

# КОМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ ТРАЕКТОРИЙ КА С МАЛОЙ ТЯГОЙ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ ПЕРЕЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К АСТЕРОИДУ АПОФИС

**XXXVI – академические чтения по космонавтике**

***В.В. Ивашкин, И.В. Крылов***

***Институт прикладной математики им.***

***М.В.Келдыша РАН***

***[ivashkin@keldysh.ru](mailto:ivashkin@keldysh.ru), [krylov i v@mail.ru](mailto:krylov_i_v@mail.ru)***

# Содержание

|   |           |
|---|-----------|
| ■ Введение.....   | <b>3</b>  |
| ■ Схема полета.....   | <b>4</b>  |
| ■ Первый этап – геоцентрический разгон с большой тягой.....   | <b>5</b>  |
| ■ Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой.<br>Постановка задач об “идеальной” и кусочно-постоянной тяге..... | <b>6</b>  |
| ■ Определение “нулевого” приближения методами динамического программирования.....   | <b>10</b> |
| ■ Задание начальных значений для сопряжённых переменных.....  | <b>11</b> |
| ■ Решение задач об “идеальной” тяге методом продолжения по параметру.....   | <b>12</b> |
| ■ Решение задач о кусочно-постоянной тяге методом продолжения по параметру.....   | <b>13</b> |
| ■ Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой.<br>Результаты.....  | <b>15</b> |
| ■ Третий этап – торможение у астероида.....   | <b>22</b> |
| ■ Выводы.....   | <b>23</b> |
| ■ Литература.....   | <b>24</b> |

# Введение

---

- В докладе представлены результаты исследования задачи оптимизации перелета КА к сближающемуся с Землёй астероиду Апофис.
- Для определения оптимальных траекторий перелёта авторами был разработан комбинированный метод оптимизации.
- В рамках этого метода начальное приближение строится на основе алгоритмов динамического программирования.
- Окончательно оптимальное управление определяется при помощи принципа максимума Понтрягина с использованием продолжения решения по параметру.
- Показано, что использование РН Союз-Фрегат позволяет обеспечить перелет КА с полезной массой около 1000 кг к астероиду Апофис.

# Схема полёта

---

- Геоцентрический этап разгона КА с помощью двигателя большой тяги;
- Гелиоцентрический этап, на котором осуществляется выравнивание координат и скоростей КА и астероида при помощи электроракетного двигателя малой тяги;
- Этап торможения КА в сфере действия Апофиса с целью выхода на орбиту искусственного спутника астероида.

# Первый этап – геоцентрический разгон с большой тягой

- Вывод КА на низкую околоземную орбиту осуществляется с помощью ракеты – носителя «Союз – ФГ», которая обеспечивает доставку массы 7130 кг на высоту 200 км.
- Для разгона КА до второй космической или гиперболической скорости используется блок «Фрегат», оснащенный двигателями с удельной тягой в 326 секунд, при этом скорость истечения частиц в реактивной струе  $W_{\phi} = 3.918 \text{ км/с}$ .
- Масса КА в момент начала гелиоцентрического движения определяется в импульсном приближении (считая, что разгон обеспечивается несколькими активными участками и гравитационные потери малы) и при разгоне до второй космической скорости составляет 1630 кг.

## Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Постановка задач об “идеальной” и кусочно-постоянной тяге - а

- Здесь рассматривались движения с идеальной и с кусочно-постоянной тягой
- Уравнения траектории:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}, \mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mu \frac{\mathbf{r}}{r^3}, r = |\mathbf{r}| \quad (1)$$

- Уравнение массы КА:

$$\dot{m} = -\beta \quad (2)$$

- Управляющее ускорение двигателя МТ:

$$\mathbf{u} = \frac{F}{m} \mathbf{e}, F = \beta W_e, |\mathbf{e}| = 1 \quad (3)$$

- Начальные и конечные условия:

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \mathbf{r}(t_f) = \mathbf{r}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f \quad (4)$$

# Постановка задач об “идеальной” и кусочно-постоянной тяге - b

- Критерий качества процесса управления для идеальной тяги (при условии постоянной мощности  $N_{дв}$  в струе двигателя МТ):

$$J = \int_{t_0}^{t_f} u^2 dt \quad (5)$$

Задача об идеальной тяге:

- Найти такое управление (3) и траекторию (1) удовлетворяющую условиям (4), чтобы функционал (5) был минимален.

# Постановка задач об “идеальной” и кусочно-постоянной тяге - с

- Ограничение на величину тяги:

$$F \in \{0, F_{\max}\} \quad (6)$$

- Критерий качества процесса управления для кусочно-постоянной тяги:

$$J = m(t_f) \quad (7)$$

## Задача об кусочно-постоянной тяге:

- Найти такое управление (3) и траекторию (1),(2) удовлетворяющие условиям (4),(6), чтобы функционал (7) был минимален.



## Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой - $d$

---

Для определения оптимальных траекторий перелёта на втором участке авторами был разработан комбинированный метод оптимизации.

В рамках этого метода начальное приближение строится на основе алгоритмов динамического программирования.

Окончательно оптимальное управление определяется при помощи принципа максимума Понтрягина с использованием продолжения решения по параметру.

# Определение “нулевого” приближения методами динамического программирования

---

- Сначала траектория строится методом динамического программирования в априорно заданной области изменения параметров траектории.
- Последующее уточнение траектории осуществляется методом «блуждающей» трубки.
- Окончательно, “нулевое” (для принципа максимума) приближение траектории отыскивается с помощью метода локальных вариаций.

# Задание начальных значений для сопряженных переменных - а

- Для получения сопряженных переменных в принципе максимума Система (1) линеаризуется относительно траектории  $\mathbf{r}^{(0)}(t)$ , которая формируется на основе узловой ломанной предыдущего этапа методом сплайн-интерполяции.
- Начальные значения сопряжённых переменных отыскиваются на основе принципа максимума.
- Функция Понтрягина:

$$H = \psi_0 u^2 + \psi_v (\mathbf{g}(\mathbf{r}^{(0)}) + \mathbf{G}(\mathbf{r}^{(0)})(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}) + \mathbf{u}) + \psi_r \mathbf{v} \quad (8)$$

- П-система:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}^{(0)}) + \mathbf{G}(\mathbf{r}^{(0)})(\mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}) + \frac{\psi_v}{2} \quad (9)$$

$$\dot{\psi}_v = -\psi_r, \dot{\psi}_r = -\mathbf{G}^T(\mathbf{r}^{(0)})\psi_v, \psi_0 = -1$$

- Используя регулярный метод, решая линейную краевую задачу (9),(4), получаем нулевое приближение для вектора сопряжённых переменных.

# Решение задачи об “идеальной” тяге методом продолжения по параметру - а

- Задача об “идеальной” тяге решается в точной нелинейной постановке на основе принципа максимума.
- Функция Понтрягина:

(11)

- П-система:  $H = \psi_0 u^2 + \psi_v (\mathbf{g}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}) + \psi_r \mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{\Psi_v}{2}, \psi_0 = -1, \quad (12)$$

$$\dot{\Psi}_v = -\Psi_r, \dot{\Psi}_r = -\mathbf{G}^T(\mathbf{r})\Psi_v$$

- Нелинейная краевая задача (12),(4) решается методом продолжения по параметру,  $\tau \in [0, 1]$ . При этом определяются точные сопряженные переменные при  $\tau=1$ , используя переменные от линейной задачи как нулевое приближение, при  $\tau=0$ .

# Решение задачи о кусочно-постоянной тяге методом продолжения по параметру - а

- Задача о кусочно-постоянной тяге решается в точной нелинейной постановке на основе принципа максимума.
- Функция Понтрягина:

$$H = \boldsymbol{\psi}_v \left( \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{F \mathbf{e}}{m} \right) + \boldsymbol{\psi}_r \mathbf{v} - \frac{\psi_m F}{W_e} \quad (16)$$

- П-система:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}, \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) + \frac{F_{\text{opt}}}{m} \mathbf{e}_{\text{opt}}, \quad (17)$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}_v = -\boldsymbol{\psi}_r, \dot{\boldsymbol{\psi}}_r = -\mathbf{G}^T(\mathbf{r}) \boldsymbol{\psi}_v,$$

$$\dot{\psi}_m = \frac{F(\mathbf{e} \boldsymbol{\psi}_v)}{m^2}$$

# Решение задачи о кусочно-постоянной тяге методом продолжения по параметру - b

- Оптимальное управление:

$$F_{\text{opt}} = \begin{cases} F_{\text{max}}, & \text{если } \psi_v > \frac{m\psi_m}{W_e} \\ 0, & \text{если } \psi_v \leq \frac{m\psi_m}{W_e} \end{cases}, \mathbf{e}_{\text{opt}} = \frac{\Psi_v}{\psi_v} \quad (18)$$

- Дополнительные краевые условия:

$$\begin{aligned} \psi_m(t_f) &= 1, \\ m(t_0) &= m_0. \end{aligned} \quad (19)$$

- Нелинейная краевая задача (17)(18),(4),(19) решается методом продолжения по параметру,  $\tau \in [0, 1]$ . При этом решение идеальной тяги используется как начальное приближения, для  $\tau=0$ . При  $\tau=1$  получаем решение для конечной тяги.

## Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты-а

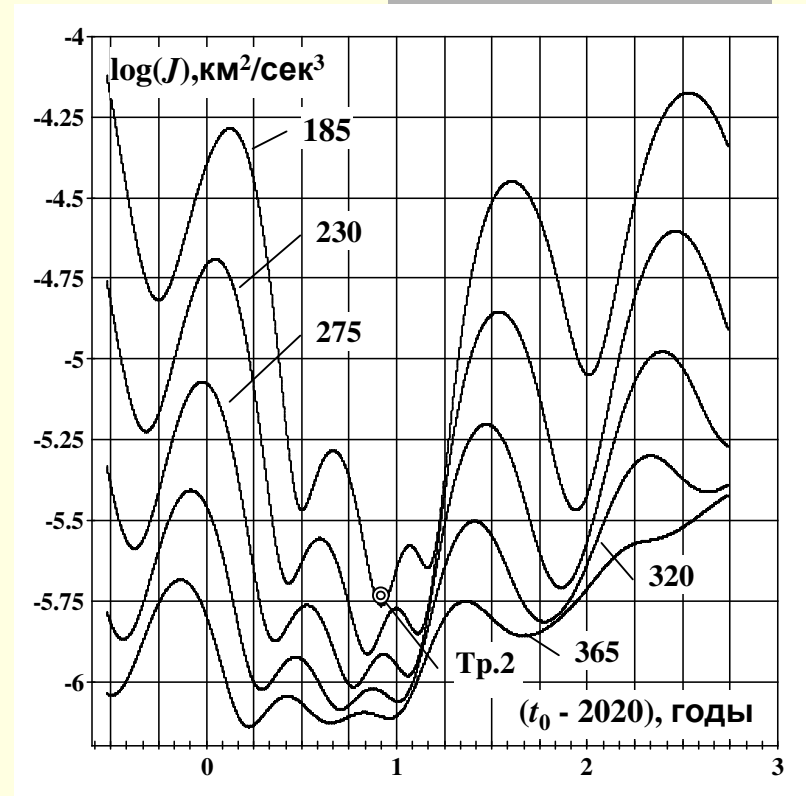
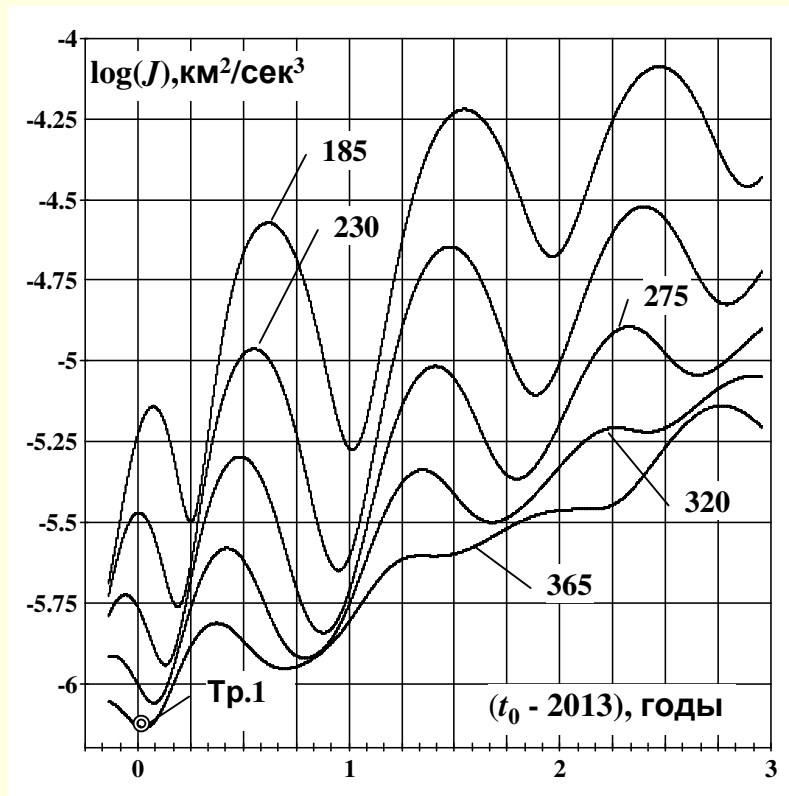
- Величина массы КА в конце этапа гелиоцентрического движения зависит от момента старта и продолжительности перелёта между Землёй и Апофисом.
- В работе исследовались два диапазона дат старта: [12.11.2012; 17.12.2015] и [25.06.2019; 27.09.2022].
- Продолжительность перелёта полагалась равной {185, 230, 275, 320, 365} суткам.
- Получены зависимости функционала от даты старта и продолжительности перелёта для случая “идеальной” тяги.
- Выделены траектории Tr1 и Tr2, на которых реализуется максимум функционала для первого и второго диапазона дат старта и продолжительностей перелёта в 365 и 185 суток соответственно.

## Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты - b

- Определены значения конечной массы КА для траекторий Тр1 и Тр2 в случае “идеальной” тяги (ИТ) при условии, что мощность двигателя в струе  $N_{дв} = 3.75$  кВт. Она составляет 1407.2 кг и 1183.4 кг соответственно, при  $V_{\infty}=0$ .
- При расчёте траектории Тр1 с кусочно-постоянной тягой (КПТ) скорость истечения частиц в струе была принята 25 км/сек, что обеспечило величину максимальной тяги двигателя 0.3Н.
- Указанные параметры позволяют практически реализовать перелёт Тр1 с кусочно-постоянной тягой. При этом, конечная масса КА оказалась равной 1358.3 кг.
- Для траектории Тр2 для облегчения обеспечения перелёта с кусочно-постоянной тягой мощность двигателя в струе увеличена до 7.5 кВт. При этом, максимальная тяга возрастает до 0.6 Н.
- Конечная масса КА на Тр2 с учётом увеличенной мощности двигателя составляет 1371.3 кг для идеальной и 1324.7 кг для кусочно-постоянной тяги.
- Оптимизация по  $V_{\infty}$  увеличивает конечную массу: для Тр1 - до 1469 кг (ИТ) и 1394 кг (КПТ, при этом характеристическая скорость  $W=3.242$  км/с), а для Тр2 - до 1412 кг (ИТ) и 1341 кг (КПТ,  $W=3.589$  км/с).

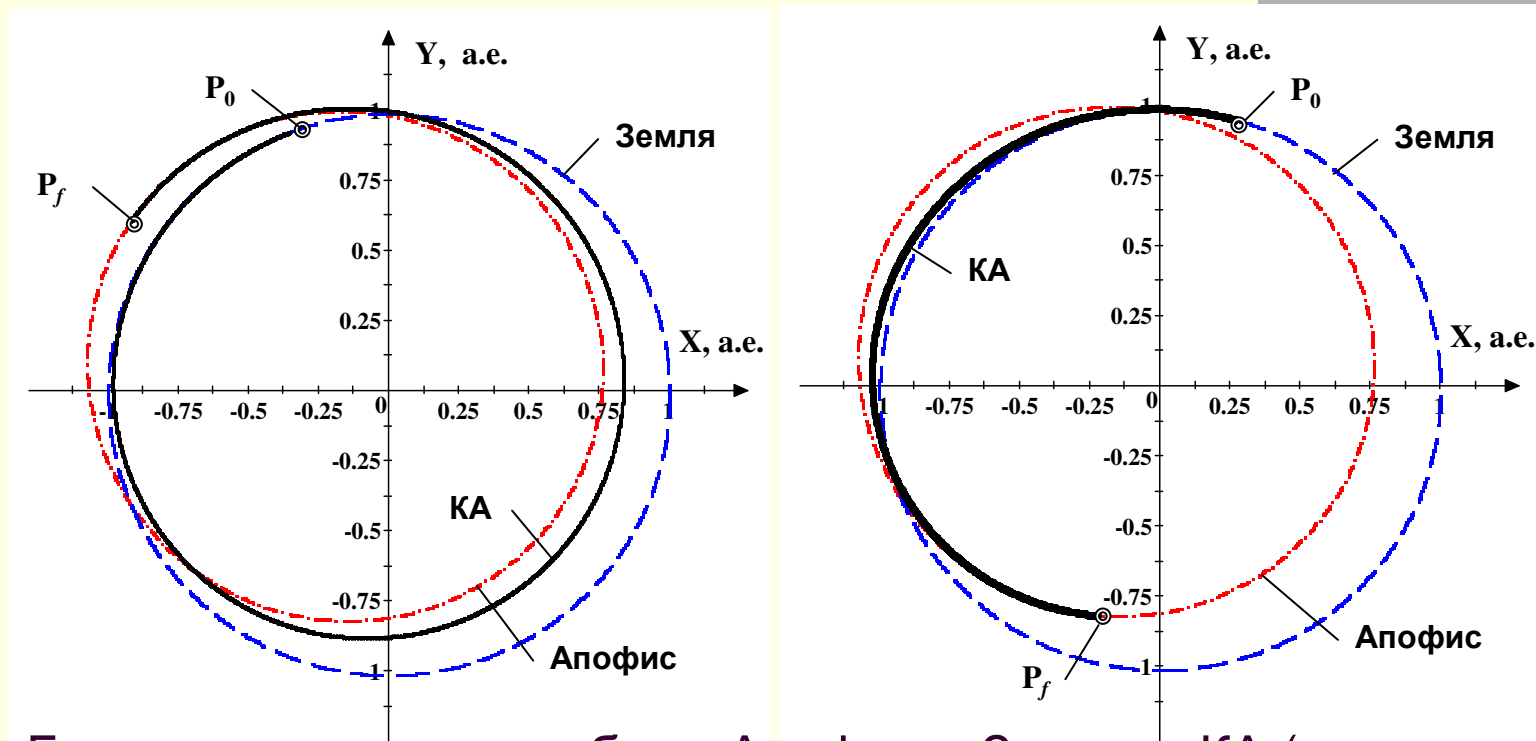


# Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты- с



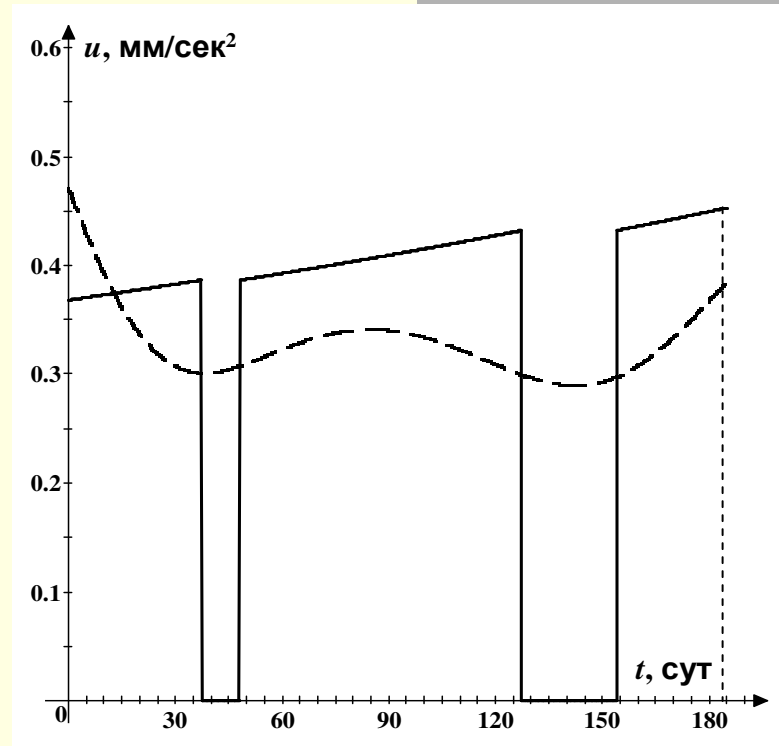
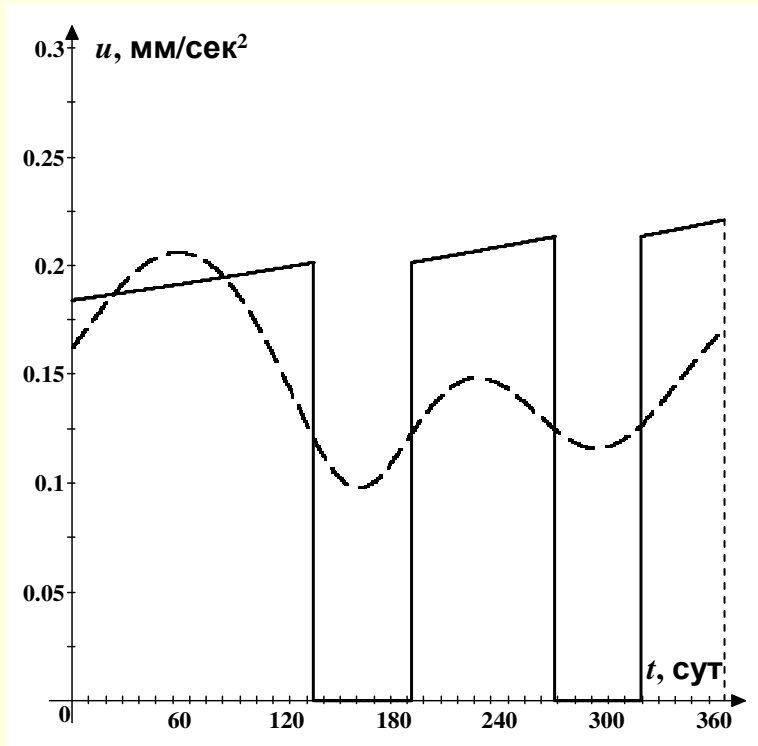
Зависимости функционала  $J$  от момента начала гелиоцентрического участка, полученные на интервалах [12.11.2012 – 17.12.2015] и [25.06.2019 – 27.09.2022] для различных значений длительности перелёта в сутках, при  $V_\infty = 0$ .

# Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты- d



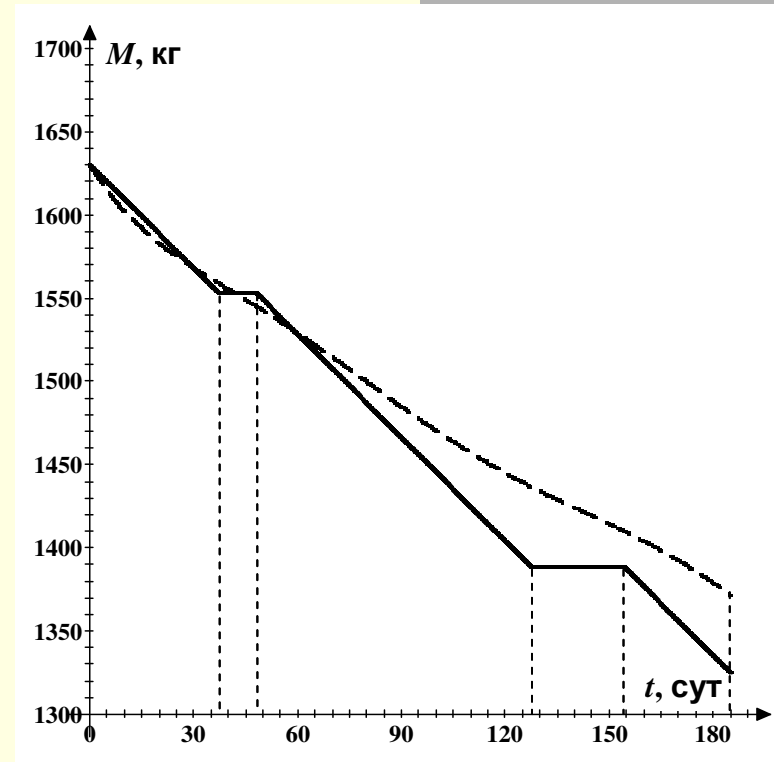
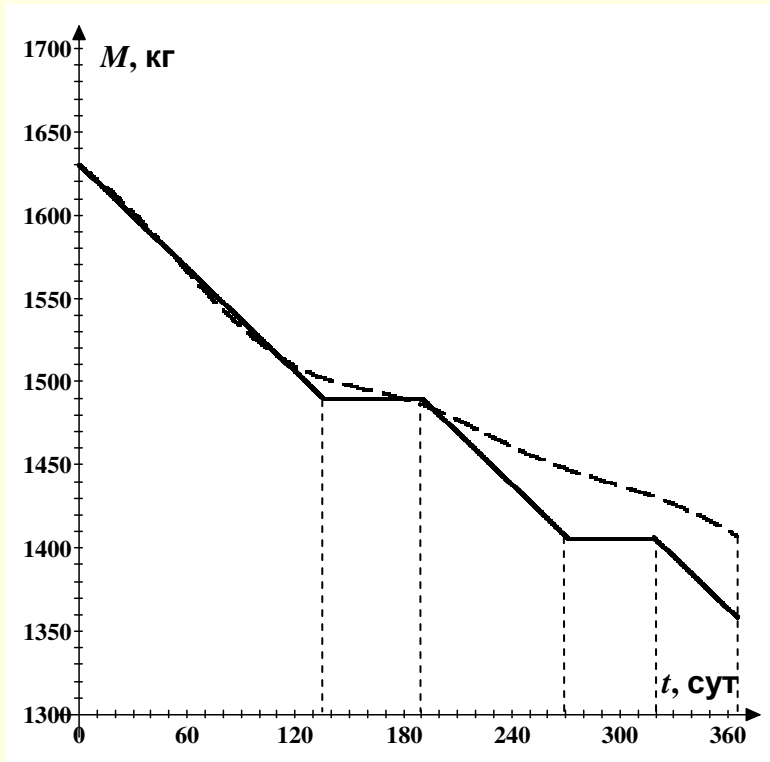
Гелиоцентрические орбиты Апофиса, Земли и КА (в проекции на плоскость эклиптики, точки  $P_0$  и  $P_f$  соответствуют моментам  $t_0$  и  $t_f$  начала и конца перелёта) для траекторий Тр1 ( $N_{дв} = 3.75$  кВт) и Тр2 ( $N_{дв} = 7.5$  кВт), при  $V_{\infty} = 0$ .

# Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты-е



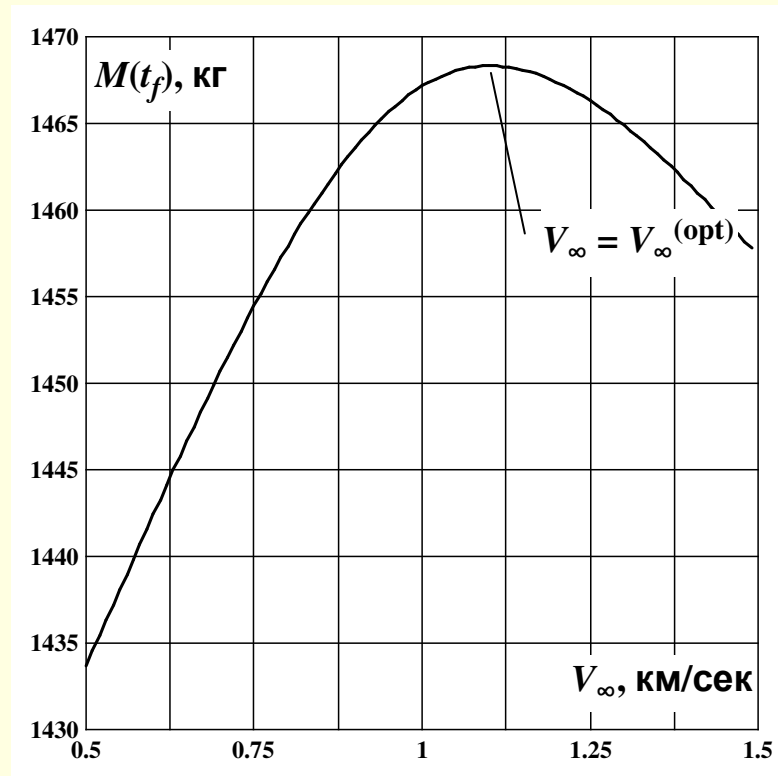
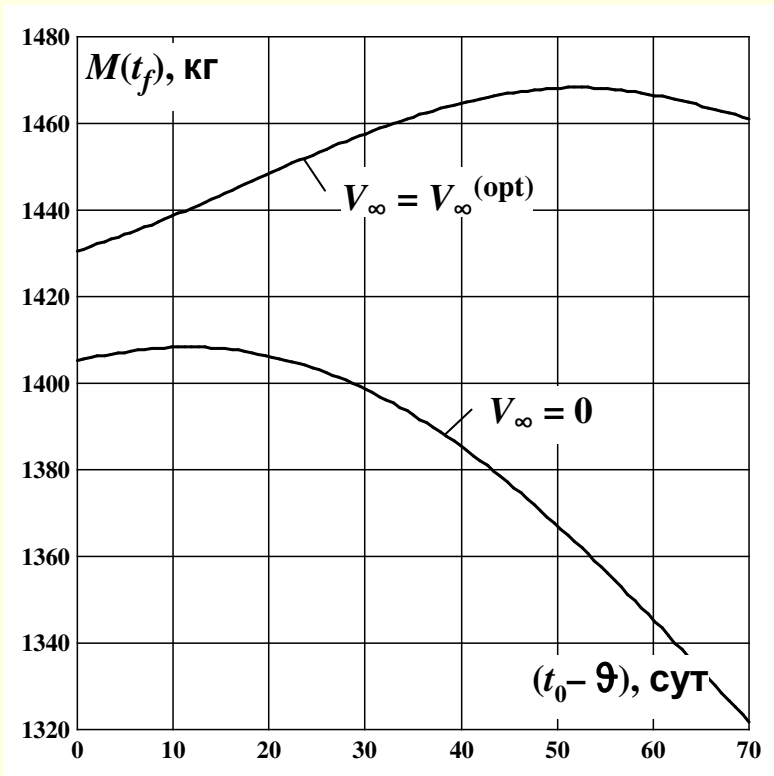
Зависимости величины реактивного ускорения  $K_A$  от времени полёта для случаев идеальной и кусочно-постоянной тяги, для траекторий  $Tr1$  ( $N_{дв} = 3.75$  кВт) и  $Tr2$  ( $N_{дв} = 7.5$  кВт), при  $V_{\infty} = 0$ .

# Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты- f



Зависимости массы КА от времени полёта для случаев идеальной (штрих.) и кусочно-постоянной (сплош.) тяги для траектории Tr1 ( $N_{дв} = 3.75$  кВт) и Tr2 ( $N_{дв} = 7.5$  кВт), при  $V_{\infty} = 0$ .

# Второй этап – гелиоцентрическое движение с малой тягой. Результаты- g



Зависимости величины конечной массы КА (для ИТ) от момента начала гелиоцентрического участка траектории, а также от величины гиперболического избытка скорости  $V_\infty$  для траектории Тр1 (при  $N_{дв}=3.75$  кВт), при  $\theta = 1.01.2013$  года.

# Третий этап – торможение у астероида

- КА, войдя в сферу действия Апофиса, гасит скорость со второй до первой космической и становится искусственным спутником астероида.
- Радиус сферы действия астероида составляет 1.69 км, радиус конечной орбиты КА вокруг Апофиса принимается равным 0.5 км.
- Разность между второй и первой космической скоростью для указанных параметров составляет  $\sim 0.02$  м/с. Поэтому, в оценочных расчетах расходом массы, необходимым для торможения КА, можно пренебречь.

- Масса полезной нагрузки вычисляется по формуле:

$$m_{\Pi} = m(t_f) - m_{\text{бл}} - 0,2(m(t_0) - m(t_f)) \quad (22)$$

- При  $m_{\text{бл}} = 300$  кг (масса транспортного блока, электроракетных двигателей и солнечных батарей) получим  $m_{\Pi} \approx 1055$  кг для Тр1 (при  $N_{\text{дв}} = 3.75$  кВт) и  $m_{\Pi} \approx 1000$  кг для Тр2 (при  $N_{\text{дв}} = 7.5$  кВт) с учётом оптимизации по  $V_{\infty}$ .

# Выводы

---

- Использование РН Союз-ФГ и электрореактивной ДУ малой тяги дает возможность послать к Астероиду Апофис КА массой  $\sim 1000$  кг у астероида.
- Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (Грант РФФИ 09-01-00710) и Программы поддержки ведущих научных школ России (Грант НШ-6700.2010.1).

# Литература - а

- **Автоматические космические аппараты для фундаментальных и прикладных научных исследований.**/ Под ред. Г.М. Полищука и К.М. Пичхадзе. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.-660 с.
- **Ахметшин Р.З., Ефимов Г.Б., Жирнов В.А., Энеев Т.М.** О возможности достижения астероидов главного пояса космическим аппаратом с ЭРД. Препринт Института прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН, 2004, № 77. -32с.
- **Белецкий В.В.** Очерки о движении космических тел. М.: Издательство ЛКИ, 2009.-432 с.
- **Белецкий В.В., Егоров В.А.** Межпланетные полеты с двигателем постоянной мощности. Космические исследования, 1964, том 2, №3, с. 360-391.
- **Беллман Р.** Динамическое программирование. М.: Издательство иностранной литературы, 1960. - 400 с.



# Литература - b

- **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, Изд. второе. 1969.- 408 с.
- **Григолюк Э.И., Шалашин В.И.** Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.- 232с.
- **Гродзовский Г.М., Иванов Ю.Н., Токарев В.В.** Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975. - 704 с.
- **Жулин С.С.** Метод продолжения по параметру и его приложение к задачам оптимального управления. Вычислительные методы и программирование. 2007. Т.8. С. 205-217.
- **Ивашкин В.В.** Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975. - 392 с.
- **Ивашкин В.В., Крылов И.В.** Комплексный метод оптимизации космических траекторий с малой тягой и его применение к задаче перелёта от Земли к астероиду Апофис. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2011, № 56. - 32 с.

# Литература - с

---

- **Ивашкин В.В., Стишно К.А.** О предотвращении возможного столкновения астероида Апофис с Землей. *Астрономический вестник*, 2009, том 43, №6, с. 502-516.
- **Ивашкин В.В., Чернов А.В.** Оптимизация траекторий перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду при использовании малой тяги. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 1996, № 62. - 32 с.
- **Моисеев Н.Н.** Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971. - 424 с.
- **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматиздат, 1983. - 392 с.
- **Ц. На.** Вычислительные методы решения граничных задач. М.: Мир, 1982. - 296 с.

# Литература - d

---

- **Чернов А.В.** Анализ оптимальных перелетов космического аппарата к сближающемуся с Землей астероиду с кусочно-постоянной электрореактивной тягой. Препринт Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, 2001, № 86. - 24 с.
- **Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.** Вариационные задачи механики и управления. Численные методы. М.: Наука, 1973. - 240с.
- <http://neo.jpl.nasa.gov/risk/a99942.html>
- [http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%82\\_\(%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9\\_%D0%B1%D0%BB%D0%BE%D0%BA\)](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B5%D0%B3%D0%B0%D1%82_(%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B9_%D0%B1%D0%BB%D0%BE%D0%BA))
- <http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi?sstr=99942;orb=1>