



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 7 за 2012 г.



**Березин А.В., Воронцов А.С.,
Духанин А.С., Марков М.Б.,
Паротькин С.В., Сысенко А.В.**

Электронно-фотонный
каскад в газе. Часть 2.
Сечения столкновений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Электронно-фотонный каскад в газе. Часть 2. Сечения столкновений / А.В.Березин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 7. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-7>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. КЕЛДЫША

**А.В. Березин, А.С. Воронцов, А.С. Духанин,
М.Б. Марков, С.В. Паротькин, А.В. Сысенко**

**ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫЙ КАСКАД В ГАЗЕ
ЧАСТЬ 2
СЕЧЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ**

МОСКВА
2012

А.В. Березин, А.С. Воронцов, А.С. Духанин, М.Б. Марков, С.В. Паротькин,
А.В. Сысенко

ЭЛЕКТРОННО-ФОТОННЫЙ КАСКАД В ГАЗЕ. ЧАСТЬ 2. СЕЧЕНИЯ СТОЛКНОВЕНИЙ

Аннотация

Представлен анализ взаимодействия фотонов и электронов высокой энергии с молекулами азота, кислорода и ксенона. Обосновано деление столкновений электронов на два типа: рассеяния с малой и большой передачей импульса. Приведены данные о сечениях взаимодействия с молекулами электронов низкой энергии. Рассмотрено ионизационное и упругое рассеяние, возбуждение молекулярных и электронных уровней газа, прилипание электронов к молекулам кислорода. Указаны источники данных о сечениях. Вся совокупность данных предназначена для математического моделирования переноса электронно-фотонного каскада в газовой среде.

A.V. Berezin, A.S. Dukhanin, M.B. Markov, S.V. Parot'kin, A.V. Sysenko,
A.S. Vorontsov

THE ELECTRON-PHOTON CASCADE IN GAS. CHAPTER 2. COLLISIONS CROSS SECTIONS

Abstract

The analysis of high-energy photons and electrons interaction with nitrogen, oxygen and xenon molecules is represented. The typing of collisions on scattering with small and great momentum transfer is established. The data on cross sections of interactions of low-energy electrons with molecules are represented. The mathematical model of electron-photon cascade transport is represented. Ionizing and elastic scattering, molecular and electron level excitation, electron attachment to oxygen molecules are considered. Sources of data are stated. Data set is oriented on mathematical modeling of electron-photon cascade transport in gaseous medium.

Введение

Электронно-фотонные каскады являются предметом исследований в различных отраслях науки и техники. Каскадные ливни в атмосфере [1] дают представление о природе и составе излучений космического пространства. Газовый разряд [2] исследуется, например, для понимания природы молнии [3].

В работе рассматриваются сечения столкновений для математического моделирования переноса электронно-фотонного каскада в газовой среде, отдельно для частиц высокой энергии и электронов низкой энергии. Высокой считается энергия, многократно превосходящая энергии связи электрона в молекуле. Энергии порядка и ниже энергий связи считаются низкими. Целью работы является константное обеспечение модели переноса каскада.

1. Столкновения частиц высокой энергии

Фотоны испытывают комптоновское рассеяние, фотопоглощение, образуют электрон-позитронные пары [4]. Электроны и позитроны образуют тормозное излучение, производят ионизацию, возбуждение молекул, испытывают упругое рассеяние [5]. Позитроны аннигилируют на атомарных электронах [4]. Столкновения частиц с высокой энергией рассматриваются качественно на основе формул для сечений [6-8] для построения приближений. Данные для расчетов можно почерпнуть из надежных источников [9].

1.1 Столкновения фотонов

Дифференциальные сечение комптоновского рассеяния кванта $\sigma_{\gamma\gamma}^c$ и образования комптоновского электрона $\sigma_{\gamma e}^c$ описываются формулами:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^c(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{r_e^2 ZN}{\varepsilon'} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} + \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} - \frac{mc^2}{\varepsilon'} \right)^2 - 2 \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} - \frac{mc^2}{\varepsilon'} \right) \right) \delta \left(\langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle - 1 + \left(\frac{mc^2}{\varepsilon} - \frac{mc^2}{\varepsilon'} \right) \right)$$

$$\sigma_{\gamma e}^c(\varepsilon, \varepsilon') = \sigma_{\gamma\gamma}^c(\varepsilon, \varepsilon - \varepsilon') \delta \left(\langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}' \rangle - \frac{mc^2 + \varepsilon'}{\varepsilon'} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 2mc^2}} \right),$$

где r_e – радиус электрона, N – концентрация, Z – заряд ядра атомов газа, mc^2 – масса покоя электрона, ε' и ε – энергии падающей и рассеянной частиц, $\langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}' \rangle$ – косинус угла между направлениями их импульсов.

Полное сечение комптоновского рассеяния:

$$\sigma_i^c = 2\pi r_e^2 ZN \left[\frac{m^2 c^4 (mc^2 + \varepsilon)}{\varepsilon^3} \left(\frac{2\varepsilon (mc^2 + \varepsilon)}{mc^2 (mc^2 + 2\varepsilon)} - \ln \left(1 + \frac{2\varepsilon}{mc^2} \right) \right) + \frac{mc^2}{2\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{2\varepsilon}{mc^2} \right) - \frac{mc^2 (mc^2 + 3\varepsilon)}{(mc^2 + 2\varepsilon)^2} \right].$$

Дифференциальное сечение образования фотоэлектрона:

$$\sigma_{\gamma e}^{ph} = \frac{2^2 Z^5 \alpha^4 r_e^2 (mc^2)^3 N (1 - \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}' \rangle^2) (\sqrt{\varepsilon'^2 + 2mc^2 \varepsilon'})^3}{(\varepsilon' + mc^2 - \sqrt{\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}' \rangle})^4 \varepsilon'^5} \delta(\varepsilon - \varepsilon' + I_{sh}) \times$$

$$\times \left\{ 2(mc^2)^3 + (\varepsilon'^2 - mc^2 \varepsilon') (\varepsilon' + mc^2 - \sqrt{\varepsilon'^2 + 2\varepsilon' \langle \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}' \rangle}) \right\},$$

где I_{sh} – энергия ионизации K -оболочки рассеивающего атома, α – постоянная тонкой структуры.

Полное сечение фотоэффекта:

$$\sigma_i^{ph} = 2\pi Z^5 \alpha^4 r_e^2 (mc^2)^2 N \frac{(\varepsilon + 2mc^2)^{3/2}}{\varepsilon^{7/2}} \times$$

$$\times \left[\frac{4}{3} + \frac{\varepsilon^2 - (mc^2)^2}{mc^2 (\varepsilon + 2mc^2)} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{(mc^2)^3}{(\varepsilon + mc^2) \varepsilon (\varepsilon + 2mc^2)} \ln \left(\frac{\varepsilon + mc^2 + \sqrt{\varepsilon (\varepsilon + 2mc^2)}}{\varepsilon + mc^2 - \sqrt{\varepsilon (\varepsilon + 2mc^2)}} \right) \right] \right].$$

Дифференциальное сечение $\sigma_{\gamma e}^p$ образования электрона при рождении пары зависит от параметра экранирования $\gamma = 100mc^2 (\varepsilon' - \varepsilon) (\varepsilon (\varepsilon' + mc^2) Z^{1/3})^{-1}$:

$$\sigma_{\gamma e}^p = \frac{4Z(Z+1)}{137} N r_e^2 \frac{\varepsilon + mc^2}{\varepsilon'} S(\varepsilon, \theta) \times \quad \gamma \ll 1$$

$$\times \left[(\varepsilon + mc^2) \left(\frac{1}{\varepsilon'^2} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon - mc^2}{\varepsilon' (\varepsilon + mc^2)} \right)^2 + \frac{2(\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{3 \varepsilon'^2 (\varepsilon + mc^2)} \right) \ln \left(\frac{183}{Z^{1/3}} \right) - \frac{1}{9} \frac{(\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{\varepsilon'^2} \right];$$

$$\sigma_{\gamma e}^p = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 N \frac{\varepsilon + mc^2}{\varepsilon'} S(\varepsilon, \theta) \times \quad \gamma < 2$$

$$\times \left\{ (\varepsilon + mc^2) \left(\frac{1}{\varepsilon'^2} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon - mc^2}{\varepsilon' (\varepsilon + mc^2)} \right)^2 \right) \left[\frac{\varphi_1(\gamma)}{4} - \frac{\ln Z}{3} \right] + \frac{2(\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{3 \varepsilon'^2} \left[\frac{\varphi_2(\gamma)}{4} - \frac{\ln Z}{3} \right] \right\};$$

$$\sigma_{\gamma e}^p = \frac{4Z(Z+1)}{137} N r_e^2 \frac{\varepsilon + mc^2}{\varepsilon'} S(\varepsilon, \theta) \quad 2 < \gamma < 15$$

$$\times \left(\frac{1}{\varepsilon'^2} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon - mc^2}{\varepsilon' (\varepsilon + mc^2)} \right)^2 + \frac{2(\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{3 \varepsilon'^2 (\varepsilon + mc^2)} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon' (\varepsilon + mc^2) (\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{mc^2 \varepsilon'^2} - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right);$$

$$\sigma_{\gamma e}^p = \frac{4Z(Z+1)}{137} N r_e^2 \frac{\varepsilon + mc^2}{\varepsilon'} S(\varepsilon, \theta) \quad \gamma \gg 1$$

$$\times \left(\frac{1}{\varepsilon'^2} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon - mc^2}{\varepsilon'(\varepsilon + mc^2)} \right)^2 + \frac{2(\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{3 \varepsilon'^2 (\varepsilon + mc^2)} \right) \left(\ln \frac{2\varepsilon' (\varepsilon + mc^2) (\varepsilon' - \varepsilon - mc^2)}{mc^2 \varepsilon'^2} - \frac{1}{2} \right).$$

Функции $\varphi_1(\gamma)$, $\varphi_2(\gamma)$, $c(\gamma)$ заданы таблично в работе[7].

Угловое распределение задается формулой [10]:

$$S(\varepsilon, \theta) = C \left(\frac{\varepsilon \theta}{mc^2} \exp\left(-a \frac{\varepsilon \theta}{mc^2}\right) + b \frac{\varepsilon \theta}{mc^2} \exp\left(-3a \frac{\varepsilon \theta}{mc^2}\right) \right),$$

где $a = 0.625$, $b = 27$, C – нормирующий множитель.

1.2 Столкновения электронов высокой энергии

Дифференциальные сечения образования квантов тормозного излучения $\sigma_{e\gamma}^b$ и рассеяния электрона σ_{ee}^b также зависят от параметра экранирования γ :

$$\sigma_{e\gamma}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{9} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \right\} S(\varepsilon', \theta) \quad \gamma \ll 1;$$

$$\sigma_{ee}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon} \left\{ \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \ln \frac{183}{Z^{1/3}} + \frac{1}{9} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right\} S(\varepsilon', \theta)$$

$$\sigma_{e\gamma}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right) \left(\frac{\varphi_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z \right) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \left(\frac{\varphi_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z \right) \right] S(\varepsilon', \theta) \quad \gamma < 2;$$

$$\sigma_{ee}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon} \left[\left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right) \left(\frac{\varphi_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z \right) - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \left(\frac{\varphi_1(\gamma)}{4} - \frac{1}{3} \ln Z \right) \right] S(\varepsilon', \theta)$$

$$\sigma_{e\gamma}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \left[\ln \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) \varepsilon'}{mc^2 \varepsilon} - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right] S(\varepsilon', \theta) \quad 2 < \gamma < 15;$$

$$\sigma_{ee}^b = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \left[\ln \frac{(\varepsilon) \varepsilon'}{mc^2 (\varepsilon' - \varepsilon)} - \frac{1}{2} - c(\gamma) \right] S(\varepsilon', \theta)$$

$$\sigma_{e\gamma}^b(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon' - \varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \left[\ln \frac{(\varepsilon' - \varepsilon) \varepsilon'}{mc^2 \varepsilon} - \frac{1}{2} \right] S(\varepsilon', \theta) \quad \gamma \gg 1.$$

$$\sigma_{ee}^b(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4Z(Z+1)}{137} r_e^2 \frac{1}{\varepsilon' - \varepsilon} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)^2 \right] \left[\ln \frac{(\varepsilon) \varepsilon'}{mc^2 (\varepsilon' - \varepsilon)} - \frac{1}{2} \right] S(\varepsilon', \theta)$$

Дифференциальное сечение тормозного рассеяния обратно пропорционально переданной энергии.

Ионизационное рассеяние электрона состоит в поглощении падающего и образовании в непрерывном спектре нескольких вторичных электронов. Пусть при рассеянии электрона с энергией ε и направлением импульса $\mathbf{\Omega}$ образуются электроны с параметрами $(\varepsilon', \mathbf{\Omega}')$ и $(\varepsilon'', \mathbf{\Omega}'')$. Для определенности полагают [11], что $\varepsilon' \geq \varepsilon''$. Электрон с энергией ε' называют рассеянным, а электрон с энергией ε'' – вторичным. Рассмотрим качественный анализ рассеяния на примере модельного вещества с единым потенциалом ионизации I .

Дифференциальное сечение образования рассеянного электрона с импульсом \mathbf{p}' и вторичного электрона с импульсом \mathbf{p}'' падающим электроном с импульсом \mathbf{p} при ионизационном рассеянии имеет вид:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{ion}}{\partial p' \partial p'' \partial \mathbf{\Omega}'} = \frac{\sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \varepsilon'' + I, \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle)}{p'^2 p''^2} v'' v' \delta(\varepsilon' + \varepsilon'' + I - \varepsilon) \Theta(\varepsilon' - \varepsilon''). \quad (1)$$

Здесь использовано сечение $\sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \omega, \vartheta) \equiv \partial^2 \sigma_{ion} / (\partial \omega \partial \mathbf{\Omega})$, дважды дифференциальное по переданной падающим электроном энергии $\omega = \varepsilon'' + I$ и углу рассеяния ϑ , $\cos \vartheta = \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle$. Такое сечение наиболее часто используется исследователями ионизации нейтральных молекул электронным ударом [12, 13]. Дельта-функция в правой части формулы (1) выражает сохранение энергии.

Относительно сечения $\sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \omega, \vartheta)$ можно сказать, что попытки его универсального теоретического описания для реальных атомов и молекул пока приходится признать неудачными. Полностью достоверным представляется только сечение ионизационного рассеяния на свободных электронах [7]:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ion}^{ea} = \pi r_e^2 \frac{mc^2}{\beta^2} & \left(\frac{1}{(\varepsilon - \omega)^2} - \frac{mc^2(2\varepsilon + mc^2)}{\omega(\varepsilon + mc^2)^2} \frac{1}{(\varepsilon - \omega)} + \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{(\varepsilon + mc^2)^2} \right) \times \\ & \times \delta \left(\cos \vartheta - \sqrt{\frac{(\varepsilon - \omega)(\varepsilon + 2mc^2)}{\varepsilon(\varepsilon - \omega + 2mc^2)}} \right). \end{aligned}$$

Рассеяние на связанных электронах это сечение описывает при $e? I$ и $w? I$, то есть, если энергии всех электронов (падающего, рассеянного и вторичного) существенно превосходят потенциал ионизации.

Связи рассеивающего электрона учитываются в модели Binary-Encounter-Bethe (ВЕВ) [9]. Эта модель позволяет получать сечение для каждой электронной орбитали. Полное сечение ионизации электронным ударом для электронов рассматриваемого модельного атомарного газа представляется формулой:

$$\sigma_{ВЕВ} = \pi r_0^2 (mc^2)^2 \frac{1}{I} \frac{1}{\varepsilon + U + I} \left[\frac{\nu}{2} \ln \frac{\varepsilon}{I} \left(1 - \left(\frac{I}{\varepsilon} \right)^2 \right) + (2 - \nu) \left(1 - \frac{I}{\varepsilon} - \frac{I}{\varepsilon + I} \ln \frac{\varepsilon}{I} \right) \right], \quad (2)$$

где U – начальная кинетическая энергия рассеивающего электрона в атоме, ν – дипольная постоянная его орбитали. Начальная кинетическая энергия рассеивающего атома определяется его основной волновой функцией. Дипольная постоянная вычисляется по непрерывной силе осциллятора $\zeta(\omega)$, зависящей от

конечной энергии вторичного электрона $\nu = 2 \int \frac{I}{\omega} \frac{d\zeta}{d\omega} d\omega$. Вычисление величин

$\zeta(\omega)$ и ν для заданного связанного электрона в конкретном веществе и есть основная проблема модели ВЕВ [9, 14 – 22]. Рассматривается определенное вещество или набор веществ, строятся приближенные оценки волновой функции и сечения. Например, в [9] рассмотрена ионизация электронным ударом молекул атмосферных газов. Показано, что для большинства из них $\nu = 1$. С учетом этого, полагая $e \approx 1$, запишем формулу (2) в следующем приближенном виде:

$$\sigma_{BEV} \approx \pi r_0^2 (mc^2)^2 \frac{1}{I} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{\varepsilon}{I} + 1 \right]. \quad (3)$$

Полное сечение (3) логарифмически зависит от отношения энергии падающего электрона к потенциалу ионизации. Сечение обратно пропорционально отношению потенциала ионизации к энергии покоя электрона.

Формула (3) позволяет оценить длину пробега электрона до первого столкновения $\lambda_i^0 = 1/(2Z\sigma_{BEV}N_a)$. Она на 3 – 4 порядка меньше пробега до полной остановки. В одном акте рассеяния энергия электрона изменяется мало.

Дифференциальное сечение в модели ВЕВ имеет следующий вид:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{\pi r_e^2 (mc^2)^2}{\varepsilon + U + I} \left[\frac{N_i - 2N}{N(I + \varepsilon)} \left(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\varepsilon - \omega} \right) + \left(2 - \frac{N_i}{N} \right) \left(\frac{1}{\omega^2} + \left(\frac{1}{\varepsilon - \omega + I} \right)^2 \right) + \frac{1}{N\omega} \frac{d\zeta}{d\omega} \ln \frac{\varepsilon}{I} \right].$$

Величину $d\zeta/d\omega$ предлагается вычислять как следующий полином:

$$\frac{d\zeta}{d\omega} = a \left(\frac{I}{\omega} \right)^2 + b \left(\frac{I}{\omega} \right)^3 + c \left(\frac{I}{\omega} \right)^4 + d \left(\frac{I}{\omega} \right)^5 + e \left(\frac{I}{\omega} \right)^6.$$

Коэффициенты полинома вычисляются отдельно для каждого вещества.

Использовать сечение $\sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \omega, \vartheta)$ для анализа распределения вторичных электронов нельзя, поскольку при ионизационном рассеянии на связанных электронах не выполняется закон сохранения импульса. Из [23] известно нерелятивистское дифференциальное сечение образования рассеянного электрона с направлением импульса $\mathbf{\Omega}'$ и вторичного электрона с импульсом \mathbf{p}'' падающим электроном с импульсом \mathbf{p} для атома водорода. Это сечение не требует дополнительных вычислений сил осцилляторов и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^3 \sigma_{ion}}{\partial p'' \partial \mathbf{\Omega}'' \partial \mathbf{\Omega}'} = \frac{e^4 2^5 I^3 \sqrt{\varepsilon'}}{\pi \sqrt{\varepsilon} (\varepsilon + \varepsilon' - 2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'} \cos \theta) \left(1 - \exp \left\{ -2\pi \sqrt{I/\varepsilon''} \right\} \right)} \times$$

$$\begin{aligned} & \exp\left\{-\left(2\sqrt{I/\varepsilon''}\right)\arctg\left[2\sqrt{I\varepsilon''}/\left(I+\left(\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta\right)-\varepsilon''\right)\right]\right\} \\ & \times \frac{\left(I+\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta+\varepsilon''-2\sqrt{\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta}\sqrt{\varepsilon''}\cos\delta\right)^4}{\left[\left(\sqrt{\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta}-\sqrt{\varepsilon''}\cos\delta\right)^2+I\cos^2\delta\right]} \times \\ & \times \frac{\left[\left(\sqrt{\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta}-\sqrt{\varepsilon''}\cos\delta\right)^2+I\cos^2\delta\right]}{\left(I+\varepsilon+\varepsilon'-2\sqrt{\varepsilon\varepsilon'}\cos\theta-\varepsilon''\right)^2+4I\varepsilon''}, \end{aligned}$$

где $\cos\delta = \langle \mathbf{p} - \mathbf{p}', \mathbf{\Omega}'' \rangle / |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$. Величина δ представляет собой угол между направлением вторичного и изменением импульса падающего электрона. При $\delta = 0$ сечение достигает максимума. Этот случай соответствует сохранению импульса. Рассмотрим четырежды дифференциальное сечение образования пары электронов с импульсами \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' падающим электроном с импульсом \mathbf{p} , потребовав выполнения закона сохранения импульса:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \sigma_{ion}}{\partial p' \partial p'' \partial \mathbf{\Omega}' \partial \mathbf{\Omega}''}((p, \mathbf{\Omega}) \rightarrow (p', \mathbf{\Omega}'), (p'', \mathbf{\Omega}'')) = \frac{\sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \varepsilon'' + I, \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle)}{p'^2 p''^2} \times \\ & \times v'' v' \delta((p - p'' \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}'' \rangle) / p' - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) \delta(\varepsilon' + \varepsilon'' + I - \varepsilon(p)) \Theta(\varepsilon' - \varepsilon'') \end{aligned} \quad (4)$$

Количество вторичных электронов, для направления импульса которых выполняется условие $\delta = 0$, в (4) завышено за счет остальных направлений. Однако формула (4) позволяет сделать оценки относительно спектра вторичных электронов. Рассмотрим по отдельности распределение рассеянных электронов:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{ion}}{\partial p' \partial \mathbf{\Omega}'}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') = \frac{1}{p'^2} \sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \varepsilon - \varepsilon', \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) v' \Theta(\varepsilon - \varepsilon' - I) \Theta(2\varepsilon' - \varepsilon + I) \quad (5)$$

и вторичных электронов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \sigma_{ion}}{\partial p'' \partial \mathbf{\Omega}''}((p, \mathbf{\Omega}) \rightarrow (p'', \mathbf{\Omega}'')) = \sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \varepsilon'' + I, (p - p(\varepsilon - \varepsilon'' - I) \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) / p'') \times \\ & \times p(\varepsilon - \varepsilon'' - I) v'' \Theta(\varepsilon - 2\varepsilon'' - I) \Theta(\varepsilon - \varepsilon'' - I) / p''^3 \end{aligned} \quad (6)$$

Распределения (5) и (6) при интегрировании по конечным состояниям \mathbf{p}' и \mathbf{p}'' образуют полное сечение ионизационного рассеяния:

$$\int \frac{\partial^2 \sigma_{ion}}{\partial p'' \partial \mathbf{\Omega}''}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'') d\mathbf{p}'' = \int \frac{\partial^2 \sigma_{ion}}{\partial p' \partial \mathbf{\Omega}'}(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}') d\mathbf{p}' = 2\pi \int_{-1}^1 \sin \vartheta d\vartheta \int_I^{(\varepsilon+I)/2} \sigma_{ion}^{ea}(\varepsilon, \omega, \vartheta) d\omega \quad (7)$$

Равенство (6) подтверждает сохранение числа частиц.

Поскольку $s_{ion}^{ea}(e, \omega, J) : 1/\omega^2$, максимальной величины сечение (5) достигает при малых значениях $\varepsilon - \varepsilon'$. В то же время, сечение (6) возрастает при близком к нулю значении ε'' . Таким образом, наиболее вероятны столкновения, при которых вторичный электрон получает нулевую энергию. Заметим, что приве-

денные сведения об ионизационном рассеянии не позволяют сделать вывод о наибольшей вероятности малых углов между направлениями движения падающего и рассеянного электронов.

Все представленные сечения при малых ω пропорциональны $1/\omega^2$.

Упругое рассеяние не приводит к изменению количества электронов в непрерывном спектре и изменению суммарной энергии электрона и рассеивающей частицы. Его дифференциальное по углу рассеяния макроскопическое сечение имеет вид [24]:

$$\sigma = \frac{NZ^2 \cdot r_e^2 \cdot (1 - \beta^2)}{\beta^4 \cdot (1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle + 2\eta)^2} \left(1 - \frac{\beta^2}{2} \frac{1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle}{2} + \pi\alpha Z\beta \left(1 - \frac{1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle}{2} \right) \sqrt{\frac{1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle}{2}} \right),$$

где $\eta = 1.7 \cdot 10^{-5} \cdot Z^{2/3} (1 - \beta^2) [1.13 + 3.76 \cdot (Z \cdot \alpha / \beta)^2] / \beta^2$ – параметр экранирования,

$R = 1 - \beta^2 (1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) / 4 + \pi\alpha Z\beta (1 - (1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) / 2) \sqrt{(1 - \langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle) / 2}$ – релятивистская поправка Мотта, β – отношение скорости электрона к скорости света.

Для атмосферных газов $h = 1$. В результате этого сечение упругого рассеяния принимает максимальное значение при нулевом угле рассеяния. Это означает, что существенное отклонение электрона от первоначального направления распространения, также как и изменение энергии происходит за счет многих актов элементарных столкновений.

В работах [11, 25] показано, что при построении интеграла ионизационных столкновений выявляется четко выраженный распад спектра электронов на две составляющие. Поскольку дифференциальное сечение ионизационного рассеяния в области малых передач энергии ведет себя как $1/\omega^2$, то приход рассеянных электронов в данный элемент фазового объема за счет ионизационных столкновений наиболее вероятен из ближайших элементов. Приход вторичных электронов в элемент фазового объема, соответствующий энергии, превышающей потенциал ионизации, маловероятен. Наиболее интенсивно вторичные электроны приходят в элементы фазового объема с малой, близкой к нулю, энергией. В работах [11, 25] показано, как для интеграла столкновений первичных электронов $St_{el}[f] + St_{ion}[f]$ строится приближение малых потерь энергии:

$$St_{el}[f] + St_{ion}[f] = -\frac{v}{p^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (p^2 \mathbf{w}(\varepsilon) f) + I[f_{pri}],$$

где $I[f_{pri}] \equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\chi, \mu) \varpi_l v f_{lm}(t, \mathbf{r}, p)$ – интеграл углового рассеяния электронов, $Y_{lm}(\chi, \mu)$ – сферические функции угловых компонент импульса в координатах $\mathbf{p} = (p, \chi, \mu)$, $\mu = \cos \theta$; $\varpi_l(\varepsilon) = \sigma_0(\varepsilon) - \sigma_l(\varepsilon)$, $\sigma_l(\varepsilon)$ – коэффициенты разложения по полиномам Лежандра $P_l(\langle \mathbf{\Omega}; \mathbf{\Omega}' \rangle)$ дифференциального сечения уп-

ругого рассеяния, $\sigma(\varepsilon)$ – тормозная способность электрона, описываемая формулой Рерлиха-Карлсона [26]:

$$\frac{\sigma(\varepsilon)}{\rho_A} = \frac{0.153Z}{A\beta^2} 10^6 \left[\ln \left(\frac{mc^2 \varepsilon (\gamma^2 - 1)}{2I^2} \right) - \frac{2\gamma - 1}{\gamma^2} \ln 2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right)^2 + \delta_\rho \right],$$

где A – атомная масса атомов вещества, ρ_A – плотность вещества, δ_ρ – поправка на эффект плотности, $\gamma = 1 + \varepsilon/mc^2$.

2. Сечения столкновений электронов низкой энергии

Если энергия рассеивающегося электрона сопоставима с внутренними потенциалами рассеивающей молекулы, то приближения, рассмотренные в предыдущем разделе, не справедливы. Например, энергия равновесных с газом электронов составляет 0.04 эВ. В настоящее время имеются только разрозненные данные (как теоретические, так и экспериментальные) о сечениях в таком диапазоне энергий. Поэтому приведённые ниже сечения представляют собой набор данных, полученных различными авторами и покрывающими диапазон энергий от 0 до нескольких кэВ. При наличии выбора предпочтение оказывалось экспериментальным данным.

2.1 Упругие столкновения

Полное, транспортное и угловое сечения упругого рассеяния на молекуле кислорода взяты из работ [27 – 33], азота – из [32 – 37], и ксенона – из [32, 38 – 45]. Они представлены на рисунках 1-11.

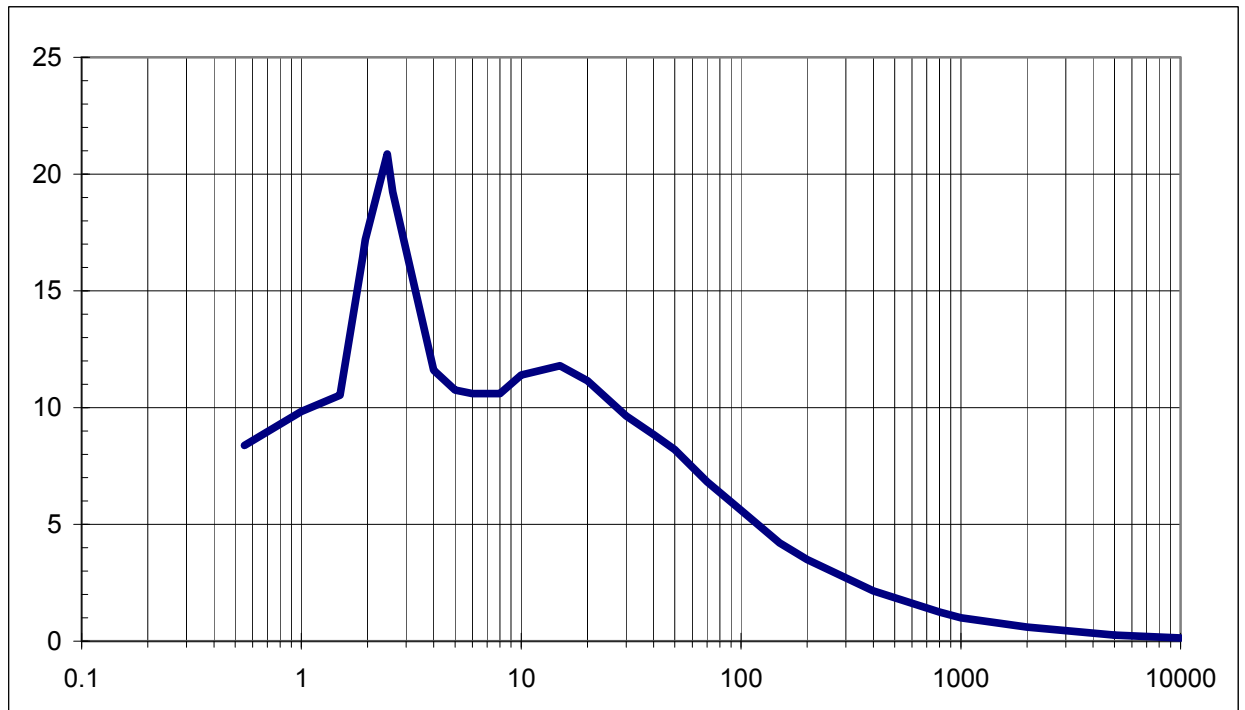


Рисунок 1 – Зависимость полного сечения упругого рассеяния на молекуле азота (10^{-16} см^2) от энергии электронов (эВ)

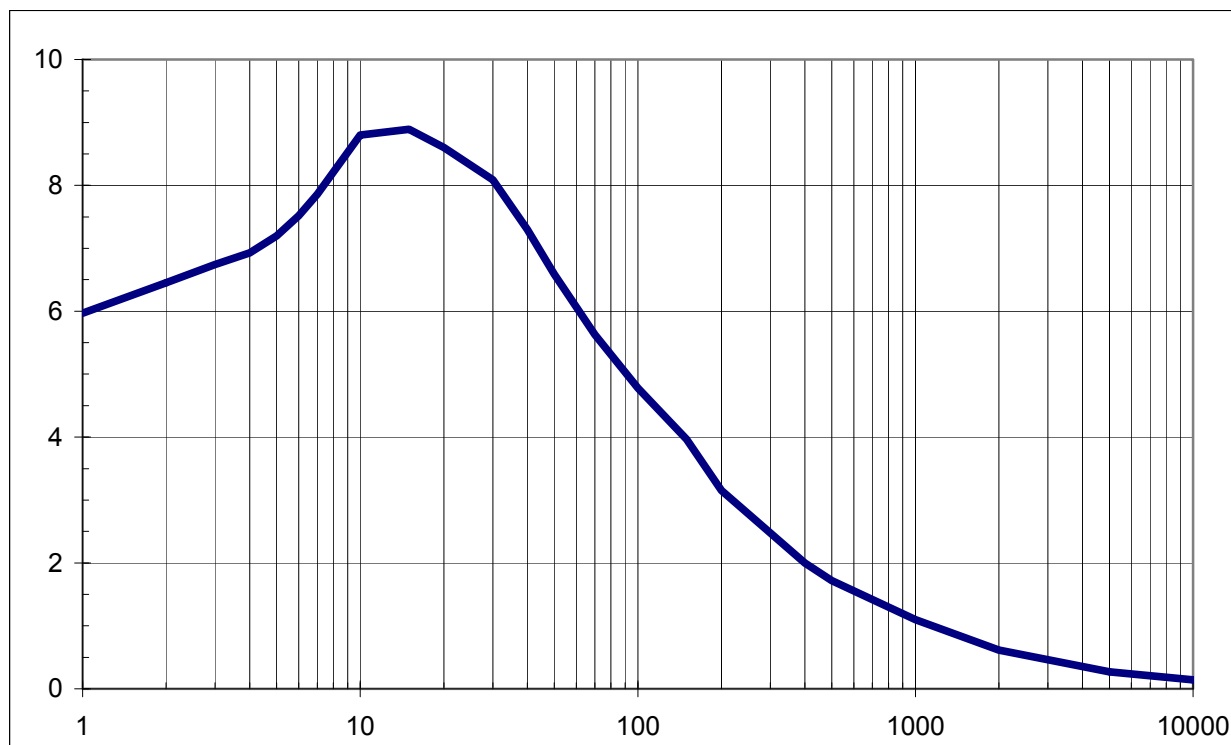


Рисунок 2 – Зависимость полного сечения упругого рассеяния на молекуле кислорода (10^{-16} см^2) от энергии электронов (эВ)

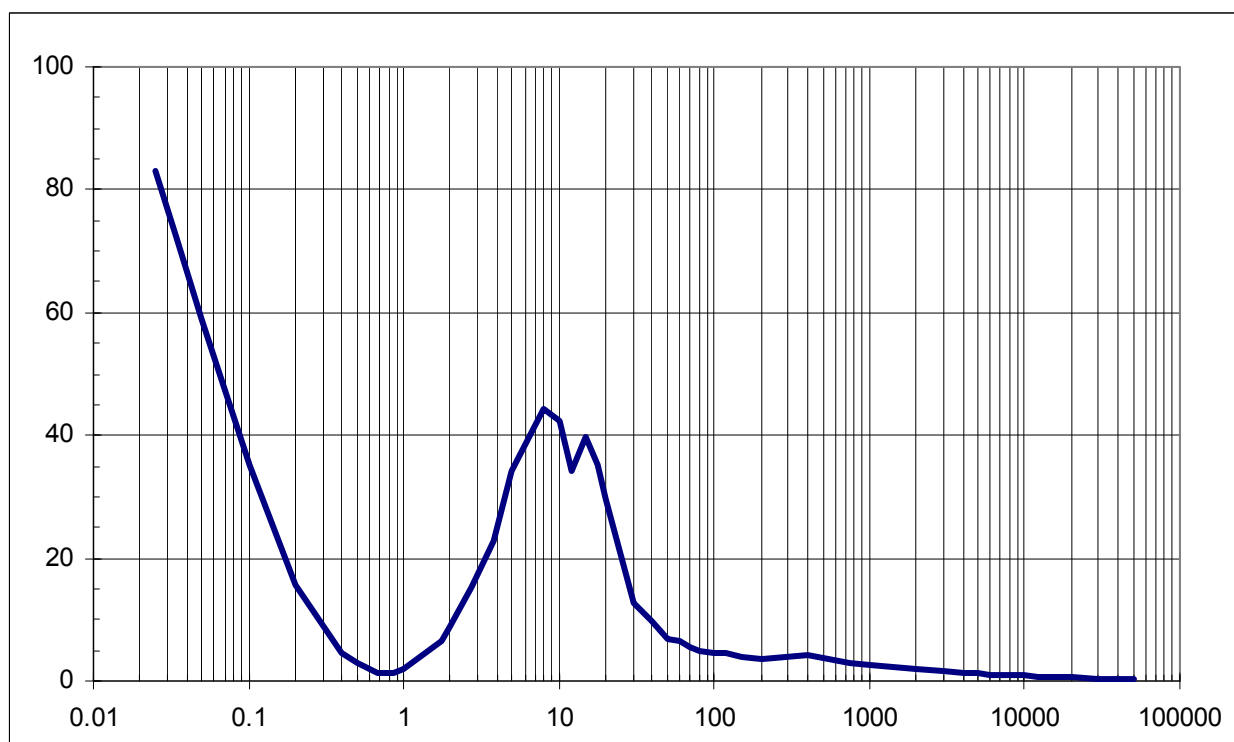


Рисунок 3 – Зависимость полного сечения упругого рассеяния на молекуле ксенона (10^{-16} см^2) от энергии электронов (эВ)

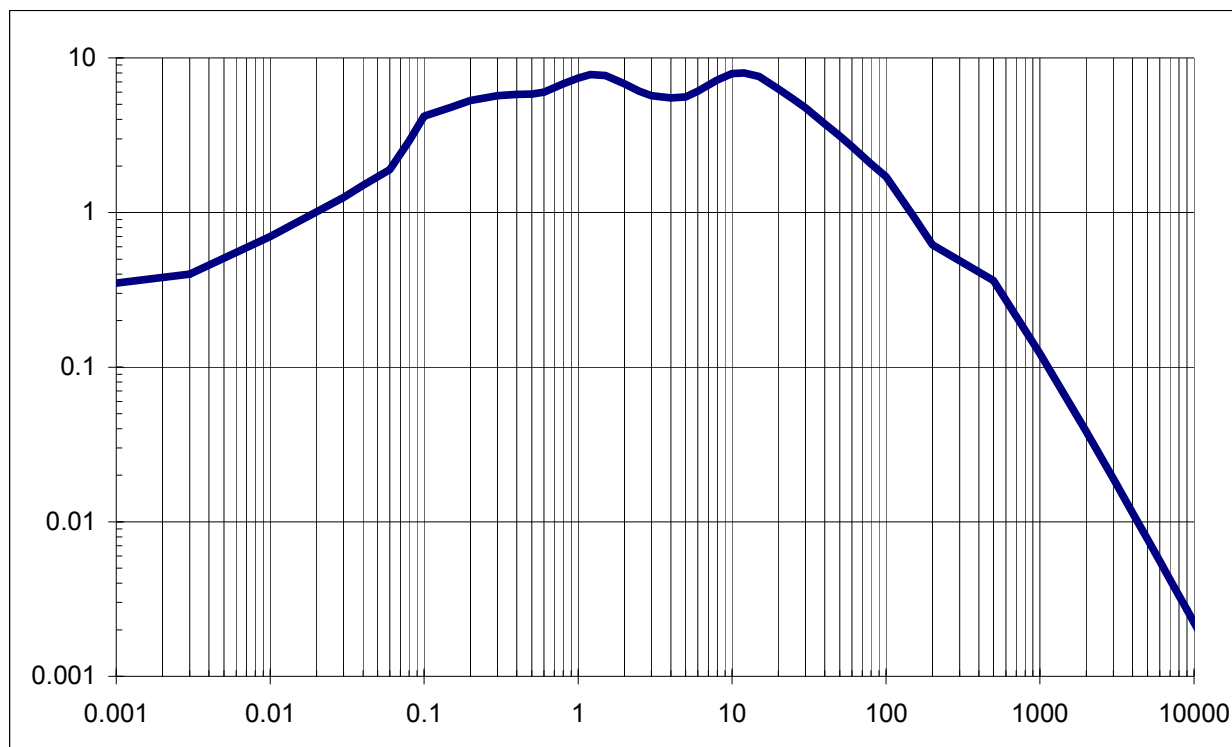


Рисунок 4 – Зависимость транспортного сечения упругого рассеяния на молекуле кислорода (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

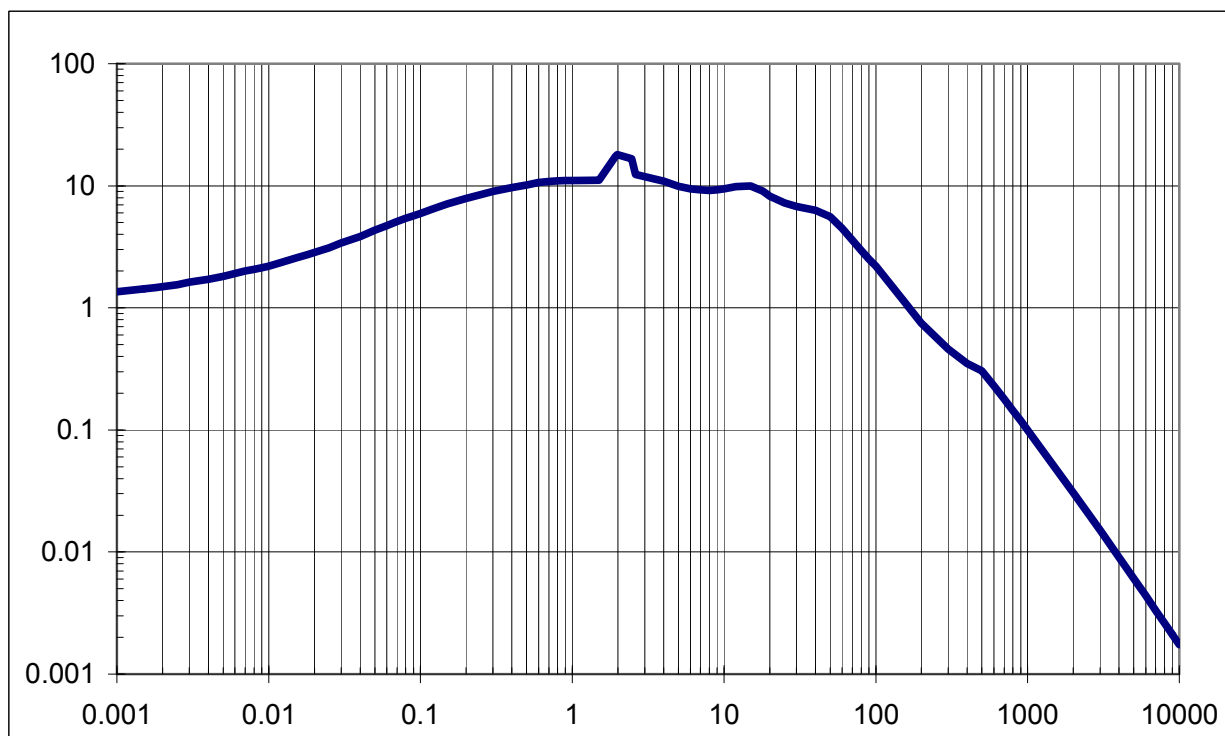


Рисунок 5 – Зависимость транспортного сечения упругого рассеяния на молекуле азота (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

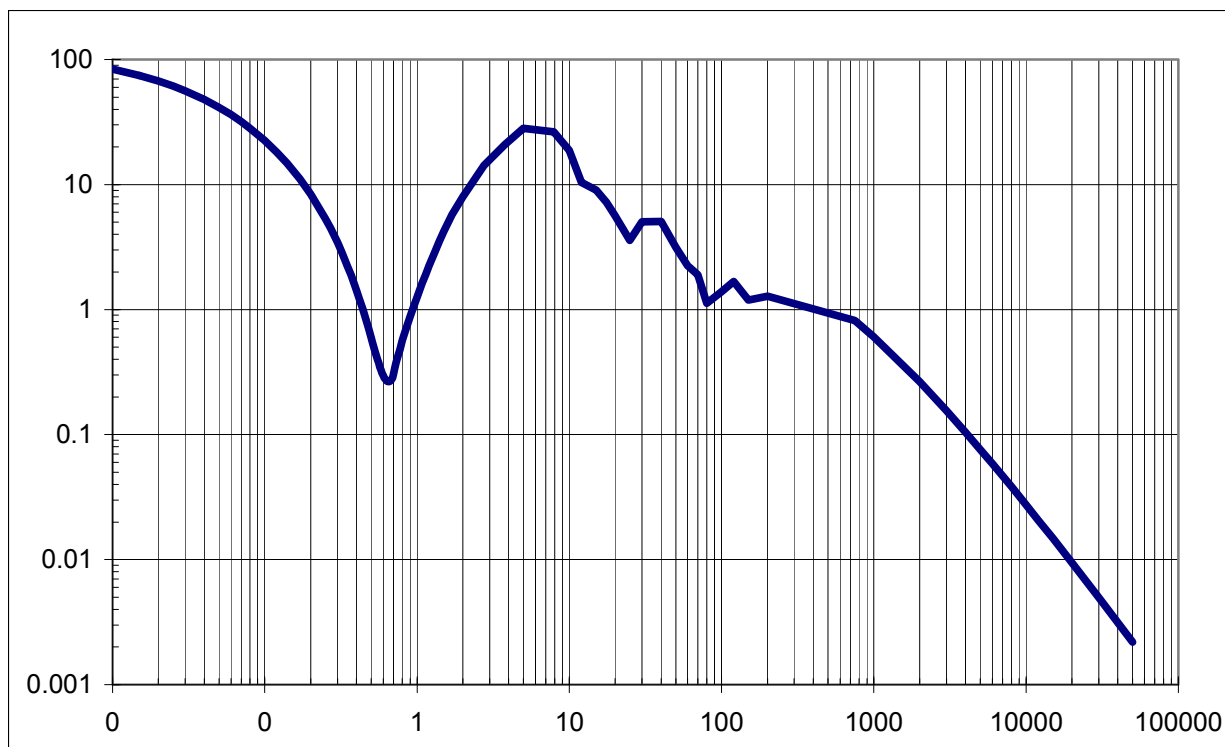


Рисунок 6 – Зависимость транспортного сечения упругого рассеяния на молекуле ксенона (10^{-16} cm^2) от энергии электрона (эВ)

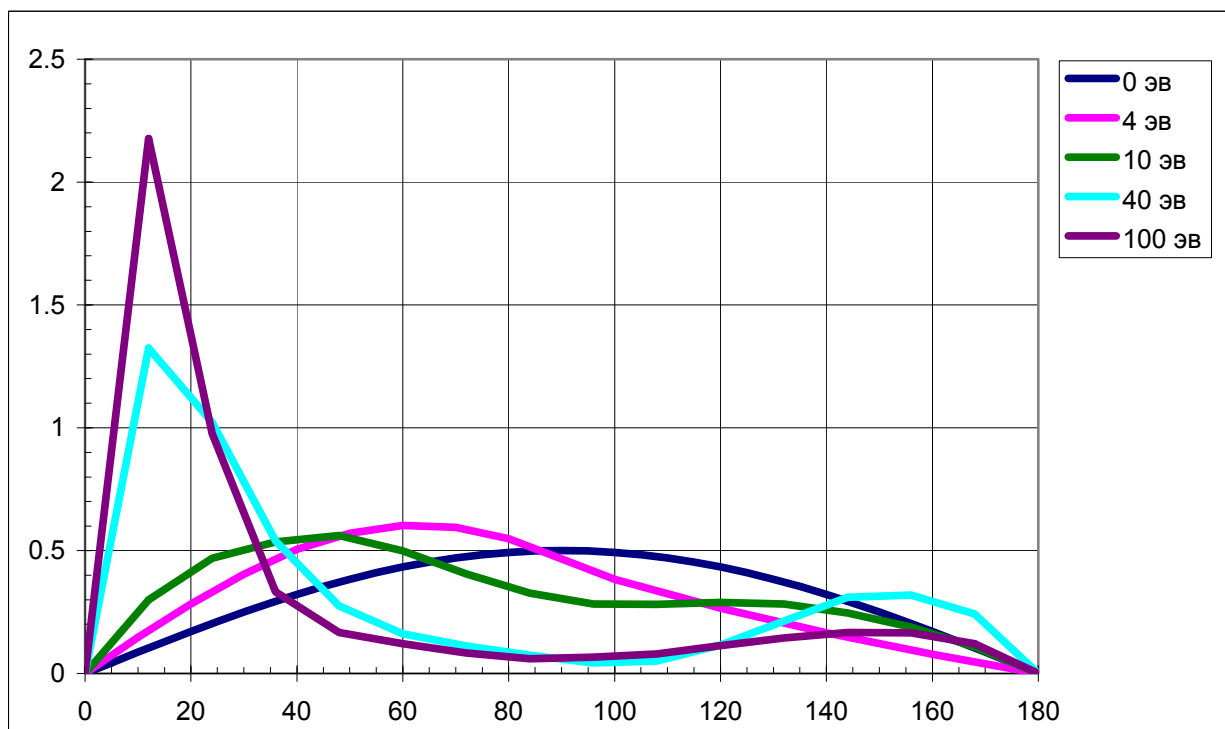


Рисунок 7 – Зависимость плотности вероятности упругого рассеяния электрона на молекуле кислорода от полярного угла (град)

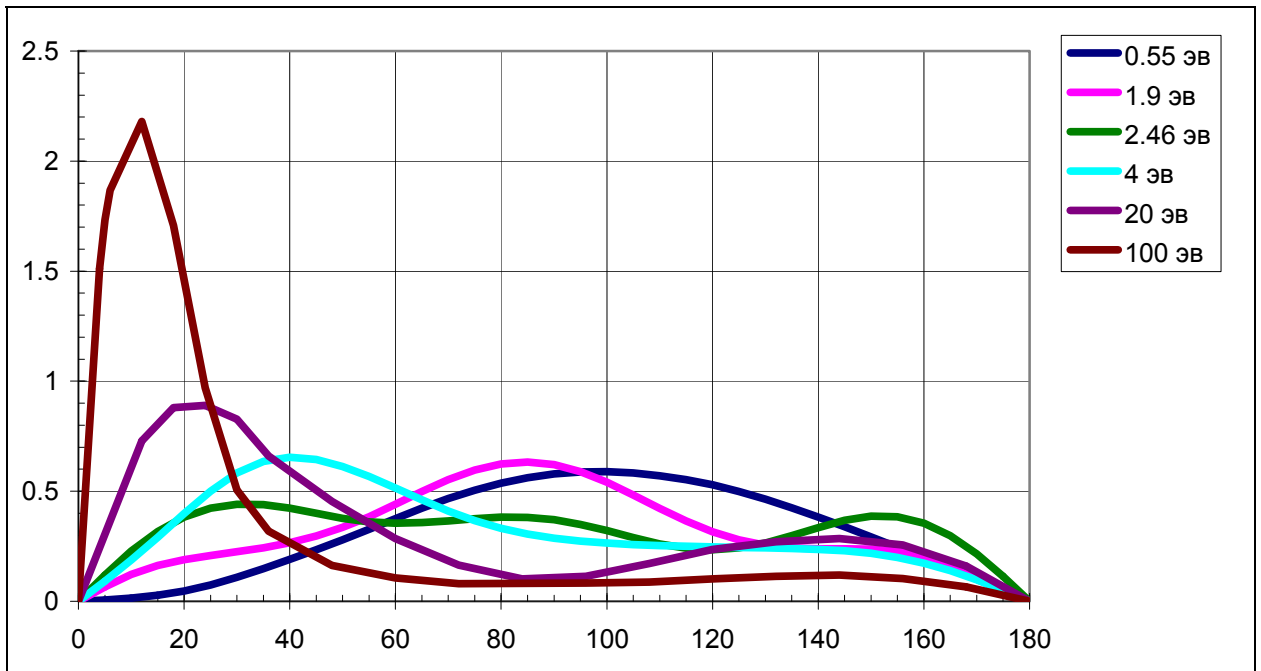


Рисунок 8 – Зависимость плотности вероятности упругого рассеяния электрона на молекуле азота от полярного угла (град)

Для ксенона в области энергий до рамзауэровского минимума при 0.7эВ зависимость дифференциального сечения от угла монотонна. В области энергий после рамзауэровского минимума и до максимума при 10эВ в дифференциальном сечении имеются максимумы и минимумы. При $\varepsilon > 10$ эВ максимумы и минимумы постепенно исчезают, а ширина сечения уменьшается до 5 градусов при энергии 20кэВ.

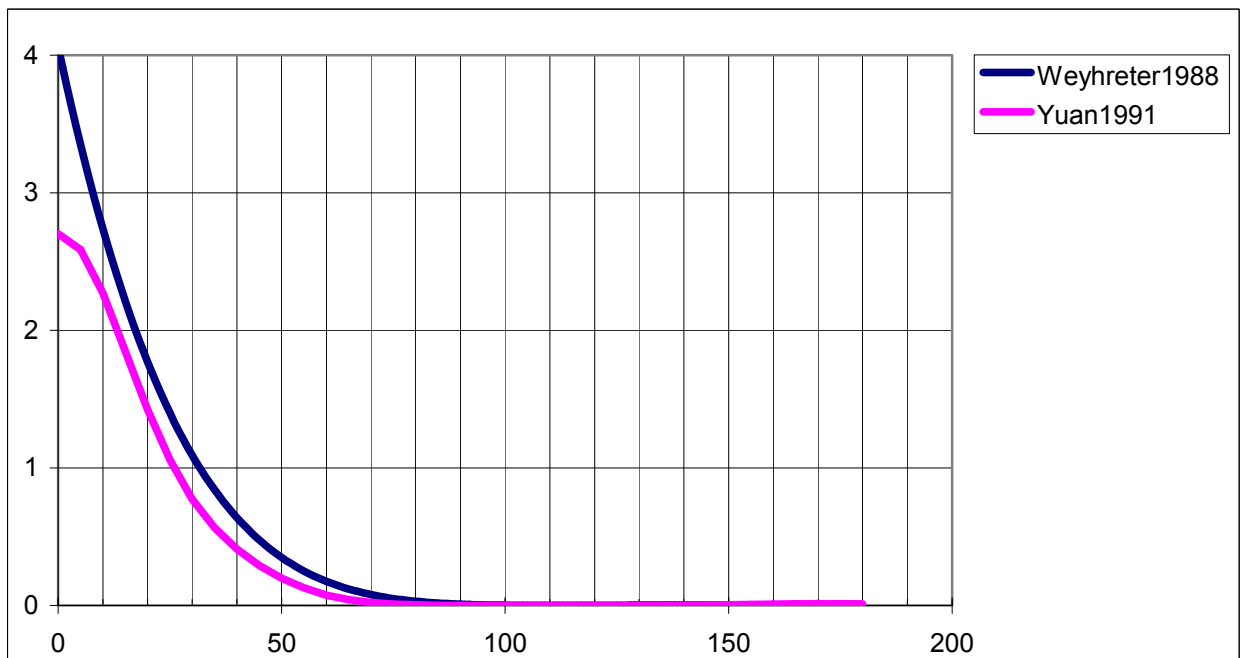


Рисунок 9 – Зависимость дифференциального сечения упругого рассеяния на молекуле ксенона (10^{-16} см²/страд) от угла (град) при энергии электрона 0.5эВ

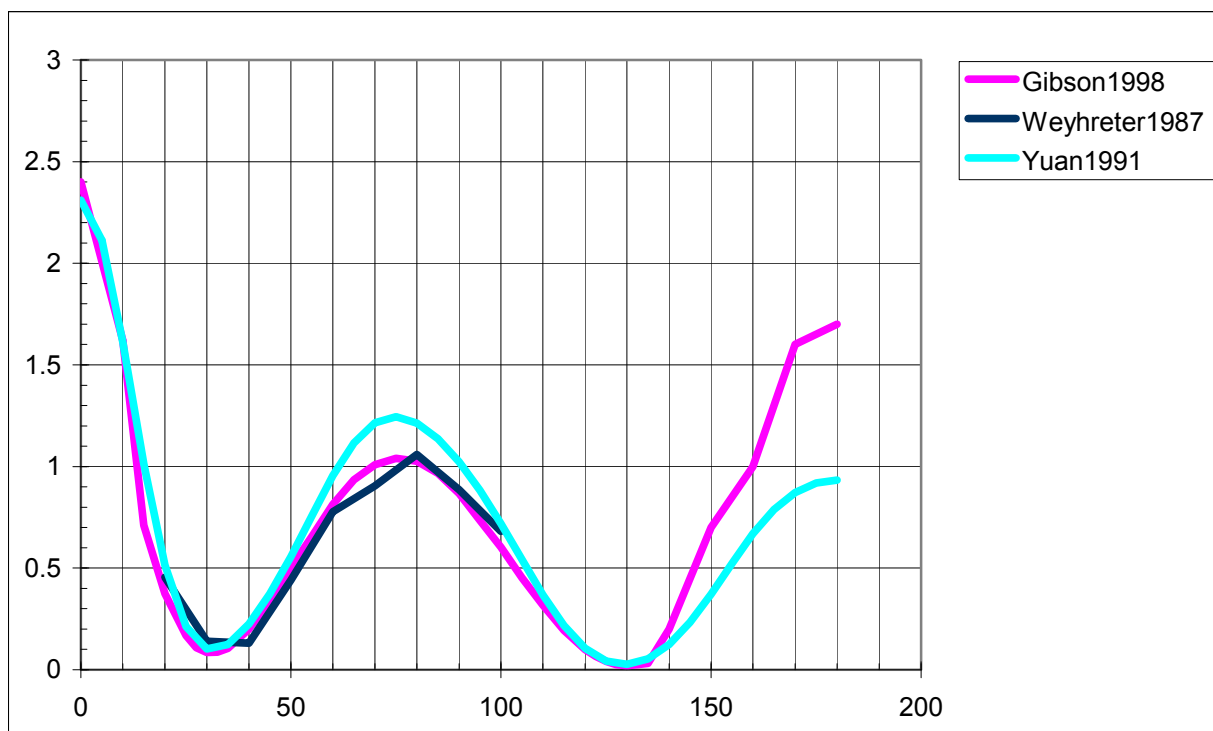


Рисунок 10 – Зависимость дифференциального сечения упругого рассеяния на молекуле ксенона ($10^{-16} \text{ см}^2/\text{страд}$) от угла (град) при энергии электрона 1.75эВ

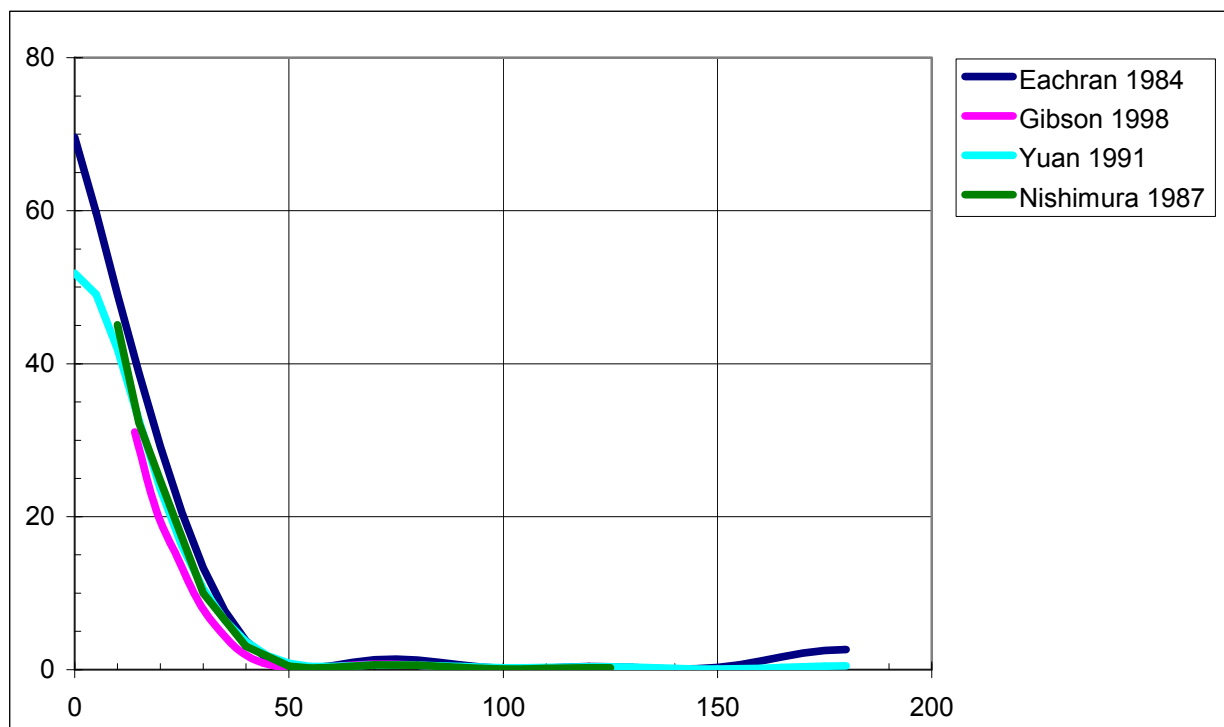


Рисунок 11 – Зависимость дифференциального сечения упругого рассеяния на молекуле ксенона ($10^{-16} \text{ см}^2/\text{страд}$) от угла (град) при энергии электрона 20 эВ

2.2. Сечения возбуждения колебательных уровней

Полные сечения возбуждения первых четырех колебательных уровней молекулы кислорода взяты из работы [28], сечения возбуждения первых восьми

колебательных уровней молекулы азота – из [46] с нормировкой, указанной в [47]. Они представлены на рисунках 12-13. Энергии колебательных уровней кислорода и азота приведены в таблице 1.

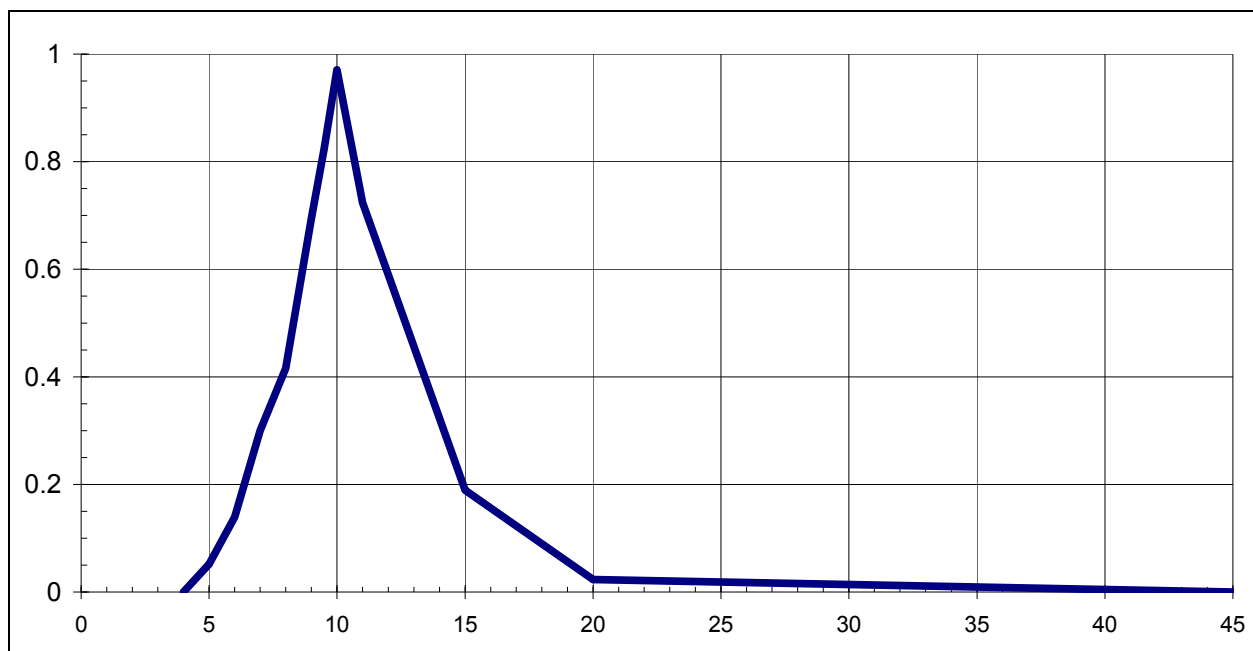


Рисунок 12 – Зависимость суммы сечений возбуждения по 4 колебательным уровням молекулы кислорода (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

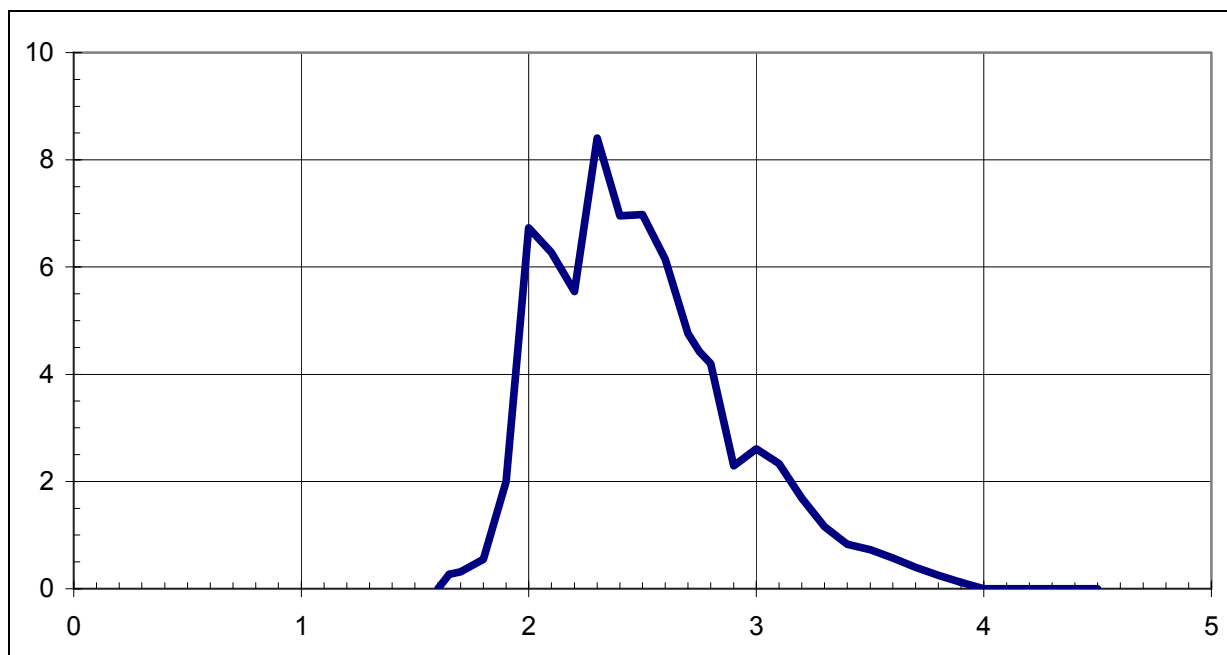


Рисунок 13 – Зависимость суммы сечений возбуждения по 8 колебательным уровням молекулы азота (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

Таблица 1 Энергии колебательных уровней кислорода и азота.

уровень	1	2	3	4	5	6	7	8
Энергия (эВ), O ₂	0.29	0.57	0.86	1.13	1.41	1.68	1.95	2.21
Энергия (эВ), N ₂	0.193	0.383	0.570	0.754	-	-	-	-

5.3 Сечения возбуждения электронных уровней

В таблице 2 представлены энергии первых пяти электронных уровней возбуждения молекулы кислорода (три близко расположенных энергетических уровня объединены в один) и 10 уровней молекулы азота [34].

Таблица 2 Энергии возбуждения электронных уровней кислорода и азота

Номер уровня	кислород		азот	
	Обозначение	Энергия (эВ)	Обозначение	Энергия (эВ)
1	$a^1\Delta_g$	0.977	$A^3\Sigma_u^+$	6.169
2	$b^1\Sigma_g^+$	1.627	$B^3\Pi_g$	7.353
3	$c^1\Sigma_u^- + C^3\Delta_u + A^3\Sigma_u^+$	4.2	$W^3\Delta_u$	7.362
4	$B^3\Sigma_u^-$	6.12	$B^3\Sigma_u^-$	8.165
5	9-12 эВ	10	$a^1\Sigma_u^-$	8.4
6	–	–	$a^1\Pi_g$	8.55
7	–	–	$w^1\Delta_u$	8.89
8	–	–	$C^3\Pi_u$	11.032
9	–	–	$E^3\Sigma_g^+$	11.875
10	–	–	$a'^1\Sigma_g^+$	12.255

Полные сечения возбуждения электронных уровней молекулы кислорода, показанные на рисунке 14, взяты из [28, 30, 48 – 50].

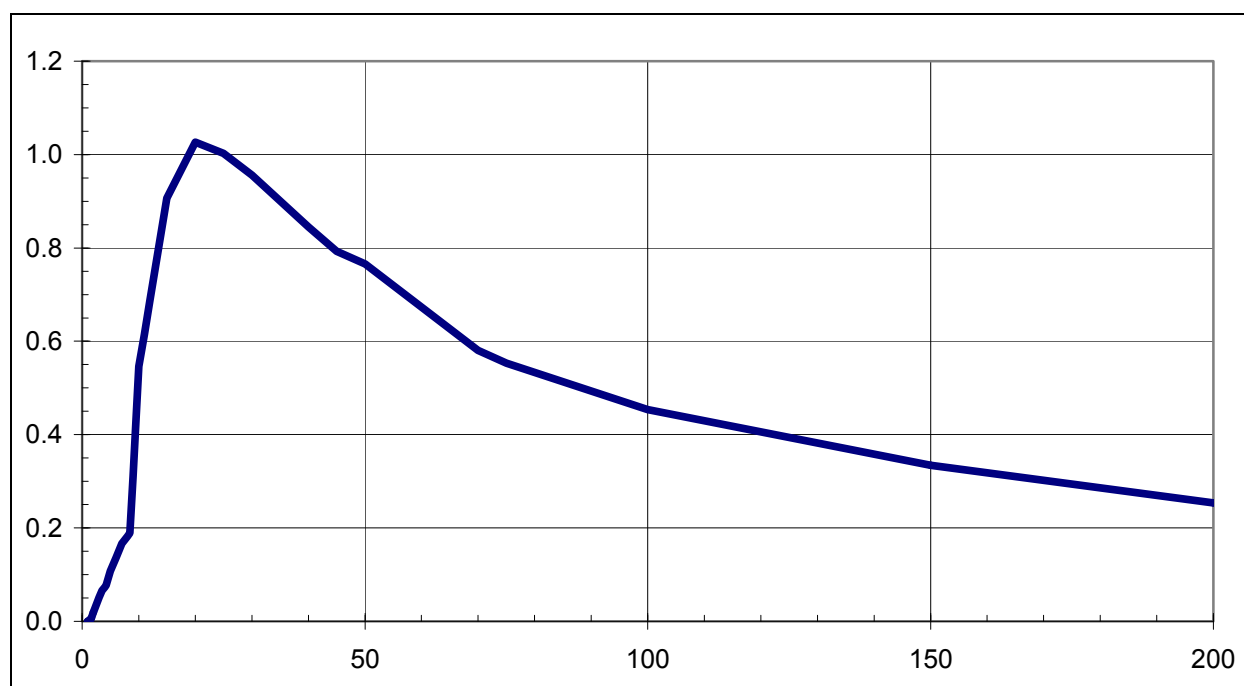


Рисунок 14 – Зависимость суммы по 5 электронным уровням сечений возбуждения молекулы кислорода (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

Полные сечения возбуждения первых десяти электронных уровней возбуждения молекулы азота [34] показаны на рисунке 15.

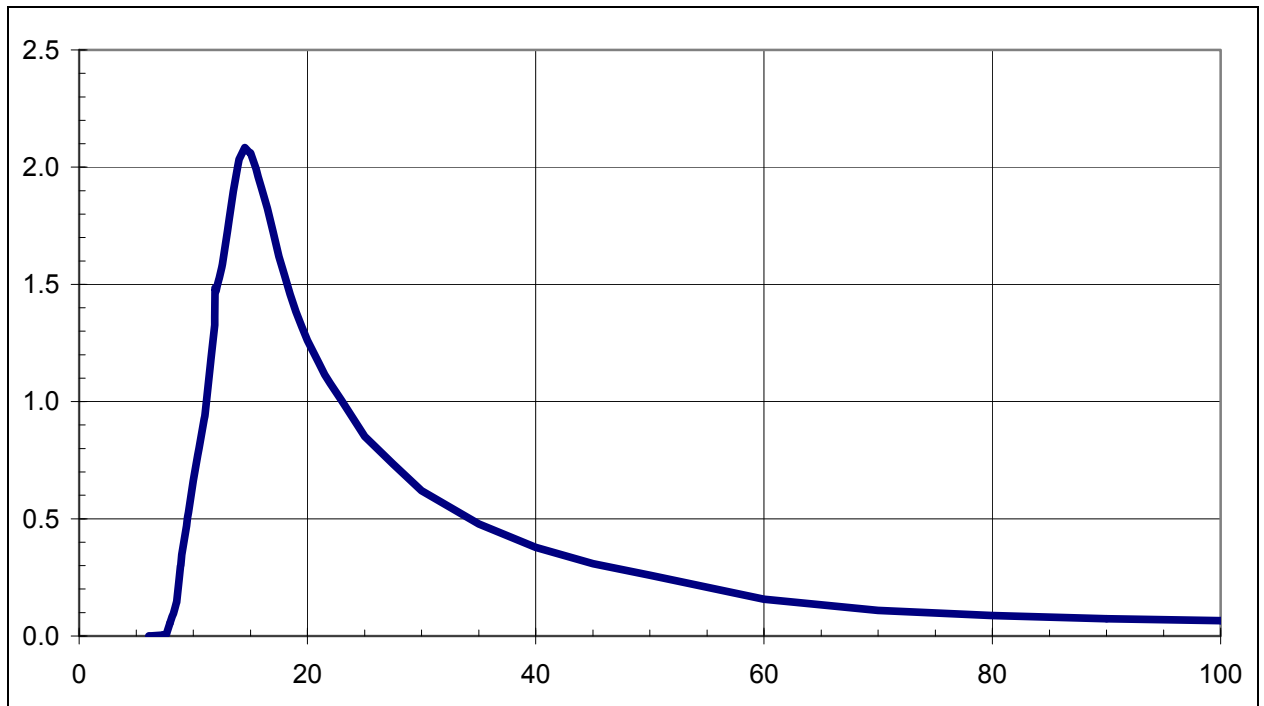


Рисунок 15 – Зависимость суммы по 10 электронным уровням сечений возбуждения молекулы азота (10^{-16} см^2) от энергии (эВ)

Из всех уровней возбуждения ксенона при расчётах использовались уровни с энергиями возбуждения $\Delta\varepsilon_i^{exc}$, представленными в таблице 3 с указанием типа уровня – разрешённый или запрещенный.

Таблица 3 Уровни возбуждения ксенона

Запр.	Разр.	Запр.	Разр.	Запр.	Запр.	Разр.	Запр.	Запр.	Запр.	Разр.	Разр.	Разр.	Запр.	Разр.
8.32	8.44	9.45	9.57	9.69	9.79	9.92	10.04	10.16	10.22	10.4	10.56	10.59	11.26	11.58

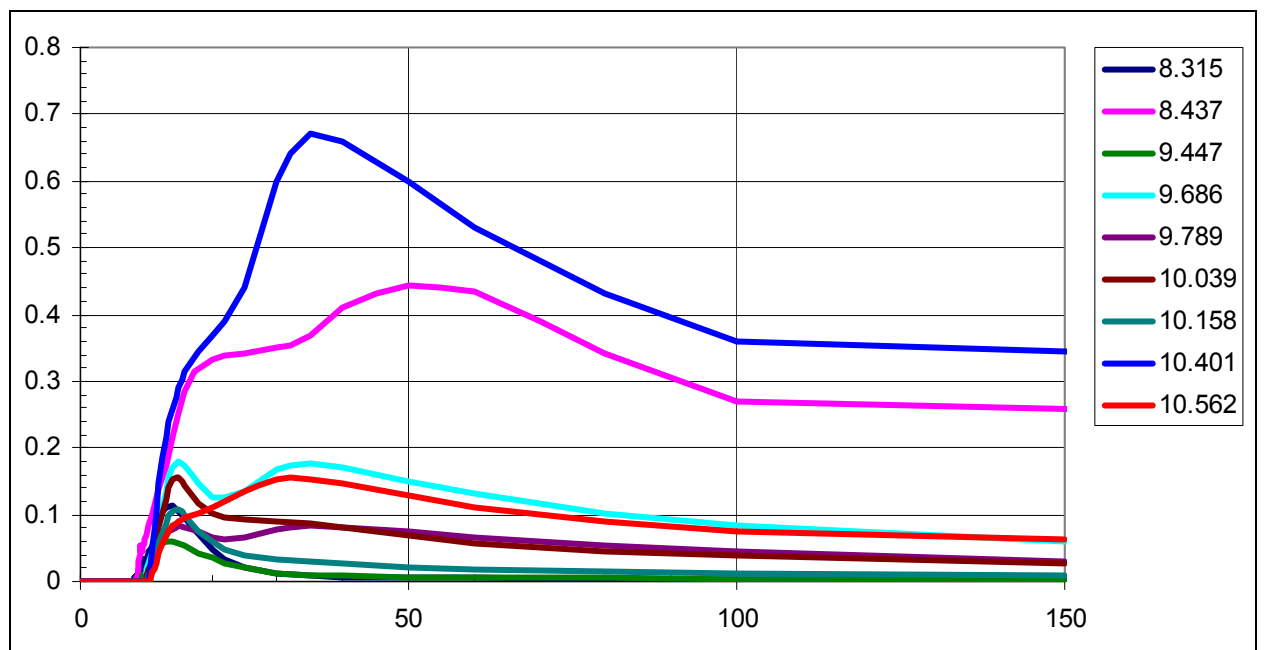


Рисунок 16 – Зависимость сечений возбуждения электронных уровней ксенона (10^{-16} см^2) от энергии (эВ)

Значения сечений для этих уровней почерпнуты из [51], где представлен диапазон энергий от порога до 100 эВ. Для больших энергий сечения вычислялись по формулам приближения Бете-Борна [52]:

$$\sigma_i^{exc}(\varepsilon) = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\varepsilon \Delta \varepsilon_i^{exc}} f_i \ln \frac{\varepsilon}{\Delta \varepsilon_i^{exc}} \text{ (разрешенный)}, \quad \sigma_i^{exc}(\varepsilon) = 4\pi a_0^2 \frac{R}{\varepsilon} F_i \text{ (запрещенный)},$$

где a_0 – радиус Бора, R – постоянная Ридберга (эВ), f_i - силы осцилляторов переходов [52]. Обобщенные силы осцилляторов F_i подбирались из соображений непрерывности сшивания при 100эВ.

2.4 Сечения прилипания

Поглощение электронов в реакциях прилипания к кислороду может осуществляться двумя способами. Первый – диссоциативное прилипание в результате двухчастичного столкновения $e + O_2 \rightarrow O^- + O$ с сечением $\sigma_a(\varepsilon)$, при этом интеграл столкновений равен $-N_{O_2} \sigma_a(\varepsilon) v(\varepsilon) f(\varepsilon)$. Второй – трехчастичное прилипание в присутствии третьей частицы X , которой в воздухе может быть как молекула кислорода, так и азота $e + O_2 + X \rightarrow O_2^- + X$, с коэффициентом трехчастичного прилипания $K_a(\varepsilon, X)$, при этом интеграл столкновений равен [53]:

$$-\sum_X K_a(\varepsilon, X) N_{O_2} N_X f(\varepsilon).$$

По данным из [54], $K_a(\varepsilon, N_2) \ll K_a(\varepsilon, O_2)$, поэтому в интеграле столкновений для воздуха можно учитывать только кислородное слагаемое.

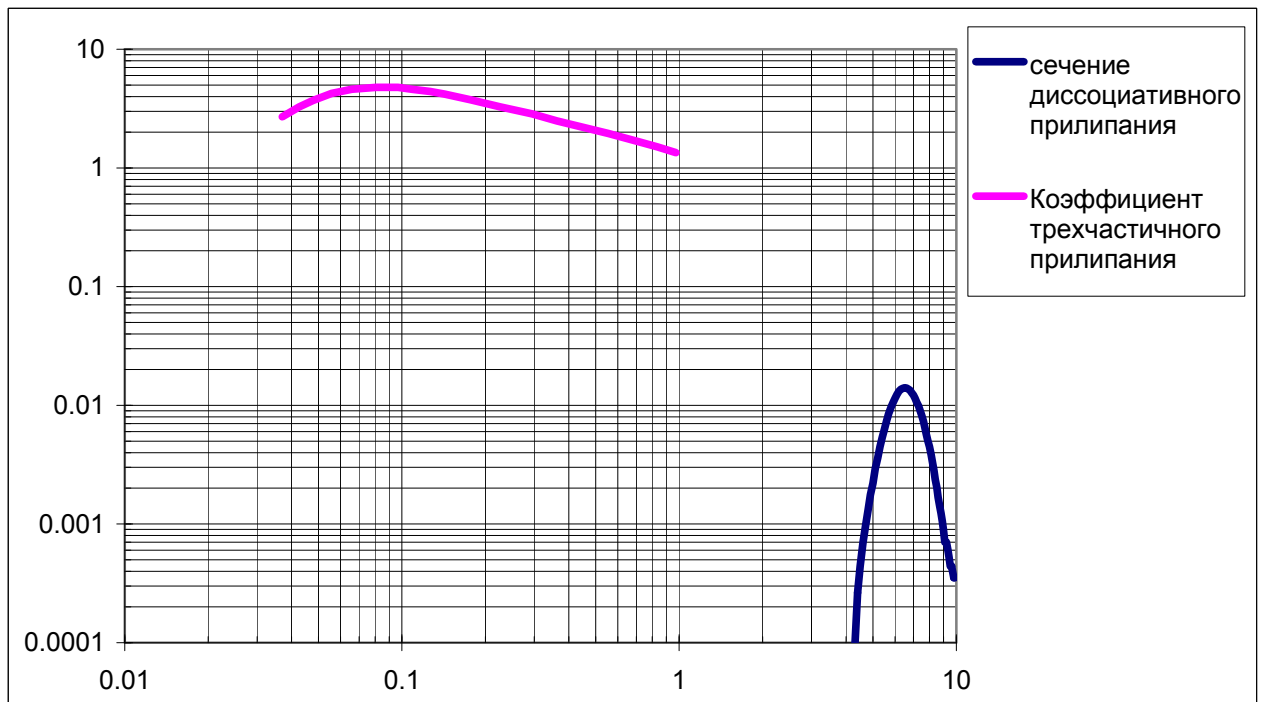


Рисунок 17 Зависимость сечения диссоциативного прилипания (10^{-16} см^2) и коэффициента трехчастичного прилипания ($10^{-30} \text{ см}^6/\text{с}$) от энергии (эВ)

На рисунке 17 представлены значения $\sigma_a(\varepsilon)$ и $K_a(\varepsilon, O_2)$. Данные взяты из [55] и [56] соответственно.

5.5 Сечения ионизации

В литературе отсутствуют экспериментальные данные о дифференциальных сечениях ионизации, поэтому в настоящей работе использовались аналитические выражения для полного и дифференциального по энергии вторичного электрона сечений из [17]:

$$\sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i + \nu_i} \left[\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^2} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^2} - \left(\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')} \right) + \Delta\varepsilon_i \cdot \ln\left(\frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i}\right) \left(\frac{1}{(\varepsilon' + \Delta\varepsilon_i)^3} + \frac{1}{(\varepsilon - \varepsilon')^3} \right) \right];$$

$$\sigma_i^{ion}(\varepsilon) = \frac{4\pi a_0^2 R^2}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i + \nu_i} \frac{1}{\Delta\varepsilon_i} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon} \right)^2 \right) \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i} + \left(1 - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon} - \frac{\Delta\varepsilon_i}{\varepsilon + \Delta\varepsilon_i} \ln \frac{\varepsilon}{\Delta\varepsilon_i} \right) \right]. \quad (8)$$

Здесь ν_i – средняя энергия электрона в молекуле на i -й оболочке (эВ), $\Delta\varepsilon_i$ – энергия связи электрона на i -й оболочке (эВ). Сечения ионизации с учётом всех оболочек вычисляются суммированием $\sigma^{ion}(\varepsilon, \varepsilon') = \sum N_i \sigma_i^{ion}(\varepsilon, \varepsilon')$, $\sigma^{ion}(\varepsilon) = \sum N_i \sigma_i^{ion}(\varepsilon)$, где N_i – заселенность оболочки. Числа N_i , $\Delta\varepsilon_i$, ν_i приведены в таблице 4 [9, 57].

Таблица 4

Номер уровня	кислород			азот			ксенон		
	$\Delta\varepsilon_i$ (эВ)	ν_i (эВ)	N_i	$\Delta\varepsilon_i$ (эВ)	ν_i (эВ)	N_i	N_i	$\Delta\varepsilon_i$ (эВ)	ν_i (эВ)
1	84.88	12.07	2	15.58	54.91	2	4	12.13	79.42
2	59.89	19.64	4	17.07	44.3	4	2	13.4	88.9
3	71.84	19.79	2	21.00	63.18	2	2	27.49	122.58
4	90.92	29.82	2	41.72	71.13	2	6	71.67	485.43
5	79.73	46.19	2				4	73.78	497.77

На графиках 18-20 полные сечения ионизации, вычисленные по формуле (8), изображаются сплошной линией, а экспериментально измеренные сечения из [28, 34, 58, 59] – точками.

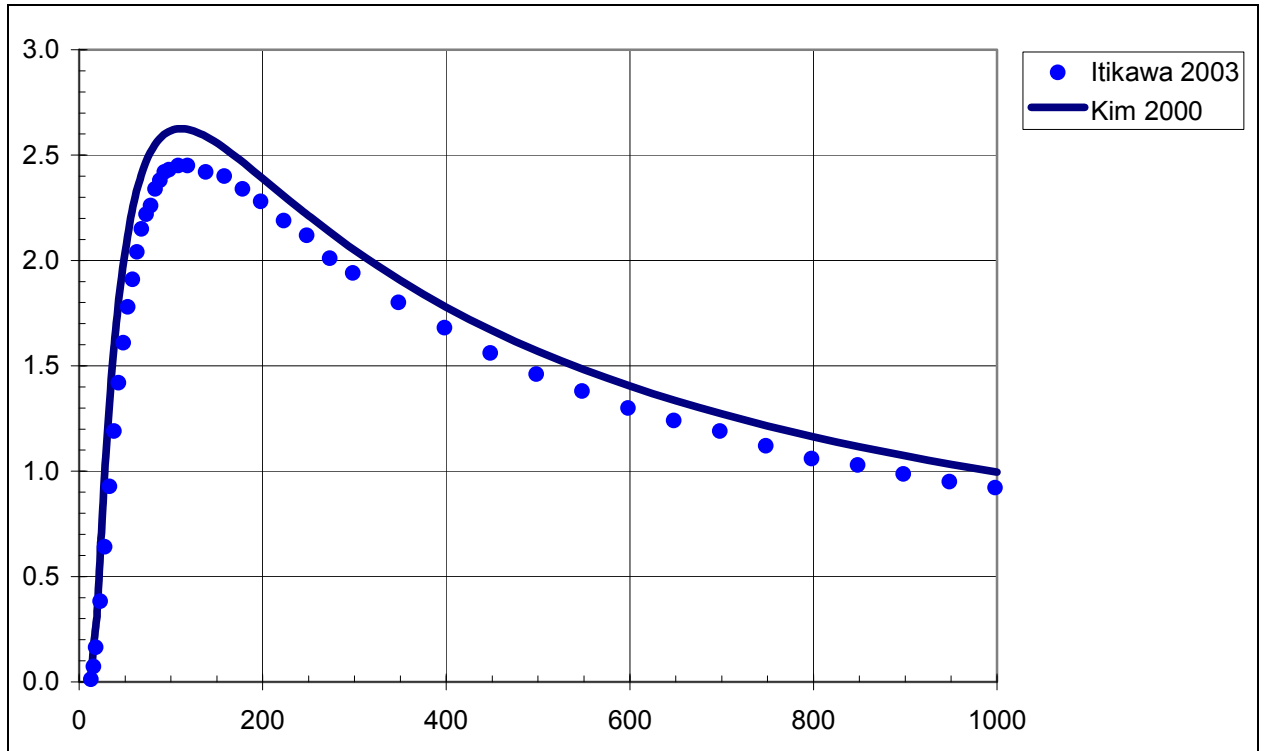


Рисунок 18 – Зависимость полного сечения ионизации кислорода (10^{-16} cm^2) от энергии электрона (эВ)

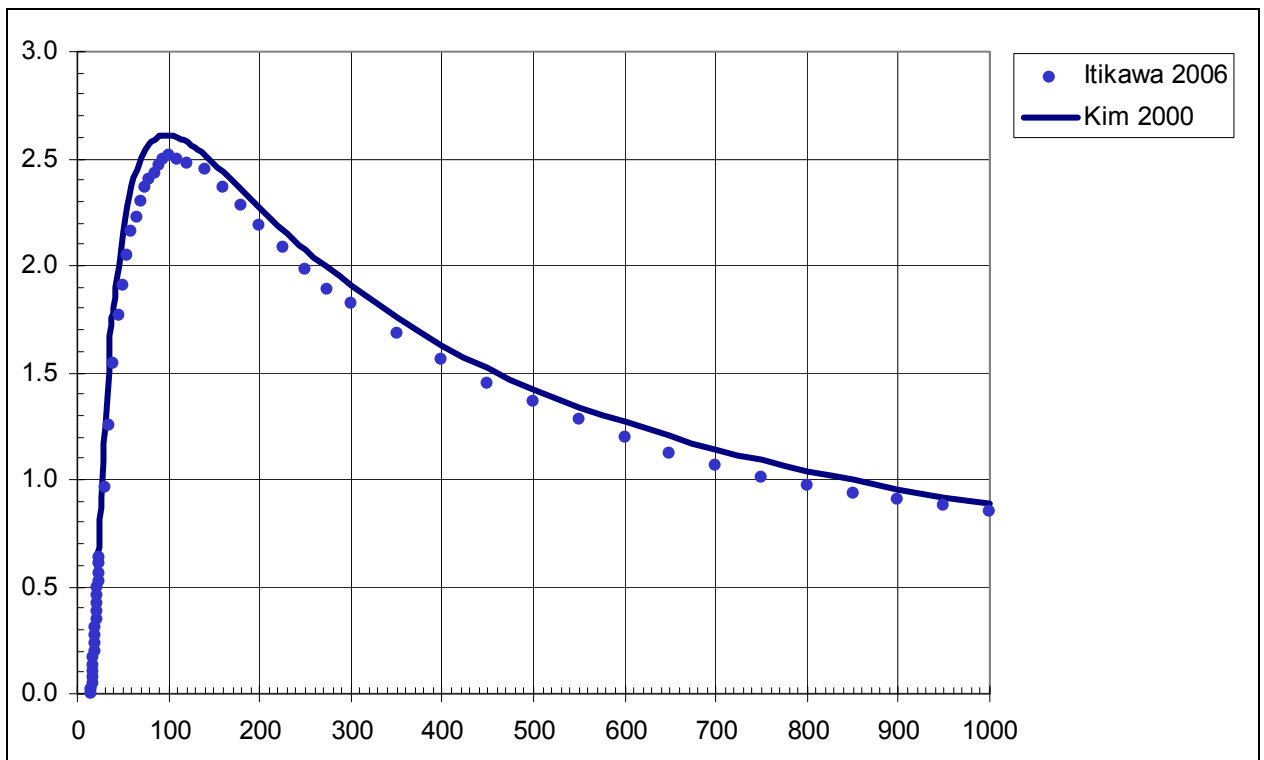


Рисунок 19 – Зависимость полного сечения ионизации азота (10^{-16} cm^2) от энергии электрона (эВ)

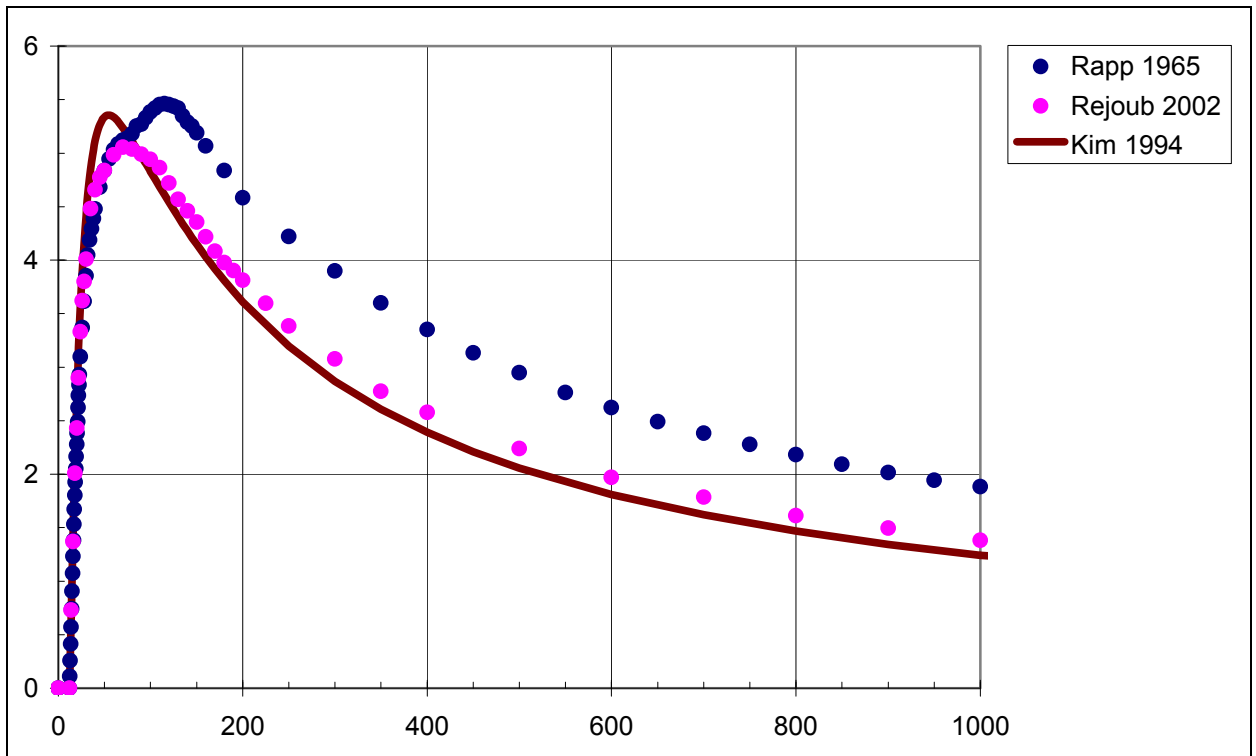


Рисунок 20 – Зависимость полного сечения ионизации ксенона (10^{-16} см^2) от энергии электрона (эВ)

Заключение

Рассеяние фотонов сопровождается в среднем большой передачей энергии при столкновении. Ионизационное и упругое рассеяние электронов высокой энергии при математическом моделировании переноса электронно-фотонного каскада можно рассматривать в приближении малой передачи энергии. Это является следствием обратной пропорциональности сечений квадрату переданной энергии. Сечение тормозного излучения обратно пропорционально первой степени переданной энергии, поэтому должно рассматриваться в точной модели рассеяния. В области низких энергий приближение малых передач энергии не применимо.

Список литературы

1. Мурзин С.В. Введение в физику космических лучей. – М.: Атомиздат, 1979.
2. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. – М.: Наука, 1992.
3. Базелян Э.М., Райзер Ю.П. Физика молнии и молниезащиты. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
4. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1969.
5. Мэсси Г., Бархон Е. Электронные и ионные столкновения. – М.: МИР, 1958.
6. Гайтлер Л. Квантовая теория излучения. – М.: ИЛ, 1956.
7. Экспериментальная ядерная физика. / Ред. Сегре Э., т.1 – М.: ИЛ, 1958
8. Росси Б. Частицы больших энергий. – М.: ГИТТЛ, 1955.
9. Официальный сайт National Institute of Standards and Technology – <http://www.phys.nist.gov/>

10. <http://geant4.web.cern.ch/geant4/UserDocumentation/UsersGuides/PhysicsReference/Manual/BackupVersions/V9.4/fo/PhysicsReferenceManual.pdf>
11. Марков М.Б., Паротькин С.В., Сысенко А.В. Метод частиц для модели электромагнитного поля потока электронов в газе // Математическое моделирование, 2008, т. 20, № 5, с. 35 – 54.
12. Аккерман А.Ф. Моделирование траекторий заряженных частиц в веществе. – М.: Энергоиздат, 1991.
13. Савинский А.К. Взаимодействие электронов с ткане-эквивалентными средами. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
14. Gryzinski M. Classic Theory of Electronic and Ionic Inelastic Collisions // Phys. Rev., 1959, Vol. 115, No. 2, pp. 374-383.
15. Kim Yong-Ki, Irikura Karl K. Electron-Impact Ionization Cross Sections for Polyatomic Molecules, Radicals, and Ions // Atomic and Molecular Data and Their Applications, edited by Berrington K.A., Bell K.L. – American Institute of Physics, 2000, pp. 220-241.
16. Bernshtam V.A., Ralchenko Yu.V., Maron Y. Empirical formula for cross section of direct electron-impact ionization of ions // J. Phys. B., 2000, No. 33, pp. 5025–5032.
17. Kim Y.-K., Rudd M.E. Binary-encounter-dipole model for electron-impact ionization // Phys. Rev. A, 1994, Vol. 50, pp. 3954-3967.
18. Hwang W., Kim Y.-K., Rudd M.E.J. New Model for Electron-Impact Ionization Cross Sections of Atmospheric Molecules // J. Chem. Phys., 1996, No. 104, pp. 2956-2966.
19. Kim Y.-K., Hwang W., Weinberger N.M. Electron-impact ionization cross sections of atmospheric molecules // J. Chem. Phys., 1997, No. 106(3), pp. 1026-1033.
20. Fisher V.I., Bernshtam V.A., Ralchenko Yu.V., Maron Y., Goldgirsh A. Electron-impact-excitation cross sections of lithiumlike ions // Phys. Rev. A, 1997, Vol. 56, No. 5, pp. 3726-3733.
21. Vainshtein L.A., Bray I. Theoretical Electron-Impact Excitation, Ionization and Recombination Rate Coefficients and Level Population Densities for Scandium-Like Ion // International Journal of Pure and Applied Physics, 2007, Vol. 3, No. 1, pp. 75–82.
22. Kim Y.-K., Rudd M.E. Electron-Impact Total Ionization Cross Sections of Hydrocarbon Ions // J. Res. Natl. Inst. Stand. Technol, 2002, No. 107, pp. 63–67.
23. Момм Н., Мэсси Г. Теория атомных столкновений. – М.: МИР, 1969.
24. Бойко В.И., Скворцов В.А., Фортвов В.Е., Шаманин И.В. Взаимодействие импульсных пучков заряженных частиц с веществом. – М.: Физматлит, 2003.
25. Markov M.B., Zhukovskiy M.E. Modeling the radiative electromagnetic field // International Journal of Computing Science and Mathematics, 2008, Vol. 2, No. 1/2, pp. 110–131.
26. Тормозная способность электронов и позитронов: Доклад 37 МКРЭ. – М.: Энергоатомиздат, 1987.
27. Kajita S. et al. Influence of the dissociation processes of oxygen on the electron swarm parameters in oxygen // J. Appl. Phys., 1990, No. 67(9), p. 4015.
28. Photon and Electron Interactions with Atoms, Molecules and Ions. Subvolume C. Interactions of Photons and Electrons with Molecules / Edited by Itikawa Y. – Berlin: Springer, 2003.
29. Kanik I., Trajmar S. Total Electron Scattering and Electronic State Excitations Cross Sections for O₂, CO, and CH₄ // Journal of Geophysical Research, 1993, Vol. 98, No. E4, pp. 7447-7460.
30. Trajmar S. et al. Differential and Integral cross sections for the electron-impact excitation // Phys. Rev. A, 1971, Vol. 4, No. 4, p. 1482.
31. H.Daimon et al. // J. Phys. Soc. Jpn., 1982, No. 51, p. 2641.
32. NIST Standard Reference Database 64 // NIST Electron Elastic-Scattering Cross-Section Database, 2003.

33. *Shyn T.W., Sharp W.E.* // Phys. Rev. A, 1982, No. 26, p. 1369.
34. *Itikawa Y.* Cross Sections for Electron Collisions with Nitrogen Molecules // J. Phys. Chem. Ref. Data, 2006, Vol. 35, No. 1., pp.31-53.
35. *Shyn T.W., Carignan G.R.* // Phys. Rev. A, 1980, No. 22, p. 923.
36. *Weyguo Sun et al.* Detailed theoretical and experimental analysis of low-energy electron – N₂ scattering // Phys. Rev. A, 1995, Vol. 52, No. 2, p. 1229.
37. *Du Bois R.D., Rudd M.E.* // J. Phys. B, 1976, Vol. 9, p. 2657.
38. *Weyhreter M. et al.* Measurements of differential cross sections for e-Ar, Kr, Xe scattering at E=0.05 – 2 eV // Z. Phys. D, 1988, No. 7, p.333.
39. *Gibson C. et al.* Low-energy electron scattering from xenon // J. Phys. B, 1998, Vol. 31, p.3949.
40. *Linert I. et al.* Dfferential cross sections for elastic electron scattering in xenon in the energy range from 5 eV to 10 eV // Phys. Rev. A, 2007, Vol. 76, p. 03271.
41. *Nishimura H. et al.* Elastic scattering of electrons from xenon // J. Phys. Soc. Jap., 1987, Vol. 56, No. 1, p.70.
42. *Salvat F.* Optical-model potential for electron and positron elastic scattering by atoms // Phys. Rev. A, 2003, Vol. 68, p. 012708.
43. Numerical data and functional relationships in science and technology. Group I. Elementary particles, nuclei and atoms. V.17. Photon and electron interactions with atoms, molecules and ions. Subvolum A. Interaction of photon and electron with atoms / Edited by Itikawa Y. – Berlin: Springer, 2000.
44. *Yuan J. et al.* Quasirelativistic low-energy electron-atom scattering: Xe // J. Phys. B, 1991, Vol. 24, p. 275.
45. *Eachran R.P. et al.* Elastic scattering of electrons from krypton and xenon // J. Phys. B, 1984, Vol. 17, p. 2507.
46. *Schulz G.J.* Vibrational excitation of N₂, CO₂, and H₂ by electron impact // Phys. Rev. A, 1964, Vol. 135, No. 4, p. 988.
47. *Гордеев О.А., Хмара Д.В.* Влияние нормировки сечений возбуждения колебаний молекул на макроскопические характеристики разряда в азоте // ТВТ, 1994, т. 32, № 1, с. 133.
48. *Linder F., Schmidt H.* Experimental study of low energy e-O₂ collision processes Z // Naturforsch, 1971, No. 26a, p. 1617.
49. *Wakiya K.* Differential and Integral cross sections for the electron-impact excitation of O₂ I, II // J. Phys. B, 1978, Vol. 11, No. 22, p. 3913.
50. *Chung S. et al.* Oscillator strength and electron-impact excitation of the Schuman-Runge continuum of the oxygen molecule // Phys. Rev. A, 1980, Vol. 21, No. 4, p. 1075.
51. *Hashimoto T. et al.* Papers of Gas Discharge Technical Committee ED-90-61. – Japan: IEE, 1990.
52. *Puech V. et al.* Collision cross section and transport parameters in neon and xenon // J. Phys. D, 1991, Vol. 24, p.1974.
53. *Мак Даниэль И.* Процессы столкновений в ионизированных газах. – М. Мир, 1964.
54. *Александров Н.Л.* Трехчастичное прилипание электрона к молекуле // УФН, 1988, т. 154, № 2, с. 177.
55. *Rapp D., Briglia D.D.* // J. Chem. Phys., 1965, Vol. 43, No. 5, p.1480.
56. *Chanin L.M.* // Phys. Rev., 1962, No. 128, p. 219.
57. *Kim Y.* Extension of the binary-encounter-dipol model to relativistic incident electrons // Phys. Rev. A, 2000, Vol. 62, p. 052710.
58. *Rapp D., Briglia D.D.* Ionization by electron impact II // J. Chem. Phys., 1965, Vol. 43, No. 5, p. 1480.
59. *Rejoub R. et al.* Determination of the absolute partial and total cross sections for electron-impact ionization of the rare gases // Phys. Rev. A, 2002, Vol. 65, p.042713.