



**Ивашкин В.В., Крылов И.В.**

Комплексный метод  
оптимизации космических  
траекторий с малой тягой и  
его применение к задаче  
перелета от Земли к  
астероиду Апофис

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ивашкин В.В., Крылов И.В. Комплексный метод оптимизации космических траекторий с малой тягой и его применение к задаче перелета от Земли к астероиду Апофис // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 56. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-56>

**ОРДЕНА ЛЕНИНА**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. КЕЛДЫША**  
**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

**В.В. Ивашкин, И.В. Крылов**

**КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ**  
**КОСМИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ЕГО**  
**ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПЕРЕЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К**  
**АСТЕРОИДУ АПОФИС**

Москва  
2011

**В.В. Ивашкин, И.В. Крылов**

**КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ КОСМИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ  
С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПЕРЕЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ  
К АСТЕРОИДУ АПОФИС**

Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, М., 2011, № 56

**АННОТАЦИЯ.** В работе представлены результаты исследования задачи оптимизации перелета космического аппарата (КА) к сближающемуся с Землей астероиду Апофис, при максимизации массы КА на орбите искусственного спутника астероида. Приводятся данные, позволяющие выбрать оптимальную дату старта, а также продолжительность гелиоцентрического участка перелета для случая «идеальной» и кусочно-постоянной малой тяги двигателей. Указанные результаты были получены при помощи комбинированного метода оптимизации космических траекторий, сочетающего прямые и непрямые вычислительные процедуры. В рамках этого метода начальное приближение строилось на основе глобального перебора и уточнялось алгоритмами «блуждающей» трубки и локальных вариаций, а окончательные результаты отыскивались при помощи принципа максимума Понтрягина с использованием продолжения решения по параметру.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант РФФИ 09-01-00710) и программы поддержки научных школ (Грант НШ-6700.2010.1).

**Ключевые слова:** оптимальные космические траектории, оптимальное управление, необходимые условия оптимальности, принцип оптимальности Беллмана, принцип максимума Понтрягина, электрореактивная малая тяга, межпланетный перелет, астероид Апофис.

V.V. Ivashkin, I.V. Krylov

**HYBRID OPTIMIZATION METHOD FOR SPACE FLIGHT WITH LOW THRUST  
AND ITS USE FOR FLIGHT FROM EARTH TO ASTEROID APOPHIS**

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, 2011, N 56

***ABSTRACT.*** The purpose of this study is optimization of spacecraft flight to the Near-Earth asteroid Apophis under condition of maximizing the spacecraft mass in the asteroid's satellite orbit. Presented data allow choosing optimal launch dates and duration of heliocentric part of the interplanetary transfer for the cases of "ideal" and piecewise-constant thrust. The results were obtained using hybrid method of space trajectories optimization. This method combines some direct and indirect computational procedures. The initial approximation was obtained using global search method and then improved by "traveling tube" and local variations algorithms. The Pontryagin method with parametric continuation of solution was used to obtain the final result.

The study was supported by Russian Foundation For Basic Research (grant N 09-01-00710) and by Scientific Schools Support Program (grant NSh-6700.2010.1).

**Keywords:** optimal space trajectories, optimal control, necessary conditions for optimality, Bellman principle of optimality, Pontryagin maximum principle, electric-jet low thrust, interplanetary flight, asteroid Apophis.

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ .....	6
2. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ .....	7
2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТА С «ИДЕАЛЬНОЙ» ТЯГОЙ .....	7
2.2. МЕТОД ГЛОБАЛЬНОГО ПЕРЕБОРА .....	9
2.3. МЕТОД «БЛУЖДАЮЩЕЙ» ТРУБКИ .....	11
2.4. МЕТОД ЛОКАЛЬНЫХ ВАРИАЦИЙ .....	12
2.5. ЗАДАНИЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА .....	14
2.6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕЛЕТА С «ИДЕАЛЬНОЙ» ТЯГОЙ .....	16
2.7. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕЛЕТА С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТЯГОЙ .....	17
3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ К АПОФИСУ .....	19
3.1. СХЕМА ПОЛЕТА .....	19
3.2. ПЕРВЫЙ ЭТАП – ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИЙ РАЗГОН С БОЛЬШОЙ ТЯГОЙ .....	20
3.3. ВТОРОЙ ЭТАП – ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ С МАЛОЙ ТЯГОЙ .....	20
3.4. ТРЕТИЙ ЭТАП – ТОРМОЖЕНИЕ У АСТЕРОИДА .....	28
4. ВЫВОДЫ .....	28
5. ЛИТЕРАТУРА .....	29
6. ПРИЛОЖЕНИЕ .....	31

## CONTENTS

1. INTRODUCTION .....	6
2. HYBRID OPTIMIZATION METHOD .....	7
2.1. STATEMENT OF OPTIMIZATION PROBLEM FOR FLIGHT WITH "IDEAL" THRUST ...	7
2.2. GLOBAL SEARCH METHOD .....	9
2.3. METHOD OF "WANDERING" TUBE .....	11
2.4. METHOD OF LOCAL VARIATIONS.....	12
2.5. SETTING INITIAL APPROACH FOR PRINCIPLE OF MAXIMUM.....	14
2.6. SOLVING OPTIMIZATION PROBLEM FOR FLIGHT WITH "IDEAL" THRUST.....	16
2.7. SOLVING PROBLEM OF FLIGHT WITH PIECEWISE CONSTANT THRUST .....	17
3. DETERMINATION OF OPTIMAL SPACE FLIGHTS TO APOPHIS.....	19
3.1. FLIGHT SCHEME.....	19
3.2. FIRST STAGE – GEOCENTRIC ACCELERATION WITH HIGH THRUST .....	20
3.3. SECOND STAGE – HELIOCENTRIC MOTION WITH LOW THRUST.....	20
3.4. THIRD STAGE – BRAKING NEAR ASTEROID .....	28
4. CONCLUSIONS .....	28
5. REFERENCES .....	29
6. APPENDIX.....	31

## ***1. ВВЕДЕНИЕ***

К числу актуальных задач, стоящих в настоящее время перед космонавтикой, следует отнести организацию экспедиции к сближающемуся с Землей астероиду Апофис. Исследования показали, что 13 апреля 2029 года Апофис пролетит вблизи нашей планеты на номинальном расстоянии  $\sim 38$  тыс. км, вследствие чего подвергнется сильному гравитационному воздействию, которое значительно изменит его орбиту. Трубка рассеивания, построенная вокруг новой номинальной орбиты астероида, содержит траектории, не исключают возможность столкновения Апофиса с Землей в 2036 году ([11] и др.). Энергия такого столкновения оценивается примерно в 500 МТ ТНТ и во много раз превосходит аналогичный показатель для Тунгусского метеорита ( $\sim 12$  МТ ТНТ). Поэтому важно с максимальной точностью уточнить элементы траектории астероида с тем, чтобы решить вопрос о вероятном соударении и, если оно состоится, заблаговременно принять меры противодействия. Важно также получить исчерпывающую информацию о форме, составе и особенностях строения Апофиса.

Для решения указанных выше задач целесообразно в ближайшее время отправить к астероиду специальный исследовательский космический аппарат (КА). Оптимизации траектории такого КА и посвящена данная работа. При этом рассматривается схема перелета, включающая три основных этапа. На первом этапе (геоцентрического движения) КА, находящийся на низкой (с высотой  $H \approx 200$  км) околоземной орбите, разгоняется при помощи двигателей большой тяги (например, блока «Фрегат» [1, 19]) до второй космической скорости. На втором этапе (гелиоцентрического движения) осуществляется выравнивание радиус-векторов и скоростей КА и астероида при помощи двигателей малой тяги [8]. Подобные двигатели обеспечивают чрезвычайно высокие скорости истечения реактивной струи (более десяти километров в секунду), и поэтому весьма эффективны. Наконец, на третьем этапе полета (приастероидного движения) КА гасит свою скорость с параболической до круговой и становится искусственным спутником Апофиса.

Практическая реализация указанной выше схемы полета предполагает необходимость максимизации массы КА на орбите спутника астероида. С этой целью требуется задать соответствующую дату начала экспедиции, ее продолжительность, а также определить программу управления двигателями малой тяги на гелиоцентрическом участке траектории. В данной работе построение искомой

программы управления осуществляется на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина и сводится к нелинейной двухточечной краевой задаче, недостающие начальные условия которой отыскиваются методом продолжения по параметру.

Известно, что сходимость алгоритма продолжения зависит от удачного выбора начального (нулевого) приближения. К сожалению, регулярные способы его задания отсутствуют. Поэтому на практике часто прибегают к тому или иному эвристическому приему, например, линеаризуют дифференциальные уравнения движения КА относительно кеплеровской «транспортирующей» орбиты [4, 12, 16]. Главный недостаток подобного подхода состоит в том, что область его применения ограничена сравнительно небольшими значениями угловой дальности полета, при которых управляемая траектория мало отличается от дуги соответственно подобранного «транспортирующего» эллипса [3]. Поэтому предлагается определять начальное приближение на основе алгоритма динамического программирования Беллмана, который не накладывает никаких ограничений на величину угловой дальности. Таким образом, метод оптимизации конечной массы КА носит комбинированный характер, поскольку сочетает в себе достоинства прямых (глобальный перебор, «блуждающая» трубка, локальные вариации) и непрямых (принцип максимума Понтрягина) вычислительных процедур.

## **2. КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ**

### **2.1. Постановка задачи оптимизации перелета с «идеальной» тягой**

Движение КА рассматривается в прямоугольной гелиоцентрической эклиптической системе координат, ось ОХ которой направлена в точку весеннего равноденствия, ось ОZ в северный полюс эклиптики, ОY – дополняет систему до правой. Уравнения траектории КА имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{r}} &= \bar{v} \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{g}(\bar{r}) + \bar{u}, \end{aligned} \tag{1}$$

здесь  $\bar{r}$  и  $\bar{v}$  - радиус вектор и вектор скорости КА, точка над векторами означает дифференцирование по времени  $t$ ;

$$\bar{g}(\bar{r}) = -\mu \frac{\bar{r}}{r^3}; \tag{2}$$

$\mu$  – гравитационный параметр Солнца;



$r = |\bar{r}|$  – расстояние от КА до центра Солнца;

$\bar{u}$  – управляющее ускорение, создаваемое двигателями малой тяги:

$$\bar{u} = \frac{F}{m} \bar{e}, \quad (3)$$

где  $F$  – величина тяги:

$$F = \beta W_e; \quad (4)$$

$\beta$  – секундный массовый расход;

$W_e$  – скорость истечения частиц в реактивной струе;

$m$  – текущая масса КА:

$$\dot{m} = -\beta; \quad (5)$$

$\bar{e}$  – единичный вектор ( $|\bar{e}|=1$ ), задающий пространственную ориентацию силы тяги.

Будем полагать, что мощность двигателей КА

$$N_{\text{дв}} = \frac{\beta W_e^2}{2} \quad (6)$$

постоянна. Интегрируя (5) с учетом (4) и (6), имеем [8]:

$$m(t_f) = \frac{m(t_0)}{1 + \frac{m(t_0)}{2N_{\text{дв}}} \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt}, \quad (7)$$

где  $t_0, t_f$  – фиксированные значения времени начала и конца гелиоцентрического участка перелета;

$u = |\bar{u}|$  – модуль управляющего ускорения.

Как видно из (7), величина конечной массы  $m(t_f)$  тем больше, чем меньше интеграл

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt. \quad (8)$$

Пусть заданы начальные и конечные условия процесса:

$$\begin{aligned} \bar{r}(t_0) &= \bar{r}_0, \bar{v}(t_0) = \bar{v}_0; \\ \bar{r}(t_f) &= \bar{r}_f, \bar{v}(t_f) = \bar{v}_f. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом  $\bar{r}_0, \bar{v}_0$  соответствуют орбите Земли,  $\bar{r}_f, \bar{v}_f$  – орбите астероида, а на величину ускорения  $u$  не наложено никаких ограничений. Тогда задача об идеальной тяге (ИТ)

формулируется следующим образом: *найти такое управление  $\bar{u}(t)$  и траекторию (1), удовлетворяющую условиям (9), чтобы функционал (8) был минимален.*

## 2.2. Метод глобального перебора

Первоначальное определение траектории перелета КА с ИТ осуществляется методом перебора, который позволяет находить глобальный экстремум функции, не делая никаких предположений о ее выпуклости, и не нуждается в задании нулевого приближения. Однако, ввиду «проклятия размерности» и, как следствие, необходимости проведения очень большого количества вычислений, примем при поиске начального приближения, что орбита КА близка к плоскости эклиптики. Тогда (1) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = y_3 \quad \dot{y}_3 = -\frac{\mu}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} y_1 + u_1 \\ \dot{y}_2 = y_4 \quad \dot{y}_4 = -\frac{\mu}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} y_2 + u_2 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad \dot{z}_2 = -\frac{\mu}{(z_1^2 + d_y^2(t))^{3/2}} z_1 + u_3 \quad (11)$$

где  $\bar{y}^T = \{y_1, y_2, y_3, y_4\} = \{r_x, r_y, v_x, v_y\}$ ;

$$\bar{z}^T = \{z_1, z_2\} = \{r_z, v_z\};$$

$r_x, r_y, r_z$  – проекции вектора  $\bar{r}$  на оси системы координат OXYZ;

$v_x, v_y, v_z$  – проекции вектора  $\bar{v}$  на оси системы координат OXYZ;

$$d_y^2(t) = y_1^2(t) + y_2^2(t);$$

$y_1(t)$  и  $y_2(t)$  – полученные в результате интегрирования (10) функции времени.

Задача решается приближенно. Сначала минимизируется функционал

$$J_y = \int_{t_0}^{t_f} (u_1^2 + u_2^2) dt \rightarrow \min \quad (12)$$

для системы (10). Затем, полученные зависимости  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  подставляются в (11), и минимизируется функционал

$$J_z = \int_{t_0}^{t_f} u_3^2 dt \rightarrow \min \quad (13)$$

для системы (11).

Кратко опишем метод глобального перебора. В пространствах  $(t, \bar{y})$  и  $(t, \bar{z})$  задаются сетки  $Q_y$  и  $Q_z$ , характеризующиеся шагами  $h, \bar{h}^y, \bar{h}^z$  по временной и пространственной координатам [13]. Задаются также элементарные операции, которые каждой паре узлов из  $Q_y$  и  $Q_z$  ставят в соответствие оптимальное управление, переводящее  $\bar{y}(t_i)$  в  $\bar{y}(t_{i+1})$  и  $\bar{z}(t_i)$  в  $\bar{z}(t_{i+1})$ . Здесь  $t_i$  - значение временной координаты  $t$  на  $Q_y$  и  $Q_z$ ;  $i = 0, 1, \dots, N-1$  - индекс узла на временной оси.

При этом (12) и (13) представляются в виде:

$$J_y = \sum_{i=0}^{N-1} J_y(\bar{y}(t_i), \bar{y}(t_{i+1})) \rightarrow \min, \quad (14)$$

$$J_z = \sum_{i=0}^{N-1} J_z(\bar{z}(t_i), \bar{z}(t_{i+1})) \rightarrow \min. \quad (15)$$

В процессе нахождения  $J_y$  и  $J_z$ , следуя [13], полагается, что гравитационное поле на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$  постоянно и равно осредненному вектору  $\bar{g}$  в точке  $\bar{r}_{cp} = \frac{\bar{r}_{i+1} + \bar{r}_i}{2}$ ,

$$t_{cp} = \frac{t_{i+1} + t_i}{2}.$$

Тогда, применяя указанные элементарные операции, получим в явном виде:

$$J_y(\bar{y}(t_i), \bar{y}(t_{i+1})) = \left[ C_1^2 + C_2^2 + \frac{(C_3^2 + C_4^2)h^2}{3} - (C_1C_3 + C_2C_4)h \right] \frac{h}{4}; \quad (15a)$$

$$J_z(\bar{z}(t_i), \bar{z}(t_{i+1})) = \left[ C_5^2 + \frac{C_6^2h^2}{3} - C_5C_6h \right] \frac{h}{4}, \quad (15b)$$

где  $C_1 = \zeta_1(y_1(t_i), y_3(t_i), y_1(t_{i+1}), y_3(t_{i+1}), g_x);$

$$C_2 = \zeta_1(y_2(t_i), y_4(t_i), y_2(t_{i+1}), y_4(t_{i+1}), g_y);$$

$$C_3 = \zeta_2(y_1(t_i), y_3(t_i), y_1(t_{i+1}), y_3(t_{i+1}));$$

$$C_4 = \zeta_2(y_2(t_i), y_4(t_i), y_2(t_{i+1}), y_4(t_{i+1})); \quad (15c)$$

$$C_5 = \zeta_1(z_1(t_i), z_2(t_i), z_1(t_{i+1}), z_2(t_{i+1}), g_z);$$

$$C_6 = \zeta_2(z_1(t_i), z_2(t_i), z_1(t_{i+1}), z_2(t_{i+1}));$$

$$\zeta_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, g) = \frac{12(\eta_3 - \eta_1) - 8\eta_2h - 4\eta_4h}{h^2} - 2g; \quad (15d)$$

$$\zeta_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) = \frac{24(\eta_3 - \eta_1) - 12(\eta_2 + \eta_4)h}{h^3}. \quad (15e)$$

Решение задачи о минимизации (14) отыскивается следующим образом. На каждом шаге  $h$  проверяются все траектории, проходящие через узлы  $Q_y(t_i)$  и текущий узел из  $Q_y(t_{i+1})$ . Оптимальный вариант, удовлетворяющий рекуррентному соотношению Беллмана [5]:

$$S(\bar{y}(t_{i+1})) = \min_{\bar{y}(t_i) \in Q_y(t_i)} [S(\bar{y}(t_i)) + J_y(\bar{y}(t_i), \bar{y}(t_{i+1}))], \quad i \geq 1; \quad (16)$$

$$S(\bar{y}(t_0)) = 0, \quad S(\bar{y}(t_1)) = J_y(\bar{y}(t_0), \bar{y}(t_1)),$$

запоминается, после чего осуществляется переход к следующему узлу. Выше обозначено:  $S(\bar{y}(t_i))$ ,  $S(\bar{y}(t_{i+1}))$  - значения (14) вдоль оптимальной траектории.

Решение задачи о минимизации (15) находится аналогично, при условии:

$$S(\bar{z}(t_{i+1})) = \min_{\bar{z}(t_i) \in Q_z(t_i)} [S(\bar{z}(t_i)) + J_z(\bar{z}(t_i), \bar{z}(t_{i+1}))], \quad i \geq 1; \quad (17)$$

$$S(\bar{z}(t_0)) = 0, \quad S(\bar{z}(t_1)) = J_z(\bar{z}(t_0), \bar{z}(t_1)).$$

Результатом работы алгоритма перебора являются отвечающие принципу оптимальности Беллмана ломаные  $\alpha_y$  и  $\alpha_z$ , которые задают последовательности узлов сеток  $Q_y$  и  $Q_z$ .

### 2.3. Метод «блуждающей» трубки

Высокую точность расчетов траектории перелета КА методом глобального перебора можно получить только при использовании сеток  $Q_y$  и  $Q_z$  с достаточно малыми значениями шагов  $h, \bar{h}^y, \bar{h}^z$ . При этом объем необходимых вычислений оказывается чрезмерным для даже современных ЭВМ. Поэтому последующее уточнение результатов, полученных в пункте 2.2 ( $\alpha_y$  и  $\alpha_z$ ), осуществляется методом «блуждающей» трубки [13], который кратко описывается ниже.

Обозначим через  $\beta_y$  и  $\beta_z$  последовательности узлов сеток  $Q_y$  и  $Q_z$ , которыми оперирует алгоритм «блуждающей» трубки. Тогда, положив  $\beta_y^{(0)} = \alpha_y, \beta_z^{(0)} = \alpha_z$ :

1. Построим новые сетки  $Q_y^{(j)}$  и  $Q_z^{(j)}$  в окрестностях  $\beta_y^{(j)}$  и  $\beta_z^{(j)}$ , где  $j$  – индекс текущей итерации алгоритма; отметим, что новые сетки, кроме того, дают возможность расширить анализируемую область оптимизации;
2. По рекуррентным соотношениям (16), (17) вычислим  $S^{(j+1)}(\bar{y}(t_f))$  и  $S^{(j+1)}(\bar{z}(t_f))$ .
3. Если условия

$$S^{(j+1)}(\bar{y}(t_f)) = S^{(j)}(\bar{y}(t_f))$$

$$S^{(j+1)}(\bar{z}(t_f)) = S^{(j)}(\bar{z}(t_f))$$

не выполнены, положим  $\beta_y^{(j)} = \beta_y^{(j+1)}$ ,  $\beta_z^{(j)} = \beta_z^{(j+1)}$ , и переходим к шагу 1;

4. Иначе (если трубка перестала «блуждать») проверяем, достигнута ли заданная точность вычислений, которая определяется величиной компонент векторов  $\bar{h}^y$  и  $\bar{h}^z$ ;

5. Если заданная точность вычислений достигнута, обозначаем  $\beta_y^{(opt)} = \beta_y^{(j+1)}$ ,  $\beta_z^{(opt)} = \beta_z^{(j+1)}$  и завершаем работу алгоритма;

6. Иначе, положив  $j = j + 1$ ,  $\bar{h}^y = \bar{h}^y / 2$ ,  $\bar{h}^z = \bar{h}^z / 2$  переходим к шагу 1.

Результатом работы алгоритма являются последовательности  $\beta_y^{(opt)}$  и  $\beta_z^{(opt)}$ , которые в точках  $t_i$  с заданной точностью (по величинам шагов) аппроксимируют искомую траекторию перелета КА.

#### 2.4. Метод локальных вариаций

Ломаные  $\beta_y^{(opt)}$  и  $\beta_z^{(opt)}$  были найдены в предположении, что оптимизация движения КА осуществлялась сначала для системы уравнений (10) и затем – (11). Дальнейшее уточнение полученных результатов осуществляется на основе совместной модели (1) методом локального варьирования, который на каждом шаге процесса использует подграф, содержащий минимально возможное число узлов. Указанный алгоритм требует привлечения значительно меньших вычислительных ресурсов по сравнению с методом «блуждающей» трубки, однако обладает и меньшей устойчивостью к локальным экстремумам [17]. Обозначим:

$$\bar{x}^T = \{r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z\}$$

и введем в пространстве  $(t, x)$  сетку  $Q_x$ , характеризующуюся шагами  $h, \bar{h}^x$  по временной и пространственной (координаты и скорости) составляющим, а также элементарную операцию, которая каждой паре узлов из  $Q_x$  ставит в соответствие управление, переводящее  $\bar{x}(t_i)$  в  $\bar{x}(t_{i+1})$ , и определяет функционал:

$$J_x = \sum_{i=0}^{N-1} J_x(\bar{x}(t_i), \bar{x}(t_{i+1})) \rightarrow \min,$$

При задании этой операции и нахождении  $J_x$  будем полагать, что на интервале  $[t_i, t_{i+1}]$  гравитационное поле постоянно и равно осреднённому вектору  $\bar{g}$  в точке  $\bar{x}(\bar{r}_{cp})$ . Тогда в явном виде получим:

$$J_x(\bar{x}(t_i), \bar{x}(t_{i+1})) = \left[ A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \frac{(A_4^2 + A_5^2 + A_6^2)h^2}{3} - (A_1A_4 + A_2A_5 + A_3A_6)h \right] \frac{h}{4},$$

где  $A_1 = \zeta_1(x_1(t_i), x_4(t_i), x_1(t_{i+1}), x_4(t_{i+1}), g_x)$ ;

$$A_2 = \zeta_1(x_2(t_i), x_5(t_i), x_2(t_{i+1}), x_5(t_{i+1}), g_y)$$
;

$$A_3 = \zeta_1(x_3(t_i), x_6(t_i), x_3(t_{i+1}), x_6(t_{i+1}), g_z)$$
;

$$A_4 = \zeta_2(x_1(t_i), x_4(t_i), x_1(t_{i+1}), x_4(t_{i+1}))$$
;

$$A_5 = \zeta_2(x_2(t_i), x_5(t_i), x_2(t_{i+1}), x_5(t_{i+1}))$$
;

$$A_6 = \zeta_2(x_3(t_i), x_6(t_i), x_3(t_{i+1}), x_6(t_{i+1}))$$
;

$\zeta_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, g)$ ,  $\zeta_2(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$  приведены в (15d, 15e).

Локальное варьирование  $k$ -ой компоненты вектора  $\bar{x}$  осуществляется следующим образом. Пусть задано  $j$  приближение (итерация) некоторой последовательности  $\gamma^{(j)}$  узлов сетки  $Q_x$ , и найдены значения  $k$ -ой компоненты вектора  $\bar{x}$  ( $j+1$ ) приближения для первых  $i$  моментов времени:

$$\{x_k^{(j+1)}(t_0), x_k^{(j+1)}(t_1), \dots, x_k^{(j+1)}(t_{i-1})\}.$$

При нахождении  $x_k^{(j+1)}(t_i)$  рассматриваются величины:

$$\Phi_i^0 = J_x(\bar{x}(t_{i-1}), \bar{x}(t_i)) + J_x(\bar{x}(t_i), \bar{x}(t_{i+1}));$$

$$\Phi_i^+ = J_x(\bar{x}(t_{i-1}), \bar{x}(t_i) + \bar{\delta} \cdot \bar{h}^x) + J_x(\bar{x}(t_i) + \bar{\delta} \cdot \bar{h}^x, \bar{x}(t_{i+1}));$$

$$\Phi_i^- = J_x(\bar{x}(t_{i-1}), \bar{x}(t_i) - \bar{\delta} \cdot \bar{h}^x) + J_x(\bar{x}(t_i) - \bar{\delta} \cdot \bar{h}^x, \bar{x}(t_{i+1}));$$

где  $\bar{\delta}$  - шестимерный вектор-столбец, у которого все компоненты кроме  $k$ -й равны нулю, а  $k$ -я компонента равна единице. Величина  $x_k^{(j+1)}(t_i)$  соответствует меньшему функционалу и определяется следующим образом:

$$x_k^{(j+1)}(t_i) = \begin{cases} x_k^{(j)}(t_i), & \text{если } \Phi_i^0 \leq \Phi_i^+, \Phi_i^0 \leq \Phi_i^- \\ x_k^{(j)}(t_i) + h_k^x, & \text{если } \Phi_i^+ < \Phi_i^0, \Phi_i^+ \leq \Phi_i^- \\ x_k^{(j)}(t_i) - h_k^x, & \text{если } \Phi_i^- < \Phi_i^0, \Phi_i^- \leq \Phi_i^+ \end{cases} \quad (18)$$

Опишем кратко алгоритм поиска оптимального управления методом локального варьирования, реализующий данный подход. С этой целью сначала

сформируем нулевое приближение ломаной  $\gamma^{(0)}$  на основе полученных в п. 2.3 ломаных  $\beta_y^{(opt)}$  и  $\beta_z^{(opt)}$ , после чего выполним следующие шаги:

1. Зададим  $\bar{h}^x = \bar{h}_0^x$  и  $h = h_0$
2. Построим сетку  $Q_x^{(j)}$  в окрестности  $\gamma^{(j)}$ , где  $j$  – индекс итерации алгоритма;
3. Последовательно варьируя компоненты  $\bar{x}$  по формулам (18), получим  $\gamma^{(j+1)}$ ;
4. Если  $\gamma^{(j)} \neq \gamma^{(j+1)}$ , положим  $\gamma^{(j)} = \gamma^{(j+1)}$  и перейдем к шагу 2;
5. Иначе (если трубка перестала «блуждать») проверим, достигнута ли заданная точность вычислений по пространственным координатам, которая определяется величиной компонент вектора  $\bar{h}^x$ ;
6. Если точность по пространственным координатам не достигнута, положим  $j=j+1$ ,  $\bar{h}^x = \bar{h}^x / 2$  и переходим к шагу 2;
7. Иначе проверяем, достигнута ли заданная точность вычислений по временной координате, которая определяется величиной  $h$ ;
8. Если точность по временной координате достигнута, обозначаем  $\gamma^{(opt)} = \gamma^{(j+1)}$  и завершаем алгоритм;
9. Иначе задаем  $h_0 = h_0/2$ ,  $\bar{h}_0^x = \bar{h}_0^x / 2$ , достраиваем  $\gamma^{(j+1)}$ , интерполируя соседние узлы ломаной, и, положив  $j=j+1$ , переходим к шагу 1.

Результатом работы алгоритма является  $\gamma^{(opt)}$  – последовательность узлов сетки  $Q_x$ .

## 2.5. Задание начального приближения для принципа максимума

Ломаная  $\gamma^{(opt)}$  аппроксимирует искомую траекторию перелета КА с некоторой заданной точностью. Отметим, что увеличение точности аппроксимации сопряжено с необходимостью использования все более мелких сеток  $Q_x$  и приводит к резкому росту вычислительных затрат. Поэтому в данной работе процесс оптимизации методом локального варьирования заканчивался на разумных степенях дробления шагов. Дальнейшее уточнение траектории осуществляется на основе необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. При этом полученная в 2.4. последовательность  $\gamma^{(opt)}$  используется для определения начального (нулевого) приближения вектора сопряженных переменных. С этой целью на основе  $\gamma^{(opt)}$  с применением сплайн-интерполяции между узлами вычисляется

вектор-функция  $\bar{r}^{(0)}(t)$  и система (1) линеаризуется относительно  $\bar{r}^{(0)}(t)$  [4, 12].

Имеем:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{v} \\ \dot{\bar{v}} &= \bar{g}(\bar{r}^{(0)}(t)) + G(\bar{r}^{(0)}(t))(\bar{r} - \bar{r}^{(0)}(t)) + \bar{u},\end{aligned}$$

где  $G(\bar{r}) = \partial \bar{g} / \partial \bar{r}$  - матрица  $3 \times 3$  с элементами [9]:

$$G_{11} = -\mu \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3r_x^2}{r^5} \right];$$

$$G_{22} = -\mu \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3r_y^2}{r^5} \right];$$

$$G_{33} = -\mu \left[ \frac{1}{r^3} - \frac{3r_z^2}{r^5} \right];$$

$$G_{12} = G_{21} = 3\mu \frac{r_x r_y}{r^5};$$

$$G_{13} = G_{31} = 3\mu \frac{r_x r_z}{r^5};$$

$$G_{23} = G_{32} = 3\mu \frac{r_y r_z}{r^5}.$$

Применяя принцип максимума Понтрягина, получим гамильтониан [6, 14]:

$$H = \psi_0 u^2 + \bar{\psi}_v (\bar{g}(\bar{r}^{(0)}) + G(\bar{r}^{(0)})(\bar{r} - \bar{r}^{(0)}) + \bar{u}) + \bar{\psi}_r \bar{v},$$

где

$$\dot{\bar{\psi}}_v = -\bar{\psi}_r; \quad (19a)$$

$$\dot{\bar{\psi}}_r = -G^T(\bar{r}^{(0)})\bar{\psi}_v; \quad (19b)$$

$$\psi_0 = -1.$$

Управление находится из условия максимума  $H$  по  $\bar{u}$

$$\bar{u}^{(opt)} = \frac{\bar{\psi}_v}{2} \quad (19c)$$

Окончательно:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{r}} &= \bar{v}; \\ \dot{\bar{V}} &= \bar{g}(\bar{r}^{(0)}) + G(\bar{r}^{(0)})(\bar{r} - \bar{r}^{(0)}) + \frac{\bar{\psi}_v}{2};\end{aligned} \quad (20)$$

где  $\bar{\psi}_v(t)$  определяется в (19a, b).



Система (20, 19а, 19b) замкнута и линейна. Введем в рассмотрение векторы  $\psi, \sigma$ :

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^T &= \{\bar{\psi}_v^T, \bar{\psi}_r^T\}, \\ \bar{\sigma}^T(\bar{\psi}(t_0)) &= [(\bar{v}(t_f) - \bar{v}_f)^T, (\bar{r}(t_f) - \bar{r}_f)^T],\end{aligned}\quad (21)$$

а также матрицу:

$$A(\bar{\psi}(t_0)) = \left[ \frac{\partial \bar{\sigma}(\bar{\psi}(t_0))}{\partial \bar{\psi}(t_0)} \right]. \quad (22)$$

Обозначим через  $\bar{p}^*(t)$  вектор  $\bar{\psi}(t)$ , который разрешает в данном линейном приближении задачу (9), (20). Вектор  $\bar{p}^*(t_0)$  определяется по формуле Ньютона:

$$\bar{p}^*(t_0) = -A(\bar{0})^{-1} \bar{\sigma}(\bar{0}).$$

При этом элементы матрицы (22) находятся численно в результате шестикратного интегрирования системы уравнений (20), для чего всем компонентам вектора сопряжённых переменных в начальный момент времени последовательно придаются единичные приращения [12].

Таким образом, указанный способ нахождения  $\bar{p}^*(t_0)$  предполагает использование в качестве начальной «транспортирующей» траектории последовательности узлов  $\gamma^{(opt)}$  из 2.4.

## 2.6. Решение задачи оптимизации перелета с «идеальной» тягой

В данном разделе поставленная в 2.1 задача ИТ решается в точной нелинейной постановке при помощи принципа максимума Понтрягина. Имеем:

$$H = \psi_0 u^2 + \bar{\psi}_v (\bar{g}(r) + \bar{u}) + \bar{\psi}_r \bar{v},$$

где

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\psi}}_v &= -\bar{\psi}_r; \\ \dot{\bar{\psi}}_r &= -G^T(\bar{r}) \bar{\psi}_v; \\ \psi_0 &= -1.\end{aligned}\quad (23)$$

Оптимальное управление  $u^{(opt)}$  находится по формуле (19с). Обозначим символом  $\bar{p}(t)$  вектор  $\bar{\psi}(t)$ , который разрешает в данной нелинейной постановке задачу ИТ (1), (23), (19с), (9). Вектор  $\bar{p}(t_0)$  будем отыскивать методом продолжения по параметру [7, 15]. С этой целью проинтегрируем методом Рунге-Кутты четвертого порядка дифференциальное уравнение продолжения:

$$\frac{d\bar{\rho}}{d\tau} = -A^{-1}(\bar{\rho})\bar{\sigma}(\bar{p}^*(t_0)),$$

с учетом

$$\bar{\rho}(\tau)|_{\tau=0} = \bar{p}^*(t_0);$$

где  $\tau \in [0; 1]$ , это параметр продолжения. Искомый вектор сопряженных переменных, получаемый в конце процесса продолжения, имеет вид:

$$\bar{p}(t_0) = \bar{\rho}(\tau)|_{\tau=1}.$$

Матрица  $A(\bar{\rho})$  (22, 21) вычислялась численно посредством шестикратного интегрирования системы (1), (23). При этом всем компонентам вектора  $\bar{\psi}(t_0) = \{\bar{\psi}_v^T, \bar{\psi}_r^T\}^T(t_0) = \bar{\rho}(\tau)$  последовательно придавались небольшие (в пределах линейной области) приращения. Вектор  $\bar{p}^*(t_0)$  был определен в п. 2.5.

## 2.7. Решение задачи перелета с кусочно-постоянной тягой

На практике величина тяги  $F$  обычно ограничена и носит ступенчатый характер, то есть

$$F \in \{0, F_{\max}\}. \quad (24)$$

Выражая из (4) величину секундного массового расхода и подставляя ее в (5), получим:

$$\dot{m} = -\frac{F}{W_e} \quad (25)$$

Тогда задача о кусочно-постоянной тяге (КПТ) формулируется следующим образом: *найти управление  $F(t)$  и  $\bar{e}(t)$ , а также траекторию (1),(25), удовлетворяющие (9), (24), такие, что величина:*

$$J = m(t_f) \quad (26)$$

*максимальна.*

Применяя к задаче КПТ принцип максимума Понтрягина, получим:

$$H = \bar{\psi}_v (\bar{g}(r) + \frac{F\bar{e}}{m}) + \bar{\psi}_r \bar{v} - \frac{\psi_m F}{W_e},$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\psi}}_v &= -\bar{\psi}_r; \\ \dot{\bar{\psi}}_r &= -G^T(\bar{r})\bar{\psi}_v; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\dot{\psi}_m = \frac{F\bar{e}\bar{\psi}_v}{m^2}.$$

Из условий трансверсальности следует:

$$\psi_m(t_f) = 1. \quad (28)$$

Масса КА в момент  $t_0$  задана и равна

$$m(t_0) = m_0.$$

Оптимальное управление отыскивается из условия максимума  $H$  по  $F$  и  $\bar{e}$ . С учетом (24) имеем:

$$\bar{e}^{(opt)} = \frac{\bar{\psi}_v}{\psi_v}; \quad (29)$$

$$F^{(opt)} = \begin{cases} F_{max}, & \text{если } \psi_v > \frac{m\psi_m}{W_e}; \\ 0, & \text{если } \psi_v \leq \frac{m\psi_m}{W_e}. \end{cases}$$

Введем в рассмотрение вектор  $\psi$ :

$$\bar{\psi}^T = \left\{ \bar{\psi}_v^T, \bar{\psi}_r^T, \psi_m \right\},$$

а также вектор  $\sigma$ :

$$\bar{\sigma}(\bar{\psi}(t_0))^T = \{(\bar{v}(t_f) - \bar{v}_f)^T, (\bar{r}(t_f) - \bar{r}_f)^T, \psi_m - 1\}.$$

Решение краевой задачи принципа максимума (1), (9), (25)-(29) может быть получено методом продолжения по параметру. При этом начальные условия для уравнения продолжения задаются следующим образом:

$$\bar{\rho}(\tau)^T|_{\tau=0} = \{k_\psi \bar{p}(t_0)^T, 1\}, \quad (30)$$

где  $\bar{p}(t_0)$  - вектор сопряженных переменных, разрешающий задачу об ИТ;

$k_\psi$  - коэффициент пропорциональности.

Введение  $k_\psi$  обусловлено тем, что после решения задачи ИТ

$$p_v \ll \frac{m\psi_m}{W_e},$$

где  $p_v = \sqrt{p_1^2(t) + p_2^2(t) + p_3^2(t)}$ .

Для улучшения сходимости процесса продолжения коэффициент  $k_\psi$  вычисляется следующим образом:

1. Определяется минимальное  $p_{\min}$  и максимальное  $p_{\max}$  значение функции  $p_v(t)$  при  $t \in [t_0, t_f]$ , а также величины  $k_{\psi \min} = \frac{m(t_0)\psi_m(t_f)}{W_e p_{\max}}$  и  $k_{\psi \max} = \frac{m(t_0)\psi_m(t_f)}{W_e p_{\min}}$ , причем берется  $\psi_m(t_f)=1$ .

2. Отрезок разделяется  $[k_{\psi \min}, k_{\psi \max}]$  точками  $k_{\psi i}$  и для каждого  $k_{\psi i}$  формируется вектор  $\bar{\psi}_i^T(t_0) = \{k_{\psi i} \bar{p}(t_0)^T, 1\}$ .

3. Решается задача Коши для системы (1), (27), (29) при начальных условиях:  $\bar{r}_0, \bar{v}_0, m_0, \bar{\psi}_i(t_0)$  и вычисляется вектор невязок  $\bar{\sigma}_i = \left\{ \frac{(\bar{v}(t_f) - \bar{v}_f)^T}{|\bar{v}_f|}, \frac{(\bar{r}(t_f) - \bar{r}_f)^T}{|\bar{r}_f|}, \psi_m - 1 \right\}_i$ .

4. Полагается, что  $k_{\psi} = k_{\psi i}$  для индекса  $i$ , при котором модуль невязки  $|\bar{\sigma}_i|$  минимален.

Таким образом, предложенный в настоящем разделе способ построения космических траекторий ИТ и КПТ носит комбинированный характер, он сочетает достоинства прямых (пп. 2.2.–2.4) и непрямых (пп. 2.5–2.7) вычислительных методов.

### **3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЁТОВ К АПОФИСУ**

#### **3.1. Схема полета**

Принятая схема полета КА к астероиду Апофис включает три основных этапа:

– геоцентрический этап разгона КА до второй космической скорости с помощью двигателя большой тяги;

– гелиоцентрический этап, на котором осуществляется выравнивание координат и скоростей КА и астероида при помощи двигателя малой тяги;

– этап торможения КА в сфере действия Апофиса с целью выхода на орбиту искусственного спутника астероида.

В процессе определения оптимальной траектории КА и оценки величины массы КА у Апофиса считается, что на гелиоцентрическом этапе перелета программа управления двигателем малой тяги строится с помощью комбинированного метода оптимизации, описанного в разделе 2.

### 3.2. Первый этап – гелиоцентрический разгон с большой тягой

Пусть вывод КА на низкую околоземную орбиту осуществляется с помощью ракеты – носителя «Союз – ФГ», которая обеспечивает доставку массы  $m_l = 7130$  кг на высоту 200 км [19]. Для разгона КА до второй космической скорости используется блок «Фрегат», оснащенный двигателями с удельной тягой в 326 секунд [19] (при этом скорость истечения частиц в реактивной струе  $W_\phi = 3,198$  км/с).

Масса КА  $m(t_0)$  в момент начала гелиоцентрического движения  $t_0$  определяется в импульсном приближении (считая, что разгон обеспечивается несколькими активными участками и гравитационные потери малы):

$$m(t_0) = m_k - m_\phi,$$

где  $m_k = m_l \exp\left(\frac{-\Delta V}{W_\phi}\right)$ ;

$$\Delta V = \sqrt{\frac{2\mu_3}{R_l}} - \sqrt{\frac{\mu_3}{R_l}} = 3,224 \text{ км/сек} - \text{импульс скорости разгона до второй}$$

космической скорости;

$m_l$  – масса КА в начале разгона;

$\mu_3$  – гравитационный параметр Земли;

$R_l$  – радиус стартовой орбиты;

$m_\phi = 970$  кг – «сухая» масса разгонного блока «Фрегат» [19].

Отсюда следует, что масса КА в начале второго этапа составляет  $m(t_0) = 1630$  кг.

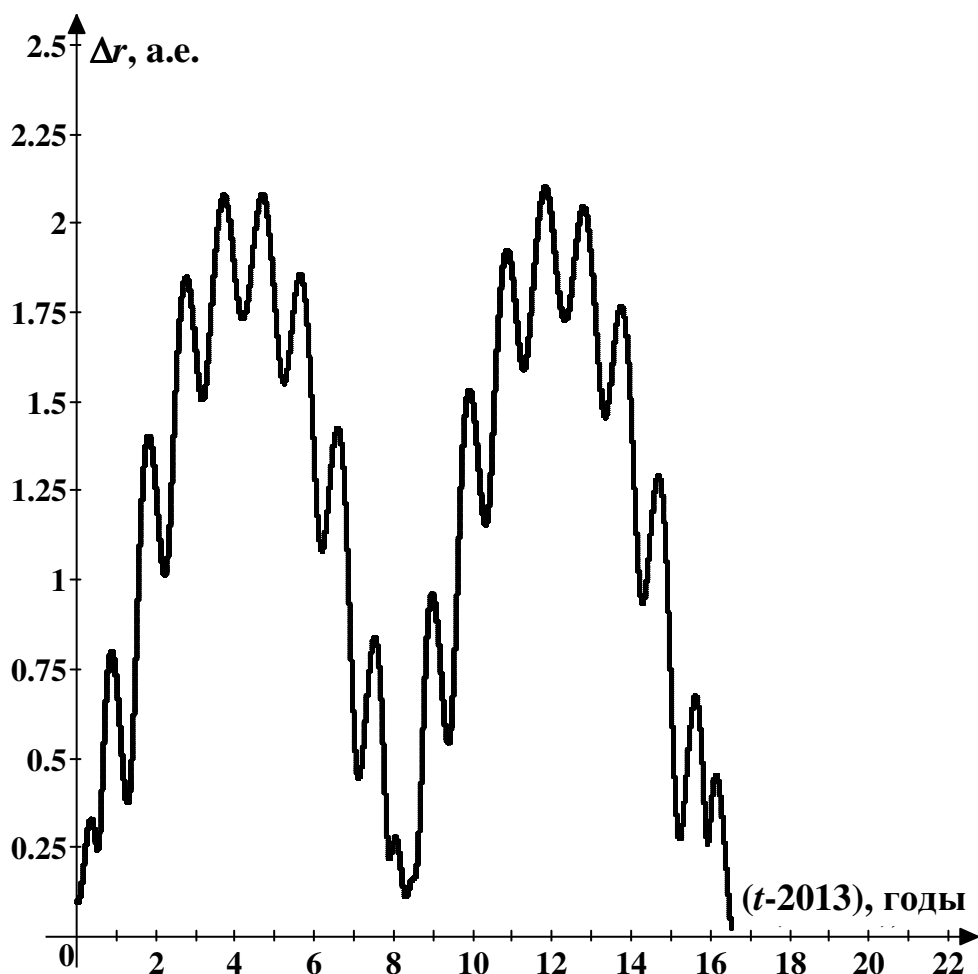
### 3.3. Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой

Величина массы КА в конце этапа гелиоцентрического движения  $m(t_f)$  зависит от момента старта  $t_0$  и продолжительности перелёта между орбитами Земли и Апофиса  $\Delta t = t_f - t_0$ . Важным косвенным параметром, определяющим энергетику процесса, является расстояние между Землей и Апофисом

$$\Delta r(t) = |\bar{r}_3(t) - \bar{r}_a(t)|,$$

где  $\bar{r}_3(t)$  – гелиоцентрический радиус-вектор Земли;  $\bar{r}_a(t)$  – гелиоцентрический радиус-вектор Апофиса, который строится на основе численных данных, приведённых в [20]. На Рис. 1 представлен график изменения расстояния  $\Delta r(t)$  при

$t \in [1.01.2013; 13.04.2029]$ . Периоды, когда расстояние  $\Delta r(t)$  резко уменьшаются, качественно соответствуют более легкой достижимости астероида.



**Рис.1.** Зависимость расстояния между астероидом Апофис и Землёй от времени.

Анализ зависимости  $\Delta r(t)$  на ближайшие десять лет позволяет выделить два временных интервала:

$$T_1 = [12.11.2012; 17.12.2015], \quad (31)$$

$$T_2 = [25.06.2019; 27.09.2022], \quad (32)$$

которые потенциально могут содержать оптимальную дату  $t_0$ . Следует отметить, что значение функционала  $J$  (критерия качества процесса, соответствующего величине расхода топлива) уменьшается с увеличением времени перелета  $\Delta t$  [3]. Однако, в процессе расчёта оптимальной траектории величину  $\Delta t$  необходимо ограничить, руководствуясь теми или иными практическими соображениями. В данной работе полагается, что:

$$\Delta t \in \{185, 230, 275, 320, 365\} \text{ суток.} \quad (33)$$

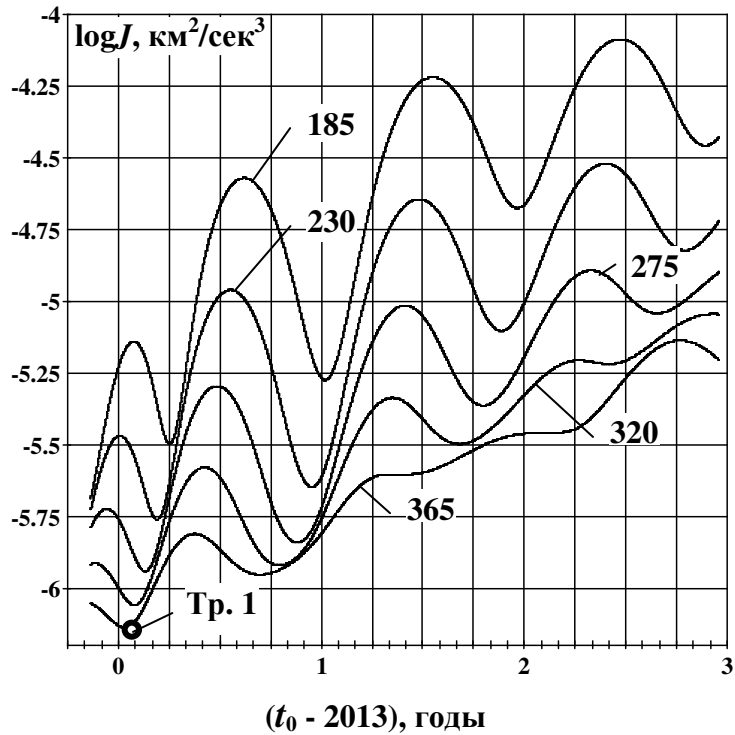
На основе метода оптимизации, описанного в разделе 2, и разработанного программного обеспечения проводились расчеты оптимальных траекторий перелёта КА к астероиду Апофис. Начальное время гелиоцентрического этапа  $t_0$  выбиралось из интервалов  $T_1$  и  $T_2$  (31, 32), продолжительность  $\Delta t$  - из (33). Первоначально все вычисления осуществлялись в рамках задачи об идеальной тяге ИТ. При этом полагалось, что КА оснащен солнечными батареями, которые в течение всего полета обеспечивают [2] постоянную электрическую мощность  $N_s = 7,5$  кВт. Тогда мощность двигателя малой тяги в струе:

$$N_{дв} = k_{дв} N_s,$$

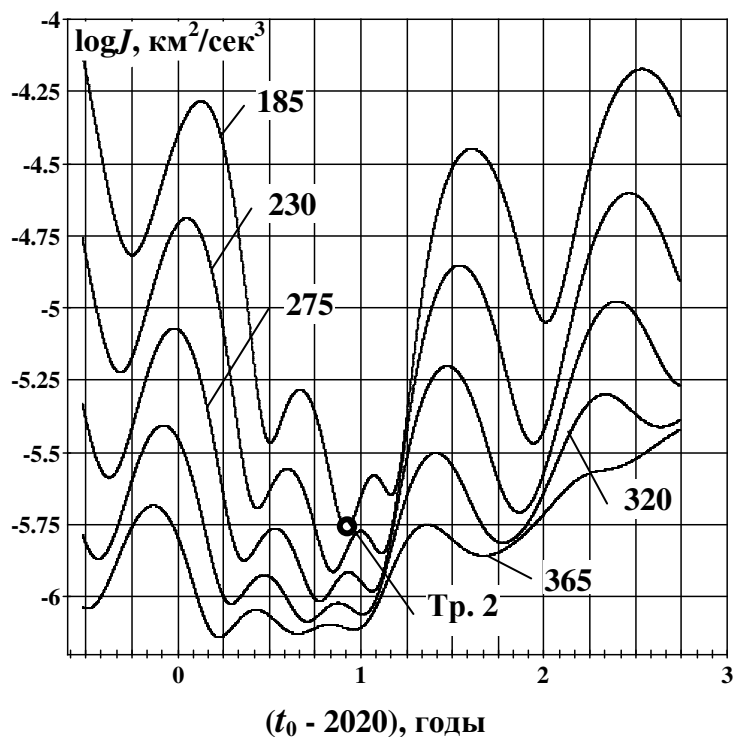
где  $k_{дв} = 0,5$  - коэффициент полезного действия двигательной установки. Следовательно,  $N_{дв} = 3,75$  кВт.

Обсудим далее полученные результаты. На Рис. 2 и Рис. 3 приводятся графики изменения критерия качества  $\log J$  для оптимальных траекторий ( $J$  определяется соотношением (8)) в зависимости от времени  $t_0$  при указанных значениях  $\Delta t$ . Эти зависимости построены на интервалах  $T_1$  и  $T_2$  с шагом в десять юлианских дней. На Рис. 2 символом **Тр1** обозначена оптимальная траектория перелёта КА, соответствующая начальному времени  $t_0 = 10.01.2013$  для первого диапазона дат  $T_1$  и времени перелета  $\Delta t = 365$  суток. На Рис. 3 символом **Тр2** обозначена оптимальная траектория перелёта КА, соответствующая начальному времени  $t_0 = 5.12.2020$  для второго диапазоне дат  $T_2$  и параметра  $\Delta t = 185$  суток. Массу КА в конечный момент  $t_f$  для различных значений  $t_0$  и  $\Delta t$  будем определять способом, изложенным в разделе 2 (см. формулу (7)). Её значения (наряду с другими числовыми характеристиками) для ряда характерных точек из диапазонов  $T_1$  и  $T_2$  содержатся в Табл. 1 и Табл. 2 Приложения, соответственно; при этом  $N_{дв}=3,75$  кВт для массы  $m(t_f)$ .

Анализ полученных результатов показывает, что абсолютный минимум функционала  $J(t_0, \Delta t)$  достигается на втором диапазоне дат  $T_2$  и соответствует  $t_0 = 20.03.2020$ ,  $\Delta t = 365$  дней, при этом максимальная конечная масса КА для идеальной тяги в момент  $t_f$  равна  $m(t_f) = 1407,9$  кг, и фактически совпадает с  $m(t_f) = 1407,2$  кг для траектории **Тр1**. Для траектории **Тр2** конечная масса  $m(t_f) = 1183,4$  кг.



**Рис.2.** Зависимости функционала  $J$  от момента начала гелиоцентрического участка, полученные на интервале [12.11.2012 – 17.12.2015] для различных значений продолжительности перелёта в сутках.



**Рис.3.** Зависимости функционала  $J$  от момента начала гелиоцентрического участка, полученные на интервале [25.06.2019 – 27.09.2022] для различных значений продолжительности перелёта в сутках.

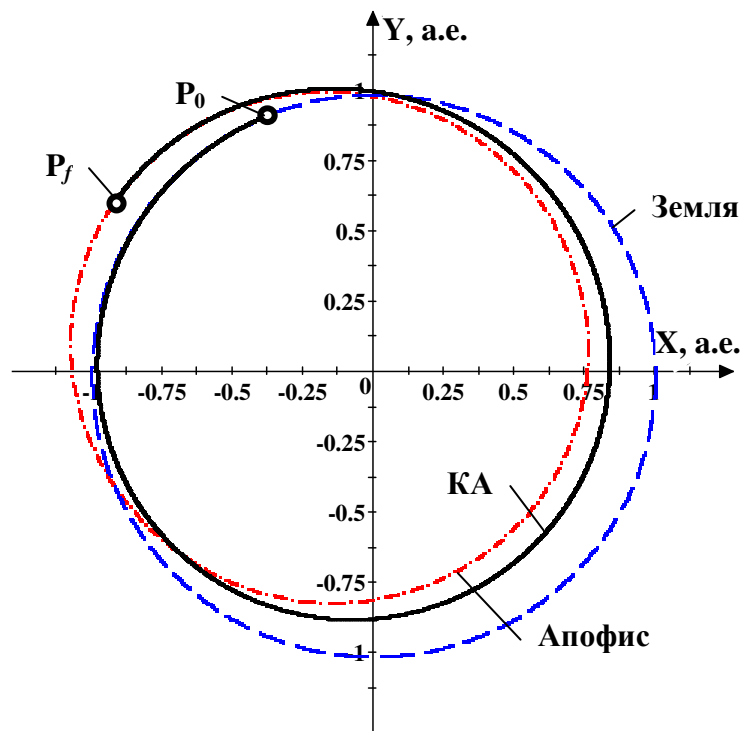


Однако на практике модуль силы тяги двигателей всегда ограничен, а его изменение во времени хорошо аппроксимируется кусочно-постоянной функцией. Из (6) и (25):

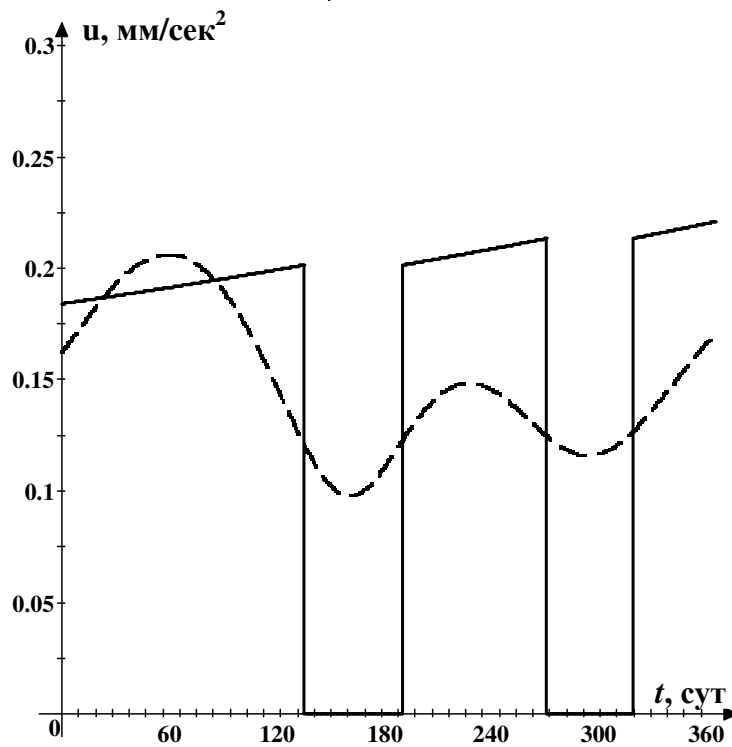
$$F_{\max} = \frac{2N_{\text{дв}}}{W_e}$$

В соответствии с [2] примем  $W_e = 25$  км/с. Тогда при  $N_{\text{дв}} = 3,75$  кВт максимальная величина  $F_{\max} = 0,3$  Н.

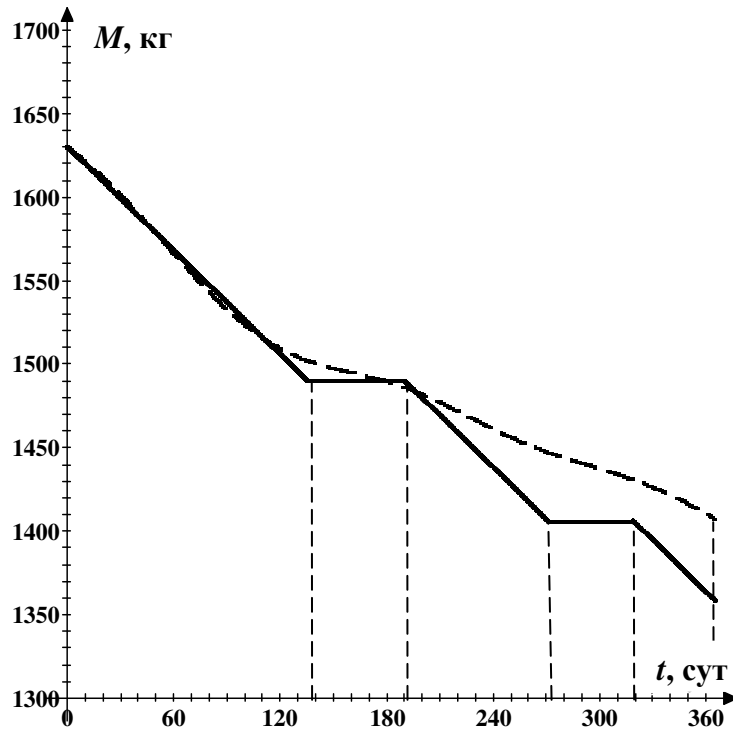
Поэтому на втором этапе исследований решалась задача построения оптимальных траекторий **Тр1** и **Тр2** при кусочно-постоянной тяге двигателей. Анализ показал, что в случае **Тр1** управляющие ускорения ИТ не слишком велики и вариант двигательной установки (ДУ) с  $F_{\max} = 0,3$  Н и  $W_e = 25$  км/с позволяет реализовать перелет с КПТ. В этом случае при КПТ масса КА в конце гелиоцентрического участка  $m(t_f) = 1358,3$  кг. На Рис. 4 представлена траектория **Тр1** перелета КА к астероиду. На Рис. 5 и Рис. 6 приведены графики изменения модуля управляющего ускорения  $u$ , а также массы КА вдоль **Тр1** для КПТ (сплошные линии) и ИТ (штриховые линии). На траектории имеется три активных участка максимальной тяги и два пассивных. Для траектории **Тр2** с уменьшенным в два раза временем перелета ( $\Delta t = 185$  суток) модуль управляющего ускорения возрастает по сравнению с **Тр1** и требует большей ( $\sim 0,45 - 0,7$  Н) тяги для его реализации. Таким образом, величина максимальной тяги  $F_{\max}$  должна быть увеличена примерно в два раза. В данной работе указанный эффект достигается увеличением мощности ДУ до 7,5 кВт при сохранении прежней скорости истечения  $W_e = 25$  км/с. Тогда оказывается возможным практически реализовать перелёт **Тр2** с режимом КПТ и достичь астероид Апофис за 185 суток. Траектория **Тр2** этого перелёта приводится на Рис. 7. На Рис. 8 и Рис. 9 приведены графики изменения модуля управляющего ускорения  $u$ , а также массы КА по траектории **Тр2** для задач ИТ (штриховые линии) и КПТ (сплошные линии). При этом конечная масса КА  $m(t_f) = 1371,3$  кг для случая ИТ, и  $m(t_f) = 1324,7$  кг для случая КПТ. Таким образом, введение режима КПТ уменьшает конечную массу КА на 3,48% для **Тр1** при условии, что  $N_{\text{дв}} = 3,75$  кВт, и на 3,43% для **Тр2** при условии, что  $N_{\text{дв}} = 7,5$  кВт.



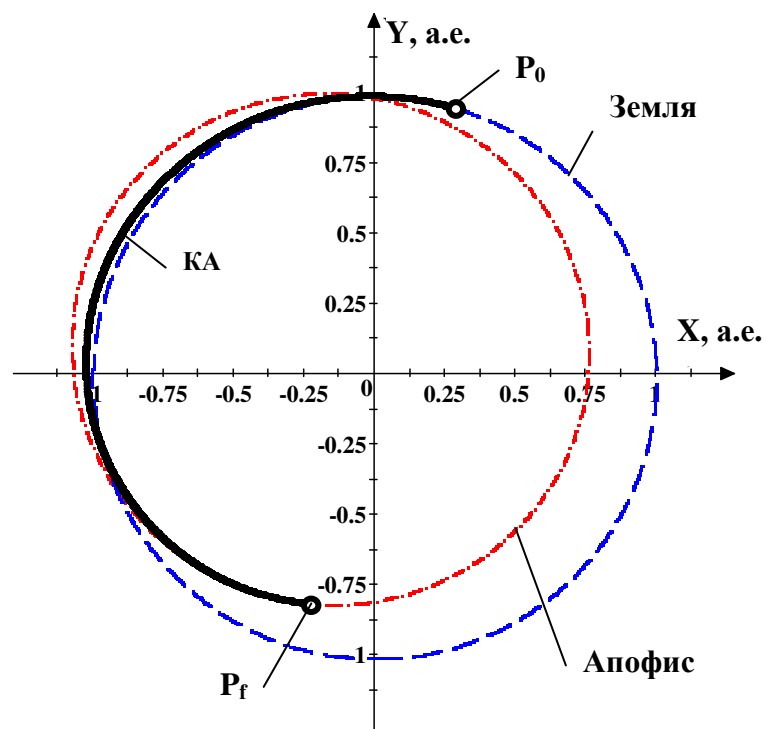
**Рис.4.** Гелиоцентрические орбиты астероида Апофис, Земли и КА (точки  $P_0$  и  $P_f$  соответствуют моментам  $t_0$  и  $t_f$  начала и конца перелёта) для траектории **Тр1**.



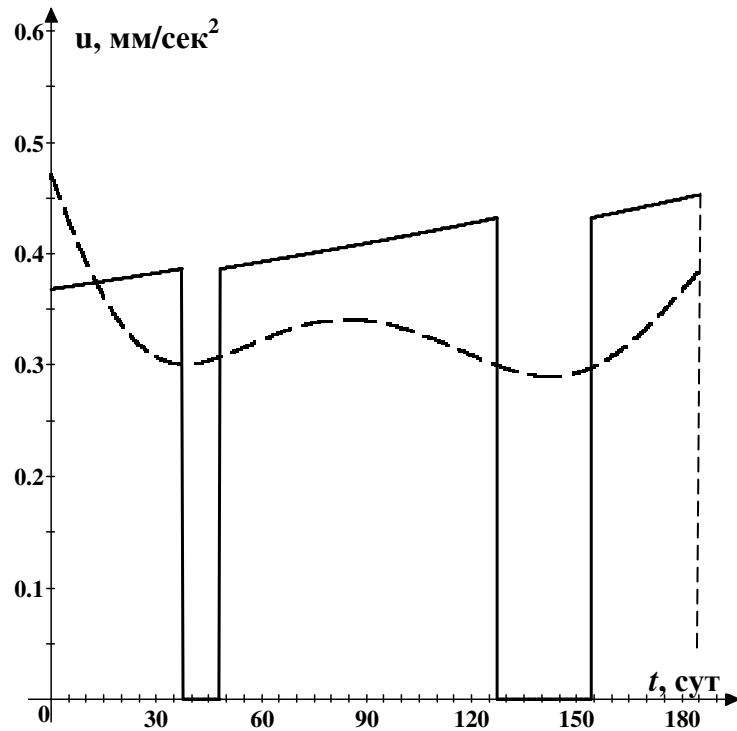
**Рис.5.** Зависимость величины реактивного ускорения КА от времени полёта для случаев идеальной и кусочно-постоянной тяги для траектории **Тр1**.



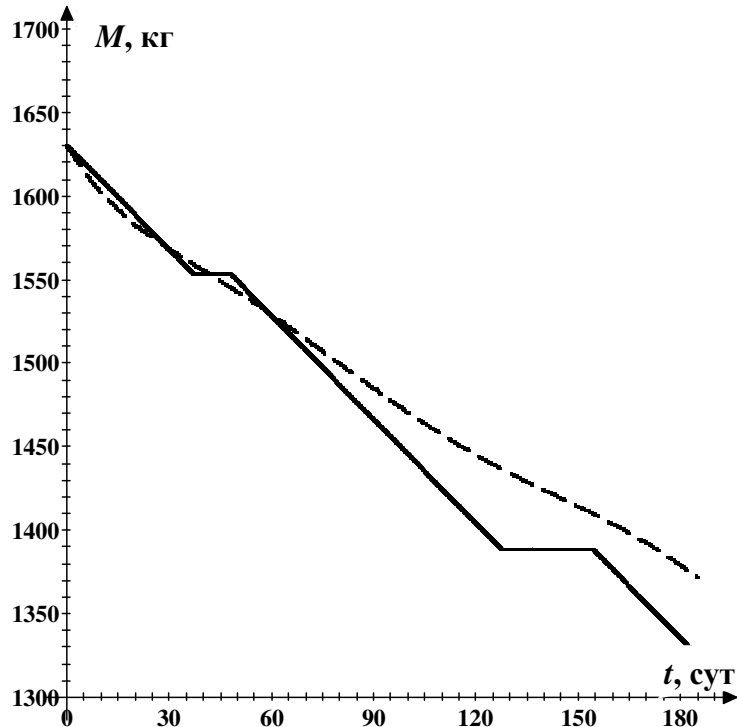
**Рис.6.** Зависимость массы КА от времени полёта для случаев идеальной и кусочно-постоянной тяги для траектории **Тр1**.



**Рис.7.** Гелиоцентрические орбиты астероида Апофис, Земли и КА (точки  $P_0$  и  $P_f$  соответствуют моментам  $t_0$  и  $t_f$  начала и конца перелёта) для траектории **Тр2**.



**Рис.8.** Зависимость величины реактивного ускорения КА от времени полёта для случаев идеальной и кусочно-постоянной тяги для траектории Тр2.



**Рис.9.** Зависимость массы КА от времени полёта для случаев идеальной и кусочно-постоянной тяги для траектории Тр2.

### 3.4. Третий этап – торможение у астероида

На третьем этапе полета КА, войдя в сферу действия Апофиса, должен погасить свою скорость со второй до первой космической и стать искусственным спутником астероида. Радиус сферы действия Апофиса вычисляется по формуле [3]:

$$R_a = r_{ac} \left( \frac{m_a}{m_c} \right)^{2/5},$$

где  $r_{ac}$  - расстояние между астероидом и Солнцем,  $m_a = 2,7 \times 10^{10}$  кг - масса астероида [18],  $m_c$  - масса Солнца. Таким образом,  $R_a$  составляет  $\sim 1,69$  км. Радиус орбиты спутника астероида принимается равным 0,5 км. Тогда разность между второй и первой космической скоростью для Апофиса составляет  $\sim 0,02$  м/с. Гашение этой скорости при тяге 0,3 Н занимает около минуты и требует порядка одного грамма топлива. Поэтому, в оценочных расчетах можно пренебречь расходом массы, необходимым для торможения КА. В соответствии с [2], полезная масса вычисляется по формуле:

$$m_{\pi} = m(t_f) - m_{\sigma_1} - 0,2(m(t_0) - m(t_f)),$$

где  $m_{\sigma_1} = 300$  кг - масса транспортного блока, электроракетных двигателей, солнечных батарей; последний член выражения есть масса топливных баков. Окончательно получим, что  $m_{\pi} = 1004$  кг для траектории **Тр1** (при условии что  $N_{дв} = 3,75$  кВт) и  $m_{\pi} = 963$  кг для траектории **Тр2** (при условии, что  $N_{дв} = 7,5$  кВт).

## 4. ВЫВОДЫ

В настоящей работе предложен, разработан и реализован в виде программного обеспечения комбинированный метод оптимизации космических траекторий малой тяги, основанный на сочетании прямых (динамическое программирование, «блуждающая» трубка, локальные вариации) и не прямых (принцип максимума Понтрягина, продолжение по параметру) вычислительных алгоритмов. Метод применен для определения и анализа траекторий перелета КА с малой электрореактивной тягой к астероиду Апофис. Исследован широкий диапазон дат начала гелиоцентрического этапа экспедиции и продолжительности полета от Земли до Апофиса. Рассмотрены случаи идеально-регулируемой тяги и кусочно-постоянной тяги. Для случая использования ракеты-носителя Союз-ФГ получено значение полезной массы КА у Апофиса  $\sim 1000$  кг.

Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант РФФИ 09-01-00710) и Программы поддержки ведущих научных школ России (Грант НШ-6700.2010.1).

## **5. ЛИТЕРАТУРА**

1. Автоматические космические аппараты для фундаментальных и прикладных научных исследований./ Под ред. Г.М. Полищука и К.М. Пичхадзе. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.-660 с.
2. Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Жирнов В.А., Энеев Т.М. О возможности достижения астероидов главного пояса космическим аппаратом с ЭРД. Препринт Института прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН, 2004, № 77. -32с.
3. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Издательство ЛКИ, 2009.-432 с.
4. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателем постоянной мощности. Космические исследования, 1964, том 2, №3, с. 360-391.
5. Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. - 400 с.
6. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, Изд. второе. 1969.- 408 с.
7. Григолюк Э.И., Шалашин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.- 232с.
8. Гродзовский Г.М., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. - 704 с.
9. Ивашкин В.В. Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. - 392 с.
10. Ивашкин В.В., Петухов В.Г. Траектории космического полета с малой тягой между орбитами спутников Земли и Луны при использовании орбиты захвата Луной. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2008, № 81. - 32 с.
11. Ивашкин В.В., Стихно К.А. О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей. Астрономический вестник, 2009, том 43, №6, с. 502-516.

12. Ивашкин В.В., Чернов А.В. Оптимизация траекторий перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду при использовании малой тяги. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 1996, № 62. - 32 с.
13. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. - 424 с.
14. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматиздат, 1983. - 392 с.
15. Ц. На. Вычислительные методы решения граничных задач. М.: Мир, 1982. - 296 с.
16. Чернов А.В. Анализ оптимальных перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду с кусочно-постоянной электрореактивной тягой. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2001, № 86. - 24 с.
17. Черноушко Ф.Л., Баничук Н.В. Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. - 240с.
18. <http://neo.jpl.nasa.gov/risk/a99942.html>
19. [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%82\\_\(%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9\\_%D0%B1%D0%BB%D0%BE%D0%BA\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%82_(%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B1%D0%BB%D0%BE%D0%BA))
20. <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=99942;orb=1>

## 6. ПРИЛОЖЕНИЕ

**Таблица 1**

Характерные точки траекторий для интервала  $T_1$  (Рис. 2).

$N$	$t_0$ , дата	$\Delta t$ , сут.	$J$ , $m^2/сек^3$	$m(t_f)$ , кг
1	31.03.2013	185	3.18888185	962.7
2	05.01.2014	185	5.31235204	756.5
3	21.12.2014	185	21.1273355	291.5
4	16.11.2015	185	34.9389136	189.6
5	11.11.2012	230	1.87042632	1158.9
6	11.03.2013	230	1.73307369	1184.0
7	16.12.2013	230	2.24944862	1094.7
8	21.11.2014	230	7.87420598	601.1
9	17.10.2015	230	15.0402103	381.8
10	11.11.2012	275	1.62235192	1205.0
11	19.02.2013	275	1.14457391	1305.3
12	16.11.2013	275	1.44004382	1241.4
13	22.10.2014	275	4.32852815	839.8
14	28.08.2015	275	9.08001351	548.1
15	11.11.2012	320	1.21224883	1290.1
16	30.01.2013	320	0.87112390	1370.5
17	17.10.2013	320	1.20106898	1292.5
18	02.09.2014	320	3.17148981	964.9
19	30.05.2015	320	6.03753420	704.9
<b>20 (Tp1)</b>	<b>10.01.2013</b>	<b>365</b>	<b>0.72861590</b>	<b>1407.2</b>
21	07.09.2013	365	1.11408206	1312.2
22	25.05.2014	365	2.48689969	1058.1



Таблица 2

Характерные точки траекторий для интервала  $T_2$  (Рис. 3).

$N$	$t_0$ , дата	$\Delta t$ , сут.	$J$ , $m^2/сек^3$	$m(t_p)$ , кг
1	02.10.2019	185	15.2565920	377.6
2	28.06.2020	185	3.45020831	931.5
<b>3 (Tp2)</b>	<b>05.12.2020</b>	<b>185</b>	<b>1.73612351</b>	<b>1183.4</b>
4	23.02.2021	185	2.27678060	1090.4
5	30.12.2021	185	8.95540124	553.2
6	12.09.2019	230	5.99968236	707.4
7	08.06.2020	230	2.02568490	1131.7
8	05.11.2020	230	1.22138697	1288.0
9	13.02.2021	230	1.42137748	1245.3
10	10.12.2021	230	3.40218590	937.1
11	13.08.2019	275	2.59588577	1042.0
12	09.05.2020	275	1.33929611	1262.5
13	6.10.2020	275	9.65525065	1347.2
14	24.01.2021	275	1.04684118	1327.8
15	10.11.2021	275	1.96038661	1143.0
16	24.07.2019	320	1.35528719	1259.1
17	19.04.2020	320	0.94872463	1351.3
18	16.9.2020	320	0.82192776	1382.9
19	04.01.2021	320	0.86964887	1370.8
20	11.10.2021	320	1.53985545	1221.2
21	17.08.2022	320	3.88151320	884.1
22	04.07.2019	365	0.90886710	1361.1
<b>23(optimum)</b>	<b>20.03.2020</b>	<b>365</b>	<b>0.72561630</b>	<b>1407.9</b>
24	27.08.2020	365	0.74597730	1402.6
25	15.12.2020	365	0.77110051	1396.0
26	01.09.2021	365	1.38756690	1252.3