



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 21 за 2012 г.



Бобылев А.В., Карпов С.А.,
Потапенко И.Ф.

Метод Монте-Карло для
двухкомпонентной плазмы

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Бобылев А.В., Карпов С.А., Потапенко И.Ф. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 21. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-21>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской Академии наук

Бобылев А.В. , Карпов С.А., Потапенко И.Ф.

Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы

Москва – 2012

А.В. Бобылев, С.А.Карпов, И.Ф.Потапенко. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2012, 27 страниц, 21 рисунок, библиография: 26 наименований.

Рассматривается новый метод Монте-Карло прямого статистического моделирования кулоновских столкновений в случае двухкомпонентной плазмы. Приводятся краткий обзор литературы и предварительные сведения, касающиеся существа проблемы. Далее обсуждается идея, лежащая в основе метода, и приведена его схема. Проведены иллюстративные расчеты релаксации начального распределения для одного и двух сортов частиц в трёхмерном случае в пространстве скоростей. Результаты моделирования для различных параметров сравниваются с численными расчетами, основанными на полностью консервативных разностных схемах для уравнения Ландау-Фоккера-Планка. Даны оценки точности метода, полученные из численных результатов.

A.V.Bobylev, S.A. Karpov, I.F.Potapenko. Monte-Carlo method for two component plasmas. Preprint, Inst. Appl. Mathem., Russian Academy of Sciences, 2012, 27 Pages, 21 Figures, 26 References.

The new direct simulation method of Monte-Carlo type (DSMC) for Coulomb collisions in the case of two component plasma is considered. A brief literature review and preliminary information concerning the problem are given. Further the idea that lies in the basis of the method is discussed and its scheme is provided. The illustrative numerical simulation of the initial distribution relaxation for one and two sorts of particles in 3D case in the velocity space is performed. Simulation results are compared with the numerical results based on the completely conservative finite difference schemes for the Landau-Fokker-Planck equation. Estimation of calculation accuracy obtained from numerical results is given.

Введение.

Необходимость и важность моделирования динамики частиц с кулоновским потенциалом взаимодействия связана, в первую очередь, с многочисленными приложениями в различных областях физики плазмы. Гидродинамический подход для описания многих явлений зачастую недостаточен и необходимым становится рассмотрение динамики процесса на кинетическом уровне.

Кинетические уравнения, описывают динамику систем, состоящих из большого числа слабо, в некотором смысле, взаимодействующих частиц. Типичными примерами являются газы и плазма. Наиболее известное кинетическое уравнение – нелинейное уравнение Больцмана (например, см. [1]) и его линейная версия, уравнение переноса.

Столкновительный оператор для заряженных частиц был впервые получен Ландау [2] как аппроксимация интеграла столкновений Больцмана в предположении, что средняя энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению со средней кинетической энергией: $e^2 n^{1/3} \ll T$. Через 20 лет этот оператор был вновь выведен в форме нелинейного уравнения Фоккера-Планка [3]. По ряду причин именно эта форма уравнения (ФП) стала очень популярной в численном моделировании задач управляемого термоядерного синтеза, начиная с 70х годов (например, см. работы [4], [5] и ссылки в них). Вывод интеграла Ландау из интеграла столкновений Больцмана для сечений рассеяния общего вида в предположении рассеяния на малые углы был сделан независимо в [1] и [6]. В работе [7] было показано, что модифицированный интеграл столкновений типа Ландау может быть использован как модель уравнения Больцмана для произвольных потенциалов взаимодействия.

Сложность уравнения ЛФП, особенно в пространственно неоднородном случае (уравнение Власова-Ландау), делает невозможным эффективное использование аналитических методов для его решения. Если использовать стандартные методы расщепления для решения пространственно неоднородного кинетического уравнения (см., например, [8]), тогда шаг, описывающий столкновения, сводится к решению пространственно однородного уравнения ЛФП на каком-то временном интервале. Далее в этой работе рассматривается именно этот пространственно-однородный случай.

Численные методы для уравнения ЛФП имеют длинную историю (см., например, литературу в [9]). Развитие разностных схем для кинетического уравнения ЛФП шло, в частности, по пути выполнения законов сохранения для дискретного случая. Это требование важно с точки зрения адекватности математической модели физической задаче. Выполнить это требование для нелинейного кинетического уравнения достаточно сложно. Это касается, в первую очередь, задач, одномерных и двумерных. Для трёхмерного уравнения ЛФП в декартовых координатах несложно формально сконструировать разностную схему, обеспечивающую выполнение всех законов сохранения. Для этого достаточно лишь использовать для дискретизации кинетическое уравнение в его первоначальной форме – форме Ландау. Следует отметить, что

подобная схема чрезвычайно «затратна» в вычислительном смысле и, насколько нам известно, не нашла широкого применения в практических расчетах. Множество публикаций, появившихся в предыдущую декаду, было посвящено сугубо математическим аспектам и, так называемым, энтропийным разностным схемам (см., например, литературу в [10,11]). Однако в плане применения этих схем к задачам физики плазмы особого продвижения не было.

Детерминистический подход к численному решению кинетического уравнения является естественным и, в некотором смысле, наиболее прямым приближением к решению точного уравнения. Разностная схема, построение которой основано на методе конечных элементов (для решения уравнения ЛФП см. ссылки в [5]), в конечном счете, похожа на схему, построенную с помощью конечно-разностного метода. Кроме конечно-разностных схем следует отметить другой детерминистический подход к решению уравнения ЛФП, который использует быстрое преобразование Фурье [12] в комбинации с Фурье-преобразованием интеграла столкновения Ландау (см., например, [13]). Метод, впервые предложенный в [14], основан на аппроксимации функции распределения периодическими функциями. Спектральный метод работает в полном пространстве скоростей, сохраняет плотность частиц и является достаточно быстрым - $O(n \log n)$ операций, где n – количество разложений. Тем не менее, в силу периодичности аппроксимирующих функций, этот метод имеет существенные ограничения, связанные с граничными условиями для функции распределения [15].

Среди стохастических методов решения уравнения ЛФП отметим несколько. Во-первых, это метод, основанный на замене уравнения диффузионного типа, системой стохастических дифференциальных уравнений Ланжевена, которые формально рассматриваются как уравнения движения модельных частиц. Этот метод, несмотря на относительно небольшое число публикаций, интересен для решения определенных прикладных задач физики плазмы (см. работу [16] и ссылки в ней).

Другие методы дискретного моделирования были предложены Takizuka и Abe [17] и Nanbu [18]. Сравнение этих двух методов можно найти в [19]. В действительности, метод Нанбу является частным случаем более общего метода, предложенного в [20] для уравнения типа ЛФП для произвольных дальнедействующих потенциалов взаимодействия.

Целью данной работы является представление численных результатов по моделированию методом Монте-Карло релаксации начального распределения для двух сортов частиц с различными массами (электронов - e и ионов - i), взаимодействующих с кулоновским потенциалом. В основе данного исследования лежат статьи [19-21,9]. Идея метода в данной работе объясняется схематически, без строгого обоснования, которое является предметом последующих публикаций. Здесь приводится алгоритм реализации метода МК. Результаты релаксации $e-e$ и $e-i$ начальных изотропных распределений сравниваются с вычислениями, полученными по полностью консервативным схемам. В конце работы приводятся заключительные ремарки.

Метод прямого моделирования для плазмы.

Метод Монте–Карло (МК), изобретенный Э.Ферми и Дж. фон Нейманом в процессе работ по урановой тематике, продемонстрировал широкие перспективы его применения в различных областях физики, вычислительной математики, теории переноса и т.д. Метод статистических испытаний (прямое моделирование), который применяется в самых разных областях вычислительной математики, зачастую не ставит своей целью доказательства связи (обоснования) с аппроксимируемым уравнением.

Для малого числа измерений производительность метода Монте-Карло ниже, чем у детерминированных методов. Преимущества методов типа Монте-Карло проявляются в многомерных задачах. К тому же для ускорения расчетов есть возможность естественного распараллеливания метода МК по независимому набору испытаний, что является несомненным его преимуществом. Метод МК оптимален для кинетических задачах в тех случаях, когда интересны и важны, в первую очередь, макроскопические характеристики системы, в частности, моменты функции распределения. Поскольку вместо функции распределения рассматривается набор из N частиц (или $3N$ соответствующих скоростей), то для описания высоких моментов (хвостов распределения) нужно брать большие значения N . При этом трудоемкость метода (временные затраты) возрастает, так как статистическая ошибка метода МК пропорциональна $N^{-1/2}$.

Строго говоря, и детерминированный (например, разностный) метод, с равномерной сеткой, хуже описывает хвосты распределения по сравнению с его кором (основной частью) функции распределения. Однако, конечно-разностный метод, основанный на полностью консервативных схемах, полезен в данном контексте тем, что для одномерного и двумерного случаев в пространстве скоростей, позволяет аппроксимировать кинетическое уравнение и получать решения с очень высокой точностью. Подобные расчеты могут служить надежным тестом для более сложных моделей и других вычислительных подходов.

В динамике разреженного газа для прямого дискретного моделирования берётся набор частиц, столкновения которых происходят по определенным законам. Методы типа МК получили очень широкое распространение для короткодействующих потенциалов. Для потенциалов же с бесконечным радиусом действия применение методов прямого моделирования затруднено, в основном, из-за бесконечного (полного) сечения рассеяния. Тогда среднее время между столкновениями равно нулю и применение метода типа МК «в лоб» невозможно. Методы прямого моделирования для системы кулоновски взаимодействующих частиц, разработанные ранее, возможно, недостаточно быстрые и с усложнённой процедурой выбора модельных сечений рассеяния. Этим можно объяснить то, что методы МК широко не используются в задачах, связанными с практическими приложениями к слабо столкновительной плазме.

Первый систематический метод прямого статистического моделирования для произвольных потенциалов с бесконечным радиусом действия, в том числе

и для кулоновского, был предложен в [19]. Отметим, что метод, предложенный в [19], аппроксимирует именно уравнение типа ЛФП. Алгоритмы МК, основанные на этом методе, для одного сорта частиц, взаимодействующих с дальнедействующим потенциалом, сконструированы и реализованы в [20,21,9]. В этих работах численные решения изотропной и анизотропной релаксации начального распределения, полученные методом Монте-Карло, были проверены на точном решении для максвелловских молекулах, а также на численных расчетах по полностью консервативным разностным схемам [22] - [24] (см. также в [9]). В работе [25] подход, предложенный в [19], анализируется и обобщается, исследуется возможность ускорения счета для кулоновских столкновений.

Предварительные сведения.

Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ частиц сорта α , в случае, если пространство однородно и отсутствуют внешние силы, имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = \sum_\beta \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} g_{\alpha\beta}(u, \mu) [f_\alpha(\vec{v}') f_\beta(\vec{w}') - f_\alpha(\vec{v}) f_\beta(\vec{w})] d\omega d\vec{w}, \quad (1)$$

где $g_{\alpha\beta}(u, \mu) = u \cdot \sigma_{\alpha\beta}(u, \mu)$, $\sigma_{\alpha\beta}(u, \mu)$ - дифференциальное сечение рассеяния и $u = |\vec{v} - \vec{w}|$ - относительная скорость.

Для кулоновского взаимодействия, когда преобладает рассеяния на малые углы $0 \leq \theta \leq \delta$ ($0 < \delta < 1$) и дифференциальное сечение рассеяния удовлетворяет условию

$$\sigma_{\alpha\beta}(u, \mu) \equiv 0, \text{ при } -1 < \mu < 1 - c\delta^2, \quad (2)$$

уравнение (1) может быть сведено (см. [1,6]) к уравнению Ландау-Фоккера-Планка

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{v}, t)}{\partial t} = \frac{m_{\alpha\beta}^2}{2m_\alpha} \sum_\beta \frac{\partial}{\partial v_i} \int d\vec{w} g_{\alpha\beta}^{tr}(u) (u^2 \delta_{ij} - u_i u_j) \left\{ \frac{f_\beta(\vec{w})}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\vec{v})}{\partial v_j} - \frac{f_\alpha(\vec{v})}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta(\vec{w})}{\partial w_j} \right\}, \quad (3)$$

где $g_{\alpha\beta}^{tr}(u) = u \sigma_{\alpha\beta}^{tr}(u)$, $\sigma_{\alpha\beta}^{tr}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \sigma_{\alpha\beta}(u, \mu) (1 - \mu)$, $i, j = 1, 2, 3$. Решение

уравнения (3) может быть получено из уравнения Больцмана (1) с модельным сечением рассеяния удовлетворяющем условию (2). Существует целый класс сечений удовлетворяющих условию (2), в нашем случае, удобно выбрать

$$g_{\alpha\beta}(u, \mu) = \frac{1}{2\pi\varepsilon} \delta[1 - \varepsilon a_{\varepsilon\alpha\beta}(u) - \mu], \quad (4)$$

где $0 \leq \varepsilon a_{\varepsilon\alpha\beta}(u) \leq 2$, иначе $\mu = 1$, и рассеяния не происходит. Такой выбор обусловлен тем, что алгоритм решения уравнения Больцмана методом Монте-Карло имеет в этом случае наиболее простой вид. Соответствующее транспортное сечение в уравнении (3)

$$g_{\alpha\beta}^{tr}(u) \equiv u\sigma_{\alpha\beta}^{tr}(u) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu g_{\alpha\beta}(u, \mu)(1-\mu) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{-1}^1 d\mu \delta[1 - \varepsilon a_{\varepsilon\alpha\beta}(u) - \mu](1-\mu) = a_{\varepsilon\alpha\beta}(u),$$

откуда получаем $a_{\varepsilon\alpha\beta}(u) = u\sigma_{\alpha\beta}^{tr}(u)$. Если сечения рассеяния задано формулой Резерфорда, то соответствующее транспортное сечение имеет вид

$$\sigma_{\alpha\beta}^{tr}(u) = 4\pi \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{m_{\alpha\beta} u^2} \right)^2 L_{\alpha\beta},$$

где $L_{\alpha\beta}$ – кулоновский логарифм, $m_{\alpha\beta}$ – приведенная масса.

Подставляя (4) в (1) и полагая также, что

$$\frac{\partial f_\alpha(v, t)}{\partial t} \approx \frac{f_\alpha(v, t + \Delta t) - f_\alpha(v, t)}{\Delta t}$$

где $\Delta t \rightarrow 0$, с точностью $O(\Delta t)$ получим

$$\tilde{\varepsilon} \frac{f_\alpha(v, t + \Delta t) - f_\alpha(v, t)}{\Delta t} + f_\alpha(v, t) = \frac{1}{\rho} \sum_\beta \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} dndw \frac{1}{2\pi} \delta[1 - \varepsilon a_{\tau\alpha\beta}(u) - \mu] f_\alpha(v') f_\beta(w') \quad (5)$$

выбрав $\Delta t = \tilde{\varepsilon} = \varepsilon / \rho$, где $\rho = \sum_\beta \rho_\beta$ и $\rho_\beta = \int f_\beta(\vec{v}) d\vec{v}$, получаем следующее выражение для функции распределения частиц сорта α в момент времени $t + \Delta t$

$$f_\alpha(\vec{v}, t + \Delta t) = \sum_\beta \frac{1}{\rho} \int_{\mathbb{R}^3 \times S^2} d\vec{w} d\vec{n}' D_{\alpha\beta} \left(\mu, A_{\alpha\beta} \frac{\Delta t}{u^3} \right) f_\alpha(\vec{v}', t) f_\beta(\vec{w}', t), \quad (5)$$

здесь $\mu \equiv \cos \mathcal{G} = (\vec{u} \cdot \vec{n}') / u$, $A_{\alpha\beta} = 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L_{\alpha\beta} \rho / m_{\alpha\beta}^2$, скорости частиц после столкновения

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{U}_{\alpha\beta} + \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\alpha} u \cdot \vec{n}', \\ \vec{w}' = \vec{U}_{\alpha\beta} - \frac{m_{\alpha\beta}}{m_\beta} u \cdot \vec{n}'. \end{cases}$$

$$D_{\alpha\beta}(\mu, \tau) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu - \nu(\tau)), \quad \text{где} \quad \nu(\tau) = \begin{cases} 1 - 2\tau, & 0 \leq \tau \leq 1, \\ -1, & \tau > 1. \end{cases} \quad (6)$$

Функция $D_{\alpha\beta}(\mu, \tau)$, как показано в [19], имеет смысл плотности вероятности для случайной величины $\vec{n}' = \frac{\vec{u}'}{u}$ (где \vec{u}' – относительная скорость частиц после соударения). Таким образом, зная скорости \vec{v} , \vec{w} в момент времени t и, определив $\mathcal{G} = \arccos(\nu(\tau))$ и $\varphi = 2\pi r$, где r – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0;1]$, можно найти направляющий вектор $\vec{n}'(\mathcal{G}, \varphi)$ и скорости \vec{v}' , \vec{w}' после соударения в момент времени $t + \Delta t$. На этой простой идее и построен рассматриваемый далее алгоритм применения метода Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы.

Алгоритм метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы.

При проведении численного моделирования использовались следующие безразмерные единицы

$$\tilde{v} = v/v_{T_i}; \quad \tilde{t} = t/\tau_{ee}, \quad \tau_{ee} = \frac{v_{T_e}^3 m_e^2}{4\pi e^4 \rho_e L_{ee}}; \quad \tilde{f}_\alpha = 4\pi v_{T_i}^3 f_\alpha / \rho_\alpha,$$

где $v_{T_{e,i}} = \sqrt{3kT_{e,i}/m_{e,i}}$ - тепловая скорость электронов и ионов. Таким образом, скорость измеряется в тепловых скоростях ионов, а единицей измерения времени является характерное время электрон-электронных столкновений τ_{ee} (для простоты, кулоновский логарифм предполагается одинаковым для всех сортов частиц). За единицы массы и температуры взяты масса электрона m_e и начальная температура электронов T_e^0 , соответственно. Для простоты ограничимся рассмотрением водородоподобной плазмы, состоящей из бинарной смеси частиц с разными массами и одинаковыми по абсолютной величине зарядами

Алгоритм метода Монте-Карло можно разделить на следующие этапы.

Этап 1. Начальное распределение.

Начальное распределение задается в виде массива из N_e скоростей электронов $\{v_1, v_2, \dots, v_{N_e}\}$, $v_j \in \mathfrak{R}^3$ и N_i скоростей ионов $\{w_1, w_2, \dots, w_{N_i}\}$, $w_j \in \mathfrak{R}^3$ и соответствует начальным функциям распределения

$$f_\alpha = \frac{\rho_\alpha}{N_\alpha} \cdot \sum_{j=1}^{N_\alpha} \delta(\vec{v} - \vec{v}_\alpha), \quad j = e, i.$$

Условие нормировки для функции распределения имеет вид

$$\int_{\mathfrak{R}^3} f_\alpha(\vec{v}, t) d\vec{v} = 1, \quad \int_{\mathfrak{R}^3} f_\alpha(\vec{v}, t) v^2 d\vec{v} = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{j=1}^{N_\alpha} v_j^2 = \frac{m_i}{m_\alpha} \frac{T_\alpha^0}{T_i^0} \equiv \frac{1}{\gamma_\alpha^0},$$

где $\gamma_\alpha^0 = (v_{T_\alpha}^0 / v_{T_i}^0)^2$. Полный импульс и температура сохраняются со временем

$$\sum_{j=1}^N \vec{v}_j + m \vec{w}_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N |\vec{v}_j|^2 + m |\vec{w}_j|^2 = 2T_{eq},$$

где отношение масс $m = m_i / m_e$, T_{eq} - равновесная температура.

Этап 2. Расчет времени.

Как было отмечено выше, шаг по времени должен быть пропорционален параметру $\varepsilon \ll 1$, определяющему малость угла рассеяния частиц, поэтому $\Delta t = const \cdot \varepsilon$. С другой стороны, для простоты алгоритма, удобно использовать более мелкий шаг $\Delta \tilde{t} \ll 1/N_e$, так чтобы на каждом шаге $\Delta \tilde{t} = \Delta t / N_e = const \cdot \varepsilon / N_e$ происходило по одному столкновению между частицами одного сорта. Таким образом, время после $k = 1, 2, \dots$ шагов

определяется по формуле $t = t_{N_e}(k) = \text{const} \cdot \varepsilon / N_e$, где константу (нормировочное число) можно определить из сравнения с численными результатами, полученными по полностью консервативной разностной схеме. Для данной серии расчетов она равна 2 и одинакова для различных отношений масс.

Этап 3. Алгоритм каждого шага по времени.

На каждом шаге происходит два столкновения, с тем чтобы в них приняли участие хотя бы один электрон и ион. Каждое столкновение характеризуется соответствующей вероятностью, так для электрона существуют вероятности P_{ee} - электрон-электронного ($e-e$) и P_{ei} - электрон-ионного ($e-i$) столкновений. Аналогично вводятся вероятности для столкновений с участием иона - P_{ie} и P_{ii} . Разумеется, вероятности должны удовлетворять условию $\sum_{\beta} P_{\alpha\beta} = 1$.

А. Сначала «разыгрывается» столкновение с участием электрона: выбирается произвольный номер $1 \leq k \leq N_e$ и предполагается, что электрон со скоростью v_k столкнется с какой-то частицей. Далее выбирается случайное число θ , равномерно распределенное на отрезке $[0;1]$, и сравнивается, например, с P_{ee} . Если $\theta \leq P_{ee}$, то будет $e-e$ столкновение, если же $\theta > P_{ee}$, то $e-i$ столкновение. В данной работе $P_{ee} = P_{ei} = 1/2$, хотя схему расчета и вероятности P_{ee} и P_{ei} можно задать и другими способами. Партнёр v_j ($j \neq k$) или w_l для этого столкновения выбирается случайно, и мы получим переход $(v_k, v_j) \rightarrow (v'_k, v'_j)$ или $(v_k, w_l) \rightarrow (v'_k, w'_l)$. Таким образом произведено первое столкновение. Правила преобразования скоростей приводятся ниже.

Отметим, что изложенный процесс «розыгрыша» сознательно выбран, как наиболее простой. Он, возможно, оставляет на будущее место для другого выбора пар и для увеличения скорости счета.

Б. Теперь совершенно аналогично произведем второе столкновение, но уже с участием иона. Для этого выберем случайно новый номер из набора $1 \leq k' \leq N_i$ и соответствующий этому номеру ион со скоростью $w_{k'}$, который столкнется с электроном или с ионом с вероятностью P_{ie} и P_{ii} соответственно ($P_{ie} = P_{ii} = 1/2$). Точно так же выберем ему пару $(w_{k'}, w_{j'})$ или $(w_{k'}, v_{l'})$ и произведём одно из столкновений: $(w_{k'}, w_{j'}) \rightarrow (w'_{k'}, w'_{j'})$ или $(w_{k'}, v_{l'}) \rightarrow (w'_{k'}, v'_{l'})$.

Затем увеличим счётчик времени $t \rightarrow t + \Delta t$ и перейдём к новому шагу, то есть к пункту 3А.

Правило преобразования скоростей.

e – e столкновение: $(v_1, v_2) \rightarrow (v'_1, v'_2)$.

Вычисляем относительную скорость

$\vec{u} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$, тогда

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + |\vec{u}| \cdot \vec{\omega}), \\ \vec{v}'_2 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - |\vec{u}| \cdot \vec{\omega}), \end{cases}$$

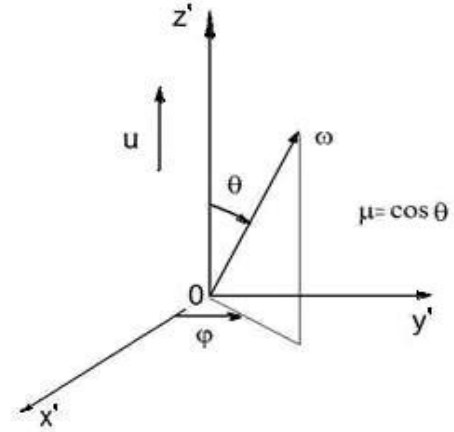
где единичный вектор $\vec{\omega} = \vec{u}'/u$ задаётся в системе координат $Ox'y'z'$ с осью Oz' , направленной вдоль вектора \vec{u} относительной скорости до столкновения, формулой

$$\vec{\omega} = (\vec{u} \cdot \cos \theta + \vec{h} \cdot \sin \theta) / u, \quad (7)$$

где $\vec{h} = \{(\cos \varphi \cdot u_z u_x - \sin \varphi \cdot u u_y) / u_{\perp}; (\cos \varphi \cdot u_z u_y - \sin \varphi \cdot u u_x) / u_{\perp}; -u_{\perp} \cos \varphi\}$,

здесь $u_{\perp}^2 = u_x^2 + u_y^2$, $\cos \theta \equiv \mu = \begin{cases} 1 - 2\tau, & \text{при } 0 \leq \tau \leq 1 \\ -1, & \text{при } \tau > 1 \end{cases}$, где $\tau = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{|\vec{u}|^3}$ (см. (6)), а φ

- случайное число, равномерно распределенное на отрезке $[0, 2\pi]$.



i – i столкновение: $(w_1, w_2) \rightarrow (w'_1, w'_2)$

Преобразование скоростей происходит аналогично *e – e* столкновению

$$\vec{w}'_1 = \frac{1}{2}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + |\vec{u}| \cdot \vec{\omega}), \quad \vec{w}'_2 = \frac{1}{2}(\vec{w}_1 + \vec{w}_2 - |\vec{u}| \cdot \vec{\omega}),$$

где единичный вектор $\vec{\omega}$ определяется формулой (7), как и для *e – e* столкновения, с той лишь разницей, что $\tau = \frac{4}{m^2} \frac{\varepsilon}{|\vec{u}|^3}$, где $m = m_i/m_e$.

e – i и i – e столкновение: $(v, w) \rightarrow (v', w')$

Преобразование скоростей определяется соотношениями

$$\vec{v}' = \frac{1}{1+m}(\vec{v} + m\vec{w} + m|\vec{u}| \cdot \vec{\omega}), \quad \vec{w}' = \frac{1}{1+m}(\vec{v} + m\vec{w} - |\vec{u}| \cdot \vec{\omega}),$$

где единичный вектор $\vec{\omega}$ снова определяется формулой (7), но теперь

$$\tau = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 \cdot \frac{\varepsilon}{|\vec{u}|^3}.$$

Результаты численного моделирования.

Как уже отмечалось ранее, метод Монте-Карло удобно применять для решения тех задач, где существенны именно макроскопические характеристики динамики системы, поэтому в качестве критерия оценки его применения можно выбрать точность описания моментов функции распределения. В рамках приведенного алгоритма, они определяются по формуле

$$M_\alpha^{2n}(t) = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{j=1}^{N_\alpha} |\vec{v}_j|^{2n}, \quad (8)$$

что соответствует аналитическому выражению

$$m_\alpha^{2n}(t) = \int_{\mathbb{R}^3} |\vec{v}|^{2n} f_\alpha(\vec{v}, t) d\vec{v}.$$

Здесь второй момент ($n=1$) характеризует среднюю энергию (температуру) частиц сорта α , а высокие моменты ($n>1$) описывают хвосты функции распределения $f_\alpha(\vec{v}, t)$, где $v \gg v_{T\alpha}$.

Однокомпонентная плазма и сравнение с разностной схемой.

В случае $N_i = 0$ (тогда $p_{ee} = 1$, $p_{ei} = 0$) изложенный алгоритм (без пункта Б) можно использовать и для моделирования однокомпонентной плазмы. Рассмотрим изотропное начальное распределение

$$f(v, t=0) = \frac{1}{v^2} \delta(v-1),$$

и его релаксацию к равновесному максвелловскому распределению. Зависимость моментов функции распределения от времени для одного сорта частиц с изотропным начальным распределением представлена на рис. 1 сплошной линией, для сравнения, пунктиром на нем обозначена та же зависимость, полученная из расчета по разностной схеме (см. [9,24]). Из рисунка видно, что четвертый момент (кривая 1) и шестой момент (кривая 2) совпадают с расчетом по разностной схеме, причем релаксация более высоких моментов, описывающих релаксацию хвостов распределения, происходит медленнее, как и должно быть. Временная зависимость восьмого момента (рис. 1, кривая 3) на начальном этапе совпадает с расчетами по разностной схеме, а затем проявляются стохастические колебания около равновесного значения. Такая особенность в поведении высоких моментов связана с тем, что последняя стадия релаксации характеризуется формированием высокоэнергетического хвоста распределения скоростей, т.е. с появлением частиц со скоростью $v \geq 3v_T$. С другой стороны, столкновения, происходящие на каждом шаге по времени, приводят к тому, что, только появившись, такие быстрые частицы тут

же исчезают, сталкиваясь с более медленными. Заметим, что высокоэнергетические хвосты содержат экспоненциально малое количество частиц, а подавляющее большинство частиц находится в коре распределения, поэтому статистическая ошибка в описании хвоста распределения увеличивается. Этим объясняется колебательное поведение высоких моментов функции распределения, сильно «чувствительных» даже к небольшим изменениям модуля скорости (см. (8)). На рис. 2 представлена зависимость функции распределения от модуля скорости в конце процесса релаксации (сплошная линия), и распределение Максвелла

$$f_M(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2}v^2\right). \quad (9)$$

Из рисунка видно, что равновесное распределение полученное методом Монте-Карло практически совпадает с распределением Максвелла (9). Большого сглаживания расчетных кривых, как функции распределения, так и ее моментов, можно добиться, увеличив количество расчетов M , что будет проиллюстрировано в следующем разделе.

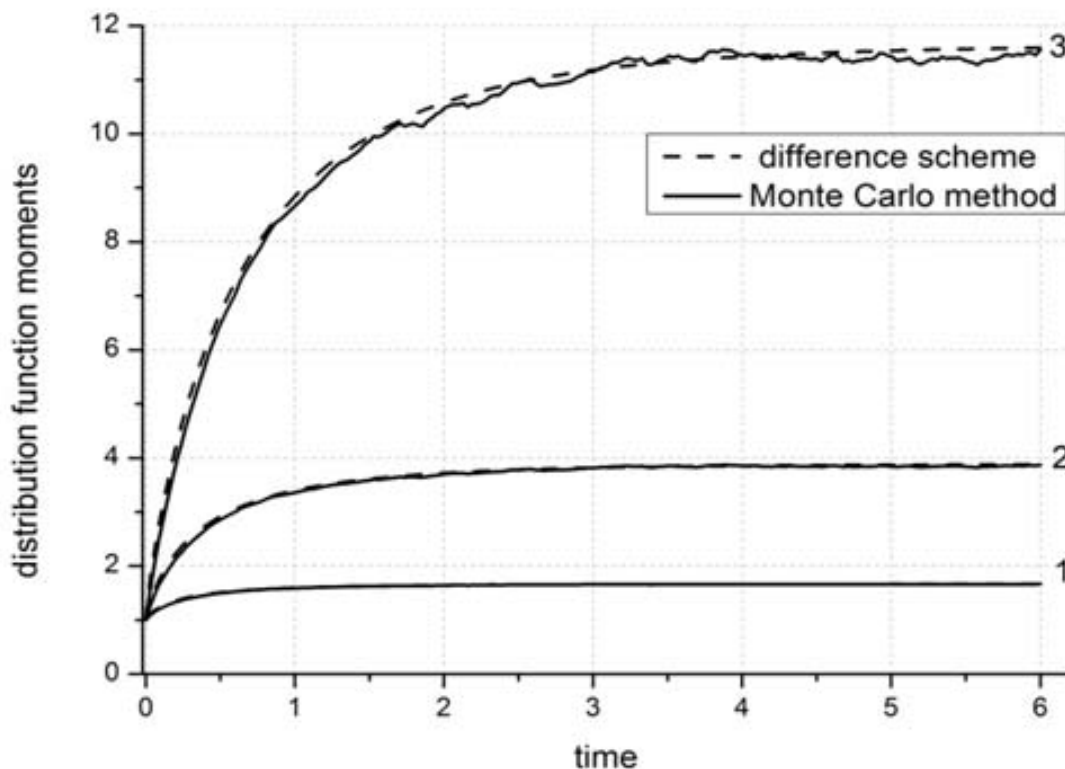


Рис. 1. Зависимость моментов функции распределения, рассчитанных по методу Монте-Карло и разностной схеме, от времени для $N_e = 100000$, $\varepsilon = 0.05$, $M = 1$; 1 – 4-ый момент, 2 – 6-ой момент, 3 – 8-ой момент.

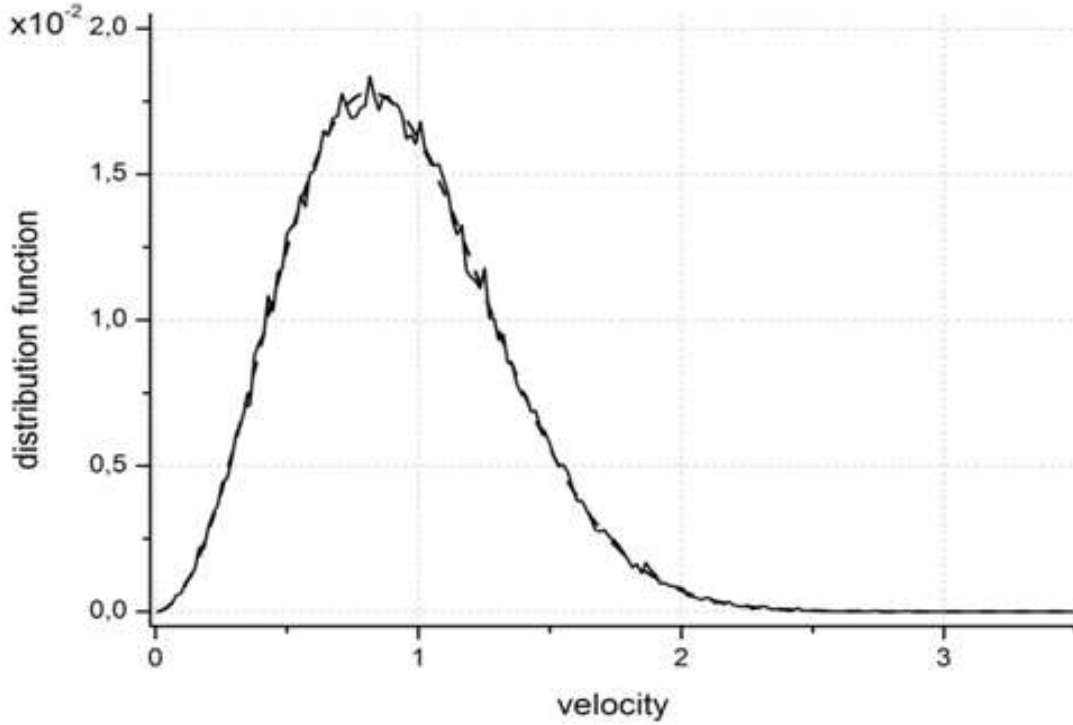


Рис. 2. Зависимость функции распределения от модуля скорости для $N_e = 100000$, $\varepsilon = 0.05$, $M = 1$, $t = 6$; пунктиром обозначено распределение Максвелла (9).

Релаксация к равновесию для двух сортов частиц.

Параметрами расчета, для данной задачи, являются N_e , N_i - число электронов и ионов, малая величина ε , характеризующая угол рассеяния частицы при столкновении и связанная с шагом по времени Δt , количество расчетов M , по которому происходит усреднение результатов, отношение масс электрона и иона $\rho = m_e/m_i$, начальные температуры (средние энергии) электронов и ионов T_e, T_i , определяющие начальное отношение тепловых скоростей $\zeta = v_{T_i}^2/v_{T_e}^2 = \rho \cdot T_i/T_e$.

В качестве начальных распределений выбирались изотропное $\delta(v - v_{e,i})$ и анизотропное $\delta(v - v_{e,i}) \delta(\mu)$ моноэнергетические распределения.

С целью проверки метода, результаты расчетов, с изотропным начальным распределением, сравнивались с численным решением задачи о релаксации двухтемпературной плазмы, полученным с применением полностью консервативной разностной схемы для системы уравнений ЛФП

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial f_e}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{3v} [A(f_e) + A(f_i)] \frac{\partial f_e}{\partial v} + f_e [B(f_e) + \rho B(f_i)] \right\}, \\ \frac{1}{\Gamma} \frac{\partial f_i}{\partial t} = \rho \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{1}{3v} [A(f_e) + A(f_i)] \frac{\partial f_i}{\partial v} + f_e \left[\frac{1}{\rho} B(f_e) + B(f_i) \right] \right\}, \end{cases}$$

где использованы обозначения $\Gamma = 16\pi^2 e^4 L n / m_e m_i$, $\rho = m_e/m_i \ll 1$

$$A(f) = \int_0^v f(y)y^4 dy + v^3 \int_v^\infty f(y)y dy, \quad B(f) = \int_0^v dy y^2 f(y, t).$$

Неравновесные температуры электронов и ионов определяются как

$$T_\alpha(t) = \frac{m_\alpha}{m_e} \int_0^\infty dy y^4 f_\alpha(y, t), \quad \alpha = e, i.$$

Закон сохранения энергии системы позволяет определить равновесную температуру плазмы T_{eq} равенством

$$\sum_{\alpha=e,i} T_\alpha(t) = \sum_{\alpha=e,i} T_\alpha(0) = 2T_{eq}.$$

Далее представлены результаты моделирования релаксации изотропного начального распределения для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов, методом Монте-Карло. Предполагается, что количество модельных частиц каждого сорта одинаково ($N_e = N_i = N$), а заряды совпадают по абсолютной величине.

В целях проверки подхода, методики и работы алгоритма произведены несколько расчетов зависимости моментов ионной и электронной функций распределения от времени для основных расчетных параметров (N, ε, M). Результаты расчетов для отношения масс $\rho = 1/10$ представлены на рис. 3-8. Выбор параметра $\rho = 1/10$, в данном случае, обусловлен тем, что процесс релаксации для более реального отношения масс происходит гораздо медленнее, в то время как изложенные далее выводы остаются справедливыми. Отметим, что для выбранного начального распределения, все начальные значения моментов равны единице. На рис. 3-4, можно видеть, что с увеличением числа частиц N , происходит сглаживание расчетных кривых и улучшается описание высоких моментов (рис. 3 кривые 2, 3; рис. 4 кривая 2). Отметим также, что кривые, соответствующие $N = 100000$, практически совпадают с результатами, полученными по разностной схеме (обозначенные пунктиром). На рис. 5-6 показано, что для удовлетворительного описания высоких моментов при сравнительно небольшом количестве частиц $N = 1000$, требуется проводить усреднение по большему количеству расчетов M , чем, например, для второго момента. Так, если второй момент сравнительно хорошо описывается 10 или 20 расчетами, то для описания четвертого и более старших моментов с той же точностью (уменьшения стохастических колебаний), требуется уже усреднение по 50 расчетам. Из рис. 7-8 следует, что точность расчетов, зависит от параметра ε , только на ранней стадии релаксации. Это обстоятельство, возможно, позволит в дальнейшем увеличить скорость счета, хотя данный аспект требует дальнейшего анализа. Как и следовало ожидать, представленные результаты показывают, что наилучшей точности можно добиться путем усреднения по большому количеству

расчетов M с наибольшим числом частиц N , последнее следует выбирать, исходя из приемлемой продолжительности времени расчета.

Пример зависимости моментов ионной и электронной функции распределения от времени для отношения масс $\rho = 1/64$ представлен на рис. 9-10 сплошной линией. Относительно небольшое число частиц $N = 250$ выбрано, чтобы оценить продолжительность времени для одного расчета: на данный момент она составляет 2 мин. 14 сек. (программный код написан на языке fortran 90 и реализован на компьютере Intel Core2 Duo 2,5 GHz, 4 Gb RAM), и точность получаемого результата. Как видно из представленных рисунков, совпадение второго момента (рис. 9-10, кривая 1) с результатом, полученным по разностной схеме (пунктирная линия), можно считать вполне удовлетворительным, в то время как для более точного описания четвертого момента (рис. 9-10, кривая 2), возможно, необходимо увеличить количество расчетов M . Ясно, что при выбранных параметрах, более старшие моменты, не представленные на рисунках, будут описаны хуже. Однако стоит отметить, что моменты выше четвертого существенны лишь в тех задачах, где важны хвосты распределения.

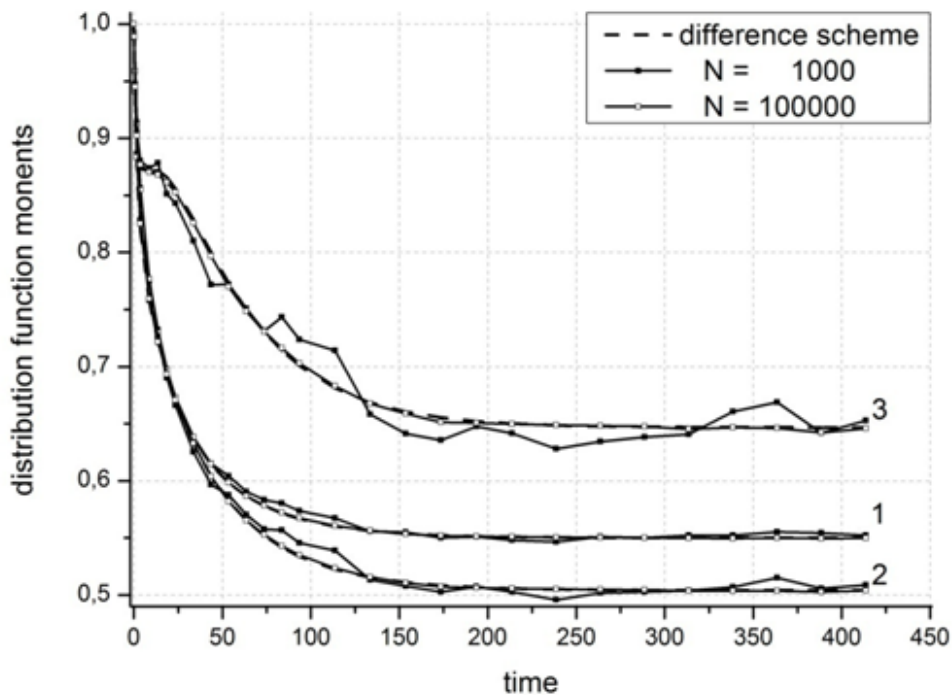


Рис. 3. Зависимость моментов ионной функции распределения от времени для числа частиц $N = 1000$ и $N = 100000$, $\rho = 1/10$, $\varepsilon = 0.05$, $M = 10$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент, 3 – 6-ой момент

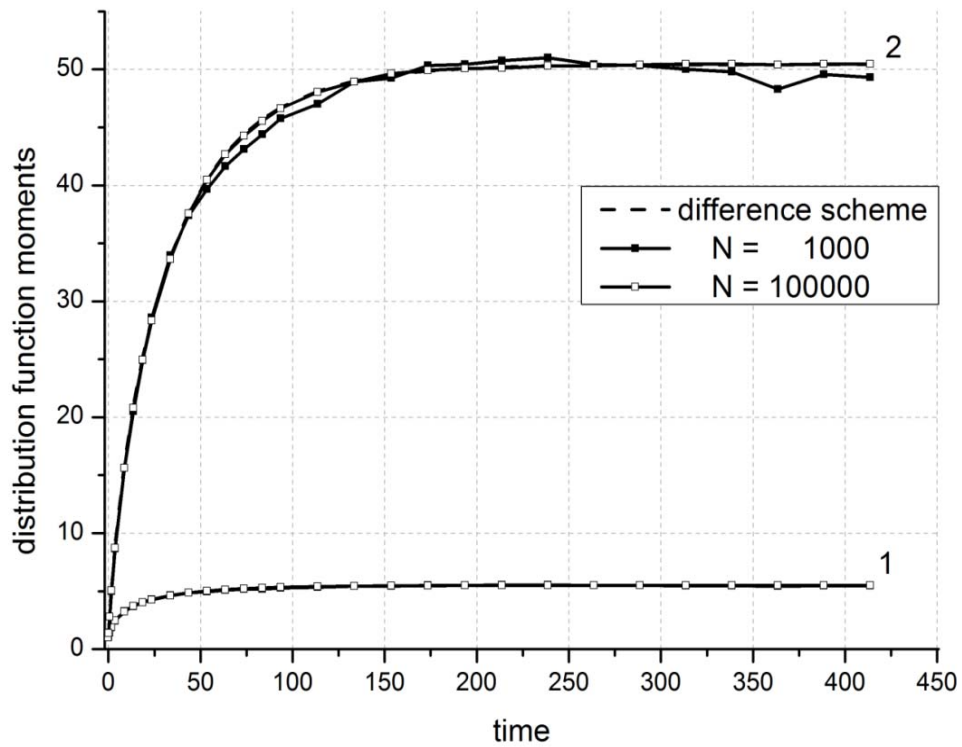


Рис. 4. Зависимость моментов электронной функции распределения от времени для числа частиц $N=1000$ и $N=100000$, $\rho=1/10$, $\varepsilon=0.05$, $M=10$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент.

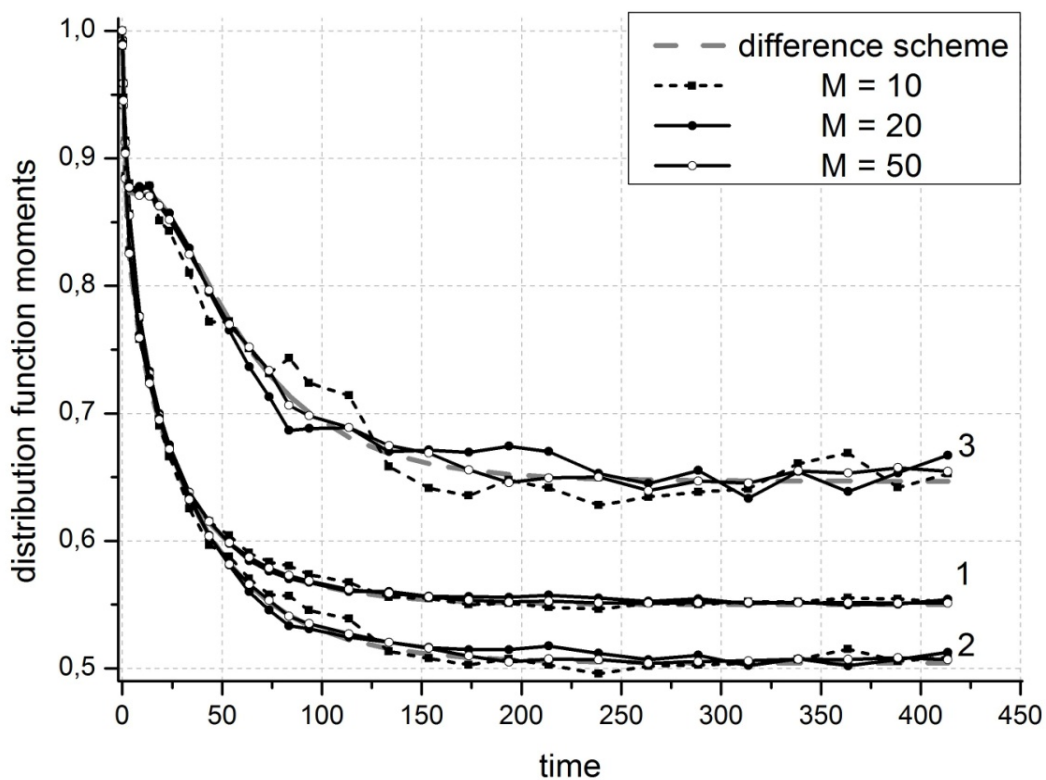


Рис. 5. Зависимость моментов ионной функции распределения от времени, усредненная по $M=10$, $M=20$ и $M=50$ расчетам, для $N=1000$, $\rho=1/10$, $\varepsilon=0.05$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент, 3 – 6-ой момент.

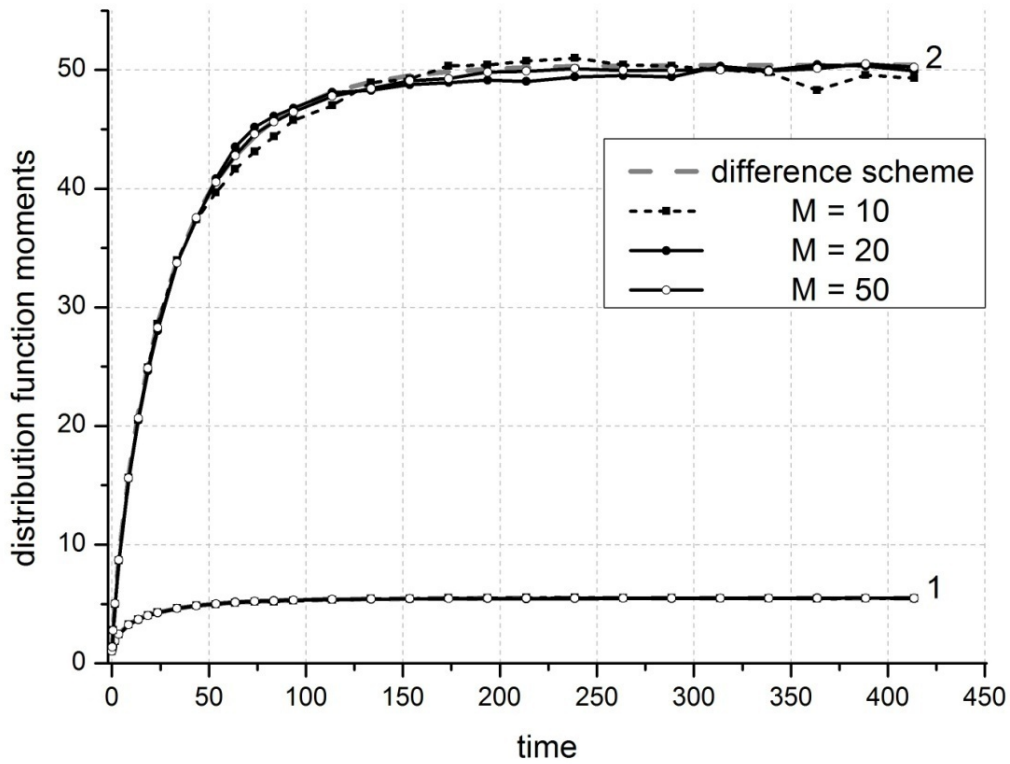


Рис. 6. Зависимость моментов электронной функции распределения от времени, усредненная по $M=10$, $M=20$ и $M=50$ расчетам, для $N=1000$, $\rho=1/10$, $\varepsilon=0.05$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент.

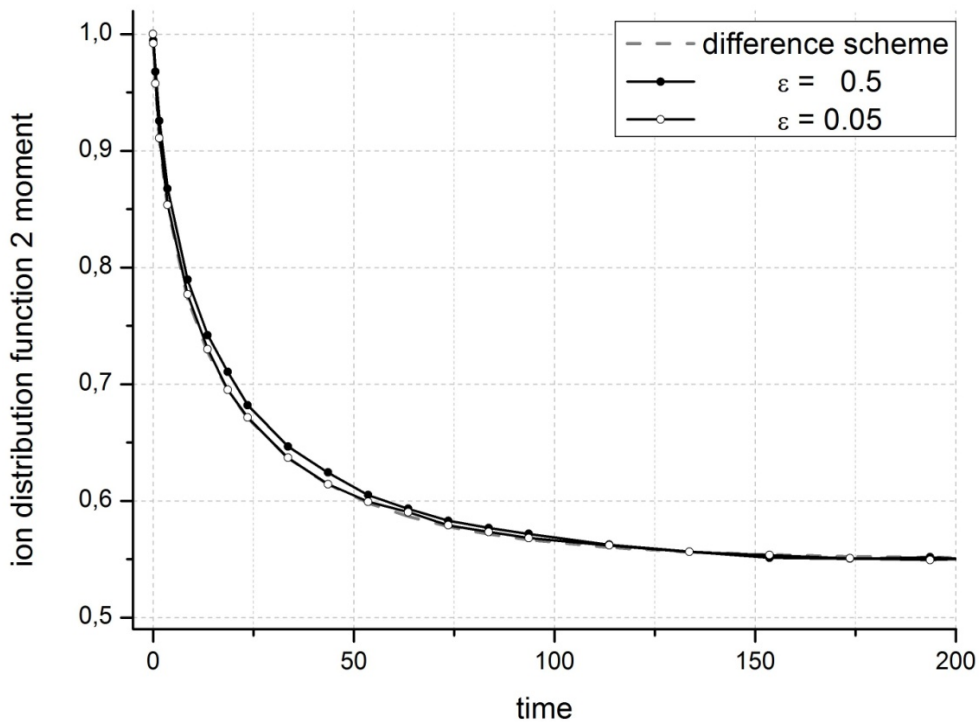


Рис. 7. Зависимость 2-го момента ионной функции распределения от времени для параметров $\varepsilon=0.5$ и $\varepsilon=0.05$, $N=500$, $\rho=1/10$, $M=50$.

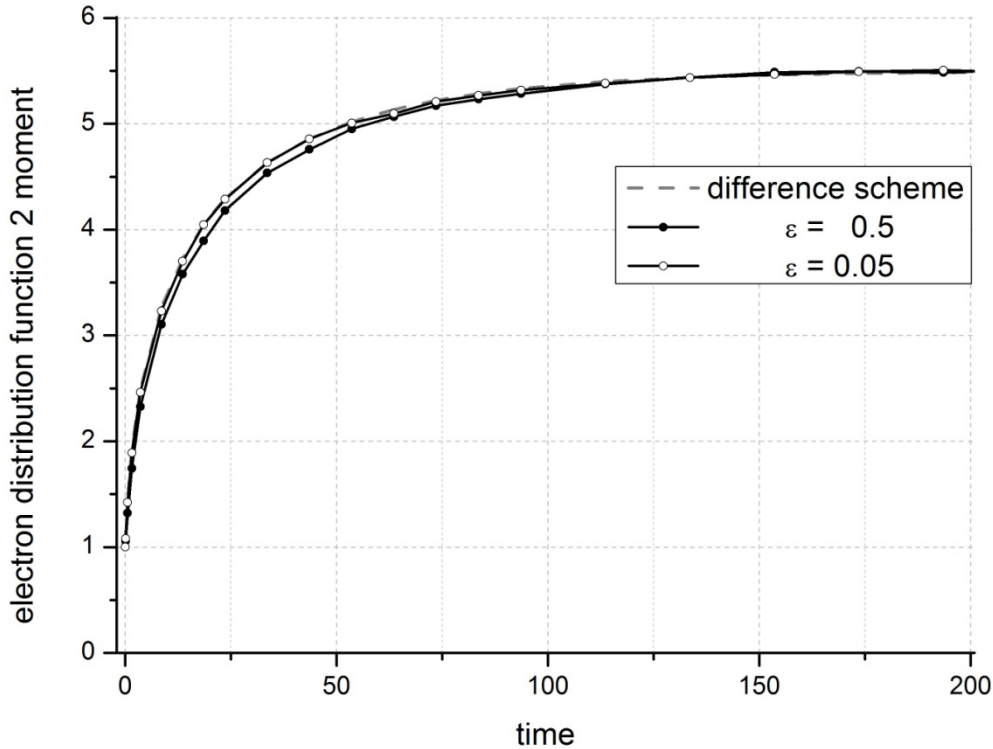


Рис. 8. Зависимость 2 момента электронной функции распределения от времени для параметров $\epsilon = 0.5$ и $\epsilon = 0.05$, $N = 500$, $\rho = 1/10$, $M = 50$.

На рис. 11 представлена зависимость температур электронной и ионной компонент от времени для отношения масс $\rho = 1/64$ и начальных температур $T_e^0 = 1$ и $T_i^0 = 64$, т.ч. начальные тепловые скорости электронов и ионов равны единице. Очевидно, что численная релаксация температур полностью соответствует физической картине моделируемого явления. Небольшие колебания около равновесного значения в конце релаксации являются особенностью метода Монте-Карло, они носят случайный характер, и могут быть устранены путем усреднения по большому количеству расчетов.

Кратко обсудим процесс релаксации функций распределения электронов и ионов. Изотропное начальное распределение имеет форму дельта-функционного пика в точке $v = 1$, и на ранней стадии релаксации происходит его «размывание», при этом максимальное значение функции распределения резко убывает. Функция распределения электронов быстро (за время $t < 1$) приобретает форму близкую к максвелловской, затем с ростом температуры электронной компоненты ее максимум смещается вправо и становится ниже. Максвеллизация ионной функции распределения происходит гораздо медленнее (за время $t \sim 10^3$ при отношении масс $\rho = 1/64$ и начальном отношении температур $T_e^0/T_i^0 = 1/64$), затем максимум распределения немного смещается влево, слегка подрастая, что соответствует остыванию ионной компоненты. Зависимость функций распределения электронов и ионов от модуля скорости для отношения масс $\rho = 1/64$ в конце процесса релаксации представлена на рис. 12.

Отметим, что модуль скорости, отвечающей максимуму функции распределения (как электронной, так и ионной), с хорошей точностью совпадает со значением наиболее вероятной скорости

$$\tilde{v}_{\text{вер}\alpha} = \frac{v_{\text{вер}\alpha}}{v_{T_i}} = \frac{\sqrt{2kT_{\text{eq}}/m_\alpha}}{\sqrt{3kT_i^0/m_i}} = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{T_{\text{eq}}}{m_\alpha}}, \quad \alpha = e, i,$$

для соответствующего распределения Максвелла

$$\tilde{f}_{M_\alpha}(v) = 4\pi\tilde{v}^2 \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{m_\alpha}{m_e\tilde{T}_{\text{eq}}}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} \frac{m_\alpha\tilde{v}^2}{m_e\tilde{T}_{\text{eq}}}\right), \quad \alpha = e, i.$$

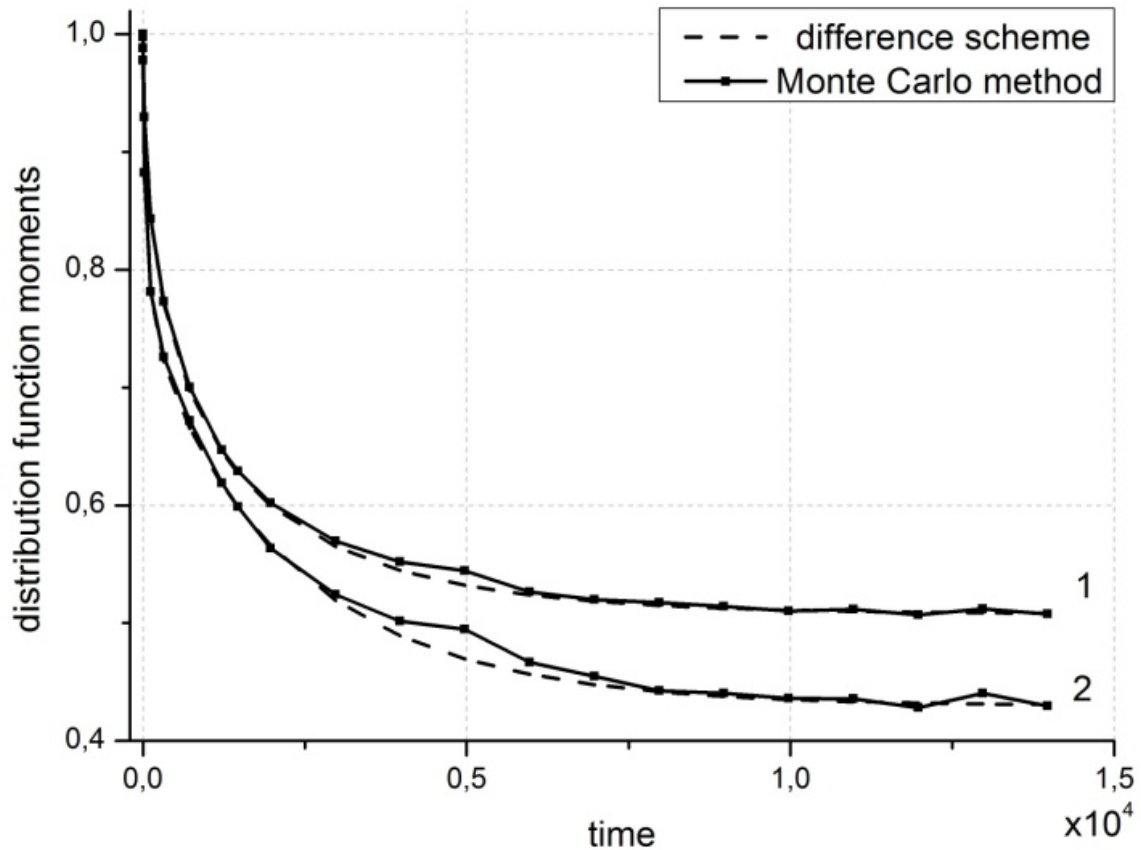


Рис. 9. Сравнение зависимостей моментов ионной функции распределения от времени, полученных по методу Монте-Карло и разностной схеме, для отношения масс $\rho = 1/64$, $N = 250$, $M = 20$, $\varepsilon = 0.05$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент.

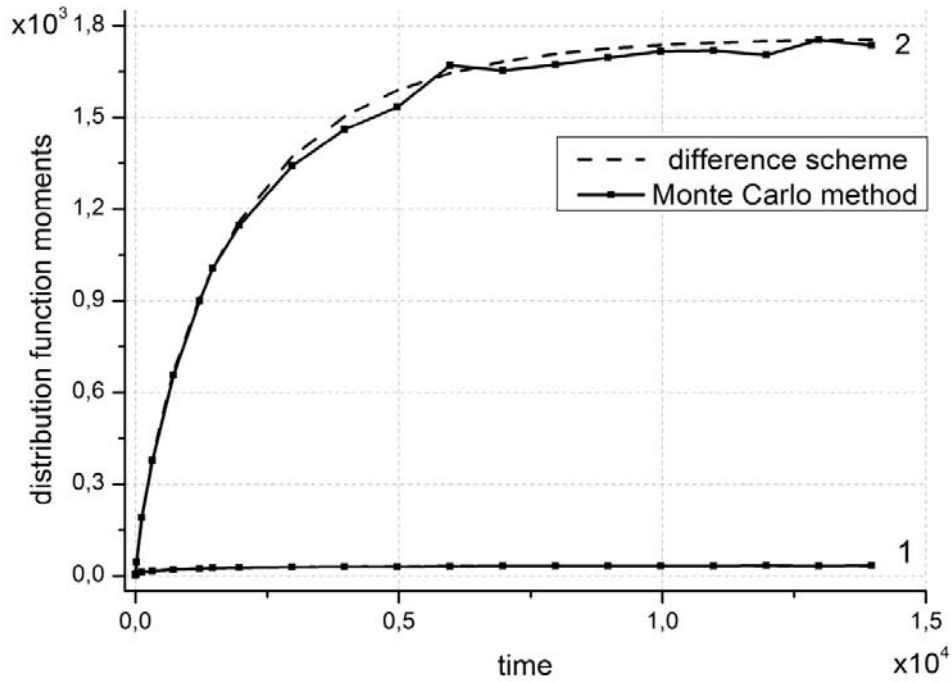


Рис. 10. Сравнение зависимостей моментов электронной функции распределения от времени, полученных по методу Монте-Карло и разностной схеме, для отношения масс $\rho = 1/64$, $N = 250$, $M = 20$, $\varepsilon = 0.05$; 1 – 2-ой момент, 2 – 4-ый момент.

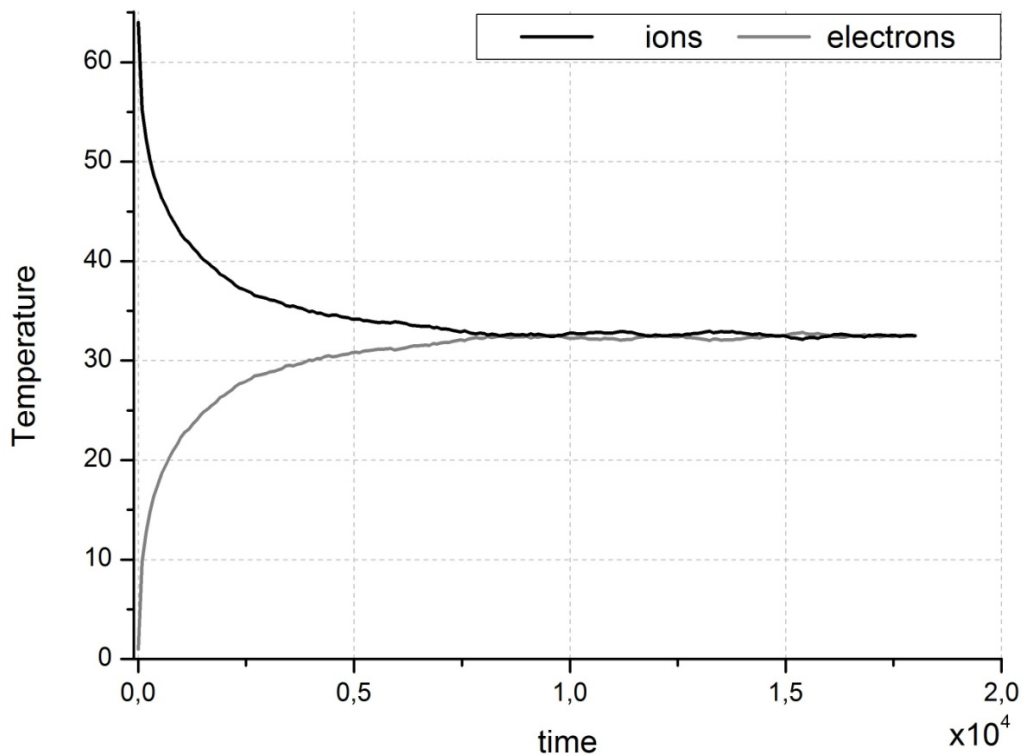


Рис. 11. Зависимость температур электронной и ионной компонент от времени в случае изотропного начального распределения $f(v) = \delta(v-1)$ для $N = 5000$, $M = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $\rho = 1/64$.

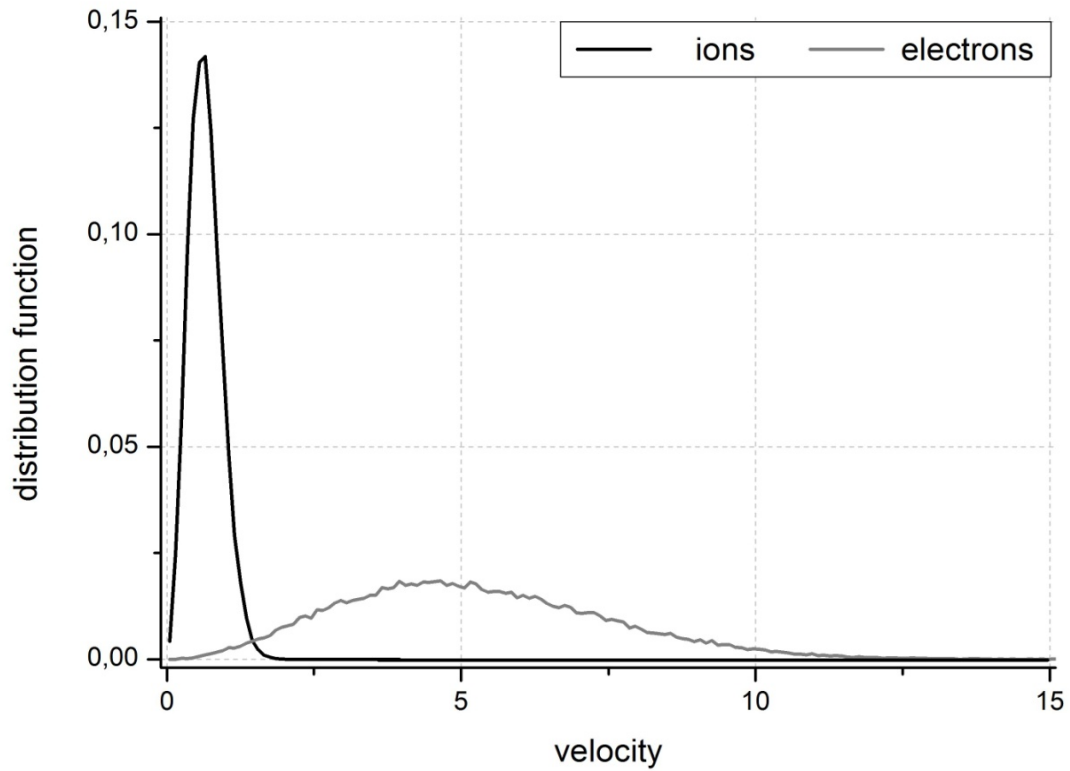


Рис. 12. Зависимость функций распределения электронов и ионов от модуля скорости в конце процесса релаксации для $N = 10000$, $M = 5$, $\varepsilon = 0.1$, $\rho = 1/64$.

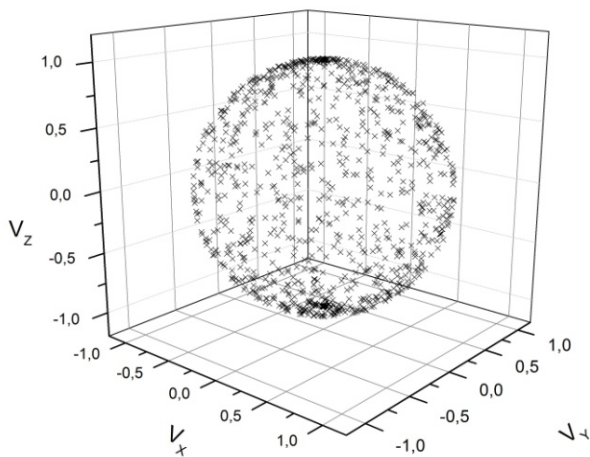


Рис. 13. Изотропное начальное распределение частиц в пространстве скоростей ($N = 1000$).

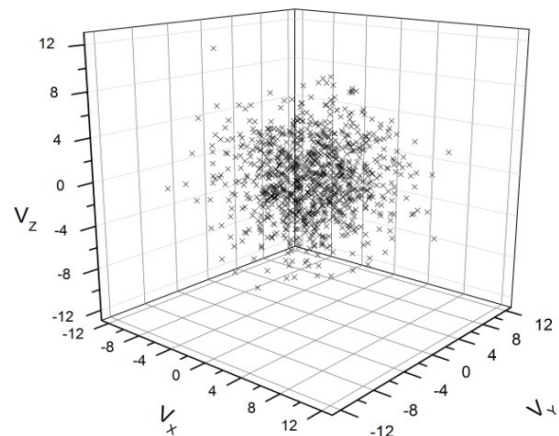


Рис. 14. Распределение электронов в пространстве скоростей в конце процесса релаксации ($N = 1000$).

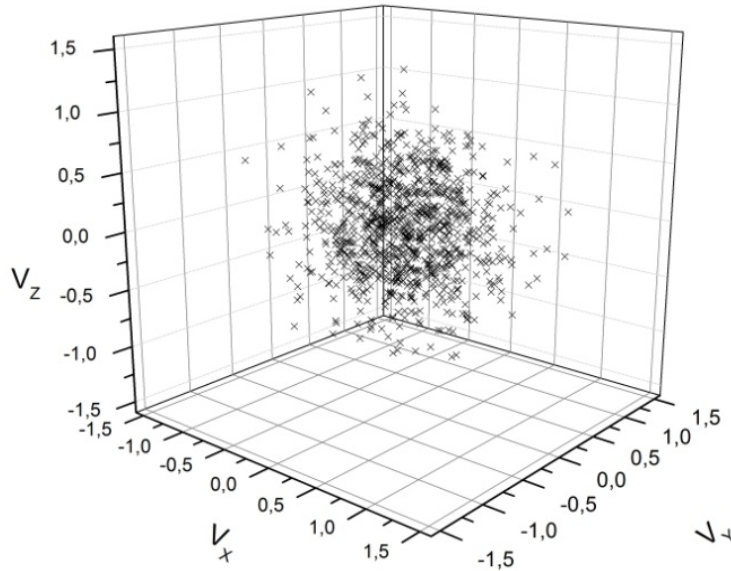


Рис. 15. Распределение ионов в пространстве скоростей в конце процесса релаксации ($N = 1000$).

Поскольку в изложенном алгоритме моделирования релаксации двухкомпонентной плазмы методом Монте-Карло, функция распределения определяется не в явном виде, а задается через массив скоростей $\{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, $v_j \in \mathbb{R}^3$, то, для наглядности, можно представить распределение частиц непосредственно в трехмерном пространстве скоростей. На рис. 13 изображено изотропное начальное распределение $\delta(v-1)$ для $N = 1000$ частиц. На рис. 14-15 представлены распределения электронов и ионов в конце расчета, по ним видно, что подавляющее количество частиц находится в тепловой области скоростей, и лишь немногие частицы обладают сравнительно высокой скоростью, образуя «хвост» функции распределения, что полностью соответствует физической интерпретации распределения Максвелла. Следует отметить, что с ростом числа частиц N , увеличивается и доля частиц с высокой скоростью, т.е. возрастает точность описания «хвоста» функции распределения.

В заключение данного раздела рассмотрим релаксацию анизотропного $\delta(v-1)\delta(\mu)$ начального распределения (рис. 17). Такое распределение соответствует, например, инжекции нейтральных частиц в открытую ловушку в направлении перпендикулярном полю. На рис. 16 представлена релаксация продольной $T_{\parallel}(t) = T_z(t)$ и поперечной температур $T_{\perp}(t) = T_x(t) + T_y(t)$

электронов и ионов, где $T_{\alpha}(t) = \frac{1}{N} \sum_j v_{\alpha_j}^2$. На рис. 18-19 представлена эволюция

распределения электронов в пространстве скоростей с течением времени, на рис. 20-21 изображены распределения электронов и ионов в конце процесса релаксации в момент $t = 1.4 \times 10^4$.

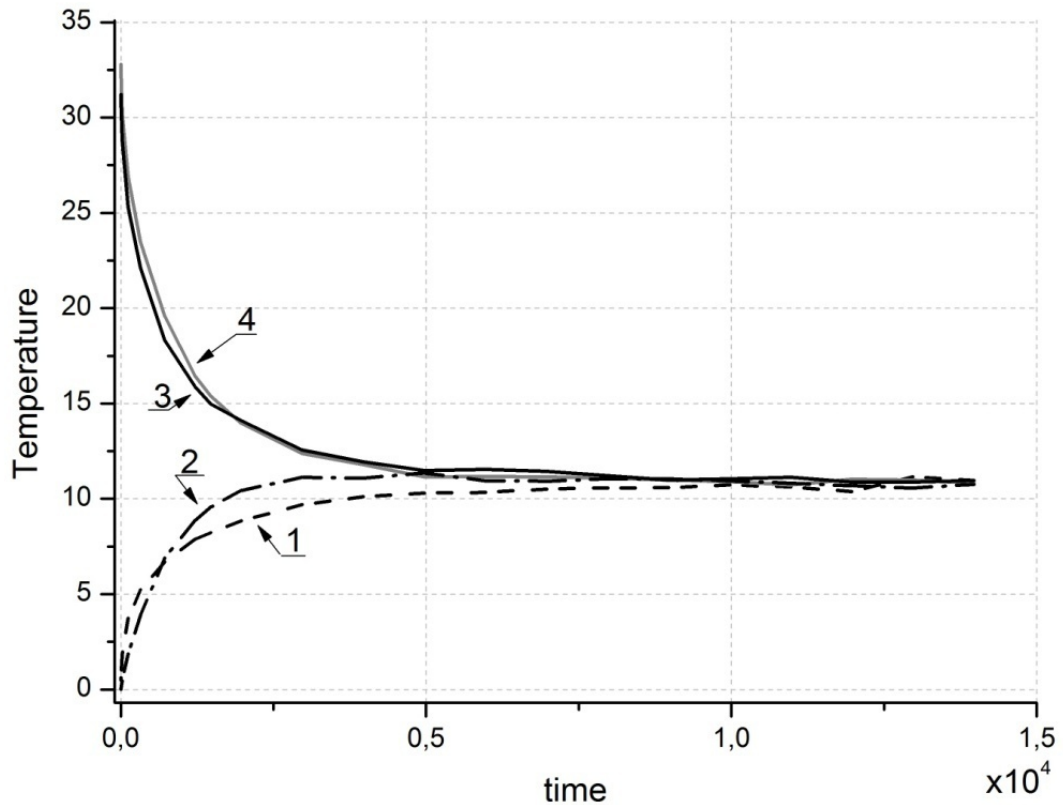


Рис. 16. Релаксация температур электронов и ионов со временем в случае анизотропного начального распределения $f(\vec{v}) = \delta(v-1)\delta(\mu)$ для $N=1000$, $M=10$, $\varepsilon=0.05$, $\rho=1/64$; 1 – температура электронов, 2 – продольная температура ионов T_z , 3, 4 – компоненты T_x , T_y поперечной температуры ионов.

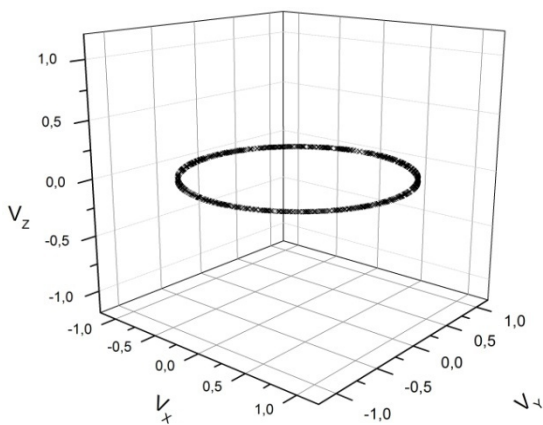


Рис. 17. Анизотропное начальное распределение частиц в пространстве скоростей $t=0$ ($N=1000$).

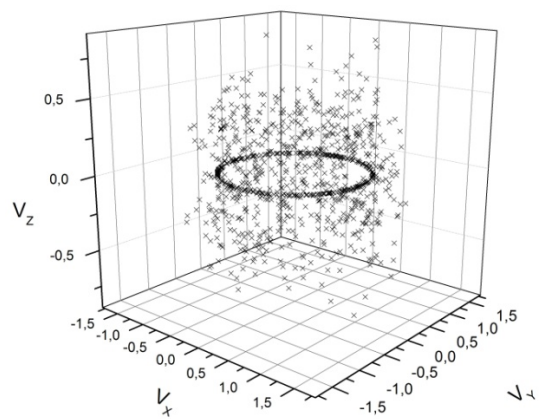


Рис. 18. Распределение электронов в пространстве скоростей в момент времени $t=0.07$ ($N=1000$).

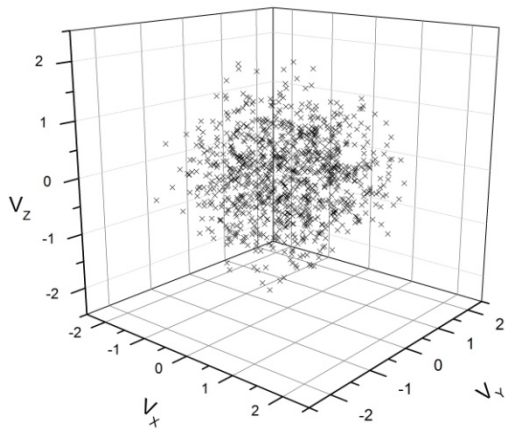


Рис. 19. Распределение электронов в пространстве скоростей в момент времени $t=1.0$ ($N=1000$).

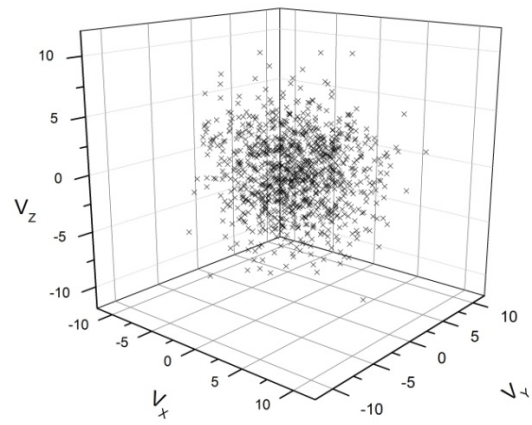


Рис. 20. Распределение электронов в пространстве скоростей в конце релаксации $t=14000$ ($N=1000$).

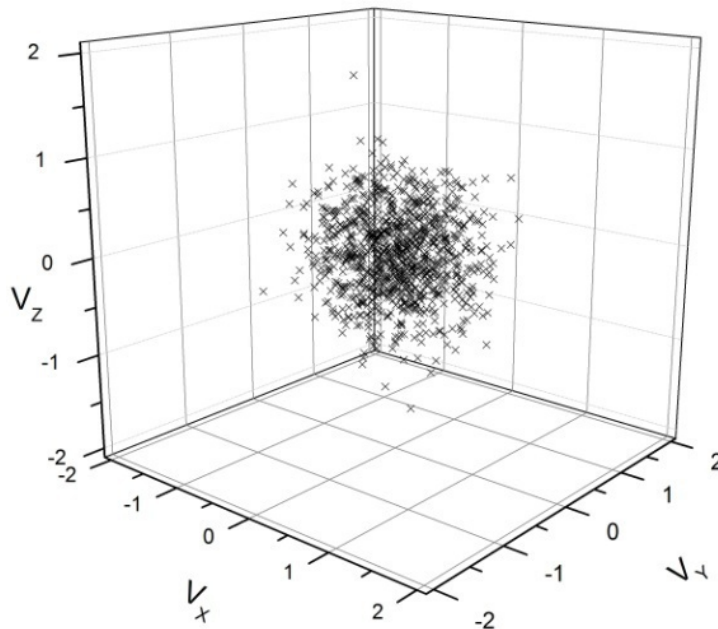


Рис. 21. Распределение ионов в пространстве скоростей в конце процесса релаксации $t=14000$ ($N=1000$).

Из рис. 18-19 видно, что изотропизация импульса электронов или, иначе говоря, выравнивание продольной и поперечной температур, происходит за время $t \leq 1$. Затем происходит нагрев электронов (рис. 16, кривая 1), при этом распределение сохраняет максвелловскую форму (см. рис. 19-20). Из рис. 16 видно, что выравнивание продольной и поперечной температур у ионов осуществляется гораздо медленнее, чем у электронов (за время $t \sim 0.5 \cdot 10^4$), затем происходит окончательное установление равновесной температуры плазмы ($t \sim 10^4$).

Заключение.

В работе обсуждается идея аппроксимации уравнения Ландау уравнением Больцмана и дана схема метода Монте-Карло для интеграла кулоновских столкновений для двух сортов частиц. В данной работе получены самые первые результаты, ориентированные, в основном, на методические аспекты.

Впервые предъявлен простой алгоритм для решения оператора кулоновских столкновений методом МК в случае двухкомпонентной плазмы. Показано численно, что алгоритм аппроксимирует уравнение ЛФП.

В целях исследования корректности метода и его возможностей (верификации метода) проверена работа алгоритма для широкого набора параметров расчета (N, M, ϵ), установлена сходимость численного решения при изменении значений численных параметров в десятки раз.

В дальнейшем в этом направлении предполагается, в частности, исследование возможности ускорения счёта, распараллеливание алгоритма для проведения расчетов на суперкомпьютере.

Обоснование физической модели (валидация метода) проверено на задаче релаксации к равновесию двухтемпературной плазмы для различных начальных условий, отношений масс ионов и начальных температур. Результаты иллюстрируются графическим материалом.

Методология данного исследования в будущем ориентирована на объединение столкновительного оператора и самосогласованных электромагнитных полей с целью создания единой эффективной модели для описания процессов в задачах физики плазмы.

Моделирование пространственно-неоднородного кинетического уравнения Власова для самосогласованных полей основано, большей частью, на методах типа «частица-в-ячейке» («PIC»). В будущем предполагается усложнить физическую и математическую модель включением в рассмотрение внешних электромагнитных полей и неполное пространство скоростей. Очевидно, что рассмотренный метод МК для описания кулоновских столкновений может быть естественным образом объединен с любым методом частиц для пространственно неоднородной бесстолкновительной плазмы.

Литература.

1. Cercignani, C. Theory and application of the Boltzmann equation (Scottish Academic Press, Edinburgh and London) 1975.
2. Landau L.D., Kinetic equation for the case of Coulomb interaction. Zh. eks. teor. phys. 7, 203, 1937.
3. Rosenbluth M.N., MacDonald W.M., Judd D. Fokker-Planck equation for an inverse-square force, Phys.Rev. 107 (1-6), 1957.
4. Methods in computational physics, 16. Academic Press, New York, 1976.
5. C. F.F. Karney Fokker-Planck and quasilinear codes. Computer Physics Reports 4 (1986) 183-244 North-Holland, Amsterdam
6. Bobylev A.V., О разложении интеграла столкновений Больцмана в ряд Ландау. ДАН, СССР, 225,(3), стр.535-538, 1975.
7. Bobylev A.V. Landau approximation in kinetic theory of gases and plasmas. Akad.Nauk SSSR, Inst.Prikl.Math., Preprint n.76, 49p., 1974 (in Russian).
8. Bird G.A., Molecular gas dynamics and direct simulation of gas flows (Clarendon Press, Oxford) 1994.
9. I.F. Potapenko, A.V. Bobylev and E. Mossberg, Transp. Theory Stat. Phys., 2008, 37, 113-170.
10. Buet C., Cordier S. Numerical analysis of the isotropic Fokker-Planck-Landau equation. J. Comput.Phys. 179, (1), 43-67, 2002.
11. Lemou M., Luc M. Implicit schemes for the Fokker-Planck-Landau equation. SIAM J.Sci.Comput. 27 ,(3) 809-830, 2005
12. Bachman G., Narici L., Beckenstein E. Fourier and wavelet analysis (Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg) 2002.
13. Бобылев А.В., Веденяпин В.В. Преобразование Фурье интегралов столкновений Больцмана и Ландау, ИПМ АН СССР, препринт №.125, 1981.
14. Pareschi,L., Russo,G., and Toscani,G. Fast spectral methods for the Fokker-Planck-Landau collision operator. J. Comput. Phys., 165, 216-236, 2000.
15. Filbet,F., PareschiL. A numerical method for the accurate solution of the Fokker-Planck-Landau equation in the nonhomogeneous case. J. Comput. Phys. 179, 1-26, 2002.
16. Иванов М.Ф., Гальбурт В. А. “Стохастический подход к численному решению уравнений Фоккера–Планка”, Мат. мод., 20:11 (2008), 3–27.
17. Takizuka T., Abe H. A binary collision model for plasma simulation with a particle code. J.Comput.Phys. 25, 205-219, 1977.
18. Nanbu K. Theory of cumulative small-angle collisions in plasmas, Phys.Rev. E. 55, 4642-4652, 1997.
19. Wang C., Lin T., Caflisch R. E., Cohen B., Dimits A. Particle simulation of Coulomb collisions: Comparing the methods of Takizuka & Abe and Nanbu, J. Comp. Phys., vol. 227, pp. 4308–4329, 2008.
20. Bobylev A.V., Nanbu K. Theory of collision algorithms for gases and plasmas based on the Boltzmann equation and the Landau-Fokker-Planck equation. Phys. Rev. E. 61, 4576-4586, 2000.

21. Mossberg E. Some numerical and analytical methods for equations of wave propagation and kinetic theory (PhD thesis), Karlstad University Studies, 2008:33
22. Bobylev A.V., Mossberg E., Potapenko I.F. A DSMC method for the Landau-Fokker-Planck equation. Rare Gas Dynamics, Proceedings of XXV International symposium on RGD, St.Petersburg, July 21-28, 2006, 479-483, Eds. M.S.Ivanov, A.K.Rebrov, Novosibirsk, Publ. of the Seberian Branch of RAS.
23. Bobylev A.V. The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules, In.: Mathematical Physics Reviews, eds. S.P. Novikov and Ya.G. Sinai, New York, 7, 111-233, 1988.
24. Bobylev A.V., Potapenko, I.F., Chuyanov V.A. Kinetic equations of the Landau type as a model of the Boltzmann equation and completely conservative difference schemes USSR Comput. Maths. Math. Phys. 20, (4), 993-1004, 1980.
25. Bobylev A.V., Potapenko, I.F., Chuyanov V.A. Completely conservative difference schemes for nonlinear kinetic equations of Landau (Fokker-Planck) type, Doklady Akad.Nauk SSSR, 255, (6) 1348-1352, 1980
26. Dimarco G., Caflisch R., Pareschi L. Direct simulation Monte Carlo schemes for Coulomb interactions in plasmas Communications in Applied and Industrial Mathematics, 1, 1, (2010) 72–91.