ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 54 за 2011 г.

Брюно А.Д.

Степенно-экспоненциальные разложения решений ОДУ

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Брюно А.Д. Степенно-экспоненциальные разложения решений ОДУ // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 54. 11 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-54

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМЕНИ М. В. КЕЛДЫША

А. Д. Брюно

СТЕПЕННО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ ОДУ

Москва, 2011 г.

А. Д. Брюно. Степенно-экспоненциальные разложения решений ОДУ. Препринт Института прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2011.

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение весьма общего вида. Для него вводится понятие степенно-экспоненциального разложения решений и указывается способ их вычисления. Показывается, что для второго уравнения Пенлеве нет таких разложений решений, а для четвертого уравнения Пенлеве они есть.

A. D. Bruno. Power-exponential expansions of solutions to an ODE. Preprint of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow, 2011.

We consider an ordinary differential equation of a very general form. For it, we introduce the notion of a power-exponential expansion of its solutions and give a method of calculation of the expansion. We show that the second Painlevé equation has not got such expansion of solution, but the fourth Painlev'e equation has them.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 11-01-00023.

E-mail: abruno@keldysh.ru
сайт: www.keldysh.ru
Персональная стр.: http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_Dmitrievich_Bruno

1 Введение

Здесь рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$f(x,y)=0, \tag{1.1}$$

где $f(x,y)$ — дифференциальная сумма [1], т. е. сумма (конечного числа) дифференциальных мономов, каждый из которых является произведением обычного монома и конечного числа производных $d^l y/dx^l$.

Пусть $x\to\infty$. Ассимптотическое разложение решений уравнения (1.1)

$$y=x^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_k(u)u^{-k}, \tag{1.2}$$

где $u=x^\beta$, α и $\beta=\mathrm{const}\in\mathbb{R}$, $\beta>0$ и $\varphi_k(u)$ — комплексно-периодические функции от u, т. е. разлагаются в ряды типа Фурье

$$\varphi_k(u)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\varphi_{kn}e^{n\lambda u},\quad \lambda,\varphi_{kn}=\mathrm{const}\in\mathbb{C} \tag{1.3}$$

будем называть *степенно-экспоненциальным.*

Наша цель: указать способ вычисления таких разложений и выяснить их существование для первых четырех уравнений Пенлеве P_1–P_2. Решение задачи распадается на две части: сначала находится начальный член

$$y=x^\alpha\varphi_0(u) \tag{1.4}$$

разложений (1.2), а затем — его хвост. Алгоритм решения первой задачи указан в §1 в [2]. Здесь он повторяется в §2. В §3 указан алгоритм вычисления хвоста разложения вида (1.2). В §2 в [2] были найдены начальные члены (1.4) для уравнений Пенлеве P_2 и P_4. Здесь в §4 показано, что для уравнения P_2 начальный член (1.4) не продолжается в разложение (1.2), а в §5 показано, что для уравнения P_4 начальный член (1.4) продолжается в разложение вида (1.2).

2 Степенно-экспоненциальные асимптотики [2]

Каждому дифференциальное моному $a(x,y)$ ставится в соответствие его *трехмерный показатель степени* $\mathbf{Q}(a)=(q_1,q_2,q_3)$ по следующим правилам

$$\mathbf{Q}(cx^ry^s)=(r,s,0);$$
$$\mathbf{Q}(d^ly/dx^l)=(0,1,l);$$

показатель степени произведения является суммой показателей степеней сомножителей

$$\mathbf{Q}(ab) = \mathbf{Q}(a) + \mathbf{Q}(b).$$

Множество $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ показателей степеней $\mathbf{Q}(a_i)$ всех дифференциальных мономов суммы $f(x,y) = \sum a_i(x,y)$ называется *носителем суммы* $f(x,y)$. Очевидно, $\tilde{\mathbf{S}}(f) \subset \mathbb{R}^3$. Выпуклая оболочка $\mathbf{\Gamma}(\mathbf{f})$ носителя $\tilde{\mathbf{S}}(f)$ называется *многогранником суммы* $f(x,y)$. Граница $\partial\mathbf{\Gamma}(f)$ многогранника $\mathbf{\Gamma}(f)$ состоит из вершин $\mathbf{\Gamma}_j^{(0)}$, ребер $\mathbf{\Gamma}_j^{(1)}$ и граней $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Они называются *(обощенными) гранями* $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$, где верхний индекс указывает размерность грани, а нижний — её номер. Каждой грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(d)}$ соответствует *укороченная сумма*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = \sum a_i(x,y) \text{ по } \mathbf{Q}(a_i) \in \tilde{\mathbf{S}}(f) \cap \mathbf{\Gamma}_j^{(d)}.$$

Пусть $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль двумерной грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$. Будем рассматривать только нормали с $n_1 > 0$ (ибо $x \to \infty$), поэтому можно считать, что $n_1 = 1$.

Пусть грань $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$ имеет внешнюю нормаль $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, тогда соответствующее укорочение

$$\check{f}_j^{(2)}(x,y) = x^q g(y),$$

где $g(y)$ содержит только y и его производные, но не содержит x. В этом случае полная сумма $f(x,y)$ может быть записана как

$$f(x,y) = x^q g(y) + x^{q-\gamma} h(x,y), \tag{2.1}$$

где $\gamma > 0$ и $h(x,y)$ — дифференциальная сумма.

Все эти конструкции применимы к дифференциальному уравнению (1.1). При этом укороченной сумме $\check{f}_j^{(d)}(x,y)$ соответствует *укороченное уравнение*

$$\check{f}_j^{(d)}(x,y) = 0.$$

Замечание 2.1. В случае $\mathbf{N}_j = (1,0,0)$, если $y(x)$ — решение уравнения $g(y) = 0$ со свойством

$$0 < \varepsilon < |y(x)|, |y'(x)|, \ldots, |y^{(n)}(x)| < \varepsilon^{-1} \tag{2.2}$$

где ε — малое положительное число, то $y(x)$ может быть асимптотикой решений полного уравнения (1.1) при $x \to \infty$.

Пусть степенное преобразование переменных $x, y \mapsto u, v$:

$$y = x^\alpha v, \quad u = x^\beta \tag{2.3}$$

преобразует $f(x,y)$ в $f^*(u,v)$.

Теорема 2.1. *Пусть грань* $\mathbf{\Gamma}_1^{(2)}$ *многогранника* $\mathbf{\Gamma}(f)$ *имеет внешнюю нормаль* $\mathbf{N}_j = (1, n_2, n_3)$ *с* $n_3 + 1 > 0$, *тогда степенное преобразование* (2.3) *с* $\alpha = n_2$, $\beta = n_3 + 1$ *преобразует укорочение* $\check{f}_j^{(2)}(x, y)$ *суммы* $f(x, y)$ *в укорочение*

$$\check{f}_j^{*(2)}(u, v) = u^q g(v) \tag{2.4}$$

суммы $f^*(u, v)$, *соответствующее грани* $\mathbf{\Gamma}_j^{*(2)}$ *многогранника* $\mathbf{\Gamma}(f^*)$ *с внешней нормалью* $\mathbf{N}_j^* = (1, 0, 0)$. *Здесь* $\check{f}_j^{*(2)}(u, v)$ *равно* $\check{f}_j^{(2)}(x, y)$ *после постановки*

$$\beta^l u^{[\alpha + l(\beta - 1)]/\beta} d^l v / du^l \tag{2.5}$$

вместо $d^l y / dx^l$.

Поэтому, если $v = \varphi(u)$ — решение уравнения $g(v) = 0$ и $|\varphi(u)|$ ограничен от нуля и бесконечности как $y(x)$ в (2.2), то решения исходного уравнения (1.1) могут иметь асимптотику

$$y \sim x^\alpha \varphi(x^\beta), \quad x \to \infty. \tag{2.6}$$

3 Вычисление разложения (1.2)

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении* (1.1) *выполнено свойство* (2.1) *и уравнение* $g(y) = 0$ *имеет решение*

$$y = \varphi_0(x),$$

со свойством (2.2). *Если решения уравнения* (1.1) *имеют асимптотическое разложение*

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) x^{-k} \tag{3.1}$$

со свойством (2.2) *для* $y = \varphi_k(x)$, *то* $\varphi_k(x)$ *удовлетворяют линейным уравнениям*

$$\mathcal{L}(x)\varphi_k(x) + \theta_k(x) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{3.2}$$

где дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(x) = \left.\frac{\delta g(y)}{\delta y}\right|_{y=\varphi_0(x)}, \tag{3.3}$$

а $\theta_k(x)$ — *многочлены от* $\varphi_m(x)$ *и их производных с* $m < k$.

Здесь $\delta g(y)/\delta y$ — первая вариация от $g(x)$ (или производная Фреше/Гато).

Таким образом, для получения степенно-экспоненциального разложения (1.2) решений уравнения (1.1) надо сначала для уравнения (1.1) построить многогранник $\mathbf{\Gamma}(f)$ и выделить все его двумерные грани $\mathbf{\Gamma}_j^{(2)}$, у которых внешняя нормаль $\mathbf{N}_j = (n_1, n_2, n_3)$ имеет

$$n_1 > 0 \quad \text{и} \quad n_1 + n_3 > 0. \tag{3.4}$$

Теперь к соответствующему укороченному уравнению $\check{f}_j^{(2)}(x, y) = 0$ надо применить теорему 2.1, и выяснить имеет ли укороченное уравнение $g(v) = 0$ решение вида

$$v = \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n \exp(n\lambda u). \tag{3.5}$$

Если такое решение есть, то надо сделать степенное преобразование (2.3) в исходном уравнении (1.1) и к полученному уравнению $f^*(u, v) = 0$ применить теорему 3.1, т. е. выяснить имеются ли решения $\varphi_k(u) = \varphi(u)$ вида (3.5) у уравнений

$$\mathcal{L}(u)\varphi_k(u) + \theta_k(u) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Первый шаг для уравнений Пенлеве P_1–P_4 был сделан в §2 в [2]. При этом было найдено, что уравнения P_2 и P_4 имеют укороченные уравнения $f^{*(2)}(u, v) = 0$ с решениями вида (3.5). Теперь для этих решений попробуем построить разложения (1.2): в §4 для уравнения P_2 и в §5 для уравнения P_4.

4 Уравнение P_2

$$f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -y'' + 2y^3 + xy + a = 0, \tag{4.1}$$

где a — комплексный параметр. Пусть $a \neq 0$. Тогда многогранник $\mathbf{\Gamma}(f)$ (показанный на рис. 1) имеет грань $\mathbf{\Gamma}_4^{(2)}$ с нормалью $\mathbf{N}_4 = (1, -1, 1/2)$ и укороченным уравнением

$$\check{f}_4^{(2)}(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} -y'' + xy + a = 0. \tag{4.2}$$

Согласно теореме 2.1 сделаем в уравнении (4.1) преобразование (2.3) с $\alpha = -1$, $\beta = 3/2$, т. е. $y = v/x$, $u = x^{3/2}$. Тогда получаем

$$y' = \frac{v'}{x} - \frac{v}{x^2}, \qquad y'' = \frac{v''}{x} - \frac{2v'}{x^2} + \frac{2v}{x^3}; \tag{4.3}$$

$$v' = \frac{3}{2}\dot{v}x^{1/2}, \qquad v'' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \ddot{v}x + \frac{3}{4}\frac{\dot{v}}{x^{1/2}}. \tag{4.4}$$

Здесь и далее $\dot{v} = dv/du$. Уравнение (4.1) переходит в

$$f^*(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \ddot{v} + v + a + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{\dot{v}}{u} + \frac{2v(v^2 - 1)}{u^2} = 0, \tag{4.5}$$

а укороченное уравнение (4.2) — в

$$\check{f}^{*(2)}(u,v) \stackrel{\text{def}}{=} -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \ddot{v} + v + a \stackrel{\text{def}}{=} g(v) = 0. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) имеет первый интеграл

$$\dot{v}^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (v^2 + 2av + C_0). \tag{4.7}$$

Здесь и далее C_0 — произвольная постоянная. Дифференцируя (4.7) по u и сокращая на $2\dot{v}$, получаем уравнение

$$\ddot{v} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 (v + a),$$

которое совпадает в уравнением (4.6). Все его решения имеют вид

$$v(u) = C_1 \exp\left(\frac{2}{3}u\right) + C_2 \exp\left(-\frac{2}{3}u\right) - \left(\frac{2}{3}\right)^2 a, \tag{4.8}$$

где C_1 и C_2 — произвольные комплексные постоянные. Решения уравнения (4.7) также имеют вид (4.8), где $C_1 C_2 = a^2 - C_0$.

Согласно (3.3) здесь

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\delta g}{\delta v} = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{d^2}{du^2} + 1.$$

Согласно (3.2) и (4.5) для $\varphi_1(u)$ получаем уравнение

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^2 \ddot{\varphi}_1(u) + \varphi_1(u) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dot{v} = 0. \tag{4.9}$$

Это линейное неоднородное уравнение. Все его решения имеют вид

$$\varphi_1 = D_1 \exp\left(\frac{2}{3}u\right) + D_2 \exp\left(-\frac{2}{3}u\right) + \psi(u),$$

где D_1 и D_2 — произвольные постоянные, а

$$\psi(u) = C_1 \frac{u}{2} \exp\left(\frac{2}{3}u\right) + C_2 \frac{u}{2} \exp\left(-\frac{2}{3}u\right)$$

— его частное решение. Поскольку $\varphi_1(u)$ не разлагается в ряд типа Фурье (из-за множителя u в $\psi(u)$), то решение (4.8) с $|C_1| + |C_2| \neq 0$ не продолжается в степенно-экспоненциальное разложение для решений уравнения (4.5). Следовательно, решения уравнения (4.1) не имеют асимптотики $y \sim \varphi(x^{3/2})/x$ с $v(u)$ из (4.8), вопреки утверждению в [2].

Теперь другим способом покажем, что уравнение (4.3) не имеет решения вида

$$\varphi_1(u) = \varphi(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n \exp\left(\frac{2}{3}nu\right). \tag{4.10}$$

Действительно, если к ряду (4.10) применить оператор $\mathcal{L}(u) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{d^2}{du^2} + 1$, то получим ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1-n^2)\varphi_n \exp\left(\frac{2}{3}nu\right),$$

и уравнение (4.9) в силу (4.8) примет вид системы

$$\begin{aligned}
&(1-n^2)\varphi_n = 0, \quad 1 < |n| < \infty,\\
&0 \cdot \varphi_{-1} = \frac{3}{2}C_2, \quad \varphi_0 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 a, \quad 0 \cdot \varphi_1 = -\frac{3}{2}C_1.
\end{aligned}$$

Если $|C_1| + |C_2| \neq 0$, то эта система не имеет решения.

5 Уравнение P_4

после умножения на общий знаменатель принимает вид

$$f(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 3y^4 + 8xy^3 + 4(x^2 - a)y^2 + 2b = 0, \tag{5.1}$$

где a и b — комплексные параметры. Пусть $b \neq 0$, тогда многогранник $\mathbf{\Gamma}(f)$ (показанный на рис. 2) имеет грань $\mathbf{\Gamma}_4^{(2)}$ с нормалью $\mathbf{N}_4 = (1,-1,1)$ и укороченным уравнением

$$\check{f}^{(2)}(x,y) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -2yy'' + y'^2 + 4x^2y^2 + 2b = 0. \tag{5.2}$$

Согласно теореме 2.1 сделаем в уравнении (5.1) степенное преобразование (2.3) с $\alpha = -1$, $\beta = 2$, т. е. $y = v/x$, $u = x^2$. Тогда получаем формулы (4.3) и

$$v' = 2\dot{v}x, \quad v'' = 4\ddot{v}x^2 + 2\dot{v}.$$

Уравнение (5.1) переходит в уравнение

$$f^*(u,v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -8v\ddot{v} + 4\dot{v}^2 + 4v^2 + 2b + 8\frac{v^3}{u} - 4a\frac{v^2}{u} + \frac{3(v^4 - v^2)}{u^2} = 0, \tag{5.3}$$

а укороченное уравнение (5.2) — в

$$f_4^{*(2)}(u,v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} -8v\ddot{v} + 4\dot{v}^2 + 4v^2 + 2b \stackrel{\mathrm{def}}{=} g(v) = 0. \tag{5.4}$$

Оно имеет первый интеграл

$$\dot{v}^2 = v^2 + C_0 v - \frac{b}{2}. \tag{5.5}$$

Дифференцируя его по u и сокращая на $2\dot{v}$, получаем уравнение

$$\ddot{v} = v + \frac{C_0}{2}. \tag{5.6}$$

Все его решения имеют вид

$$v(u) = C_1 e^u + C_2 e^{-u} - \frac{C_0}{2}, \tag{5.7}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Решения уравнения (5.4) также имеют вид (5.7), где $16C_1C_2 = C_0^2 + 2b$.

Согласно (3.3) здесь

$$\mathcal{L}(u) = \frac{\delta g}{\delta v}\bigg|_v = -8\ddot{v} - 8v\frac{d^2}{du^2} + 8\dot{v}\frac{d}{du} + 8v =$$

$$= -8v\frac{d^2}{du^2} + 8\dot{v}\frac{d}{du} - 4C_0. \tag{5.8}$$

Здесь в последнем равенстве учтено (5.6). Согласно (3.2) и (5.3) для $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ получаем уравнение

$$-8v\ddot{\varphi} + 8\dot{v}\dot{\varphi} - 4C_0\varphi + 8v^3 - 4av^2 = 0.$$

Сокращая его на 8, получаем

$$-v\ddot{\varphi} + \dot{v}\dot{\varphi} - (C_0/2)\varphi + v^3 - (a/2)v^2 = 0. \tag{5.9}$$

Лемма 5.1. *Для v из (5.7) с $C_1C_2 \neq 0$ уравнение (5.9) имеет решение*

$$\varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n e^{nu}, \tag{5.10}$$

где две из трех величин φ_{-1}, φ_0, φ_1 произвольны, а остальные φ_n определены однозначно. Можно положить $\varphi_1 = \varphi_{-1} = 0$.

Доказательство. Уравнение (5.9) является линейным неоднородным. Подставляя ряд (5.10) в его однородную часть и учитывая (5.7), получаем

$$-v\ddot{\varphi} + \dot{v}\dot{\varphi} - \frac{C_0}{2}\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big[-C_1(n-1)(n-2)\varphi_{n-1} + \frac{C_0}{2}(n^2-1)\varphi_n -$$

$$-C_2(n+1)(n+2)\varphi_{n+1}\Big]e^{nu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \psi_n e^{nu}.$$

Выпишем выражение в квадратных скобках (т. е. ψ_n) для $n = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$:

$$
\begin{aligned}
\psi_{-3} &= -C_1 \cdot 20\varphi_{-4} + C_0 \cdot 4\varphi_{-3} - C_2 \cdot 2\varphi_{-2};\\
\psi_{-2} &= -C_1 \cdot 12\varphi_{-3} + \frac{3}{2} C_0 \varphi_{-2};\\
\psi_{-1} &= -C_1 \cdot 6\varphi_{-2};\\
.\psi_0 &= -C_1 \cdot 2\varphi_{-1} - \frac{C_0}{2}\varphi_0 - C_2 \cdot 2\varphi_1;\\
\psi_1 &= -6C_2\varphi_2;\\
\psi_2 &= \frac{3}{2} C_0\varphi_2 - 12C_2\varphi_3;\\
\psi_3 &= -2C_1\varphi_2 + 4C_0\varphi_3 - 20C_2\varphi_4.
\end{aligned}
$$

Теперь заметим, что φ_{-1}, φ_0 и φ_1 входят только в выражение для ψ_0, т. е. для этих трех коэффициентов φ_n получаем одно уравнение. Из выражения для ψ_{-1} однозначно находится φ_{-2}, затем из ψ_{-2} однозначно находится φ_{-3}, из ψ_{-3} — φ_4 и т. д. Аналогично из выражений для $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$ однозначно находятся $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$. Доказательство окончено.

Аналогично дело обстоит для решений любого уравнения (3.2). Поэтому решения уравнения P_4 (5.1) имеют степенно-экспоненциальное разложение

$$
y = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x^2) x^{-k}, \tag{5.11}
$$

где

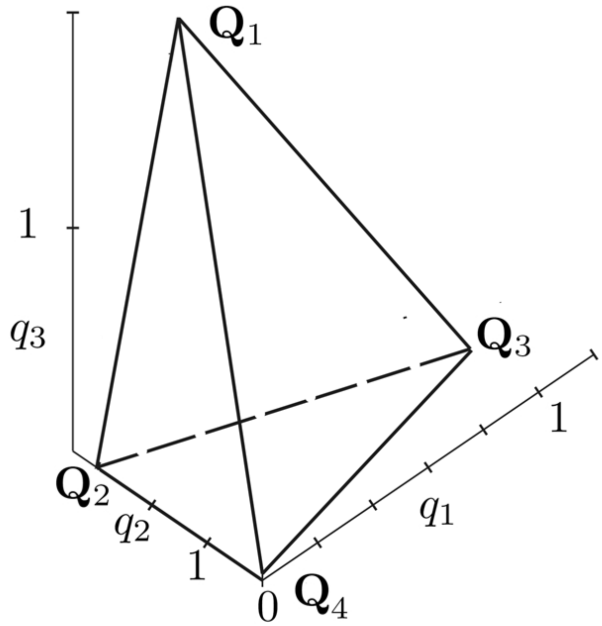
$$
\varphi_k(u) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{kn} e^{nu}.
$$

При этом $\varphi_{00} = -C_0/2$, $\varphi_{k-1} = \varphi_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$ и все коэффициенты φ_{kn} единственны. Поскольку исходное семейство решений (5.7) двухпараметрическое (по C_1 и C_2), то получаем двухпараметрическое семейство степенно-экспоненциальных разложений уравнения P_4.

Список литературы

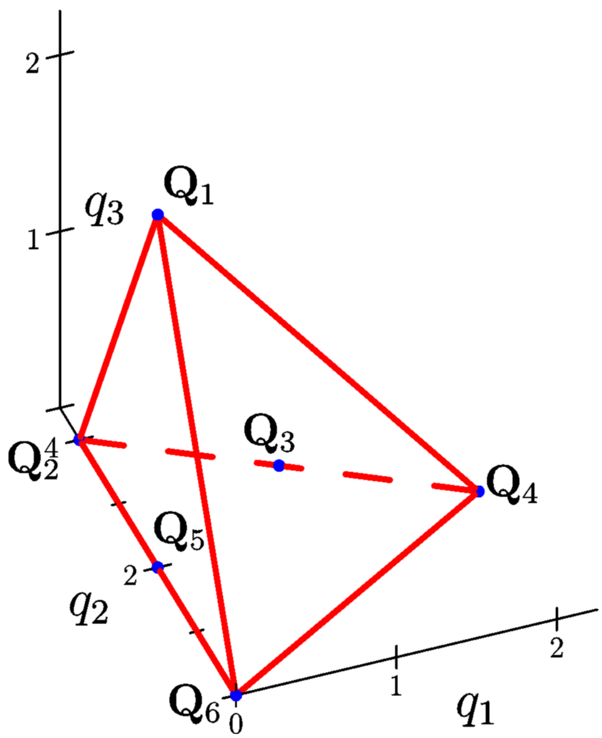
[1] А. Д. Брюно. Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения. УМН, 2004, т. 59, №3, с. 31–80.

[2] A. D. Bruno. Space Power Geometry for an ODE and Painlevé equations. // International Conference "Painlevé Equations and Related Topics". St. Petersburg, June, 2011. P. 36-41.



$\mathbf{Q}_1$
1
q_3
$\mathbf{Q}_3$
1
$\mathbf{Q}_2$
q_2
q_1
1
0
$\mathbf{Q}_4$

Рис. 1



2
$\mathbf{Q}_1$
q_3
1
$\mathbf{Q}_3$
$\mathbf{Q}_2^4$
$\mathbf{Q}_4$
$\mathbf{Q}_5$
2
q_2
2
1
q_1
$\mathbf{Q}_6$
0

Рис. 2