.

Построим неявную консервативную разностную схему методом конечных объемов для (2.1) и (2.2) с учётом (2.6):

$$\frac{\widehat{m}\rho_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - m\rho_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{\tau} + \frac{V_{i+1j+\frac{1}{2}}^x - V_{ij+\frac{1}{2}}^x}{h_x} + \frac{V_{i+\frac{1}{2}j+1}^y - V_{i+\frac{1}{2}j}^y}{h_y} = Q_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}},$$

где $\widehat{}$ означает значение неизвестной с верхнего слоя по времени.

Аппроксимация потока имеет вид

$$V_{ij+\frac{1}{2}}^x = -K_{ij+\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho}{\mu} \right)_{ij+\frac{1}{2}} \frac{\widehat{P}_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - \widehat{P}_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}}{h_x}.$$

Проницаемость вычисляется как среднее гармоническое

$$\frac{1}{K_{ij+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{K_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{K_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}} \right).$$

Для аппроксимации ρ/μ воспользуемся принципом «up-wind», который в нашем случае состоит в следующем:

$$\left(\frac{\rho}{\mu} \right)_{ij+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\rho/\mu)_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}, & \text{если } p_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} \geq 0, \\ (\rho/\mu)_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}}, & \text{если } p_{i+\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2}j+\frac{1}{2}} < 0. \end{cases}$$

Метод учёта скважин в численных моделях фильтрации основан на допущении того, что вблизи скважины течение описывается аналитическим решением, граничные условия для которого определяются из численного решения задачи для пласта. Этот подход впервые предложен Писманом [7] в предположении радиального притока в скважину. Согласно результату Писмана дебит и приёмистость пропорциональны разности пластового и забойного давлений, задание $P_{\text{ВН}}^{\text{lim}}$ означает, что давление в соответствующей ячейке ограничено снизу или сверху.

Формула массового притока Q , входящего в правую часть уравнения (2.1), в случае диагонального тензора проницаемости для вертикальной скважины имеет следующий вид [7]:

$$Q = 2\pi h \frac{K\rho}{\mu} \frac{P - P_{\text{ВН}}}{\ln r_{\text{eff}}/r_{\text{well}}}. \quad (2.8)$$

h — эффективная толщина ячейки, $K = \sqrt{k_x k_y}$ — абсолютная проницаемость, P — давление в ячейке, $P_{\text{ВН}}$ — забойное давление, r_{eff} — эффективный радиус (расстояние от оси скважины, на котором давление равно P), r_{well} — радиус скважины.

Принимая во внимание ограничение, можно приближённо описать работу скважин следующим образом. На заданном шаге работает скважина с ненулевым источником, если давление в ячейке соответствует ограничению по $P_{\text{ВН}}^{\text{lim}}$. Если давление в ячейке переходит границу, скважина не работает, до тех пор, пока давление в ячейке не выровняется до обычного уровня пласта. Непосредственно $P_{\text{ВН}}$ в разностной схеме не участвует.

Построенная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h^2)$.

3 Методы решения

3.1 Метод Ньютона

Вследствие нелинейности поставленной задачи естественно использовать вариант метода Ньютона для многомерного случая, алгоритм которого описан ниже.

Пусть необходимо найти решение системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Обозначим для краткости $\vec{x}^{[j]} = (x_1^{[j]}, x_2^{[j]}, \dots, x_n^{[j]})$. Выбирая некоторое начальное приближение $\vec{x}^{[0]}$, последовательные аппроксимации $\vec{x}^{[j+1]}$, $j = 1, 2, \dots$, находим путём решения систем уравнений

$$f_i(x^{[j]}) + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x^{[j]}) (\vec{x}_k^{[j+1]} - \vec{x}_k^{[j]}) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Пусть \vec{X} — решение системы (3.1). Тогда при подходящем выборе начального приближения $\vec{x}^{[0]}$ итерационный процесс Ньютона сходится с квад-

ратичной скоростью:

$$\|\vec{x}^{[j]} - \vec{X}\|_2 \leq c^{-1}(c\|\vec{x}^{[0]} - \vec{X}\|_2)^{2j},$$

где $\|\cdot\|_2$ — обычная евклидова норма.

Таким образом, при достаточной гладкости \vec{f} и выборе начального приближения $\vec{x}^{[0]}$ достаточно близко к решению \vec{X} , итерации сходятся квадратично, что, вообще говоря, является критерием правильности реализации алгоритма.

3.2 Методы решения СЛАУ

3.2.1 Метод Гаусса–Зейделя

Метод Гаусса–Зейделя относится к классическим итерационным методам решения систем линейных уравнений.

Пусть дана СЛАУ в виде $Ax = b$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица A коэффициентов в методе Гаусса–Зейделя представляется в виде суммы трех матриц $A = L + D + U$, где L — нижнедиагональная, D — диагональная, U — верхнедиагональная матрицы.

После выбора начального приближения $\vec{x}^{[0]}$, очередное приближение $\vec{x}^{[j+1]}$ находится из системы уравнений

$$(L + D)\vec{x}^{[j+1]} = b - U\vec{x}^{[j]}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

решение которой не вызывает затруднений.

Для сходимости итерационного процесса достаточно, чтобы модули диагональных элементов для каждого уравнения системы были не меньше сумм модулей всех остальных коэффициентов (свойство диагонального преобладания):

$$|a_{ii}| \geq \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Существуют обобщения метода Гаусса–Зейделя для решения нелинейных задач. Пусть система задана в виде $\vec{f}(\vec{x}) = 0$. Тогда каждое последующее приближение вектора $\vec{x}^{[j+1]}$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(\underline{x_1^{[j+1]}}, \underline{x_2^{[j]}}, \dots, \underline{x_n^{[j]}}) = 0, \\ f_2(\underline{x_1^{[j+1]}}, \underline{x_2^{[j+1]}}, \dots, \underline{x_n^{[j]}}) = 0, \\ \dots \\ f_n(\underline{x_1^{[j+1]}}, \underline{x_2^{[j+1]}}, \dots, \underline{x_n^{[j+1]}}) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

в которой компоненты решения находятся последовательно из одномерных нелинейных уравнений.

Описанный нелинейный метод Гаусса–Зейделя будет использоваться в качестве сглаживателя в схеме полной аппроксимации (см. 3.4.6).

3.2.2 BiCGStab

Из-за нелинейности задачи полученные методом Ньютона системы линейных алгебраических уравнений имеют несимметричные матрицы коэффициентов. Поэтому для решения СЛАУ использовался метод бисопряженных градиентов (BiCGStab) [1], алгоритм которого изложен ниже:

- $r_0 = b - Ax_0$,
- $p_0 = r_0$,
- Вектор r_0^* выбираем случайным образом,
- Для $j = 1, 2 \dots$ повторяем следующий процесс, пока очередное приближение не удовлетворит необходимым критериям сходимости:

1. $\alpha_j = (r_0, r_0^*) / (Ap_j, r_0^*)$,
2. $s_j = r_j - \alpha_j Ap_j$,
3. $w_j = (As_j, s_j) / (As_j, As_j)$,
4. $x_{j+1} = x_j + \alpha_j p_j + w_j s_j$,
5. $r_{j+1} = s_j - w_j As_j$,
6. $\beta_j = (r_{j+1}, r_j^*) / (r_j, r_j^*) \times \alpha_j / w_j$,
7. $p_{j+1} = r_{j+1} + \beta_j (p_j - w_j Ap_j)$.

3.2.3 FGMRes

В работе также использовался метод FGMRes, описанный в [1].

Для практического применения в методе необходимо ввести параметр m — число базисных векторов z_j подпространства Крылова, в виде линейной комбинации этих векторов выражается приближенное решение x_m . Алгоритм FGMRes с предобуславливателем M кратко изложен ниже:

- $r_0 = b - Ax_0$,
- $\beta = \|r_0\|_2$,
- $v_1 = r_0/\beta$,
- Для $j = 1, 2, \dots, m$:
 1. $z_j = M_j^{-1}v_j$,
 2. $w = Az_j$,
 3. Для $i = 1, 2, \dots, j$,
 - (a) $h_{ij} = (w, v_i)$,
 - (b) $w = W - h_{ij}v_j$.
 4. $h_{i+1j} = \|w\|_2$,
 5. $v_{j+1} = w/h_{j+1j}$,
 6. $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$ — базисные вектора,
 7. $\tilde{H}_m = h_{ij} \mathbf{1}_{1 \leq i \leq j+1, 1 \leq j \leq m}$ — хессенбергова матрица.
- Вычисляем $y_m = \arg \min_y \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|_2$,
- Получаем новое приближение $x_m = x_0 + Z_m y_m$,
- Если решение не удовлетворяет необходимым требованиям, то $x_0 = x_m$ и перезапускаем описанный процесс с новым начальным приближением.

3.3 Предобусловливание

Хорошо известно, что скорость сходимости итерационных процессов зависит от спектральных свойств матрицы линейной системы. Цель переобусловливания состоит в построении матрицы M (переобусловливателя), в некотором смысле близкой к исходной матрице A , так что матрица AM^{-1} близка к единичной, а операция $M^{-1}b$ реализуется экономично [1]. Пусть M — некоторая невырожденная матрица размерности n . Домножив $Ax = b$ на M^{-1} , получим систему $M^{-1}Ax = M^{-1}b$, которая в силу невырожденности M имеет то же точное решение x . Введя обозначения $\hat{A} = M^{-1}A$ и $\hat{b} = M^{-1}b$, запишем в виде $\hat{A}x = \hat{b}$. Хотя $\hat{A}x = \hat{b}$ алгебраически эквивалентна $Ax = b$, спектральные характеристики матрицы \hat{A} отличаются от характеристик матрицы A , что приводит к изменению скорости сходимости итерационных методов для $\hat{A}x = \hat{b}$ по отношению к $Ax = b$. Такой процесс

перехода называется предобусловливанием, а матрица M — матрицей предобусловливателя.

Наиболее эффективным предобусловливателем представляется метод Nested Factorization [8], использующий информацию о структуре матрицы в задачах рассматриваемого типа [9]. Однако его исследование выходит за рамки настоящей работы.

Среди методов алгебраического переобусловливания, когда матрица M определяется только элементами матрицы A и никак не использует информацию об исходной дифференциальной задаче, наиболее популярной является неполная LU-факторизация, осуществляющая приближенное LU-разложение с занулением внедиагональных малых элементов верхней и нижней треугольных матриц.

Ниже подробнее остановимся на двух методах факторизации — ILU(0) и ILUT.

3.3.1 ILU-факторизация

ILU(0) предобусловливатель основан на известной [1] факторизации исходной матрицы в произведение двух треугольных матриц: нижней треугольной и верхней треугольной матрицы. Отличительной особенностью ILU(0) является то, что он сохраняет структуру исходной матрицы в результирующей матрице.

Обозначим через $NZ(A)$ множество ненулевых элементов в $A = LU$. Алгоритм ILU(0) имеет следующий вид:

- Для $i = 2, \dots, n$:
 1. Для $k = 1, \dots, i-1$ и $(i, k) \in NZ(A)$:
 - (a) $a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$,
 - (b) Для $j = k+1, \dots, n$ и $(i, j) \in NZ(A)$:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$$

3.3.2 ILUT-факторизация

В отличие от предобусловливателя ILU(0), ILUT сохраняет некоторое результирующее заполнение в структуре матрицы. Элемент в матрице сохраняется, если он удовлетворяет двум условиям одновременно: значение элемента больше произведения определенного порога τ на норму строки матрицы и сам элемент находится в заданной полосе результирующей матрицы.

Алгоритм:

- Для $i = 1, \dots, n$:
 1. $w = a_{i*}$ — строка матрицы A с номером i ,
 2. Для $k = 1, \dots, i-1$ и $w_k \neq 0$,
 - (a) $w_k = w_k/a_{kk}$,
 - (b) Проверка условий для w_k ,
 - (c) Если $w_k \neq 0$, тогда $w = W - w_k \cdot u_k$.
 3. Проверка условий для строки w ,
 4. $l_{ij} = w_j$ для $j = 1, \dots, i-1$,
 5. $u_{ij} = w_j$ для $j = i, \dots, n$.

3.4 Многосеточные методы

Ниже будут рассмотрены следующие многосеточные методы:

- Линейный мультигрид:
 - V-цикл (3.4.2)
 - W-цикл (3.4.3)
 - Каскадный многосеточный метод (3.4.4)
 - FMG (линейный) (3.4.5)
- Нелинейный мультигрид:
 - FAS (3.4.6)
 - FMG (нелинейный) (3.4.7)

3.4.1 Основа многосеточных методов. Схема коррекции

Простейшим многосеточным методом является двухсеточная схема коррекции (correction scheme, CS), которая выполняется на сетках с шагом h и H по следующему алгоритму:

1. Предварительное сглаживание решения,
2. Вычисление невязки на полной сетке $r_h = b_h - A_h u_h$,
3. Ограничение невязки на грубую сетку $r_H = I_h^H r_h$,
4. Точное решение на грубой сетке $A_H v_H = r_H$,

5. Перенос поправки на мелкую сетку $v_h = I_H^h v_H$,
6. Уточнение решения $u_h = u_h + v_h$,
7. Послесглаживание решения.

Гладкость невязки в рассматриваемых задачах даёт возможность вычисления ошибки v_h на грубой сетке с последующей интерполяцией на исходную. В качестве сглаживания (шаги 1 и 7 схемы коррекции) в работах [4] и [10] использован метод Гаусса–Зейделя (3.2.1) по причине его быстрого «гашения» негладких компонент невязки r_h и превращения её в достаточно гладкую функцию.

Таким образом, комбинация сглаживания с последующей коррекцией на грубой сетке составляет двухсеточную схему коррекции, которая является теоретической основой многосеточных методов.

3.4.2 V-цикл

Вычисление поправки в схеме коррекции (шаг 4) можно осуществлять этой же схемой, используя ещё более грубую сетку и получая, таким образом, V-цикл, построенный на трех сетках. Следовательно V-цикл заключается в рекурсивном использовании схемы коррекции (рис. 1).

Следует отметить, что необходимая точность полученного решения V-циклом достигается не увеличением числа сглаживающих и послесглаживающих итераций, хотя это и повышает скорость сходимости метода, а дополнительными итерациями V-цикла, поскольку не представляется ясным, как регулировать число сглаживающих и послесглаживающих итераций в зависимости от точности получаемого решения. Далее под V-циклом будем подразумевать этот итерационный процесс.

3.4.3 W-цикл

Данный метод, как и V-цикл, является итерационным, одна итерация — один шаг, как и в предыдущем методе, строится рекурсивно, но в качестве шага рекурсии используется минимальный W-цикл (один проход), строящийся на трёх сетках (рис. 1). Доказательство сходимости V- и W-циклов приведено в работе [4]. Скорость сходимости W-цикла при равном количестве сглаживающих итераций выше, чем у V-цикла. Однако из-за заметного увеличения числа операций на шаг итерации W-цикл «проигрывает» по времени (см. в результатах ниже).

В вышерассмотренных методах сохраняется проблема выбора начального приближения. Вместе с тем несколько уровней сеток могут использоваться не только для коррекции, но и для нахождения начального приближения. Далее описаны такие многосеточные методы.

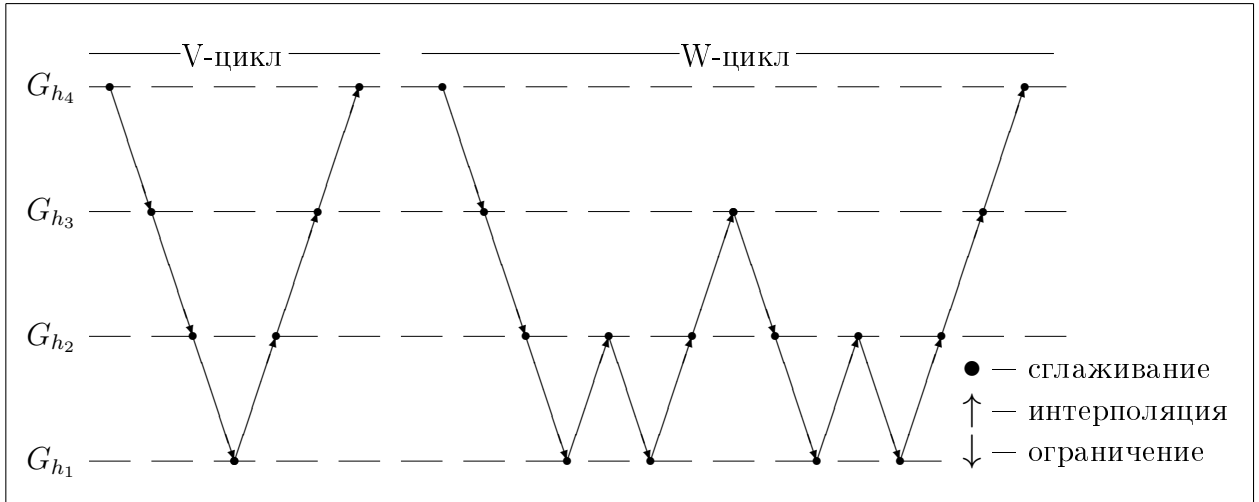


Рис. 1. Схематическое представление V и W-циклов на четырёх сетках.

3.4.4 Каскадный многосеточный метод

Итак, на последовательности сеток $h = h_1 > h_2 > \dots > h_{M-1} > h_M$, где M — число уровней, имеем набор задач $A_h u_h = b_h$. Каскадный алгоритм состоит в последовательном решении этих систем (рис. 2). При самом грубом разбиении $h = h_1$ число уравнений в системе невелико, поэтому задача решается прямым методом. На более мелких сетках приближенные решения получают итерационным методом. Доказательство сходимости каскадного многосеточного метода приводится в работах [11] и [12].

Сформулируем каскадный алгоритм с некоторым абстрактным итерационным процессом S_l , соответствующим послесглаживанию в схеме коррекции:

1. $u_1 = A_1^{-1} b_1$,
2. На подробных сетках $l = 2, \dots, M$
 - (a) интерполируем начальную аппроксимацию решения:
 $u_l = I_{l-1}^l u_{l-1}$,
 - (b) Полагаем $u_l = S_l(A_l, u_l, b_l)$,
3. «Дожимаем» невязку с помощью S_l .

В качестве сглаживателя S_l при расчётах остановимся согласно [12] на BiCGStab.

3.4.5 Полный многосеточный метод

Для ускорения предыдущего алгоритма естественно вместо сглаживателя S_l использовать одну итерацию V-цикла. Таким образом, получаем

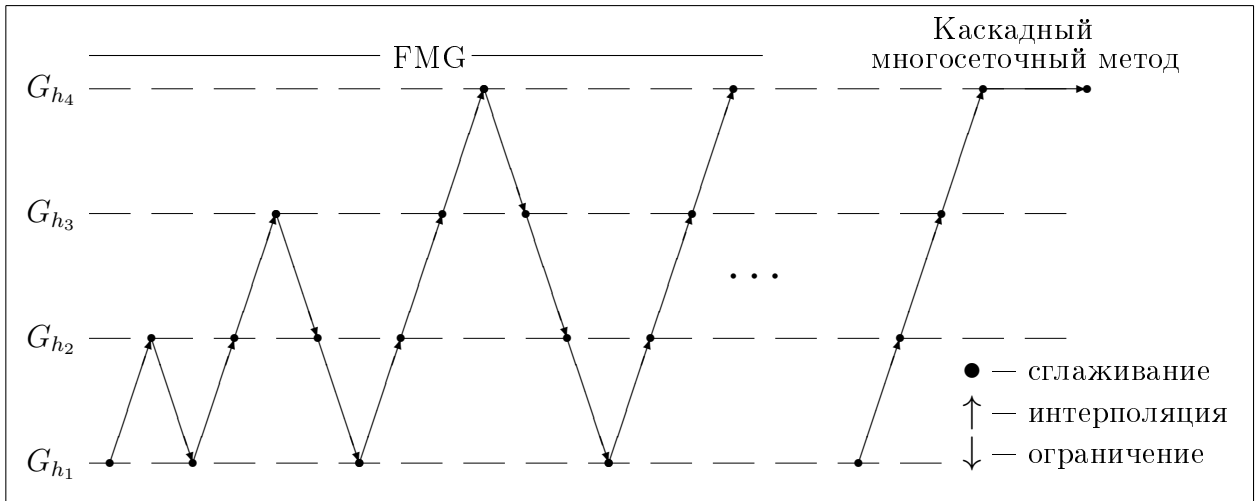


Рис. 2. Схематическое представление FMG и каскадного метода для четырех сеток.

следующий алгоритм: вычисление начального приближения на предыдущем слое (начиная с самой крупной сетки) и «подъем вверх» к исходному с использованием V-цикла (или в общем случае W-цикла) (рис. 2).

Этот метод называется полным многосеточным (Full MultiGrid, FMG). Ниже приведен в общем виде алгоритм для него:

1. Ищем решение на самой грубой сетке G_1 : $A_1 u_1 = b_1$,
2. На подробных сетках $l = 2, \dots, M$
 - (a) интерполируем начальную аппроксимацию решения:

$$u_l^0 = I_{l-1}^l u_{l-1},$$
 - (b) рассчитываем значение u_l , используя V-цикл (или W-цикл) на сетках G_1, G_2, \dots, G_l .
3. Применяем «дожимающие» итерации V-цикла (или W-цикла).

Заметим, что последний V-цикл в FMG начинается с исходной сетки, то есть время исполнения FMG никак не может оказаться меньше, чем исполнения V-цикла (одна итерация), однако ясно, что полученная аппроксимация решения с помощью FMG окажется точнее аппроксимации с помощью V-цикла (за один шаг). Следовательно, априори FMG выгоднее использовать для уравнений без хорошего начального приближения, в первую очередь эллиптических.

3.4.6 Схема полной аппроксимации

При независимом решении СЛАУ в методе Ньютона дополнительное ускорение может быть достигнуто за счёт согласования точности внутрен-

них и внешних итераций: на первых ньютоновских итерациях требуется меньшая точность. Для автоматического выбора требуемой точности линейных итераций существуют различные методы, носящие общее название Inexact Newton [13]. Его исследование выходит за рамки настоящей работы.

Наряду с подходом, в котором разделены метод Ньютона и решение СЛАУ, существуют прямые многосеточные методы для решения нелинейных задач.

Такие подходы обладают рядом преимуществ:

1. не требуется согласования внутренних и внешних итераций (по причине отсутствия последних);
2. структура цикла та же, что и для линейных задач;
3. итерации могут сходиться быстрее (см. результаты расчётов в п. 4).

Основная идея рассматриваемых обобщений заключается в изменении схемы коррекции (см. п. 3.4.1) таким образом, чтобы туда вместо линейного входил нелинейный оператор [14]. Пусть теперь оператор A_h является нелинейным:

$$\begin{aligned} A_h u_h &= b_h, \\ A_h(u_h^i + v_h^i) &= b_h, \end{aligned}$$

u_h^i — приближение искомого решения u_h , тогда v_h^i — погрешность этого приближения. Как и на шаге 2, для нахождения погрешности v_h^i вычтем из правой и левой части уравнения $A_h u_h^i$:

$$A_h(u_h^i + v_h^i) - A_h u_h^i = b_h - A_h u_h^i = r_h^i.$$

По аналогии с шагом 3 схемы коррекции, ограничиваем решение на более грубую сетку

$$A_H(\widehat{I}_h^H u_h^i + v_H^i) - A_H \widehat{I}_h^H u_h^i = I_h^H r_h^i.$$

Однако теперь \widehat{I}_h^H может не совпадать с I_h^H — это позволяет обобщить схему на нелинейные задачи.

На грубой сетке оператор A_H , также как и A_h , является нелинейным, то есть зависит от u_H . Тогда из

$$A_H u_H = I_h^H r_h^i + A_h \widehat{I}_h^H u_h^i$$

находим аппроксимацию решения на грубой сетке

$$u_H^i = v_H + \widehat{I}_h^H u_h^i,$$

где v_H — аппроксимация погрешности

$$v_H = u_H^i - \widehat{I}_h^H u_h^i.$$

Интерполируем погрешность на более подробную сетку (шаг 5 схемы коррекции):

$$v_h = I_H^h v_H.$$

Корректируем решение на точной сетке (шаг 6 схемы коррекции):

$$u_h = u_h^i + v_h.$$

Переносить сразу $u_h = I_h^H u_H^i$ здесь будет неправильно, поскольку мы внесём большую ошибку интерполяции полной аппроксимации решения вместо того, чтобы интерполировать достаточно гладкую функцию погрешности v_H .

Необходимо отметить, что на грубой сетке решается уравнение для полной аппроксимации решения (отсюда и название метода — схема полной аппроксимации), однако с сетки на сетку переносятся погрешность и невязки, поскольку именно они являются гладкими функциями.

Таким образом, описанными выше преобразованиями строится обобщение схемы коррекции на нелинейные задачи.

В качестве сглаживателя и послесглаживателя выберем в соответствии с [10] метод Гаусса-Зейделя для нелинейного оператора (см. п. 3.2.1).

3.4.7 Полный многосеточный метод для нелинейного оператора

Строится аналогично линейному FMG (3.4.5), однако использует схему полной аппроксимации вместо V-цикла (в пунктах 2b и 3). Доказательство сходимости метода приведено в работе [10].

Сформулируем основные преимущества нелинейного FMG:

1. более эффективен, чем просто многосеточный метод (V-цикл или W-цикл), за счёт комбинированного использования решения на более грубых сетках в качестве начального приближения и многосеточного метода для расчёта самого решения на подробных сетках;
2. применим для решения как линейных, так и нелинейных задач;
3. позволяет рассчитывать значения решения вплоть до уровня ошибки аппроксимации.

3.4.8 Перенос невязки и коррекции

Одним из важнейших шагов в многосеточных методах является экстраполяция (restriction) и интерполяция (interpolation) в схеме коррекции. От них зависит не только скорость работы, но и точность алгоритма. В рамках данной работы были рассмотрены два способа интерполяции и экстраполяции.

Первый, описанный в работе [15], довольно прост в реализации, однако имеет жёсткие ограничения на сетки, между которыми проводится интерполяция: для применения данной интерполяции необходимо, чтобы сетки были равномерными и одна была меньше другой в два раза по каждому направлению.

Перенос в двумерном случае проводится с помощью следующих операторов:

$$I_{2h}^h = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h \quad \text{— экстраполяция;}$$

$$I_h^{2h} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_h \quad \text{— интерполяция.}$$

Второй рассмотренный метод интерполяции работает следующим образом. Имеются две сетки (G_1, G_2) , где проводится интерполяция с первой на вторую. По аналогии с построением интерполяционного многочлена в форме Ньютона для одномерного случая строим интерполяцию функции для всей области:

1. соединяя узлы G_1 , разбиваем исходную расчетную область на треугольные элементы,
2. в области элементов строим линейные полиномы, принимающие известные значения в узлах,
3. объединение всех полученных полиномов, определённых на соответствующих элементах, даст нам искомую интерполяцию функции.

Естественно, что построенная интерполяция функции на всей области позволяет получить значение в любой точке, в частности, в узлах сетки G_2).

Ясно, что второй метод применим для любых сеток и его реализация для экстраполяции и интерполяции будет одинакова, однако на практике для равномерных сеток он оказывается намного медленнее, чем первый. Поэтому в тестах используется первый способ.

3.5 Обезразмеривание

При задании параметров фильтрации течения на практике используется метрическая система единиц: давление P — бар (10^5 Па), время t — сутки (86400 с), вязкость μ — сантипуаз (10^{-3} Па·с), проницаемость K — мДарси ($0.9869233 \cdot 10^{-15}$ м²), пористость m — безразмерная. Массовый дебит (приёмистость) Q задаётся в единицах кг/сут. В размерных единицах уравнение (2.1) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(m\bar{\rho}) + \operatorname{div}\left(\bar{K}\frac{\bar{\rho}}{\bar{\mu}}\nabla\bar{P}\right) = \bar{Q}.$$

Величины с чертой измеряются в единицах СИ.

Для того чтобы уравнение в выбранных единицах совпадало с исходным, проницаемость в единицах мДарси домножим на коэффициент C_1 (константу Дарси), равный

$$\frac{10^5 \cdot 8.64 \cdot 10^4 \cdot 0.9869233 \cdot 10^{-15}}{10^{-3}} = \frac{8.64 \cdot 10^{-3}}{1.01325} = 0.008527.$$

3.6 Особенности реализации

Для получения наиболее достоверных результатов сравнения ресурсозатрат и скорости работы методов использованы следующие приёмы:

1. написана программа на C++;
2. реализация методов имеет идентичную структуру;
3. используются одинаковые блоки (такие как линеаризация, решение СЛАУ, сглаживание и т. п.) в реализации методов;
4. оптимизированы времязатратные операции (таким как умножение на матрицу, вычисление скалярных произведений, операторов интерполяции), проведено профилирование;
5. матрицы хранятся в сжатом формате (CSR);
6. проведены тесты и выявлен наиболее эффективный тип экстра- и интерполяции (см. раздел 3.4.8);
7. проведено обезразмеривание для приведения величин к одним порядкам (см. п. 3.5).

4 Результаты расчетов

4.1 Параметры задачи

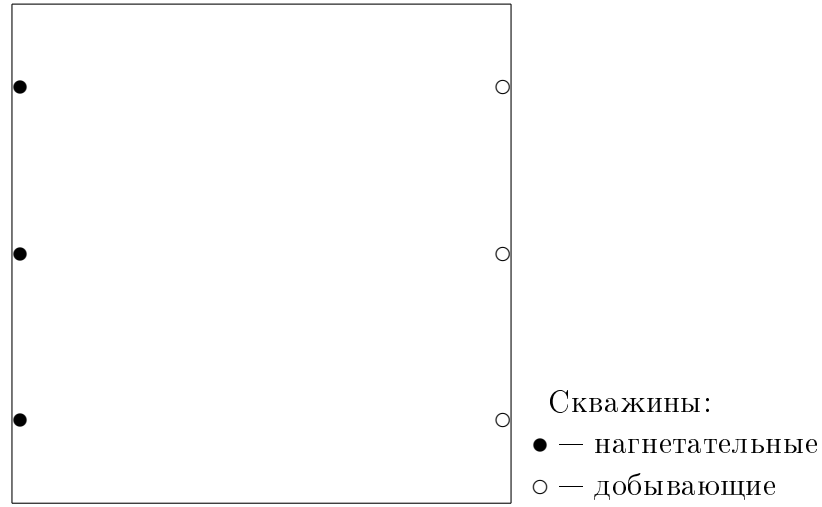


Рис. 3. Схематическое расположение скважин.

Рассматривается двумерная задача однофазной фильтрации, задаваемая уравнениями (2.1) и (2.2) с учётом (2.6), рядом с левой и правой границами установлены три добывающие и три нагнетательные скважины, соответственно (рис. 3).

Коэффициенты в зависимостях пористости, вязкости и плотности от давления, описанные в разделе 2.1, выбраны следующими:

$$m_0 = 0.3, \quad P_0 = 276.804 \text{ бар}, \quad b = 0.01 \text{ спз},$$

$$C = 5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{бар}}, \quad a = 6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{спз}}{\text{бар}}, \quad \rho_g^{\text{STC}} = 0.969 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Абсолютная проницаемость K положена постоянной, равной 1.

Для задания зависимости $\rho(P)$ используется интерполяция безразмерного коэффициента $B_G(P)$ из табл. 1, взятой из [16].

P	1.01	18.2	35.5	67.1	139	173	208	277	346	621
$10^3 B_G(P)$	936	67.9	35.2	17.9	9.1	7.3	6.1	4.5	3.6	2.2

Табл. 1. Зависимость B_G от P .

Начальное распределение давления постоянно, составляет 200 бар, предельное давление $P_{\text{ВН}}$ на добывающей скважине — 100 бар, на закачивающей скважине — 300 бар.

Размеры области 200 на 200 метров, расчётный временной промежуток 100 суток.

Получаемое распределение давления для выбранных параметров задачи показано на рис. 4.

4.2 Обсуждение результатов

Для сравнения рассматриваемых в разд. 3 методов необходимо получить «эталонное» решение, так чтобы можно было определять работоспособность и задавать необходимую точность в каждом методе. «Эталонное» решение получено стандартной комбинацией метода Ньютона и прямого солвера PARDISO из пакета Intel MKL.

Помимо определения эффективности алгоритмов, проведено сравнение ресурсозатрат и скорости работы методов. Тесты и полученные результаты описаны ниже.

В следующих тестах под точностью подразумевается максимальное по последнему временному слою компонентное отклонение от «эталонного» решения. Во всех многосеточных алгоритмах в качестве сглаживания и послесглаживания использовалась одна итерация метода Гаусса–Зейделя. Критерий выхода из метода Ньютона — уменьшение евклидовой нормы невязки в 10^{-6} раз относительно начальной. Для нелинейных методов, таких как FAS и нелинейный FMG, критерий выбран таким же.

Результаты расчётов приводятся в таблицах, в которых указаны время работы программы, точность полученного решения, среднее количество ньютоновских итераций, среднее время итерации и среднее количество итераций.

Параметры FGMRes restart	Сред. время реш. СЛАУ, с	Сред. кол-во итераций	Время ILUT, с	Время FGMRes, с
2	12.57	34.73	8.63	3.93
3	11.19	27.46	6.9	4.27
5	10.63	24.28	6.27	4.34
10	7.47	22.2	4.3	3.15
20	12.23	21.84	7.76	4.45
50	11.13	21.25	6.68	4.42
100	10.64	21.25	7.28	3.34
150	10.26	21.25	6.95	3.28

Табл. 2. Выбор оптимальных параметров FGMRes.

Параметры для прекондиционера ILUT и солвера FGMRes подбирались оптимальные — такие, для которых связка FGMRes+ILUT показывает наи-

более высокую скорость решения СЛАУ (табл. 2 и 3). Для выбора параметра p и τ исходная задача была несколько изменена для получения большего разброса показателей.

Параметры ILUT	Сред. время реш. СЛАУ, с	Сред. кол-во итераций	Время ILUT, с	Время FGMRes, с
$p = 5 \tau = 10^{-6}$	47.5	120	0.56	42.7
$p = 10 \tau = 10^{-6}$	20.1	68	1.36	19.2
$p = 15 \tau = 10^{-6}$	11.4	40	2.18	9.2
$p = 20 \tau = 10^{-6}$	10.8	31	3.02	7.8
$p = 25 \tau = 10^{-6}$	11.2	27	4.29	6.9
$p = 30 \tau = 10^{-6}$	11.5	23	5.28	6.2
$p = 20 \tau = 10^{-3}$	26.6	82	0.56	26.06
$p = 20 \tau = 10^{-8}$	11.9	32	3.8	8.1

Табл. 3. Выбор оптимальных параметров ILUT.

Таким образом, в расчётах в качестве параметров ILUT взяты $p = 20$ и $\tau = 10^{-6}$, а в методе FGMRes максимальное число крыловских подпространств положено 10.

Далее приведены результаты двух расчётов для следующих разбиений: по времени 100 шагов, область из 640×640 и 320×320 ячеек (табл. 4 и 5, соответственно). Размерность грубой задачи 10×10 .

В таблицах результатов расчётов обозначено NI — среднее количество нелинейных итераций, LI — линейных, TI — среднее время итерации.

Метод	Время, с	Точность	NI	LI	TI
BiCGStab	5165.97	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	427.99	0.056
FGMRes+ILU(0)	17301.06	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	224.167	0.37
FGMRes+ILUT	2637.18	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	29	0.344
PARDISO	1896.83	0	2.02	1	5.223
V-цикл	969.22	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	11.46	0.057
W-цикл	1035.98	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	8.68	0.106
каскадный MG	4758.98	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	19.98	1.005
линейный FMG	909.77	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.05	8.3	0.064
FAS	4114.99	$2.4 \cdot 10^{-7}$	1	5.7	2.91
нелинейный FMG	3788.27	$2.1 \cdot 10^{-7}$	1	4.15	4.571

Табл. 4. Результаты расчётов для разбиения 640×640 .

FAS и нелинейный FMG не требуют согласования внутренних и внешних итераций, поэтому в колонке NI стоит единица.

Метод	Время, с	Точность	NI	LI	TI
BiCGStab	650.55	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	208.98	0.0105
FGMRes+ILU(0)	690.55	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	83.99	0.029
FGMRes+ILUT	487.68	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	11.9	0.118
PARDISO	418.53	0	2.02	1	1.079
V-цикл	236.29	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	10.75	0.015
W-цикл	256.04	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	8.92	0.03
каскадный MG	627.23	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	8.53	0.248
линейный FMG	215.86	$2.7 \cdot 10^{-7}$	2.02	8.93	0.017
FAS	504.81	$1.9 \cdot 10^{-7}$	1	5.5	0.722
нелинейный FMG	457.65	$2.2 \cdot 10^{-7}$	1	3.95	1.187

Табл. 5. Результаты расчётов для разбиения 320×320 .

В результате получено, что наибольшее ускорение при одинаковой точности дал полный многосеточный метод (FMG), примененный к линеаризованной задаче, которому примерно в два раза по скорости уступает нелинейный FMG, притом что в целом эти методы превзошли базовый метод без предобусловливания и показали схожее время с комбинацией FGMRes с прекодиционером ILUT. Хотя в нелинейном мультигриде не требуется строить якобиан, итерации в этом методе оказываются более времязатратными. В связи с этим для выбранной задачи оказалось более выгодным использование комбинации полного многосеточного метода (FMG) и линеаризации Ньютона.

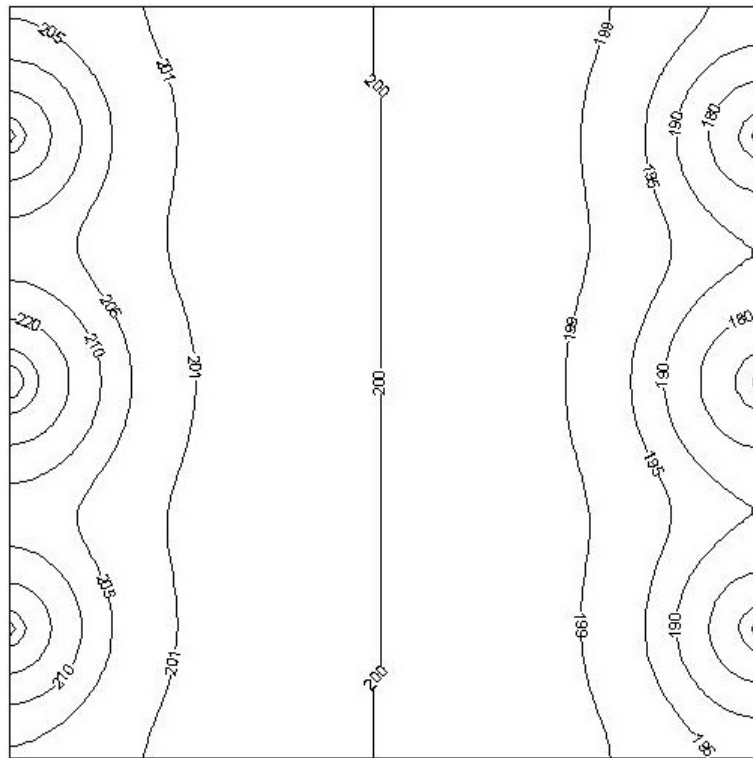


Рис. 4. Распределение давления на последнем слое по времени.

5 Заключение

В данной работе рассмотрены геометрические многосеточные методы, использующие информацию о сетках на разных уровнях вложенности, для решения нелинейных задач, описываемых уравнениями параболического типа. Основным результатом настоящего исследования можно считать вывод о применимости нелинейных обобщений многосеточных методов к нестационарным задачам, таким как уравнения фильтрации. Наиболее быстрыми оказались линейный полный многосеточный метод и V-цикл, применённые к линеаризованной задаче. Обобщения многосеточного метода на нелинейный случай — FAS и нелинейный — FMG не уступают по эффективности методам крыловского типа с применением предобусловливателей. Существенным преимуществом нелинейных многосеточных методов является отсутствие необходимости линеаризации и построения якобиана, что несколько упрощает программную реализацию данных алгоритмов.

Авторы выражают благодарность Е. Б. Савенкову и А. Х. Пергамент за неоценимую помощь при подготовке настоящей работы.

Список литературы

- [1] Yousef Saad. *Iterative methods for sparse linear systems*. PWS Publishing, Boston, second edition with corrections edition, 2000.
- [2] Р. П. Федоренко. *Введение в вычислительную физику*. Изд-во МФТИ, Москва, 1994.
- [3] Р. П. Федоренко. Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*, 1(5):922–927, 1961.
- [4] Ю. В. Василевский, М. А. Ольшанский. Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. Москва, 2007.
- [5] Van Emden Henson. Multigrid methods for nonlinear problems: An overview. In *Proceedings of the SPIE*, pages 36–48, 2003.
- [6] Wing Hong Felix Kwok. *Scalable Linear and Nonlinear Algorithms for Multiphase Flow in Porous Media*. PhD thesis, Stanford University, 2007.
- [7] D. W. Peaceman. Interpretation of wellblock pressures in numerical reservoir simulation. *SPE Reservoir Engineering*, 5(2):227–232, 1990.
- [8] J. R. Appleyard and I. M. Cheshire. Nested factorization. In *Seventh SPE Symposium on Reservoir Simulation*, San Francisco, 1983. SPE 12264.
- [9] N. N. Kuznetsova, O. V. Diyanov, S. S. Kotegov, S. V. Koshelev, I. V. Krasnogorov, V. Y. Pravilnikov and S. Y. Maliassov. The family of nested factorization. *Russian Journal of Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, 22(4):393–412, 2007.
- [10] Е. Н. Станкова, М. А. Затевахин. Многосеточные методы. Введение в стандартные методы., 2003.
- [11] Л. В. Гилёва. Каскадный многосеточный алгоритм в методе конечных элементов для трехмерной задачи Дирихле. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 1:217–226, 1998.
- [12] Л. В. Гилёва, В. В. Шайдуров. Каскадный многосеточный алгоритм в методе конечных элементов для трехмерной задачи Дирихле в области с криволинейной границей. *Сибирский журнал вычислительной математики*, 5:127–147, 2002.

- [13] Jianwen Cao and Jiachang Sun. An efficient and effective nonlinear solver in a parallel software for large scale petroleum reservoir simulation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, 2:15–27, 2005.
- [14] Chin-Tien Wu. An introduction of multigrid methods for large-scale computation., 2005.
- [15] Klaus Stuben. *Multigrid (MG) and Local Refinement for Elliptic Partial Differential Equations*. FhG-SCAI, Schloss Birlinghoven 53754 St. Augustin and Germany.
- [16] Odeh, S. Aziz, Mobil Research and Development Corp. Comparison of solutions to a three-dimensional black-oil reservoir simulation problem. *Journal of Petroleum Technology*, 33(1):13–25, 1981.