



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 41 за 2012 г.



Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю.,  
Новиков В.Г., Попов И.В.

Трёхмерное моделирование  
поглощения лазерного  
излучения в приближении  
геометрической оптики

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Трёхмерное моделирование поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики / И.П.Цыгвинцев [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 41. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-41>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**И.П.Цыгвинцев, А.Ю.Круковский,  
В.Г.Новиков, И.В.Попов**

**Трёхмерное моделирование поглощения  
лазерного излучения  
в приближении геометрической оптики**

**Москва — 2012**

**Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Попов И.В.**

Трёхмерное моделирование поглощения лазерного излучения в приближении геометрической оптики

В работе дано описание математической модели и алгоритма для моделирования поглощения лазерного излучения плазменной мишенью в приближении геометрической оптики. Предложено аналитическое решение соответствующих дифференциальных уравнений в предположении постоянного градиента квадрата показателя преломления в газодинамической ячейке. Предложены соответствующие численные алгоритмы расчёта и дана оценка сходимости метода. Для частичного учёта эффектов, выходящих за рамки геометрической оптики, использована одномерная модель слоистой среды.

**Ключевые слова:** лазерное излучение, геометрическая оптика, численный алгоритм

**A.Yu. Krukovskiy, V.G. Novikov, I.V. Popov, I.P. Tsygvintsev**

Three-dimensional modeling of the laser radiation absorption in the geometrical optics approximation

The paper describes a mathematical model and algorithm for simulation of laser radiation absorption by plasma target in the geometrical optics approximation. An analytical solution of the differential equations assuming a constant gradient of the square of optical coefficient in the cell is proposed. A numerical calculation algorithm is developed, and estimation of its convergence has been done. For a partial accounting of effects that are beyond the geometrical optics approximation, one-dimensional model of the layered medium was used.

**Key words:** laser radiation, geometrical optic, numerical algorithms

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 12-01-00744а.

## Введение

Во многих областях экспериментальной физики, таких как инерциальный термоядерный синтез [1], кильватерное ускорение частиц [2] или создание монохроматического источника коротковолнового излучения [3], используются достаточно мощные лазеры с различной длиной волны. Поскольку производство лазеров с заданными характеристиками (мощность, длина волны, временной и пространственной профили импульса) является весьма дорогостоящим процессом, для определения оптимальных параметров установок целесообразно проводить предварительное компьютерное моделирование процессов взаимодействия лазерного излучения с веществом в рассматриваемых установках.

Одним из важнейших аспектов в этом моделировании является построение и исследование моделей поглощения лазерного излучения [4], [5]. В данных моделях необходимо учитывать наиболее существенные стороны взаимодействия лазерного излучения с веществом, а именно, поглощение и преломление лазерного луча, а также его отражение от слоя с критической плотностью.

При решении многих практических задач достаточно простым и эффективным способом описания этих эффектов является приближение геометрической оптики [6]. Это приближение естественным образом выводится из уравнений Максвелла в предположении, что параметры среды мало меняются на длине волны. При этом за рамками рассмотрения остаётся ряд эффектов, в частности, связанных с поляризацией и интерференцией.

В процессе расчёта падающий пучок лазерного излучения разбивается на некоторое множество лучей, каждый из которых несёт определённую долю энергии. Проходя через плазму, лучи преломляются и теряют часть своей энергии за счёт поглощения в веществе. Учёт эффектов поглощения проводится исходя из предположения, что основным процессом является обратное тормозное поглощение, т.е. свободно-свободные переходы электронов в полях остаточных ионов. Для расчёта преломления использовано приближение постоянного градиента квадрата коэффициента преломления в ячейке, что эквивалентно постоянству градиента плотности электронов, если поглощение слабое.

Для частичного учёта эффектов, выходящих за рамки приближения геометрической оптики (поглощение и отражение излучения вблизи поверхности с критической плотностью, зависимость этих процессов от поляризации), используется решение уравнений Гельмгольца в одномерной модели слоистой среды [7].

## §1. Вывод уравнений траектории луча

В монохроматической электромагнитной волне [8] всякую величину, описывающую поле (любую из компонент вектора электрического поля  $\vec{E}$  и вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$ ), можно записать в виде

$$\phi = \hat{\phi}(\vec{r}, t) \exp\left(i\omega\left[\frac{S(\vec{r})}{c} - t\right]\right). \quad (1)$$

Здесь  $c$  — скорость света в вакууме,  $\omega$  — круговая частота излучения. В соответствии с приближением геометрической оптики, будем предполагать длину волны лазерного излучения  $\lambda = 2\pi c/\omega$  много меньше характерных размеров задачи  $L$ . В этом случае амплитуда  $\hat{\phi}$  — медленно меняющаяся функция координат  $\vec{r}$  и времени  $t$ , а  $S(\vec{r})$  — почти линейная функция координат. Из уравнений Максвелла для изотропной среды с магнитной проницаемостью, равной единице, следует

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon(\vec{r}, t)}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = 0, \quad (2)$$

где  $\varepsilon(\vec{r}, t)$  — диэлектрическая проницаемость плазмы. Подстановка (1) в (2) приводит к уравнению

$$\Delta\hat{\phi} - \frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\hat{\phi}} + i\frac{\omega}{c}\left(2\nabla\hat{\phi}\nabla S - 2\frac{\varepsilon}{c}\dot{\hat{\phi}} + \hat{\phi}\Delta S\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\phi}\left((\nabla S)^2 - \varepsilon\right) = 0. \quad (3)$$

В силу того что характерный масштаб изменения поля  $L \gg \lambda$ , можно сделать оценку  $\Delta\hat{\phi} - \frac{\varepsilon}{c^2}\ddot{\hat{\phi}} \sim \frac{\hat{\phi}}{L^2} \square \frac{\hat{\phi}}{\lambda^2}$ , в то время как  $\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\phi}\left((\nabla S)^2 - \varepsilon\right) \sim \frac{\hat{\phi}}{\lambda^2}$ . Вследствие почти линейности  $S(\vec{r})$  имеем  $\Delta S(\vec{r}) \sim \frac{1}{L}$ , и поэтому верна оценка  $i\frac{\omega}{c}\left(2\nabla\hat{\phi}\nabla S - 2\frac{\varepsilon}{c}\dot{\hat{\phi}} + \hat{\phi}\Delta S\right) \sim \frac{\hat{\phi}}{\lambda L} \square \frac{\hat{\phi}}{\lambda^2}$ . Пренебрегая малыми членами, придём к основному уравнению геометрической оптики:

$$(\nabla S)^2 = \varepsilon(\vec{r}, t). \quad (4)$$

Такой же результат можно было бы получить, исходя из формального разложения  $\phi$  по параметру малости  $\frac{\lambda}{L}$  [9].

Далее предполагаем, что  $\varepsilon$  не меняется за характерное время проход луча через ячейку сетки, т.е. среда «заморожена» в течение характерного времени прохода луча, хотя и может изменяться от шага к шагу.

Введём обозначения для мнимой и действительной частей  $S$ :  $S_1 = \text{Re } S$ ,  $S_2 = \text{Im } S$ . Действительная часть определяет траекторию луча, мнимая — затухание амплитуды  $\hat{\phi}$ .

Пространственно зависимая компонента фазы  $S_1$ , или *эйконал*, связана с локальным волновым вектором  $\vec{k}$  соотношением  $\vec{k} = \omega/c \nabla S_1$ . Волновой фронт движется с фазовой скоростью  $\omega/|\vec{k}| = c/|\nabla S_1|$ , в то время как лучам, которые всюду перпендикулярны волновому фронту, то есть параллельны  $\nabla S_1$ , можно приписать групповую скорость (скорость переноса энергии).

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{d\omega}{d\vec{k}} = c \nabla S_1. \quad (5)$$

Уравнение движения луча можно получить, взяв полную (лагранжеву) производную от групповой скорости по времени [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = c \frac{d}{dt} \nabla S_1 = c \left( \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \right) \nabla S_1 = c (\vec{v} \cdot \nabla) \nabla S_1 = \\ &= c^2 (\nabla S_1 \cdot \nabla) \nabla S_1 = \frac{c^2}{2} \nabla \left( (\nabla S_1)^2 \right) = \frac{c^2}{2} \nabla (\text{Re} \sqrt{\varepsilon})^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Для нахождения декремента затухания волны возьмём полную производную по времени от мнимой части  $S$ :

$$\frac{dS_2}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla S_2 = c \nabla S_1 \cdot \nabla S_2 = c \text{Im} \sqrt{\varepsilon} \cdot \text{Re} \sqrt{\varepsilon}. \quad (7)$$

Каждому лучу можно приписать определённую плотность потока энергии, которая уменьшается со временем за счёт процессов поглощения, происходящих в плазме. Эта плотность потока прямо пропорциональна квадрату модуля компонент поля:  $P \sim |\phi(\vec{r}, t)|^2 \sim |\hat{\phi}(\vec{r}, t)|^2 \cdot \exp(-2\omega S_2(\vec{r})/c)$ . Взяв от неё полную производную по времени и опустив производные  $\hat{\phi}(\vec{r}, t)$  в силу их малости, приходим к уравнению, определяющему изменение мощности на луче:

$$\frac{dP}{dt} = P \cdot \left( -2 \frac{\omega}{c} \frac{dS_2}{dt} \right) = -2\omega \text{Im} \sqrt{\varepsilon} \cdot \text{Re} \sqrt{\varepsilon} \cdot P. \quad (8)$$

Введём обозначения  $\tau = ct$ ,  $n = \text{Re} \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\mu = \frac{2\omega}{c} \text{Im} \sqrt{\varepsilon}$ ,  $\vec{s} = \frac{\nabla S_1}{|\nabla S_1|} = \frac{\nabla S_1}{n}$ . Тогда уравнения (5), (6), (8) можно переписать в окончательном виде (см. [5])

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{d\tau} = n\vec{s}, \\ \frac{d(n\vec{s})}{d\tau} = \frac{1}{2}\nabla n^2, \\ \frac{dP}{d\tau} = -n\mu P. \end{cases} \quad (9)$$

Здесь:  $\vec{r}$  — радиус-вектор вдоль луча,  $\vec{s}$  — единичный вектор в направлении распространения луча,  $n$  — показатель преломления среды ( $n > 0$ ),  $P$  — мощность на луче,  $\mu$  — коэффициент поглощения,  $\tau$  — оптическая длина луча, отсчитанная вдоль  $\vec{s}$ .

К уравнениям (9) ставятся соответствующие граничные условия, определяемые из постановки конкретной задачи. Решая эти уравнения, получаем траекторию луча и изменение мощности вдоль этой траектории, то есть поглощение энергии.

## §2. Учёт поглощения вне области применимости геометрической оптики

Приближение геометрической оптики является достаточно универсальным в области своей применимости. Но оно не описывает ряд эффектов, которые могут оказаться физически значимыми. Например, в рамках приближения геометрической оптики невозможно корректно описать поглощение вблизи критической поверхности, т.е. в области, где плотность электронов  $n_e$  близка к критической плотности  $n_c = \frac{m_e \omega^2}{4\pi e^2}$  ( $e$  и  $m_e$  — заряд и масса электрона) или превышает ее, поскольку, согласно уравнениям геометрической оптики, луч не может попасть в область  $n_e \geq n_c$ . Корректное описание поглощения в этой области необходимо для моделирования процесса испарения металлической мишени, где, при нормальных условиях,  $n_e \ll n_c$ .

Для учёта поглощения электромагнитного излучения вблизи критической поверхности используется одномерная модель слоистой среды [7]. В этой модели полагается, что среда состоит из слоёв вещества, параллельных плоскости  $xOy$ , в каждом из которых  $\varepsilon = \text{const}$ . На эту среду под углом  $\vartheta$  падает плоская волна, которую можно представить как суперпозицию двух волн с разными поляризациями. В  $s$ -поляризованной волне напряженность электрического поля параллельна поверхности, на которую падает луч, а в  $p$ -поляризованной волне параллельна поверхности напряжённость магнитного поля.

Для  $s$ -поляризованной волны в случае слабой зависимости амплитуды волны от времени справедливо уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta) E_y = 0. \quad (10)$$

Для  $p$ -поляризованной волны уравнение для напряжённости магнитного поля имеет аналогичный вид

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon(z) - \sin^2 \vartheta) B_y - \frac{\partial \ln \varepsilon(z)}{\partial z} B_y = 0. \quad (11)$$

Решение уравнений (10) и (11) в  $m$ -м слое, т.е. при  $z_m \leq z \leq z_{m+1}$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, N_m$ ), ищется в виде

$$F_m(z) = f_m^+ e^{ik_m(z-z_m)} + f_m^- e^{-ik_m(z-z_m)}, \quad (12)$$

где  $f_m^+$  и  $f_m^-$  — амплитуды проходящей и отражённой волны,  $k_m = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_m - \sin^2 \vartheta}$ ,  $\varepsilon_m$  — диэлектрическая проницаемость этого слоя. Под функцией  $F(z)$  подразумеваем  $E_y = E_y(z)$  или  $B_y = B_y(z)$  в зависимости от поляризации лазерного импульса. Требование непрерывности решения при переходе от слоя к слою налагает условия:

$$E_m(z_{m+1}) = E_{m+1}(z_{m+1}), \quad B_m(z_{m+1}) = B_{m+1}(z_{m+1}). \quad (13)$$

Для производных напряжённостей поля должны выполняться условия сшивки:

$$\left. \frac{\partial E_m(z)}{\partial z} \right|_{z=z_{m+1}} = \left. \frac{\partial E_{m+1}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_{m+1}} \quad (14)$$

в случае  $s$ -поляризации, и

$$\left. \frac{\partial B_m(z)}{\partial z} \right|_{z=z_{m+1}} = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_{m+1}} \left. \frac{\partial B_{m+1}(z)}{\partial z} \right|_{z=z_{m+1}} \quad (15)$$

в случае  $p$ -поляризации.

Выберем нормировку решений обоих уравнений (10) и (11) так, чтобы амплитуда падающей волны была равна единице. Тогда  $f_0^+ = 1$ . Предполагая отсутствие отражённого излучения в последнем слое, получаем  $f_{N_m}^- = 0$ . Используя эти граничные условия, подставляем (12) в условия сшивки (13) – (15) и получаем замкнутую систему линейных уравнений для коэффициентов  $f_m^\pm$ . Решая эту систему, получаем значения напряженности  $E_y(z)$  в случае  $s$ -поляризованной волны и  $B_y(z)$  в случае  $p$ -поляризованной волны. Зная

соотношения между компонентами поля, для  $p$ -поляризации находим  $E_x(z) = -\frac{ic}{\varepsilon\omega} \frac{\partial B_y}{\partial z}$  и  $E_z(z) = -B_y \sin \frac{\vartheta}{\varepsilon}$ .

Общее количество лазерной энергии, поглощенной в слое  $z_m \leq z \leq z_{m+1}$ , определяется интегралом:

$$Q = P \frac{\omega}{c} \operatorname{Im} \varepsilon_m \int_{z_m}^{z_{m+1}} |\vec{E}(z)|^2 dz, \quad (16)$$

где  $P$  — мощность излучения, падающего на слой.

Сравним результаты, полученные в соответствии с формулами (16) и (9) для простейшей модельной задачи.

Пусть на полубесконечный слой с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  перпендикулярно падает волна мощностью  $P_0$ . Поскольку для  $\vartheta=0$  разница между  $s$ - и  $p$ -поляризациями отсутствует, будем считать её  $s$ -поляризованной. Подстановка (12) и применение условий сшивки (13) – (14) приводит к результату:

$$f_0^- = \frac{1-\sqrt{\varepsilon}}{1+\sqrt{\varepsilon}}, \quad f_1^+ = \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}}.$$

Возвращаясь к введённым в (9) обозначениям, получим выражение для волны в полупространстве.

$$E_y(z) = \frac{2}{1+\sqrt{\varepsilon}} e^{i\omega/c \cdot \sqrt{\varepsilon} z} = \frac{2}{1+n+ik\mu/2} e^{iknz-k\mu z/2},$$

где  $k = \omega/c$ . После подстановки полученного выражения в (16) получим количество энергии, поглощенной в слое  $0 \leq z \leq h$ :

$$Q(h) = P_0 \frac{4n}{(1+n)^2 + k^2 \mu^2 / 4} (1 - e^{-\mu h}) = P_1 (1 - e^{-\mu h}).$$

В то же время для постоянной диэлектрической проницаемости из (9) следует

$$\frac{dP}{dz} = \frac{dP}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dz} = \frac{dP}{nd\tau} = -\mu P;$$

$$P(z) = P_0 e^{-\mu z};$$

$$Q(h) = P(z=0) - P(z=h) = P_0 (1 - e^{-\mu h}).$$

Заметим, что в обоих случаях мощность прошедшего излучения спадает с увеличением толщины слоя  $h$  как  $e^{-\mu h}$ . Различие в предэкспоненциальном

множителе объясняется тем, что в волновой модели учитывается частичное отражение волны от границы сред. Коэффициент отражения

$$R = \left| f_0^- / f_0^+ \right|^2 = \frac{(1-n)^2 + k^2 \mu^2 / 4}{(1+n)^2 + k^2 \mu^2 / 4},$$

а прошедшая энергия  $P_{abs} = P_0(1-R) = P_0 \frac{4n}{(1+n)^2 + k^2 \mu^2 / 4} = P_1$ . Таким образом, различие между учётом эффектов поглощения по формулам (9) и (16) заключается в том, что в приближении геометрической оптики не учитываются эффекты частичного отражения луча от границы и интерференции прошедшего и отражённого лучей.

Достоинством чрезвычайно простой модели (10) – (16) является учёт таких физически значимых эффектов, как резонансное поглощение и зависимость коэффициента отражения от поляризации. Существенным ограничением модели является её одномерность, что не позволяет провести учёт эффектов преломления вблизи критической поверхности.

Поэтому в работе описанная модель используется в узком слое вблизи критической плотности, где преломление несущественно в сравнении с отражением и резонансным поглощением.

### §3. Расчёт диэлектрической проницаемости плазмы

В приближении геометрической оптики, как и в волновой модели, основной характеристикой плазмы, определяющей поглощение лазерного излучения, является ее диэлектрическая проницаемость. Вычисление диэлектрической проницаемости при заданных параметрах вещества, вообще говоря, является отдельной физической проблемой (см. [10], [11]). Ниже приведён простейший способ расчёта диэлектрической проницаемости, позволяющий продемонстрировать возможности предложенного метода.

Предположим, что поле лазерного излучения не влияет на распределение частиц по скоростям, т.е. не будем рассматривать вопросы физической кинетики. Тогда, считая основным процессом в плазме обратное тормозное поглощение (электрон-ионные соударения), можно получить выражение для диэлектрической проницаемости нерелятивистской максвелловской плазмы [10]:

$$\operatorname{Re} \varepsilon = n^2 - \left( \frac{c}{2\omega} \mu \right)^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + \nu_{ei}^2}, \quad \operatorname{Im} \varepsilon = \frac{c}{\omega} n \mu = \frac{\omega_p^2 \nu_{ei}}{\omega(\omega^2 + \nu_{ei}^2)}, \quad \nu_{ei} = 9 \cdot 10^{-11} \frac{Z_0 n_e}{T_e^{3/2}} \ln \Lambda. \quad (17)$$

Здесь  $T_e$  — температура электронов в кэВ,  $n_e$  и  $n_i$  — концентрации электронов и ионов в  $\text{см}^{-3}$ ,  $Z_0 = n_e / n_i$  — степень ионизации,  $\ln \Lambda$  — кулоновский логарифм,  $\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_e}{m_e}} = 5.64 \cdot 10^4 \sqrt{n_e}$  — плазменная частота.

Из выражения (17) можно выразить входящие в уравнения (9) коэффициенты  $n^2$  и  $n\mu$ .

#### §4. Дискретизация модели и расчёт луча в ячейке

Представим концентрацию электронов в ячейке в виде ряда Тейлора относительно произвольной фиксированной точки  $\langle \vec{r} \rangle$ , лежащей внутри ячейки:

$$n_e(\vec{r}) = \langle n_e \rangle + \langle \nabla n_e \rangle \cdot (\vec{r} - \langle \vec{r} \rangle) + \dots \quad (18)$$

В силу малых размеров ячейки можно ограничиться первыми несколькими членами разложения. Оставив в разложении только  $\langle n_e \rangle$ , мы получим схему, в которой луч в пределах ячейки идёт по прямой и преломляется в соответствии с законом Снеллиуса на границе. Такое представление оказывается слишком грубым для описания хода лучей вблизи критической поверхности [4]. Поэтому в данной работе использованы первые два члена разложения (18). Ход лучей рассчитывается в предположении постоянного градиента  $n^2$ , так как для слабопоглощающей плазмы  $n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c}$ .

В этом приближении уравнение для траектории луча с точностью до обозначений совпадает с уравнением движения тела под действием постоянной силы. Решение этого уравнения — парабола:

$$n\vec{s}(\tau) = (n\vec{s})_0 + \frac{1}{2} \nabla n^2 \tau, \quad (19)$$

$$\vec{r}(\tau) = \vec{r}_0 + \int_0^\tau n\vec{s}(\tau_1) d\tau_1 = \vec{r}_0 + (n\vec{s})_0 \tau + \frac{1}{4} \nabla n^2 \tau^2. \quad (20)$$

Пусть в ячейке  $v_{ei} = \text{const}$ . Тогда из разложения (18) для слабопоглощающей плазмы следует постоянство  $\nabla(n\mu)$  в ячейке, и для произвольной точки  $\vec{r}(\tau)$  можно записать:

$$n\mu(\tau) = (n\mu)_0 + \nabla(n\mu) \cdot (\vec{r}(\tau) - \vec{r}_0) = (n\mu)_0 + \nabla(n\mu) \cdot (n\vec{s})_0 \tau + \nabla(n\mu) \cdot \nabla n^2 \frac{\tau^2}{4}. \quad (21)$$

Подставив это выражение в уравнение для мощности из системы (9), получим уравнение

$$\frac{dP}{d\tau} = -n\mu P = -\left( (n\mu)_0 + \nabla(n\mu) \cdot (n\vec{s})_0 \tau + \nabla(n\mu) \cdot \nabla n^2 \frac{\tau^2}{4} \right) P.$$

Проинтегрируем это уравнение вдоль луча:

$$P(\tau) = P_0 \exp\left( -\int_0^\tau n\mu(\tau_1) d\tau_1 \right) = P_0 \cdot \exp\left( -(n\mu)_0 \tau - \nabla(n\mu) \cdot (n\vec{s})_0 \frac{\tau^2}{2} - \nabla(n\mu) \cdot \nabla n^2 \frac{\tau^3}{12} \right). \quad (22)$$

Уравнения (19) – (22) определяют траекторию луча, изменение его мощности и, как следствие, потери энергии в ячейке.

Следует отметить, что на границе с вакуумом приближение постоянного градиента коэффициента поглощения может привести к физически неверным результатам, таким, как поглощение излучения в вакууме. Этого можно избежать, выбрав метод интерполяции так, чтобы в ячейке с плотностью ниже некоторого значения  $n_0$  всегда выполнялось  $\langle n\mu \rangle = 0$ ,  $\nabla(n\mu) = 0$ .

Для того чтобы при прохождении из одной ячейки в другую луч не испытывал преломления, необходимо, чтобы функция  $n^2(\vec{r})$  была непрерывна на границе ячеек. В противном случае необходимо применять закон Снеллиуса (такой подход используется в [4]). Условие непрерывности можно обеспечить для расчётной сетки, состоящей из тетраэдров.

Будем считать заданной извне сетку, состоящую из тетраэдров, с известными в центрах тетраэдров величинами, определяющими оптические коэффициенты, то есть концентрациями ионов и электронов и их температурами.

Задавая в расчётной области некоторое множество лучей, будем отслеживать траекторию каждого из них от тетраэдра к тетраэдру, до момента выхода из расчётной области или полного поглощения. Для корректного расчёта поглощения сетка по лучам должна быть достаточно подробной, чтобы через каждую ячейку прошёл хотя бы один луч.

В точке входа луча в тетраэдр полагаются известными значения следующих параметров:  $(n\vec{s})_0$ ,  $(n\mu)_0$ ,  $\vec{r}_0$ . Точка выхода луча из ячейки  $P_0$  определяется путём решения уравнения

$$\det \begin{vmatrix} x(\tau) - x_1 & y(\tau) - y_1 & z(\tau) - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (23)$$

для каждой грани. Здесь  $x_i, y_i, z_i$  — координаты  $i$ -й вершины тетраэдра, принадлежащей рассматриваемой грани. Для упрощения выкладок введём обозначения:

$$\begin{aligned}
A &= (y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1), \\
B &= -[(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (x_3 - x_1)(z_2 - z_1)], \\
C &= (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1), \\
D &= -Ax_1 - By_1 - Cz_1.
\end{aligned}$$

В этих обозначениях (23) переписывается в виде

$$Ax(\tau) + By(\tau) + Cz(\tau) + D = 0. \quad (24)$$

Подставив в (24) по координатно уравнение (20), определяющее  $\vec{r}(\tau)$ , получаем квадратное уравнение относительно  $\tau$ .

$$A \left( x_0 + (ns_x)_0 \tau + \frac{1}{4} \frac{\partial n^2}{\partial x} \tau^2 \right) + B \left( y_0 + (ns_y)_0 \tau + \frac{1}{4} \frac{\partial n^2}{\partial y} \tau^2 \right) + C \left( z_0 + (ns_z)_0 \tau + \frac{1}{4} \frac{\partial n^2}{\partial z} \tau^2 \right) + D = 0.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных имеем:

$$\frac{1}{4} \vec{e} \cdot \nabla n^2 \tau^2 + \vec{e} \cdot (n\vec{s})_0 \tau - 6V_0 = 0, \quad (25)$$

где  $\vec{e} = A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z$  — вектор, нормальный рассматриваемой грани,  $V_0 = -\frac{1}{6}(A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1))$  — с точностью до знака объём тетраэдра, построенного на вершинах рассматриваемой грани и точке вхождения луча в ячейку. Если выбрать нумерацию вершин данной грани так, чтобы выполнялось требование  $V_0 \geq 0$ , то вектор  $\vec{e}$  будет сонаправлен внешней нормали.

Решая уравнение (25) для  $i$ -й грани (индекс  $i$  пробегает значения 1, 2, 3, 4), имеем:

$$\tau_i^{1,2} = 2 \frac{-\vec{e}_i \cdot (n\vec{s})_0 \pm \sqrt{(\vec{e}_i \cdot (n\vec{s})_0)^2 + 6V_{0i} \vec{e}_i \cdot \nabla n^2}}{\vec{e}_i \cdot \nabla n^2}. \quad (26)$$

Так как параметр  $\tau$  является действительным числом и растёт вдоль луча монотонно, а в момент входа луча в ячейку мы его принимаем равным нулю, то из всех восьми корней (26) мы выбираем наименьший положительный. Этот корень является значением  $\tau$  в момент выхода луча из ячейки, а соответствующий ему индекс  $i$  определяет, через какую грань луч вышел. Зная изменение эйконала, меняем параметры на луче в соответствии с соотношениями (19) – (22) и переходим к следующей ячейке, определяемой индексом  $i$ .

Дополнение модели геометрической оптики моделью одномерной слоистой среды осуществляется следующим образом. Вводится «предкритический» слой

вблизи критической поверхности, в котором плотность электронов близка к критической:  $n_e = (1 - \alpha)n_c$ . В практических расчётах можно положить, например,  $\alpha = 0.5$ .

При достижении лучом этого слоя происходит разбиение исходной сетки на одномерные слои, параллельные «предкритическому» слою в точке вхождения луча. Для каждого одномерного слоя определяется значение  $\varepsilon_m$  и его толщина  $z_{m+1} - z_m$ .

Далее осуществляется решение уравнений (10) – (11). Под углом падения  $\vartheta$  при этом понимается угол между направлением луча  $\vec{s}$  и нормалью к «предкритическому» слою  $\nabla n^2$  в точке вхождения луча. В случае неполяризованного лазерного излучения доли  $p$ - и  $s$ -компонент полагаются равными, для поляризованного осуществляется разложение вектора поляризации по  $s$ - и  $p$ -компонентам. Поглощение энергии в ячейках, из которых были взяты значения  $\varepsilon_m$ , осуществляется в соответствии с формулой (16). Энергия на луче скачком уменьшается на соответствующую величину, что обеспечивает закон сохранения энергии. Далее осуществляется расчёт траектории луча в приближении геометрической оптики, но поглощение лазерной энергии уже не учитывается. Когда луч выходит в область  $n_e < (1 - \alpha)n_c$ , приближение геометрической оптики вновь используется в полном объёме.

## §5. Интерполяционные формулы и нахождение градиентов

Для расчёта траектории луча требуется непрерывность  $n^2$  и  $n\mu$  на границе ячейки и постоянство их градиентов в ячейке.

Из газодинамического расчёта берутся данные, из которых по формулам (17) вычисляются средние значения коэффициентов  $n^2$  и  $n\mu$  в ячейках. Далее эти значения интерполируются в узлы сетки следующим образом [5]:

$$Q_x = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i / V_i}{\sum_{i=1}^n 1 / V_i},$$

где  $Q_i$  — значение интерполируемой функции  $Q$  в  $i$ -м прилегающем тетраэдре, т.е. тетраэдре, для которого данный узел является вершиной,  $V_i$  — объём этого тетраэдра. См. рис. 1.

После интерполяции известны значения искомой функции во всех вершинах данного тетраэдра. Предполагая постоянство градиента в ячейке, т.е.  $\nabla Q = A\vec{e}_x + B\vec{e}_y + C\vec{e}_z = \text{const}$ , получаем линейную систему уравнений.

$$\begin{cases} Q_2 - Q_1 = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1), \\ Q_3 - Q_1 = A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1), \\ Q_4 - Q_1 = A(x_4 - x_1) + B(y_4 - y_1) + C(z_4 - z_1). \end{cases}$$

Непрерывность  $Q$  на границе ячеек обеспечивается тем, что на границе двух тетраэдров  $Q$  зависит только от значений в узлах, общих для обоих тетраэдров.

Такая интерполяция отвечает поставленным требованиям, но при этом требует большой подготовительной работы. Прежде чем проводить трассировку лучей, требуется обойти все узлы сетки и проинтерполировать в них все величины. Для неструктурированной сетки это может требовать больших вычислительных ресурсов.

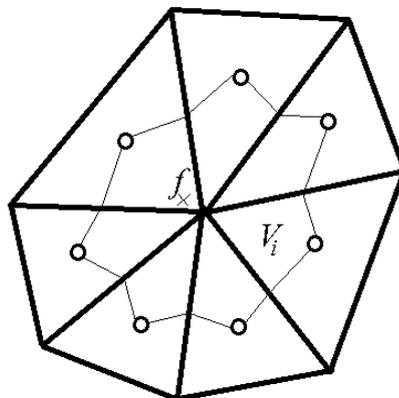


Рис. 1. Схема интерполяции из тетраэдров в узлы

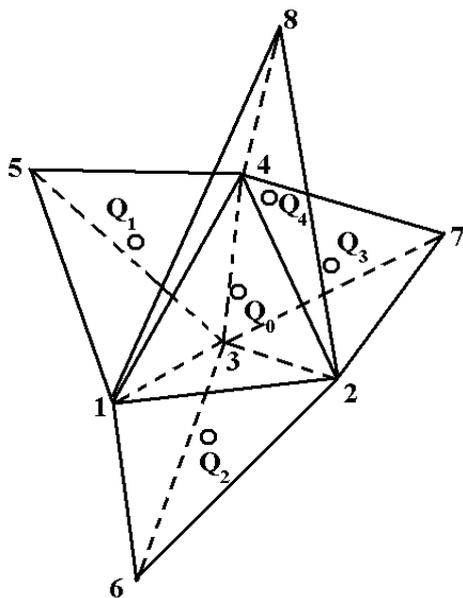


Рис. 2. Интерполяция по соседним тетраэдрам

Рассмотрим альтернативный метод, который не требует предварительного обхода всей сетки. В этом методе значение  $\nabla Q$  в ячейке вычисляется по известным значениям  $Q$  в соседних тетраэдрах и координатам их центров, при этом значение в самом тетраэдре  $Q_0$  не используется (см. рис. 2).

Недостатком этого метода является необеспечение непрерывности  $Q$  на границе тетраэдров. В этом случае непрерывность  $Q$  можно обеспечить искусственно. Для этого при выходе из ячейки значение  $Q$  «на луче» изменяется на значение, полученное непрерывной интерполяцией между «входным» и «выходным» тетраэдрами.

## §6. Результаты расчётов. Оценка порядка сходимости

Для демонстрации метода и оценки его точности рассмотрим следующую модельную задачу. Пусть коэффициент преломления определяется выражениями  $n^2 = 1$  при  $|\vec{r}| > r_0$ , и  $n^2 = \vec{r}^2 / r_0^2$  при  $|\vec{r}| \leq r_0$ , а поглощение отсутствует. На такую оптическую систему падает пучок параллельных лучей.

Эта задача имеет точное аналитическое решение. Вне сферы радиуса  $r_0$  уравнения (9), определяющие траекторию луча, принимают вид  $\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = 0$ , т.е. траектория луча есть прямая. Внутри сферы

$$\frac{d^2 \vec{r}}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \nabla n^2 = \frac{\vec{r}}{r_0^2}. \quad (27)$$

Перейдём в цилиндрическую систему координат ( $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ ,  $z = z$ ), направив ось  $z$  против направления падения лучей. Положим в момент пересечения луча со сферой  $\tau = 0$ . Тогда к уравнению (27) ставятся следующие граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{d^2 z}{d\tau^2} = \frac{z}{r_0^2}, z(0) = z_0, \left. \frac{dz}{d\tau} \right|_0 = -1, \\ \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} = \frac{\rho}{r_0^2}, \rho(0) = \rho_0, \left. \frac{d\rho}{d\tau} \right|_0 = 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{d\tau^2} = 0, \varphi(0) = \varphi_0, \left. \frac{d\varphi}{d\tau} \right|_0 = 0, \end{cases} \quad (28)$$

причём  $z_0^2 + \rho_0^2 = r_0^2$ . Решение системы (28) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho(\tau) &= \rho_0 \operatorname{ch} \left( \frac{\tau}{r_0} \right), \\ z(\tau) &= z_0 \operatorname{ch} \left( \frac{\tau}{r_0} \right) - r_0 \operatorname{sh} \left( \frac{\tau}{r_0} \right), \\ \varphi(\tau) &= \varphi_0. \end{aligned} \quad (29)$$

На рис. 3 приведено семейство траекторий лучей, падающих с разными прицельными расстояниями  $\rho_0$  на сферу радиуса  $r_0 = 0.5$ .

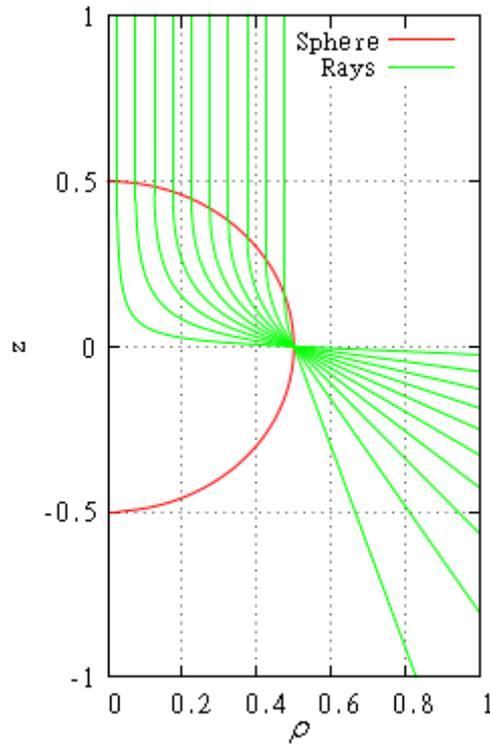


Рис. 3. Аналитическое решение модельной задачи

Для определения момента выхода луча из сферы решим уравнение  $z^2(\tau) + \rho^2(\tau) = r_0^2$ . Подставляя в это уравнение траекторию (29) и используя свойства гиперболических функций, получаем:

$$-r_0^2 + (\rho_0^2 + z_0^2) \operatorname{ch}^2\left(\frac{\tau}{r_0}\right) + r_0^2 \operatorname{sh}^2\left(\frac{\tau}{r_0}\right) - 2z_0 r_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) = 0,$$

$$2r_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) \left[ r_0 \operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) - z_0 \operatorname{ch}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) \right] = 0,$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{r_0}\right) \cdot z(\tau) = 0.$$

Луч выйдет из сферы при  $\tau = \tau_{out} = r_0 \operatorname{arcch}\left(\frac{r_0}{\rho_0}\right) = r_0 \operatorname{arcsh}\left(\frac{z_0}{\rho_0}\right) = r_0 \ln\left(\frac{z_0 + r_0}{\rho_0}\right)$ .

Для построения дискретной модели поместим сферу в центре области  $0 \leq x, y, z \leq 1.5$ . Разобьём область на  $N^3$  равных кубических ячеек с длиной ребра  $h = 1.5/N$ , определив в каждой ячейке с индексами  $i, j, k$  и координатами центра  $x_i, y_j, z_k$  коэффициент преломления по формуле

$$\begin{cases} n_{ijk}^2 = 1, r_{ijk} < r_0, \\ n_{ijk}^2 = \frac{r_{ijk}^2}{r_0^2}, r_{ijk} \geq r_0, \end{cases}$$

где  $r_{ijk} = \sqrt{(x_i - 0.75)^2 + (y_j - 0.75)^2 + (z_k - 0.75)^2}$ .

Для расчёта траекторий лучей по данной методике необходима сетка, состоящая из тетраэдров. Поэтому раздробим каждую из кубических ячеек на 24 тетраэдра, задав в каждом из них тот же коэффициент преломления, что был приписан всей ячейке. Дальнейшие интерполяции проводятся по алгоритмам, описанным выше.

Зададим сетку по лучам следующим образом: вдоль оси  $z$  падает 81 луч, лучи распределены равномерно в области  $0.265 < x < 1.265$ ,  $0.295 < y < 1.295$  (пределы взяты несколько несимметричными, чтобы луч изначально не попал на границы ячеек). При определении порядка сходимости меняем только количество ячеек по пространству  $N$ , сетку по лучам оставляем постоянной.

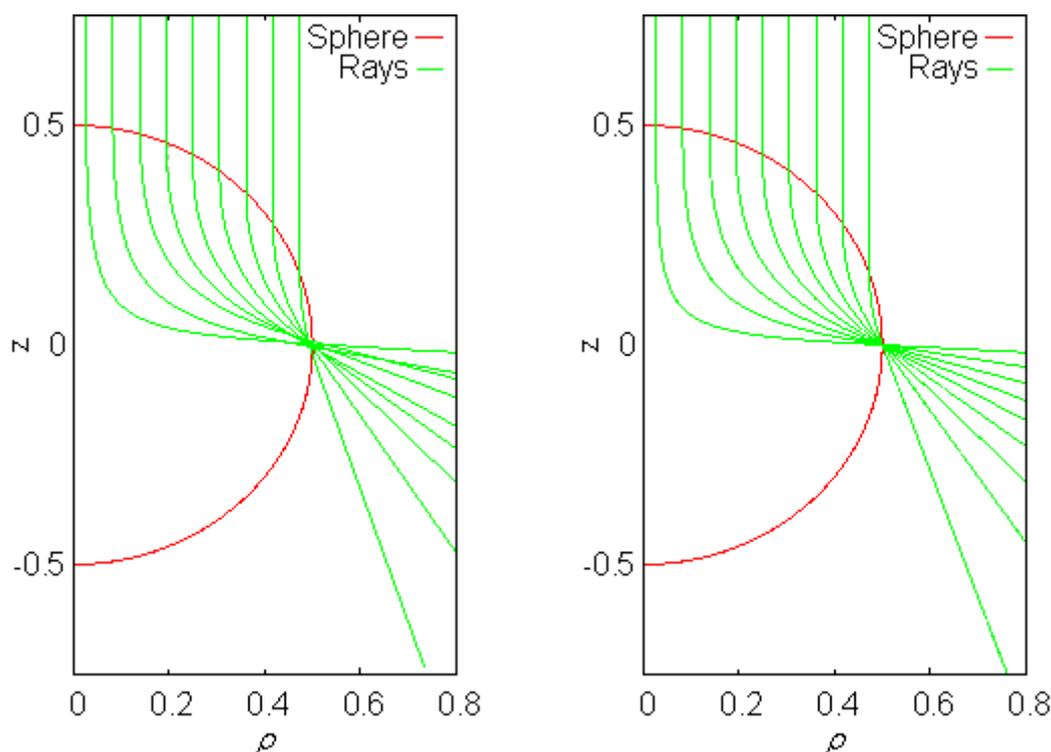


Рис. 4. Численное решение модельной задачи при  $N = 40$  и  $N = 640$

После выхода за пределы сферы радиуса  $r_0 = 0.5$  направление лучей будет отличаться от аналитически найденного. Для оценки погрешности дальнейшее нарастание различий в ходе лучей будем считать не связанным с неточностью расчёта рефракции. Определим норму отклонения луча от теоретически

рассчитанной траектории как корень из среднего квадрата отклонения внутри указанной сферы:

$$\|\Delta\vec{r}\| = \sqrt{\frac{1}{\tau_{out}} \int_0^{\tau_{out}} d\tau (\vec{r}(\tau) - \vec{r}_{anal}(\tau))^2}.$$

Дискретным аналогом такой нормы будет

$$\|\Delta\vec{r}\|_h = \sqrt{\frac{1}{\tau_{out}} \sum_i \Delta\tau_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{anal}(\tau_i))^2},$$

где  $\Delta\tau_i$  — оптическая длина пути в ячейке,  $\vec{r}_i$  — координата выхода из ячейки, а сумма берётся в тех ячейках, для которых  $|\vec{r}_i| < r_0$ .

На рис. 5 и 6 представлены графики среднего по лучам отклонения от аналитического решения  $\langle \|\Delta\vec{r}\|_h \rangle$  в зависимости от количества пространственных ячеек  $N$  вдоль любого направления при различных методах нахождения градиента коэффициента преломления.

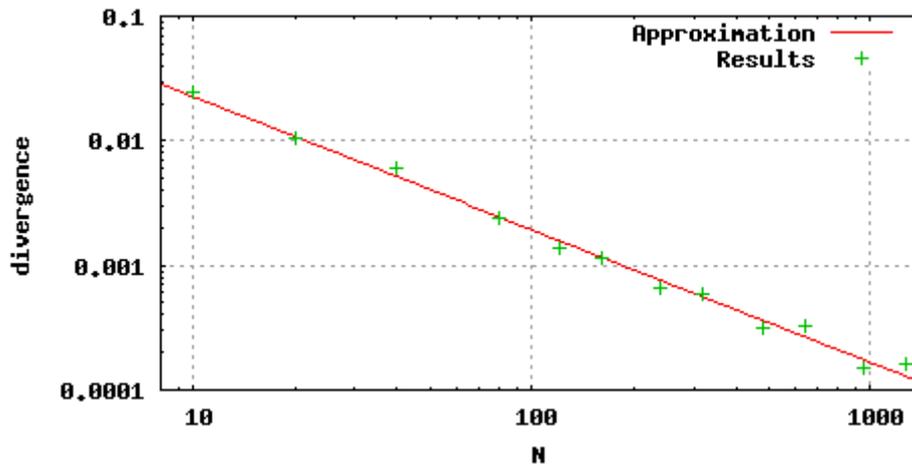


Рис. 5. Скорость сходимости для интерполяции в узлы. Оси отложены в логарифмическом масштабе

Аппроксимируем зависимость выражением  $\langle \|\Delta\vec{r}\|_h \rangle = \Delta_0 / N^\alpha$ . Анализ данных по методу минимальных квадратов даёт значение коэффициента  $\alpha = 1.07 \approx 1$  (см. рис. 5). Следовательно,  $\|\Delta\vec{r}\|_h = O(h)$  и метод имеет линейный характер сходимости по пространству.

Зависимость, аппроксимирующая данные расчетов с интерполяцией по соседним ячейкам (рис. 6), имеет коэффициент  $\alpha = 1.10 \approx 1$ , что также свидетельствует о линейном характере сходимости. При этом для этого метода имеется существенный выигрыш как во времени счёта, так и в объёме используемой памяти.

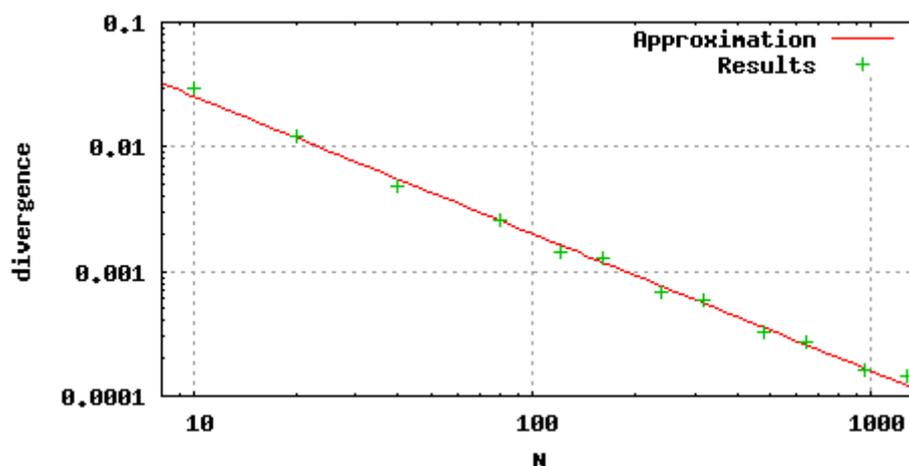


Рис. 6. Скорость сходимости для интерполяции по соседним ячейкам. Оси отложены в логарифмическом масштабе

Погрешность вычисления поглощения лазерного излучения при увеличении шага сетки растёт заведомо не быстрее, чем погрешность в вычислении траектории хода отдельных лучей.

В работе [4] указано, что схема, использующая приближение постоянного градиента  $n^2$ , имеет второй порядок сходимости по пространству при вычислении погрешности в поглощении излучения. К сожалению, в этой работе не конкретизируется методика нахождения градиентов, обеспечивающая второй порядок точности.

Заметим, что если исходные данные, полученные из газодинамического расчёта, имеют первый порядок точности по пространству, то от расчёта поглощения лазерного излучения не требуется более высокая точность.

## Список литературы

1. Гаранин С. Г. Мощные лазеры и их применение в исследованиях физики высоких плотностей энергии. *УФН* **181** 434—441 (2011)
2. A. Pukhov and J. Meyer-ter-Vehn. Laser wake field acceleration: the highly non-linear broken-wave regime. *Applied Physics B: Lasers and Optics* Volume 74, Numbers 4-5 (2002), pp.355-361, DOI: 10.1007/s003400200795
3. K.N.Koshelev, V.V.Ivanov, V.G.Novikov, V.V.Medvedev, A.S.Grushin, V.M.Krivtsov. RZLINE code modeling of distributed tin target for laser-produced plasma sources of extreme ultraviolet radiation. *J. Micro/Nanolith. MEMS MOEMS*, 2012, (11)2, 021112.
4. Thomas B. Kaiser. Laser ray tracing and power deposition on an unstructured three—dimensional grid. *Physical Review E (Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics)*, Volume 61, Issue 1, January 2000, pp.895—905
5. Искаков А.Б., Лебо И.Г., Попов И.В., Тишкин В.Ф. Моделирование распространения и поглощения лазерного излучения в неоднородной

изотропной плазме в приближении геометрической оптики. Препринт ИММ РАН №24 от 1995 г.

6. Friedland L., Bernstein I. Comparison of geometric and wave optics in an absorbing spherical plasma. [Phys. Rev. A. 1980, v.21, n.2, p.666-671]

7. М.Е. Povarnitsyn, N.E. Andreev, P.R. Levashov, K.V. Khishchenko and O.N. Rosmej. Dynamics of thin metal foils irradiated by moderate-contrast high-intensity laser beams. PACS numbers: 52.50.Jm, 52.38.-r, 79.20.Ds.

8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика в 10 томах. Том 8. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.

9. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1980.

10. Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А. Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1975.

11. Александров А.Ф., Богданкевич Л.С., Рухадзе А.А. Основы электродинамики плазмы. М.: Высшая школа, 1988.

## Оглавление

Введение .....	3
§1. Вывод уравнений траектории луча .....	4
§2. Учёт поглощения вне области применимости геометрической оптики.....	6
§3. Расчёт диэлектрической проницаемости плазмы .....	9
§4. Дискретизация модели и расчёт луча в ячейке .....	10
§5. Интерполяционные формулы и нахождение градиентов .....	13
§6. Результаты расчётов. Оценка порядка сходимости.....	15
Список литературы .....	19