



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Батхин А.Б.

Симметричные
периодические решения
задачи Хилла

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Батхин А.Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 52. 32 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-52>

Публикации по материалам препринта

Батхин А.Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. I // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 4. С. 308-322. ISSN 0023-4206.

Batkhin A.B. Symmetric Periodic Solutions of the Hill's Problem. I // Cosmic Research. 2013. July. Vol. 51, no. 4. Pp. 275-288. ISSN 0010-9525.

DOI: [10.1134/S0010952513040035](https://doi.org/10.1134/S0010952513040035)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952513040035>

Батхин А.Б. Симметричные периодические решения задачи Хилла. II // Космические исследования. 2013. Т. 51, № 6. С. 497-510. ISSN 0023-4206.

Batkhin A.B. Symmetric Periodic Solutions of the Hill's Problem. II // Cosmic Research. 2013. July. Vol. 51, no. 6. Pp. 452-464. ISSN 0010-9525.

DOI: [10.1134/S0010952513050018](https://doi.org/10.1134/S0010952513050018)

URL: <http://link.springer.com/article/10.1134%2FS0010952513050018>

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук

А.Б.Батхин

СИММЕТРИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ХИЛЛА

Москва — 2012

УДК 517.913

Батхин А.Б.

Симметричные периодические решения задачи Хилла. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, 2012

Дается обзор как ранее изученных, так и новых семейств симметричных периодических решений плоской круговой задачи Хилла в терминах их порождающих решений. Для некоторого порождающего решения в виде симметричной порождающей последовательности формулируются и доказываются утверждения, позволяющие определить тип симметрии, глобальную кратность и асимптотику начальных условий семейства, задаваемого этой последовательностью. Построен алгоритм исследования семейств симметричных периодических решений по его порождающей последовательности, с помощью которого найдены и изучены новые семейства периодических решений задачи Хилла, орбиты которых совершают облет точек либрации L_1 и L_2 в заданном порядке.

Ключевые слова: периодические решения, задача Хилла, порождающие решения.

Alexander Borisovich Batkhin

Symmetric periodic solutions of the Hill's problem

A survey of previously studied and new families of symmetric periodic solutions of the Hill's problem in terms of its generating solutions is given. For any generating solution in the form of generating sequence formulated and proven statements that define type of symmetry, global multiplicity and asymptotic of initial conditions of the family defined by this generating sequence. An algorithm for investigation of the family of symmetric periodic solutions that defined by its generating sequence is provided. With the help of this algorithm new families of periodic solutions of the Hill's problem were found and investigated. These families have orbits that overflying libration points L_1 and L_2 in definite order.

Key words: periodic solutions, Hill's problem, generating solutions.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00023.

Введение

Задача Хилла является некоторым предельным случаем *ограниченной задачи трех тел* (ОЗТТ) [1] и используется для исследования динамики тела «нулевой» массы (спутника) в окрестности меньшего из двух тяготеющих тел. Хотя задача Хилла неинтегрируема, но ее уравнения движения в отличие от ОЗТТ не содержат массового параметра μ , что делает их существенно проще уравнений ОЗТТ.

Уравнения задачи Хилла инвариантны относительно конечной группы четвертого порядка преобразований симметрии с двумя образующими, обозначаемыми Σ_1 и Σ_2 . Каждое из этих преобразований имеет инвариантное множество в виде двумерной плоскости в расширенном фазовом пространстве.

В работе автора [2] дано описание метода построения порождающих последовательностей, каждая из которых задает семейство периодических решений. Эти последовательности строятся из дуг первого и второго типа и соединяются между собой в начале координат — особой точке уравнений задачи. М. Энон [3] предложил обозначать дуги первого типа символами $\pm j$, $j \in \mathbb{N}$, а дуги второго типа символами i и e . Каждая из указанных выше дуг есть специальное решение, проходящее по крайней мере дважды через начало координат, интегрируемой задачи Энона [4], которая в свою очередь есть один из предельных случаев задачи Хилла при $C \rightarrow -\infty$, где C есть значение интеграла Якоби (см. [1, 2, 4]).

Согласно гипотезе Энона (см. [5, п. 5.3.1], [2, п. 3]), последовательность, составленная из дуг $\pm j$, i , e , в которой нет двух идущих подряд дуг i и нет двух идущих подряд дуг e , является *порождающим решением* семейства периодических орбит задачи Хилла. Такие последовательности названы *порождающими последовательностями*.

Приведем основные свойства порождающих последовательностей.

Свойство 1. *Порождающая последовательность определяется с точностью до циклической перестановки входящих в нее дуг.*

Свойство 2. *Порождающая последовательность не может состоять только из одной дуги второго типа i или e .*

Свойство 3. *Используя лишь дуги второго типа i и e , можно построить единственную порождающую последовательность $\{i, e\}$.*

Свойство 4. *Порождающая последовательность под действием одного из преобразований Σ_1 или Σ_2 переходит в последовательность, в которой дуги исходной последовательности заменены согласно таблице 1 и записаны в обратном порядке. Преобразование $\Sigma_{12} \equiv \Sigma_1 \circ \Sigma_2$ меняет дуги в последовательности согласно таблице 1, но не меняет их порядка.*

Таблица 1
Преобразование дуг

Дуга	Σ_1	Σ_2	Σ_{12}
$+j$	$+j$	$-j$	$-j$
$-j$	$-j$	$+j$	$+j$
i	e	i	e
e	i	e	i
t	$-t$	$-t$	t

Порождающая последовательность является предельным положением периодического решения при $C \rightarrow -\infty$, но, тем не менее, позволяет определить некоторые свойства порожденного семейства периодических решений: тип симметрии, расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осью (осями) симметрии, глобальную кратность решения, а также асимптотику начальных условий и индекса устойчивости при $C \rightarrow -\infty$.

1. Симметрии порождающих последовательностей

В [2, п. 4] приведены условия, при которых порождающие последовательности, составленные из дуг первого типа, являются симметричными. Здесь приведем более общие утверждения, которые позволяют определять тип симметрии порождающей последовательности, составленной из дуг любого типа.

Если порождающая последовательность Σ_1 - или Σ_2 -симметричная, то ее всегда можно разбить на две взаимно симметричных относительно оси симметрии части. Эти части соединяются друг с другом в точках ортогонального пересечения орбитой этой оси симметрии. Например, Σ_1 -симметричная порождающая последовательность $\{+1, +2\}$ может быть представлена в виде двух взаимно симметричных относительно оси OX траекторий, состоящих из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги $+2$, заканчивающейся на оси OX . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{+1, +2\}$, с осью OX будут точки «внешнего» пересечения дуг $+1$ и $+2$.

Если порождающая последовательность двояко симметричная, то ее всегда можно разбить на четыре подпоследовательности, которые начинаются на одной оси симметрии и заканчиваются на другой. Каждая из подпоследовательностей переводится в другую преобразованием Σ_1 или Σ_2 . Например, двояко симметричная порождающая последовательность $\{+1, i, -1, e\}$ может быть получена из траектории, состоящей из половины дуги $+1$, начинающейся на оси OX , и половины дуги i , заканчивающейся на оси OY .

Поскольку порождающие дуги $\pm j, i, e$ сами являются симметричными, то самой короткой несимметричной порождающей последовательностью будет последовательность вида $\{\pm j, i\}$ или $\{\pm j, e\}$, $j \in \mathbb{N}$. Отметим, что наличие в порождающей последовательности дуг только одного типа не гарантирует, что такая последовательность будет симметричной. Например, последовательность $\{-1, +1, +2\}$ перейдет в последовательность $\{+1, -1, +2\}$ при отображении Σ_1 или в последовательность $\{-1, +1, -2\}$ при отображении Σ_2 .

Определение 1. Порождающая последовательность называется Σ_i -палиндромной, если она инвариантна относительно преобразования Σ_i , $i = 1, 2$, т. е. при записи ее элементов в обратном порядке с соответствующей заменой их согласно таблице 1 она не меняется. С учетом следствия 1 также будем называть Σ_i -палиндромной и такую порождающую последовательность, которую можно сделать с помощью циклической перестановки палиндромной.

Утверждение 1. Если порождающая последовательность Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромная, то она Σ_1 -(Σ_2 -)симметрична.

Доказательство следует непосредственно из свойства 4.

Пример 1. Последовательность $\{+1, +2, +1\}$ является Σ_1 -симметричной, но не Σ_2 -симметричной, поскольку согласно таблице 1 имеем $\Sigma_2(\{+1, +2, +1\}) = \{-1, -2, -1\}$. Последовательность $\{+1, +i, -1\}$ является Σ_2 -симметричной, но не Σ_1 -симметричной, поскольку согласно таблице 1 имеем $\Sigma_1(\{+1, i, -1\}) = \{+1, e, -1\}$.

Более сильное условие Σ_1 -(Σ_2 -)симметричности порождающей последовательности имеет следующий вид.

Утверждение 2. Если порождающую последовательность можно разбить на две Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромные подпоследовательности, то такая порождающая последовательность Σ_1 -(Σ_2 -)симметрична.

Доказательство. Проведем его для случая Σ_1 -симметрии. Пусть согласно условию утверждения порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где α_1 и α_2 — Σ_1 -палиндромные подпоследовательности. Тогда при преобразовании Σ_1 получим, что $\Sigma_1(\omega) = \alpha_2\alpha_1$. Используя свойство 1, поменяем местами подпоследовательности α_2 и α_1 , что и доказывает утверждение. ■

Пример 2. Последовательность $\{+1, -1, +2, -1\}$ является Σ_1 -симметричной, поскольку состоит из двух Σ_1 -палиндромных подпоследовательностей $\{-1, +2, -1\}$ и $\{+1\}$. Тогда

$$\Sigma_1(\{+1, -1, +2, -1\}) = \{-1, +2, -1, +1\} \equiv \{+1, -1, +2, -1\}.$$

Несмотря на то что дуги первого типа являются Σ_1 -симметричными, из них можно составить такие порождающие последовательности, которые являются только Σ_2 -симметричными. Достаточно потребовать, чтобы они удовлетворяли условию следующего утверждения.

Утверждение 3. Если порождающую последовательность, состоящую только из дуг первого типа, можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_2 -симметричными, то такая последовательность также Σ_2 -симметрична.

Доказательство. Пусть согласно условию утверждения порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где $\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$. Тогда $\Sigma_2(\omega) = \Sigma_2(\alpha_1\alpha_2) = \Sigma_2(\alpha_2)\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_1\alpha_2$, т. е. она Σ_2 -симметрична. ■

Пример 3. Последовательность $\{+1, +2, -2, -1\}$ является Σ_2 -симметричной, поскольку $\Sigma_2(\{+1, +2\}) = \{-2, -1\}$, но не Σ_1 -симметрична, поскольку

$$\Sigma_1(\{+1, +2, -2, -1\}) = \{-1, -2, +2, +1\} \equiv \{+2, +1, -1, -2\}.$$

Два предыдущих утверждения позволяют сформулировать утверждение для выделения двойко симметричных порождающих последовательностей.

Утверждение 4. Если порождающую последовательность можно разбить на две такие Σ_1 -(Σ_2 -)палиндромные подпоследовательности, что они будут взаимно Σ_2 -(Σ_1 -)симметричны, то исходная порождающая последовательность является двойко симметричной.

Доказательство. Опять проведем его только для случая Σ_1 -симметрии. Если согласно условию утверждения 4 порождающая последовательность $\omega = \alpha_1\alpha_2$, где $\Sigma_2(\alpha_1) = \alpha_2$, а α_1 и α_2 — Σ_1 -палиндромные подпоследовательности. Тогда, в силу утверждения 2, последовательность ω является Σ_1 -симметричной, но, в силу утверждения 3, последовательность ω одновременно Σ_2 -симметрична. ■

Пример 4. Последовательность $\{+1, +1, -1, -1\}$ является двойко симметричной, что следует из приведенной ниже коммутативной диаграммы.

$$\begin{array}{ccc} \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftrightarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\} \\ \Sigma_2 \updownarrow & \begin{array}{c} \swarrow \Sigma_{12} \\ \searrow \Sigma_{12} \end{array} & \Sigma_2 \updownarrow \\ \{+1, +1, -1, -1\} & \xleftrightarrow{\Sigma_1} & \{-1, -1, +1, +1\} \end{array}$$

Наконец, укажем условие, выделяющее класс таких порождающих последовательностей, что они обладают лишь одной центральной симметрией.

Утверждение 5. Если порождающую последовательность можно разбить на две такие подпоследовательности, что они являются взаимно Σ_{12} -симметричными, то такая последовательность также Σ_{12} -симметрична.

Пример 5. Последовательность $\{+1, +2, -1, -2\}$ является центрально симметричной, поскольку $\Sigma_{12}(\{+1, +2\}) = \{-1, -2\}$, но она не Σ_1 - и не Σ_2 -симметрична, ибо

$$\Sigma_1(\{+1, +2, -1, -2\}) = \{+2, +1, -2, -1\} = \Sigma_2(\{+1, +2, -1, -2\}).$$

Расположение точек ортогонального пересечения орбиты, порожденной палиндромной последовательностью, с осью (осями) симметрии можно выяснить с помощью следующего утверждения.

Утверждение 6. 1. Если порождающая последовательность Σ_1 - или Σ_2 -палиндромная, а число дуг, входящих в ее состав,

а) четно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними»;

б) нечетно, то одна точка ортогонального пересечения с осью симметрии есть перицентр согласующей гиперболы, т. е. является «внутренней», а другая точка ортогонального пересечения с осью симметрии для случая Σ_1 -палиндромной последовательности лежит на дуге $\pm j$, а для случая Σ_2 -палиндромной последовательности лежит на дуге $i (e)$, т. е. является «внешней».

2. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 2, а число дуг, входящих в состав ее палиндромных подпоследовательностей, нечетно, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии лежат на дугах, каждая из которых центральная в своей подпоследовательности, т. е. точки пересечения являются «внешними».

3. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 3, то точки ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними».

4. Если порождающая последовательность удовлетворяет условию утверждения 4 и если число дуг последовательности

а) кратно 4, то пары точек ортогонального пересечения с осями симметрии OX и OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними»;

б) не кратно 4, то пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OY есть перицентры согласующих гипербол, т. е. являются «внутренними», а другая пара точек ортогонального пересечения с осью симметрии OX лежит на дугах $\pm j$, т. е. являются «внешними».

Доказательство. Символом j_k обозначим дугу с номером k в порождающей последовательности. Дуга j_k может быть как первого, так и второго типа.

1. а) Пусть порождающая Σ -палиндромная последовательность состоит из четного числа дуг, т. е. имеет вид $\omega_1 = \{j_1, \dots, j_k, j_k, \dots, j_1\}$, тогда, в силу приведенных на стр. 4 рассуждений, она однозначно определяется одной из своих подпоследовательностей, каждая из которых состоит из целого числа дуг, а начинается или заканчивается дугами j_1 и j_k . Следовательно, подпоследовательность $\{j_1, \dots, j_k\}$ соединяется с подпоследовательностью $\{j_k, \dots, j_1\}$ согласующими гиперболами, перицентры которых лежат либо на оси OX , если последовательность ω_1 есть Σ_1 -симметричная, либо на оси OY , если

Σ_2 -симметричная. Эти перицентры и есть точки ортогонального пересечения орбиты с осью симметрии.

б) Если порождающая Σ -палиндромная последовательность состоит из нечетного числа дуг, т.е. имеет вид $\omega_2 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1\}$, где j_k — центральная дуга палиндромной последовательности, тогда ω_2 однозначно определяется подпоследовательностью, которая начинается целой дугой j_1 , а заканчивается половиной дуги j_k . Симметричная ей подпоследовательность начинается половиной дуги j_k , а заканчивается целой дугой j_1 . Следовательно, одна точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы, соединяющей две дуги j_1 , т.е. является «внутренней», а другая — точкой ортогонального пересечения дуги j_k с осью OX , для Σ_1 -симметричной последовательности ω_2 , или с осью OY для Σ_2 -симметричной последовательности ω_2 , т.е. является «внешней».

2. Если порождающая последовательность может быть представлена в виде двух палиндромных подпоследовательностей с нечетным числом дуг, т.е. $\omega_3 = \{j_1, \dots, j_k, \dots, j_1, j_2, \dots, j_l, \dots, j_2\}$, то ее Σ -симметричная половина начинается половиной дуги j_k и заканчивается половиной дуги j_l . Следовательно, точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной такой последовательностью, являются «внешними».

3. Если порождающая последовательность Σ_2 -симметрична, то она состоит из четного числа дуг и однозначно определяется подпоследовательностью, состоящей из целого числа дуг первого типа. Эта подпоследовательность соединяется с Σ_2 -симметричной ей подпоследовательностью, а согласующие гиперболы имеют перицентры, лежащие на оси OY . Следовательно, точки ортогонального пересечения с осью симметрии являются «внутренними».

4. Наконец, пусть порождающая последовательность двояко симметрична, тогда она однозначно определяется своей четвертой частью. Если число дуг, входящих в порождающую последовательность, кратно 4, то эта четвертая часть состоит из целого числа дуг, а подпоследовательности, получающиеся из этой четверти преобразованиями симметрии Σ_1 и Σ_2 , соединяются согласующими гиперболами с перицентрами, расположенными на осях симметрии OX и OY . Если же число дуг, входящих в порождающую последовательность, не кратно 4 (но оно по-прежнему четно!), то четвертая часть состоит из полуцелого числа дуг, начинающихся на оси симметрии OX и заканчивающихся на оси симметрии OY . Следовательно, в первом случае обе пары точек ортогонального пересечения осей симметрии будут «внутренними», а во втором случае пара «внешних» точек пересечения лежит на оси OX , а пара «внутренних» — на оси OY . ■

2. Глобальная кратность порожденного решения

Определение 2. Глобальной кратностью M периодического решения называется число оборотов его орбиты вокруг начала координат, взятое со знаком «+», если движение происходит по часовой стрелке, и со знаком «-», если против.

Глобальная кратность решения, задаваемого порождающей последовательностью, определяется в два этапа: вначале вычисляется число точек пересечения орбиты с осью OX , а затем выясняется распределение этих точек на оси абсцисс.

Если знаки ординат входящей и выходящей дуг различны, то аргумент перицентра ϖ согласующей гиперболы близок к 0 или к π и, следовательно, гипербола пересекает ось абсцисс однократно, ось ординат двукратно и обходит начало координат против часовой стрелки (см. рис. 1а). Если знаки ординат входящей и выходящей дуг одинаковы, то согласующая гипербола имеет аргумент перицентра ϖ , близкий к $\pm\pi/2$, и, следовательно, пересекает ось абсцисс дважды, ось ординат однократно и обходит начало координат по часовой стрелке (см. рис. 1б). Каждая из дуг первого типа $\pm j$ имеет $2j - 1$ «внешних» пересечений с осью OX , $2j$ «внешних» пересечений с осью OY и обходит начало координат по часовой стрелке, а дуги второго типа пересечений с осью OX не имеют вовсе, а с осью OY имеют одно «внешнее» пересечение. Если орбита однооборотная, то она пересекает ось симметрии дважды, причем точки пересечения лежат по разные стороны от точки O . Если же орбита нулькратная, то точки ее пересечения с осью симметрии лежат по одну сторону от начала координат.

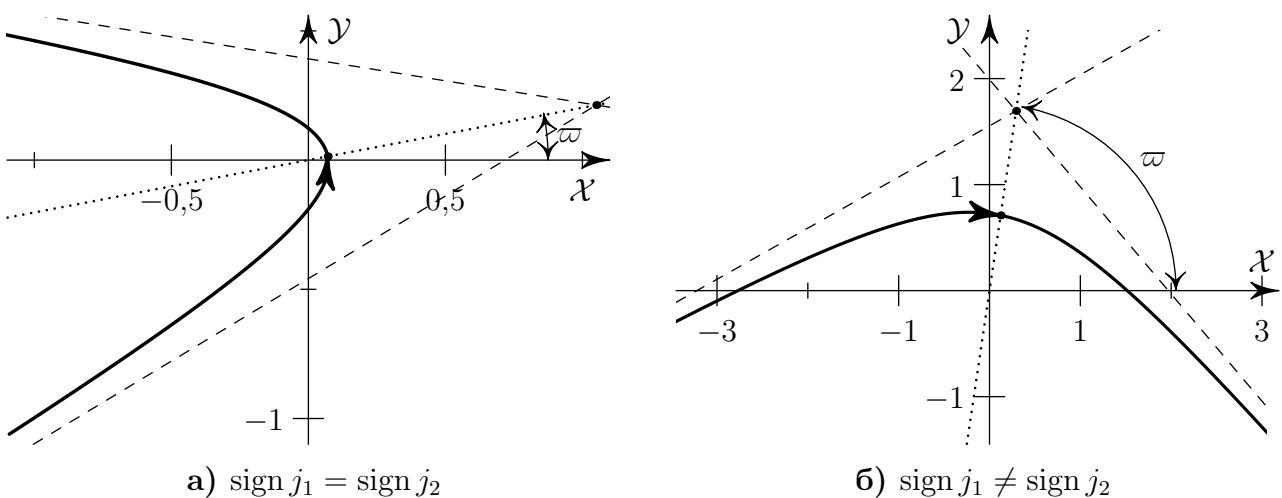


Рис. 1. Согласующие гиперболы для дуг первого типа j_1 и j_2

Таким образом, можно сформулировать следующее правило.

Правило 1. Для вычисления глобальной кратности M орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, надо найти сумму

- 1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k - 1$ для каждой дуги первого типа j_k , взятых со знаком $+$, и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- 2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную $+2$ для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную -1 , если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 2);
- 3) разделить полученную сумму пополам.

Если $M > 0$, то орбита совершает движение вокруг начала координат по часовой стрелке (обратное движение), если $M < 0$, то против часовой стрелки (прямое движение), и, наконец, если $M = 0$, то орбита нулькратная.

Таблица 2
Знаки ординат
входящей и выходящей
дуг

Дуга	Начало	Конец
$+j$	$+$	$-$
$-j$	$-$	$+$
i	$+$	$+$
e	$-$	$-$

Как будет показано ниже, для уточнения начальных условий периодического решения, задаваемого порождающей последовательностью ω , необходимо знать число точек пересечения орбиты с осью симметрии. Это число определяется аналогично вычислению глобальной кратности решения, только теперь число «внутренних» и «внешних» пересечений берется по абсолютной величине.

Правило 2. Для определения числа N_1 пересечений орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, с осью OX надо найти сумму

- 1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k - 1$ для каждой дуги первого типа j_k и равную нулю для каждой дуги второго типа;
- 2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную 2 для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную 1 , если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 2);

Правило 3. Для определения числа N_2 пересечений орбиты, задаваемой порождающей последовательностью $\{j_1, \dots, j_k, j_{k+1}, \dots, j_m\}$, с осью OY надо найти сумму

- 1) числа «внешних» пересечений, равную $2j_k$ для каждой дуги первого типа j_k и равную 1 для каждой дуги второго типа;

2) числа «внутренних» пересечений согласующих гипербол, равную 1 для каждой последовательной пары дуг j_k и j_{k+1} , если знаки ординат дуг одинаковы, и равную 2, если знаки ординат дуг различны (см. таблицу 2);

Например, порождающая последовательность $\{+1, -2, e\}$ состоит из трех дуг, соединенных тремя согласующими гиперболами. Пара дуг $(+1, -2)$ имеет, согласно таблице 2, одинаковые знаки ординат, а две другие пары $(-2, e)$ и $(e, +1)$ — разные. Следовательно, число «внутренних» пересечений равно $+2 - 1 - 1 = 0$, а число «внешних» пересечений равно $1 + 3 + 0 = 4$, значит глобальная кратность порождающей орбиты равна $M = (0 + 4)/2 = 2$. При этом число пересечений N_1 орбиты с осью OX за один оборот равно $4 + 4 = 8$, а с осью OY $N_2 = 5 + 7 = 12$.

Отметим, что правило 2 было сформулировано в [3].

Правило 1 позволяет сделать следующие выводы:

1) глобальная кратность M Σ_1 -симметричного периодического решения, порожденного дугой первого типа $\{\pm j\}$, равна $j - 1 \geq 0$, т. е. орбита обратная для дуг первого типа с номером больше 1 и нулькратная для дуг с номером 1;

2) глобальная кратность M двойко симметричного периодического решения, порожденного последовательностью $\{i, e\}$, равна -1 , т. е. орбита прямая;

3) если порождающая последовательность состоит только из дуг первого типа, то ею порожденная орбита может быть либо нулькратной, либо обратной.

Глобальная кратность орбиты M не является инвариантом семейства, которому она принадлежит, и может меняться, если при продолжении семейства по параметру, встречаются орбиты соударения. Можно показать, что при переходе семейства через орбиту соударения глобальная кратность орбит меняется на величину $2k$, где k — число соударений за один период. Тем не менее, глобальная кратность орбиты является удобным для классификации периодических решений параметром и может использоваться для анализа семейств периодических решений, разделяющих общие орбиты.

3. Асимптотики начальных условий и индекса устойчивости

Асимптотика координаты x точек ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX получена М. Эноном в [4]. Там же было проведено сравнение этой асимптотики с результатами численного интегрирования. Л. Перко в [6] получил следующий член асимптотики «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью симметрии, а также асимптотики начальных условий двойко симметричных орбит, порожденных последовательностями $\{+1, -1\}$ и $\{i, e\}$. К сожалению, в [6] отсутствуют даже попытки прове-

сти анализ качества полученных разложений (за исключение ссылки на личное сообщение от М. Энона о качестве асимптотики начальных условий для порождающей последовательности $\{i, e\}$), хотя на момент написания статьи (1981 год) результаты численного интегрирования рассматриваемых периодических решений задачи Хилла уже были получены и опубликованы (см. [4, 7]). Автор попытался выполнить такую работу, но не смог получить удовлетворительного согласия с результатами численного интегрирования. В результате автор разработал собственный алгоритм исследования семейства симметричных периодических решений по его порождающей последовательности (см. раздел 4) и изучил более 20-ти новых семейств. Некоторые из них описаны в разделах 6 и 7.

Асимптотика «внешней» точки ортогонального пересечения орбиты, порожденной последовательностью $\{\pm j\}$, с осью OX имеет вид

$$x_1^j(0)/\sqrt{|C|} = K_1^j(1 - \cos \tau_j) \stackrel{\text{def}}{=} Q_1^j, \quad y_2^j(0)/\sqrt{|C|} = K_1^j(\cos \tau_j - 2)/2 \stackrel{\text{def}}{=} Q_4^j. \quad (1)$$

Следовательно, характеристика семейства, порожденного дугой $\{+j\}$, стремится при $C \rightarrow -\infty$ к прямой $y_2 = Q_4^j/Q_1^j x_1$ (на рис. 2а эти прямые показаны длинным штрихом). В координатах (X_1, Y_2) (см. [2, п. 1.3.2]) характеристика семейства стремится к предельной точке с координатами (Q_1^j, Q_4^j) .

«Внутренняя» точка ортогонального пересечения есть перицентр согласующей гиперболы и его координаты имеют вид

$$x_1^j(T/2) = \text{sign } j(-1)^{(j+1)} Q_2^j/|C|, \quad y_2^j(T/2) = \text{sign } j(-1)^{(j+1)} \sqrt{|C|} Q_5^j, \quad (2)$$

где $Q_2^j = e^j - 1$, $Q_5^j = \sqrt{\frac{e^j + 1}{e^j - 1}}$, $e^j = \sqrt{1 + 4/(9\tau_j^2)}$. Координаты перицентра орбиты, порожденной последовательностью $\{+j, -j\}$, задаются формулой (2), в которой x_1 и y_2 нужно заменить на x_2 и y_1 соответственно, а эксцентриситет положить равным $e = \sqrt{1 + 9\tau_j^2/4}$. Следовательно, характеристика семейства при $C \rightarrow -\infty$ стремится к кривой $x_1 y_2^2 = e^j + 1$, а в координатах $(\mathcal{X}_1, \mathcal{Y}_2)$ (см. [2, п. 1.3.1]) стремится к предельной точке (Q_2^j, Q_5^j) .

Асимптотика индекса устойчивости S периодического решения, которое при $C \rightarrow -\infty$ стремится к порождающей дуге вида $\pm j$, получена в [4] и описывается формулой

$$S = Q_3^j(-C)^{3/2}, \quad \text{где } Q_3^j = \frac{8 \sin^3 \tau_j (12\tau_j \sin \tau_j - 9 \cos \tau_j \sin^2 \tau_j + \cos \tau_j)}{(3 \sin^2 \tau_j + 1)^2}. \quad (3)$$

Численное исследование семейств периодических решений, стремящихся в пределе к последовательности дуг $\{\pm j_1, \pm j_2, \dots, \pm j_k\}$, где j_k — дуги первого типа, показывает, что зависимость индекса устойчивости S от C хорошо

аппроксимируется функцией вида $S(C) \sim A_k(-C)^{3k/2}$, где величина $A_k > 0$ и существенно зависит от чередования знаков дуг $\pm j_i$.

Для порождающих дуг i или e формулы, соответствующей (3), получено быть не может, поскольку в силу свойства 2 эти дуги не являются порождающими, но численное исследование семейств периодических решений, которые в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремятся к последовательности, включающей такие дуги, позволяет сделать вывод, что $S_{i(e)}(C) \sim A_{i(e)}(-C)^{3/2}$, где $A_{i(e)} < 0$. Таким образом, можно утверждать, что асимптотика индекса устойчивости периодического решения второго вида, состоящего в пределе из k дуг первого типа и l дуг второго типа, имеет вид $S_{kl}(C) \sim (-1)^l A(-C)^{3(k+l)/2}$. Следовательно, чем больше дуг входит в состав порождающей орбиты, тем более неустойчивым будет периодическое решение при одном и том же значении C . При этом $S_{kl} \rightarrow +\infty$, если l четно или равно нулю, но $S_{kl} \rightarrow -\infty$ в противном случае.

Величины Q_1 , Q_2 и Q_3 были введены в [4]. Значения величин τ_j , Q_i^j , $i = 1, 2, 4, 5$ для $j = 1, \dots, 10$ даны в таблице 3. Значения Q_3 приведены в таблице 7 в [4].

Таблица 3

Значения величин τ_j , Q_i^j , $i = 1, 2, 4, 5$

j	τ_j	Q_1^j	Q_2^j	Q_4^j	Q_5^j
1	4.41937142208	1.33116224470	0.01131401101	-1.18199886536	13.33311549158
2	7.68213064539	0.83823686389	0.00375844966	-0.92469340131	23.08970128831
3	10.87356180294	1.12799347411	0.00187774354	-1.06679759406	32.65131204882
4	14.04250089830	0.90852450294	0.00112629994	-0.95594601635	42.15122679684
5	17.20140121226	1.07970211474	0.00075075259	-1.04097465689	51.62357462989
6	20.35494153686	0.93613697979	0.00053620560	-0.96887150701	61.08119625918
7	23.50528078428	1.05790698459	0.00040213260	-1.02955596458	70.53002070943
8	26.65355462399	0.95092844010	0.00031275863	-0.97593291832	79.97316806945
9	29.80041792721	1.04548094921	0.00025020066	-1.02311549415	89.41243790479
10	32.94627500843	0.96015209697	0.00020470592	-0.98038291894	98.84894147959

4. Алгоритм исследования семейства периодических орбит по ее порождающему решению

Предлагается следующий алгоритм исследования семейства симметричных периодических решений второго вида.

1) Составляется симметричная порождающая последовательность ω в соответствии с гипотезой Энона (см. Введение).

2) Определяется тип ее симметрии (см. подраздел 1). В соответствии с утверждением б определяется расположение точек ортогонального пересечения орбиты с осью (осями) симметрии.

3) Фиксируется некоторое значение параметра $C < 0$. (Для порождающих последовательностей, составленных из дуг $\pm 1, \pm 2, i, e$, подходящим значением оказалось $C = -50$.)

4) По формулам (1) и/или (2) определяется приближенно начальное условие $x_1(0)$ для Σ_1 -симметричной или $x_2(0)$ для Σ_2 -симметричной последовательностей. Оценку величины половины периода можно получить по формуле $T/2 \approx \sum \tau_{jk} + \pi m$, где суммирование ведется по всем дугам первого типа из ω , m — число дуг второго типа, входящих в ω , а величины τ_j берутся из второй колонки таблицы 3.

5) В окрестности приближенного начального условия строится сетка значений $x_1^{(k)}(0)$ ($x_2^{(k)}(0)$), и для каждого из этих значений определяются начальные значения для координаты $y_2^{(k)}(0)$ ($y_1^{(k)}(0)$) из соответствующих квадратных уравнений:

$$\frac{1}{2} \left[y_2^{(k)}(0) \right]^2 - x_1^{(k)}(0) y_2^{(k)}(0) - \left[x_1^{(k)}(0) \right]^2 - \frac{1}{\left| x_1^{(k)}(0) \right|} = -\frac{C}{2} \text{ для симметрии } \Sigma_1,$$

$$\frac{1}{2} \left[y_1^{(k)}(0) \right]^2 + x_2^{(k)}(0) y_1^{(k)}(0) + \frac{\left[x_2^{(k)}(0) \right]^2}{2} - \frac{1}{\left| x_2^{(k)}(0) \right|} = -\frac{C}{2} \text{ для симметрии } \Sigma_2,$$

где k — номер узла сетки. Нужный корень из указанных выше уравнений выбирается таким образом, чтобы движение по орбите было в правильном направлении.

6) Для каждого узла сетки путем численного решения задачи Коши для системы канонических уравнений задачи Хилла строится отображение Пуанкаре (см., например, [8, гл. II] или [9, гл. 1]), где в качестве секущей плоскости выбирается гиперплоскость $x_2 = 0$ ($x_1 = 0$). Для периодичности симметричной орбиты достаточно, чтобы она начиналась в точке ортогонального пересечения оси симметрии и после $N_1/2$ ($N_2/2$) последующих пересечений вновь ортогонально ее пересекала. Числа N_1 и N_2 вычисляются согласно правилам 2 и 3 для Σ_1 - и Σ_2 -симметричных орбит соответственно. Таким образом, периодическая орбита, задаваемая порождающей последовательностью ω , будет определена с некоторой точностью, если в момент $N_1/2$ -го ($N_2/2$ -го) пересечения оси симметрии OX (OY) компонента \dot{x}_1 (\dot{x}_2) фазового вектора скорости будет приближенно равна нулю.

7) Имея орбиту семейства и используя алгоритмы продолжения по параметру (см., например, [8, гл. V] или [9, гл. 1]), можно получить все семейство периодических решений, задаваемое порождающей последовательностью ω .

Замечание 1. Периодические решения при $C \ll 0$ сильно неустойчивы, поэтому интегрирование уравнений следует проводить не в физических перемен-

ных, а в регулярных (см. [1, п. 10.4.4]), что существенно повышает точность вычислений и скорость расчетов.

Укажем основные отличия данной работы от других исследований, посвященных периодическим орбитам плоской задачи Хилла.

В [3, 10] М. Энон применил метод порождающих решений, изложенный в монографии [5], в контексте плоской ОЗТТ к изучению периодических решений плоской задачи Хилла и описал новые семейства периодических решений. Во многом данная работа является продолжением и развитием идей и методов, описанных в [3, 5], а также в монографии А. Д. Брюно [11], поиска периодических решений по их порождающим. Однако в указанных выше работах М. Энон ограничился исследованием семейств только тех периодических решений, которые содержат орбиты с глобальной кратностью три и менее. Более того, большая часть описанных в [3] семейств была получена им методом «грубой силы», когда на части плоскости (x_1, \dot{x}_1) строилась сетка начальных условий и из них отбирались те, которые определяли орбиту, ортогонально пересекающую ось симметрии через заданное число оборотов. Этот метод оказался непригодным для поиска семейств несимметричных решений, поэтому все описанные в [10] семейства были найдены в результате бифуркации потери симметрии ранее изученных семейств симметричных периодических решений.

Л. Перко, используя технику согласования решений вблизи особой точки [12], доказал существование периодического решения первого вида [13], а также счетного числа семейств периодических решений второго вида [6] в задаче Хилла (см. их определения в [2, 5, 9]). К сожалению, предложенные в [6, 13] асимптотики начальных условий и периодов орбит оказались непригодными для продолжения семейств периодических решений, да и сами работы содержали много ошибок.

В [14] дано качественное описание глобальной динамики задачи Хилла, а также схематично описано большое число семейств периодических решений для случая $C > 0$. Для апробации метода поиска периодических орбит в [15] частично исследовано 31 семейство периодических решений, взаимодействующих с семейством f обратных однооборотных орбит. Ни одно из этих семейств не было продолжено до своего предельного порождающего решения. В монографии [9] численно исследовано на устойчивость более 50-ти семейств плоских периодических орбит. Все они были продолжены до своих порождающих решений, но найдены были в результате бифуркаций основных семейств симметричных орбит g , f , g' и f_3 , описанных в [4]. Этот подход не позволил исследовать те семейства, которые не взаимодействуют с основными.

5. Краткий обзор семейств симметричных периодических решений задачи Хилла

Дадим краткий обзор семейств симметричных периодических решений плоской круговой задачи Хилла с точки зрения их порождающих решений. Больше внимания уделим новым семействам, которые были найдены и исследованы с помощью описанного выше алгоритма.

М. Энон в [4, 7] описал шесть основных семейств симметричных периодических решений задачи Хилла, орбиты которых совершают один оборот вокруг начала координат: a , c , f , g , g' и f_3 (в [4] это семейство названо g_3). Он использовал ту же систему обозначений периодических решений, что и Стремгрен в Копенгагенской задаче (см. [1, п. 9.4]). В [3] были описаны 7 новых семейств симметричных решений, орбиты которых совершают не более трех оборотов. Для каждого из описанных семейств были найдены предельные порождающие орбиты и указаны многие их свойства. Кратко информация об этих семействах приведена в таблице 4.

На рис. 2 приведены характеристики основных семейств периодических решений в координатах (x_1, y_2) для Σ_1 -симметричных (g' , a — показаны пунктиром) и двояко симметричных (f , g , f_3 — показаны сплошной линией) семейств (рис. 2а) и в координатах (x_2, y_1) для двояко симметричных семейств (рис. 2б). Длинным пунктиром показаны асимптотические направления, соответствующие порождающим решениям семейств a , f_3 , f и g' на рис. 2а, и порождающим решениям семейств f и g на рис. 2б. В силу симметрии показана лишь половина характеристик для $x_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Отметим, что рис. 2а есть исправленная версия рис. 1 в [16] и фиг. 2 в [17].

С помощью алгоритма, описанного в п. 4, было найдено и исследовано более 20-ти новых семейств симметричных периодических решений задачи Хилла. Кратко опишем основные группы новых семейств, а подробно дадим описание семейств, порожденных одиночными дугами $\{\pm j\}$. Для упрощения записи n -кратное повторение одной или группы дуг в порождающей последовательности обозначено степенью, например, $\{(+1)^3\} \equiv \{+1, +1, +1\}$.

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$ при продолжении по C дают орбиты, состоящие из n витков вокруг точки либрации L_1 и m витков низкоперигейных орбит с апогеем в окрестности L_1 . Такие семейства суть обобщение семейств Hb , Hd и Hf (см. таблицу 4) и могут быть использованы для проектирования перелетов в окрестность ближайших к Земле коллинеарных точек либрации L_1 и L_2 .

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(-1)^n, (+1)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, дают орбиты, совершающие n оборотов вокруг точки L_2 , затем перелет и m оборотов вокруг L_1 . Эти семейства суть обобщение семейства f_3 (см. таблицу 4) и могут быть использованы для проектирования перелетов

Сводная таблица основных семейств периодических решений

Назв.	Порожд. послед.	Симм.	M	C_{\max}
f	—	Σ_1, Σ_2	1	$+\infty$
a	$\{+1\}$	Σ_1	0	$3^{4/3}$
c	$\{-1\}$			
g	$\{i, e\}$	Σ_1, Σ_2	-1	$+\infty$
g'	$\{+2\}$ $\{-2\}$	Σ_1	1	4.49998
f_3	$\{-1, +1\}$ $\{+1, i, -1, e\}$	Σ_1, Σ_2	3 -1	3.80620
Ha'	$\{+2, i, e\}$	Σ_1	0	4.27143
Hb'	$\{+1, +2\}$ $\{+1, i, e\}$	Σ_1	1 -1	4.24613
Hc	$\{+2, +2, i, e\}$ $\{+2, i, e, i, e\}$	Σ_1	1 -1	4.28267
Hd	$\{+1, +2, +2\}$ $\{+1, i, e, i, e\}$	Σ_1	2 -2	4.26247
He	$\{+3\}$ $\{+1, e, i\}$	Σ_1	2 2	-8.61520
Hf	$\{+1, +1, +2\}$ $\{+1, +1, i, e\}$	Σ_1	1 -1	4.24611
Hg	$\{+2, i, -1, e\}$	Σ_1	0	3.83620

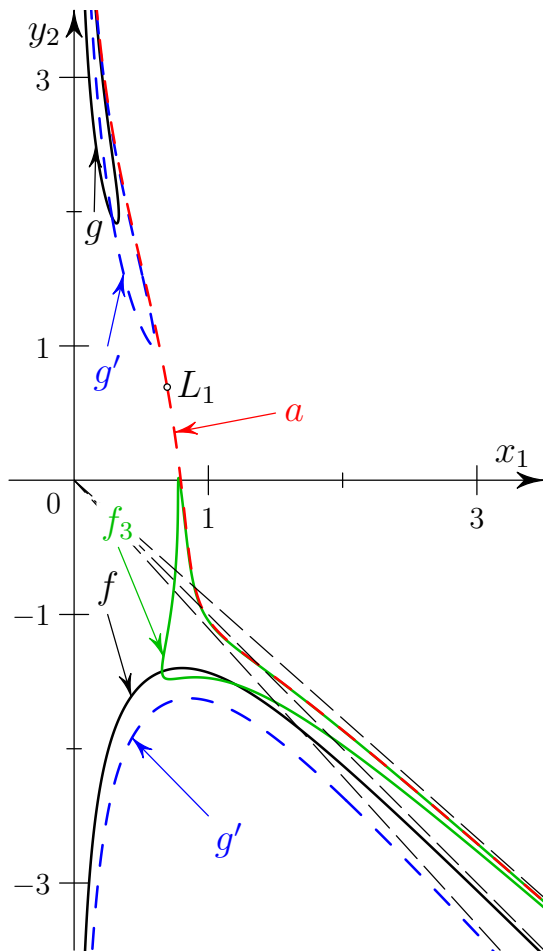
между точками либрации L_1 и L_2 .

Семейства, задаваемые последовательностями $\{(-1)^n, (+2)^m\}$, $n > m$, дают орбиты, совершающие n оборотов вокруг L_1 и m витков низкоперигейой орбиты с апогеем в окрестности L_2 .

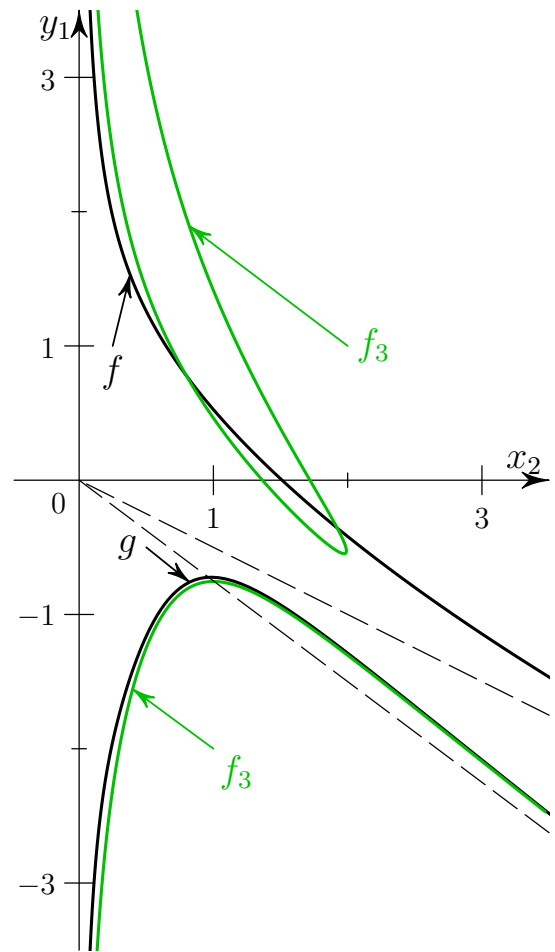
6. Семейства, задаваемые дугами $\{\pm j\}$, $j \in \mathbb{N}$

Для полноты изложения вначале приведем описание семейств, порожденных дугами $\{+1\}$, $\{+2\}$ и $\{+3\}$ [3, 4, 9], дополнив его новыми фактами, а затем опишем новые семейства. В силу Σ_1 -симметричности порождающих последовательностей ограничимся только дугами вида $+j$, $j \in \mathbb{N}$.

Дуга $\{+1\}$ задает семейство a нулькратных либрационных орбит, которые при $C_{\text{lib}} = 3^{4/3} \approx 4.32675$ стягиваются в точку либрации L_1 . Это семейство не имеет устойчивых орбит и при отображении Σ_2 переходит в семейство c , которое, в свою очередь, порождается дугой $\{-1\}$ и состоит из



а) Характеристики на плоскости x_1Oy_2



б) Характеристики на плоскости x_2Oy_1

Рис. 2. Характеристики семейств двояко симметричных (f, g, f_3 — сплошная линия) и однократно симметричных (a, g' — пунктир) периодических решений в координатах (x_1, y_2) (слева) и (x_2, y_1) (справа). Длинным пунктиром показаны асимптотические направления, соответствующие порождающим последовательностям

орбит вокруг точки либрации L_2 . Примеры орбит семейств a и c приведены в [4, 9].

Дуга $\{+2\}$ задает семейство g' однооборотных спутниковых орбит. Это семейство при продолжении по параметру достигает максимума при $C \approx 4.49998584$ и пересекается с семейством g двояко симметричных орбит. При дальнейшем продолжении по C в пределе орбиты семейства стремятся к дуге $\{-2\}$. Таким образом, семейство g' является двояко симметричным семейством, хотя состоит из орбит с одной симметрией, т.е. характеристика семейства g' в пространстве начальных условий $x_1(0), y_2(0), T$ инвариантна относительно преобразований Σ_1 и Σ_2 . При $C \approx 3.68448$ имеется орбита соударения, и на интервале $(3.68448; 4.49999)$ семейство g' состоит из прямых

орбит, а при $C < 3.68448$ — из обратных орбит. Семейство g' имеет два интервала устойчивости: первый при $C \in (-4.704765; -4.692170)$, второй при $C \in (4.271428; 4.499986)$, т. е. на одном интервале все устойчивые орбиты семейства обратные, на другом — прямые. На каждом из интервалов индекс устойчивости S пробегает весь диапазон значений $[-1; +1]$, и, следовательно, семейство g' пересекается с другими семействами периодических решений, локальная кратность которых $q \geq 1$, $q \in \mathbb{N}$. При этом семейство симметричных решений пересекается с семейством несимметричных только при $S = 1$ и при условии, что функция $S(C)$ в этой точке меняется монотонно (см. [18]). Все другие семейства с локальной кратностью $q \geq 2$ и взаимодействующие с g' суть семейства симметричных орбит. Дадим описание только тех семейств, локальная кратность которых $q \leq 2$.

На первом интервале устойчивости семейство g' пересекается при $C \approx -4.704765$ с семейством Hh (см. [10]) несимметричных периодических решений, которое задается порождающими последовательностями $\{+1, i\}$ и $\{+1, e\}$. При $C \approx -4.692170$ семейство g' пересекается с семейством двухоборотных решений, задаваемым в пределе последовательностью $\{i, +1, +1, e\}$. На втором интервале устойчивости при $C \approx 4.271428$ семейство g' пересекается с семейством Ha' (см. [3]) двухоборотных решений, которое задается последовательностью $\{+2, i, e\}$ (см. таблицу 4), а также, как уже было отмечено выше, с семейством g , задаваемым последовательностью $\{i, e\}$. Примечательно, что предельные последовательности семейств с локальной кратностью 2 получаются в результате соединения предельных последовательностей с локальной кратностью 1:

$$\{i, +1, +1, e\} = \{i, +1\} + \{+1, e\}, \quad \{+2, i, e\} = \{+2\} + \{i, e\}.$$

Дуга $\{+3\}$ задает семейство He двухоборотных орбит. Это семейство при продолжении по параметру достигает максимума при $C \approx -8.615196$, и при дальнейшем продолжении по C в пределе орбиты семейства стремятся к порождающей последовательности $\{+1, e, i\}$. В отличие от семейства g' оно не имеет орбит соударения. В остальном семейство He похоже на семейство g' : имеет два интервала устойчивости, пересекается с семейством несимметричных орбит Hi (см. [10]), задаваемым в пределе порождающими последовательностями $\{+2, i\}$ и $\{+2, e\}$, а также пересекается с двумя семействами Σ_1 -симметричных орбит с локальной кратностью 2, которые в пределе задаются последовательностями $\{i, +2, +2, e\}$ и $\{i, +1, e, +3\}$ соответственно. Здесь опять порождающие последовательности последних двух семейств оказываются «составленными» из порождающих последовательностей тех семейств, с которыми они взаимодействуют.

Дуги $\{+j\}$, $j = 4, \dots, 7$ задают новые семейства периодических решений [19], которые при продолжении по параметру C ведут себя так же, как и

семейство He , задаваемое дугой $\{+3\}$, а именно:

- 1) не содержат орбит столкновения;
- 2) достигают максимума при $C = C_{\max}^{(j)} < 0$ и при дальнейшем продолжении по C дают в пределе порождающую последовательность вида $\{+(j-2), e, i\}$;
- 3) имеют два небольших интервала устойчивости;
- 4) при $C = C_{SL}^{(j)} < C_{\max}^{(j)}$ пересекают семейство несимметричных орбит, задаваемое в пределе последовательностями вида $\{+(j-1), i\}$ и $\{+(j-1), e\}$;
- 5) пересекаются с двумя семействами Σ_1 -симметричных орбит локальной кратности 2, которые в пределе по C дают порождающие последовательности $\{i, +(j-1), +(j-1), e\}$ и $\{i, +(j-2), e, +j\}$ соответственно.

Значения $C_{SL}^{(j)}$ и $C_{\max}^{(j)}$ для $j = 2, \dots, 7$ приведены в таблице 5.

Таблица 5

**Критические значения параметра C для семейств,
задаваемых дугами $\{+j\}$, $i = 2, \dots, 7$**

j	2	3	4	5	6	7
$C_{\max}^{(j)}$	4.49999	-8.6152	-16.2437	-25.2533	-35.561	-48.90
$C_{SL}^{(j)}$	-4.70477	-10.6593	-18.1704	-27.1310	-37.418	-47.067

Орбиты семейства, задаваемого дугой $\{+4\}$, даны на рис. 3, причем орбита на рис. 3а близка к предельной дуге $\{+4\}$, а на рис. 3в — к последовательности $\{+2, e, i\}$.

На рис. 4 приведены орбиты семейств, задаваемых дугами $\{+4\}$, $\{+5\}$ и $\{+6\}$ для одного и того же значения $C = -60$. На рис. 5 в координатах (X_1, Y_2) (см. [2, п. 1.3.2]) показаны участки характеристик семейств a, f, g' , полные характеристики семейств, порожденных дугами $\{+j\}$, $j = 3, \dots, 7$, а также предельные положения соответствующих порождающих решений.

Из рисунков 3а и 4 видно, что один виток эпициклоиды представляет собой эллипс с отношением полуосей 1 : 2. Центр этого эллипса «дрейфует» вдоль оси OY с такой скоростью, что, совершая последний виток, орбита попадает в окрестность особой точки и по гиперболе с эксцентриситетом, близким к единице, возвращается к начальному витку. Такое движение легко понять, рассматривая его в переменных (\mathbf{Q}, \mathbf{P}) [2, п. 2.2]. В этих переменных

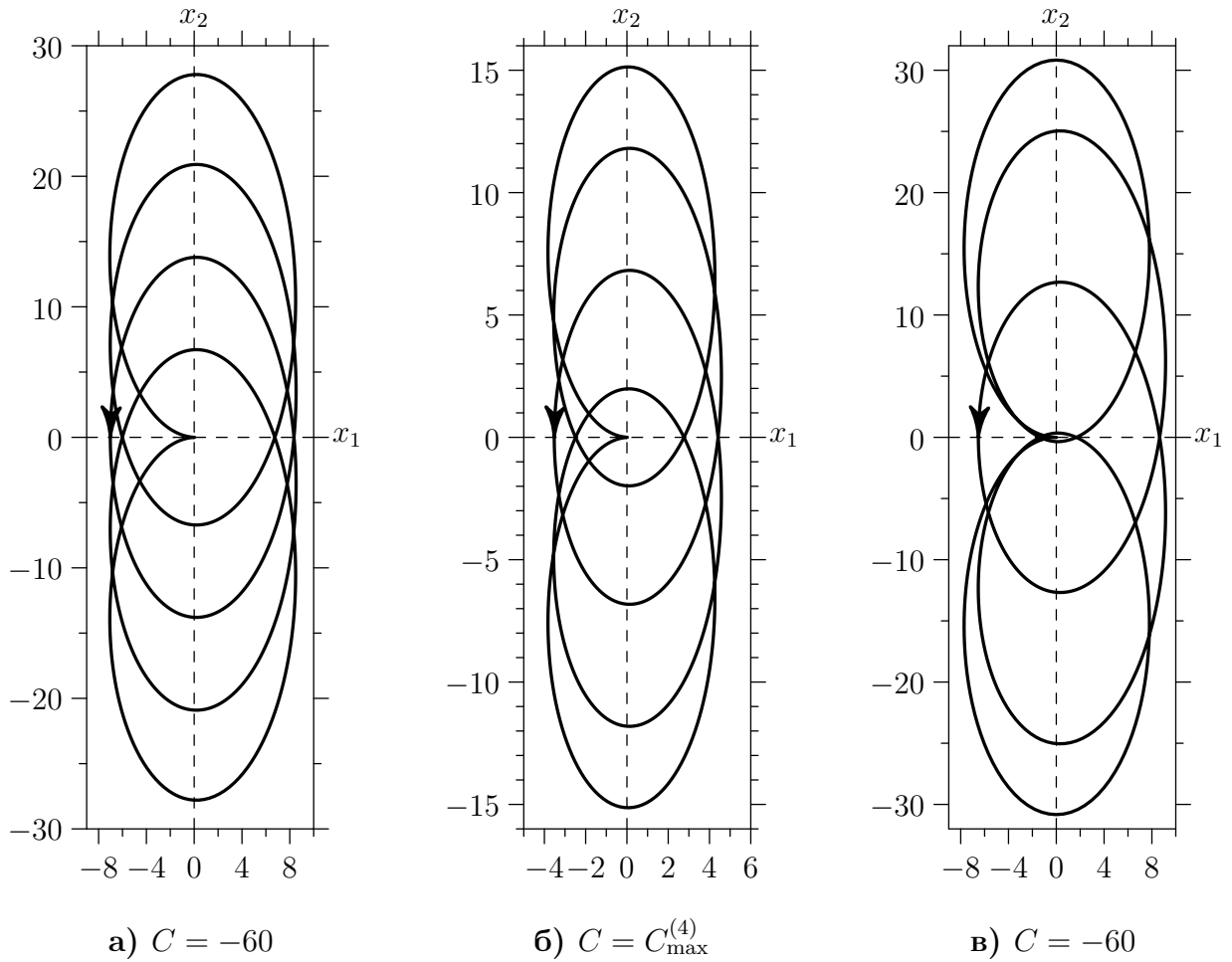


Рис. 3. Орбиты семейства, порожденного дугой $\{+4\}$, при разных значениях параметра C

координата Q_2 задает положение центра эллипса на оси OY , а ее скорость $\dot{Q}_2 = -3P_2$ есть скорость дрейфа. Значение импульса P_2 равно интегралу промежуточной задачи Энона $\mathcal{F} = Q_1^j + Q_4^j$, где значения Q_1^j и Q_4^j берутся из таблицы 3. Поскольку с ростом j величина τ_j стремится к $(2j + 1)\pi/2$, то P_2 стремится к нулю. Следовательно, чем больше номер j , тем медленнее дрейф и тем больше витков совершает эпициклоида до момента сближения с началом координат. Отметим, что асимптотика по C скорости дрейфа была вычислена в [20, 21] в несколько других терминах.

7. Одноимпульсные перелеты в окрестность точки либрации

Многие космические проекты предполагают выведение аппаратов в окрестность точек либрации. Для астрофизических исследований наибольший интерес представляют две ближайшие к Земле коллинеарные точки L_1 и L_2 , расположенные в системе Солнце–Земля на расстоянии 1.497 и 1.508 млн. км. от Земли соответственно.

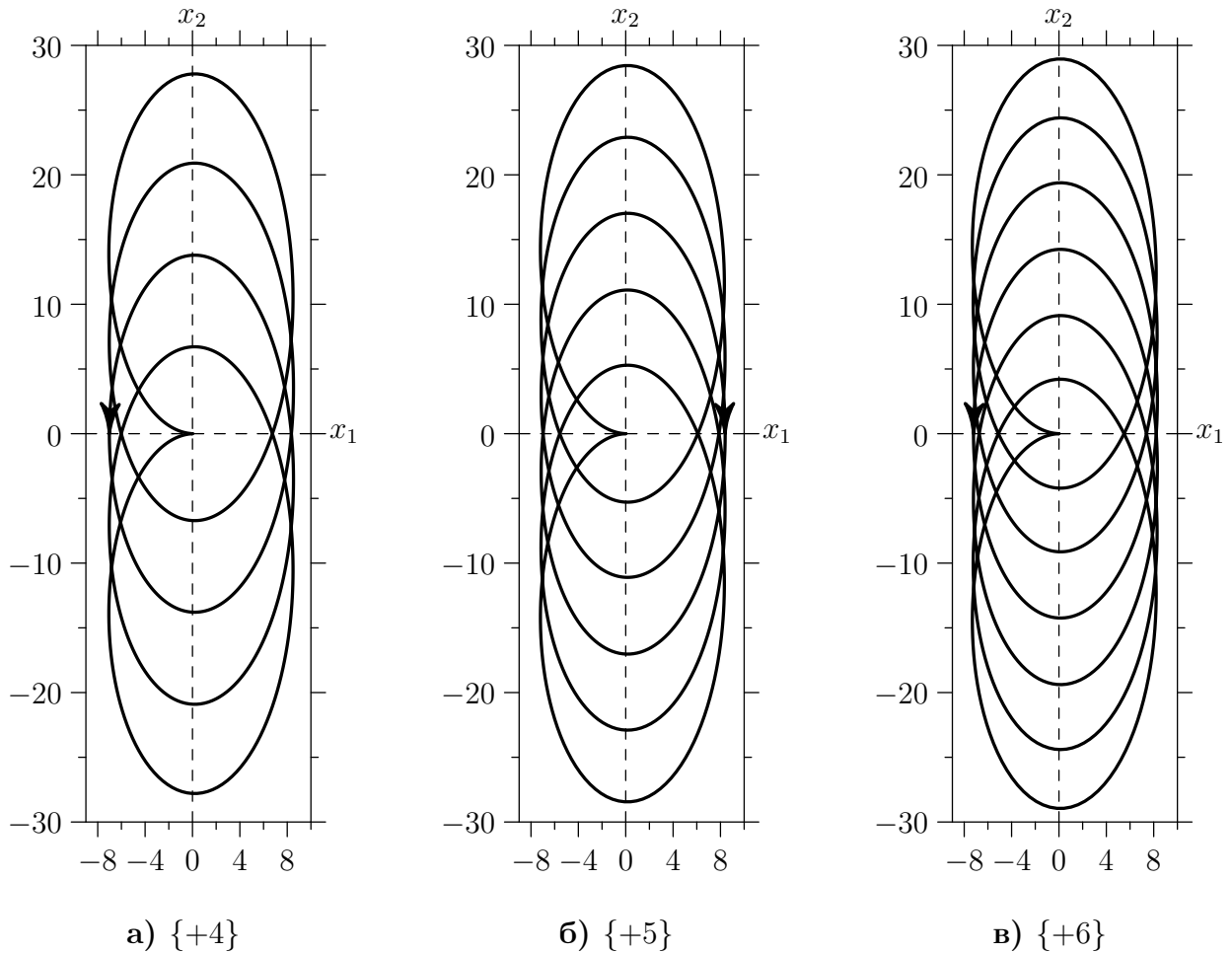


Рис. 4. Орбиты семейств периодических решений, порожденных дугами $\{+j\}$, $j = 4, 5, 6$

Ниже приведены некоторые космические проекты, использующие коллинеарные точки либрации в окрестности Земли.

- **Аппарат «Genesis»**, собиравший информацию о солнечном ветре, находился в окрестности L_1 около 850 суток.
- **Телескопы «Гершель» и «Планк»** были выведены в мае 2009 года в окрестность L_2 .
- **Аппарат SOHO** для наблюдения за Солнцем был выведен в окрестность L_1 в декабре 1995 года.
- **Аппарат WMAP** для изучения реликтового излучения был выведен в 2001 году в окрестность L_2 .

Для таких полетов проектировались как многоимпульсные траектории, так и орбиты с гравитационным маневром вблизи Луны. Энергетически обычно более выгодны одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников Земли в окрестность точки либрации. В работах [22, 23] разрабатывались

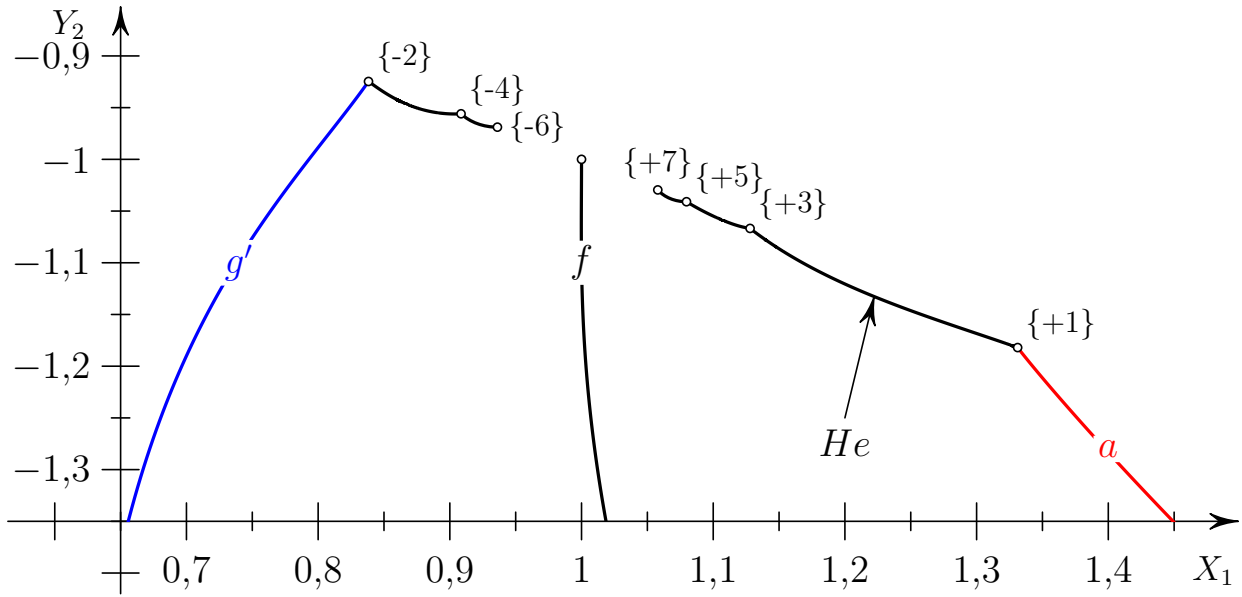


Рис. 5. Характеристики семейств, порожденных дугами $\{+j\}$, $j = 1, \dots, 7$, а также семейства f в координатах (X_1, Y_2) (см. [2, п. 1.3.2]). Точками показаны предельные положения порождающих последовательностей

довольно трудоемкие методы проектирования таких орбит. В [24] был предложен метод построения траекторий с заданными свойствами, основанный на использовании семейств симметричных периодических решений ОЗТТ. С его помощью были вычислены семейства периодических решений, которые содержат орбиты с одним или двумя оборотами вокруг точки либрации. Здесь приведем описание семейств, орбиты которых состоят из участка выведения в окрестность точки либрации, а затем совершают заданное число оборотов вокруг нее. Все эти семейства построены с помощью метода, описанного в таблице 4. В последующих подпунктах дано описание новых семейств, орбиты которых совершают заданное движение вокруг точек либрации.

7.1. Семейства, задаваемые порождающими последовательностями $\{(+1)^n, (+2)^m\}$. В [3] были приведены примеры орбит новых семейств симметричных периодических решений, названных М. Эноном Hb' , Hd и Hf , а также их порождающие последовательности (см. таблицу 4). Автор обратил внимание на то, что все указанные выше семейства содержат орбиты, совершающие облет точки либрации. При этом каждой дуге $+1$ (-1) в порождающей последовательности семейства соответствует один виток вокруг точки L_1 (L_2), а каждой дуге $+2$ (-2) — один участок, соединяющий окрестность точки либрации и окрестность Земли. Автор выдвинул гипотезу, что указанные выше свойства верны для семейств, заданных порождающими последовательностями вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, где $n, m \in \mathbb{N}$. Эта гипотеза была

численно проверена для $n + m \leq 5$. Свойства полученных в результате проверки семейств периодических решений оказались следующими.

1) Каждое семейство, задаваемое порождающей последовательностью вида $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n, m \in \mathbb{N}$, Σ_1 -симметрична и продолжается по параметру C , достигая своего максимального значения $4.246 \leq C_{\max} \leq C_{\text{lib}}$.

2) При $C \approx 3.68$ семейство содержит орбиту соударения, и при больших значениях параметра C орбиты семейства являются прямыми.

3) При дальнейшем продолжении по параметру семейство стремится к предельной последовательности вида $\{(+1)^n, (i, e)^m\}$.

4) Каждое из семейств имеет две небольшие области устойчивости и пересекается с двумя семействами симметричных орбит с локальной кратностью 2 и с семейством несимметричных орбит с локальной кратностью 1.

5) Каждое из семейств продолжается до семейства симметричных периодических решений ОЗТТ, орбиты которых сохраняют свойства орбит соответствующих семейств задачи Хилла.

Примеры орбит семейств Hb' , Hd и Hf приведены в [3]. На рис. 6 показаны половины орбит семейств, порожденных последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$ при $C \approx 4.24611$. Показаны положения тела на орбите через промежутки времени, равные лунному месяцу, а также пунктиром показана орбита Луны.

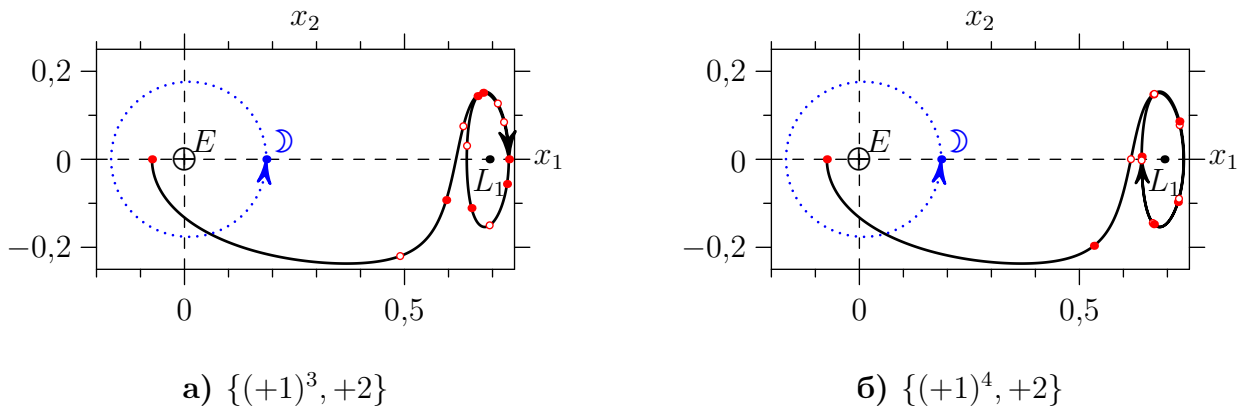


Рис. 6. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода

В таблице 6 для некоторых характерных орбит описанных выше семейств приведены значения периода T и времени пребывания T_{lib} тела на орбите в окрестности точки либрации в земных годах.

Для орбит при $C \approx 4.2$ семейств, задаваемых порождающей последовательностью $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n + m \leq 5$, характерно следующее свойство:

каждой дуге $+1$ соответствует один виток вокруг точки либрации L_1 , а каждой дуге $+2$ соответствует один виток вокруг начала координат с низким перицентром и апоцентром в окрестности L_1 . Возможно, это свойство сохраняется для сколь угодно больших значений n и m . Все описанное выше верно и для семейств, задаваемых последовательностями вида $\{(-1)^n, (-2)^m\}$, с соответствующей заменой точки L_1 на L_2 . Семейства, задаваемые последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$ анонсированы в [25].

Таблица 6

Период и время пребывания в окрестности точки либрации для типичных орбит семейств $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n + m \leq 5$

Название	Порожд. послед.	T	T_{lib}	T_{lib}/T
H'_b	$\{+2, +1\}$	0.85222	0.46744	0.5485
H_d	$\{(+2)^2, +1\}$	1.14827	0.45927	0.39996
H_f	$\{+2, (+1)^2\}$	1.33556	0.95079	0.7119
—	$\{+2, (+1)^3\}$	1.8205	1.43541	0.78847
—	$\{+2, (+1)^4\}$	2.30385	1.92194	0.83423

7.2. Семейства, задаваемые порождающими последовательностями $\{(+1)^n, (-1)^m\}$. Такие семейства, как было указано выше, являются некоторым обобщением семейства f_3 . Были исследованы все семейства, количество дуг в порождающих последовательностях которых не превышает 5. Все эти семейства продемонстрировали типичное поведение при продолжении по параметру C .

1) Главным свойством таких семейств является то, что они содержат орбиты, которые совершают n витков вокруг точки L_1 , затем совершают переход в окрестность точки L_2 , где совершают m оборотов вокруг нее и возвращаются обратно.

2) Все семейства при $C \approx 2.21$ имеют орбиту с двойным соударением, после прохождения которой орбиты становятся из обратных прямыми.

3) При дальнейшем продолжении по параметру семейства достигают максимального значения $C \approx 3.805$ и в пределе при $C \rightarrow -\infty$ стремятся к порождающим последовательностям вида $\{(+1)^n, i, (-1)^m, e\}$.

Отметим, что при $n + m \leq 5$, $n \neq m$ семейства состоят из Σ_1 -симметричных орбит (см. рис. 7б и 7в), при $n = m$ — из двойко симметричных (см. рис. 7а и 7г). При $n + m \geq 6$ можно составить порождающую последовательность, которая задает семейство с Σ_2 -симметричными орбитами. Например,

последовательность $\{+1, +1, -1, +1, -1, -1\}$ является Σ_2 -симметричной в силу утверждения 1, но она не является Σ_1 -симметричной, поскольку не удовлетворяет условию 2.

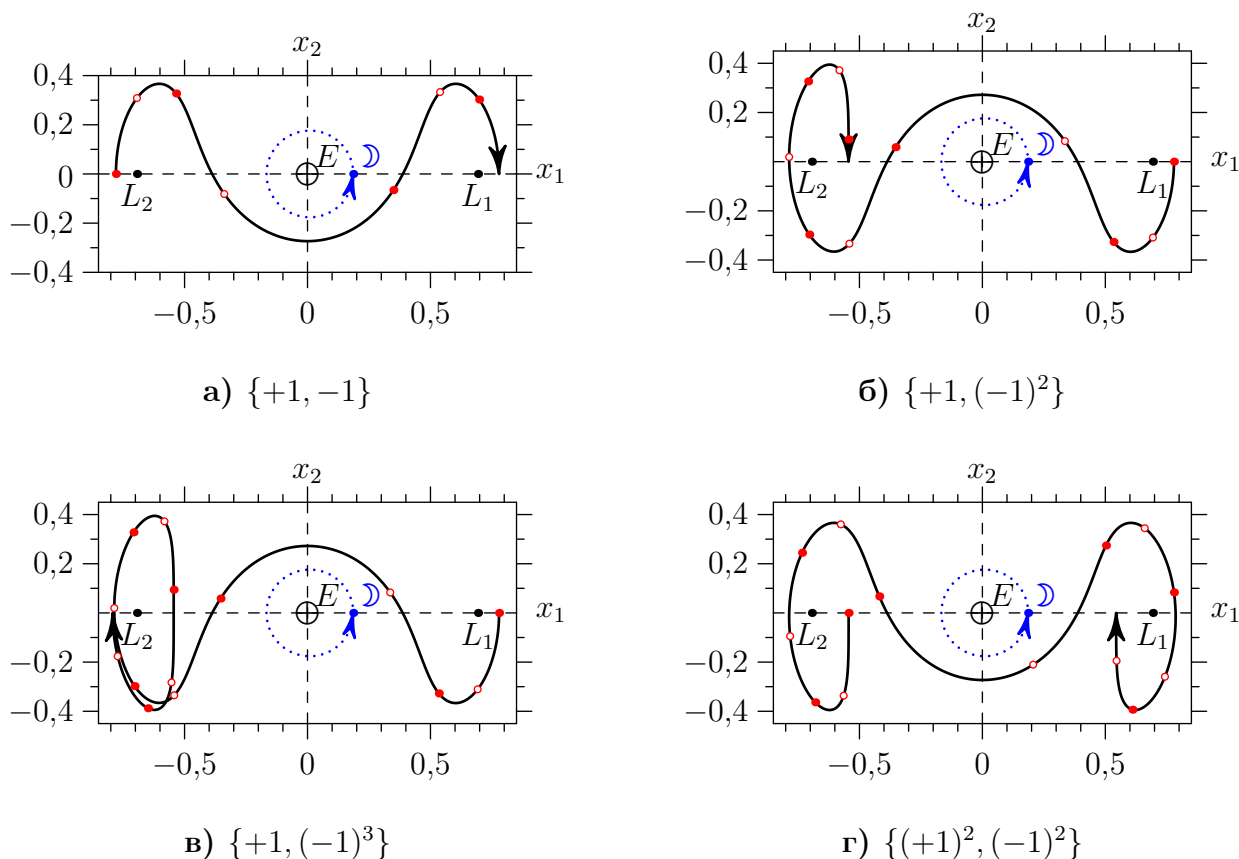


Рис. 7. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями вида $\{(+1)^n, (-1)^m\}$, $n + m \leq 4$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода

При $C \approx 3.8$ для орбит семейств, задаваемых порождающей последовательностью $\{(+1)^n, (-1)^m\}$, $n + m \leq 5$, характерно следующее свойство: *каждой дуге $+1$ соответствует один виток вокруг точки либрации L_1 , а каждой дуге -1 — один виток вокруг точки либрации L_2 . Переходу от дуги $+1$ к дуге -1 соответствует участок перелета от L_1 к L_2 , и, наоборот, от дуги -1 к дуге $+1$ — участок перелета от L_2 к L_1 . Возможно, это свойство сохраняется для сколь угодно больших значений n и m .*

7.3. Новые семейства, орбиты которых совершают перелет в окрестность точки либрации. Можно сконструировать из дуг ± 1 и ± 2 порождающие последовательности, которые задают семейства периодических решений с заранее определенными свойствами. Здесь рассмотрим некоторые

семейства симметричных периодических решений, орбиты которых содержат как участок выведения, так и участки облета одной или двух точек либрации.

Рассмотрим порождающие последовательности вида $\{-2, (+1)^n\}$, $n \geq 2$. Как следует из утверждения 1, задаваемые семейства состоят из Σ_1 -симметричных орбит. Эти семейства продолжаются до $C \approx 3.8355$ и содержат три орбиты соударения: с двойным соударением (рис. 8а) при $C \approx 2.378$, как у орбит семейств подраздела 7.2, с одинарным соударением при $C \approx 3.717$ и $C \approx 3.787$ (рис. 8б), как у орбит подраздела 7.1.

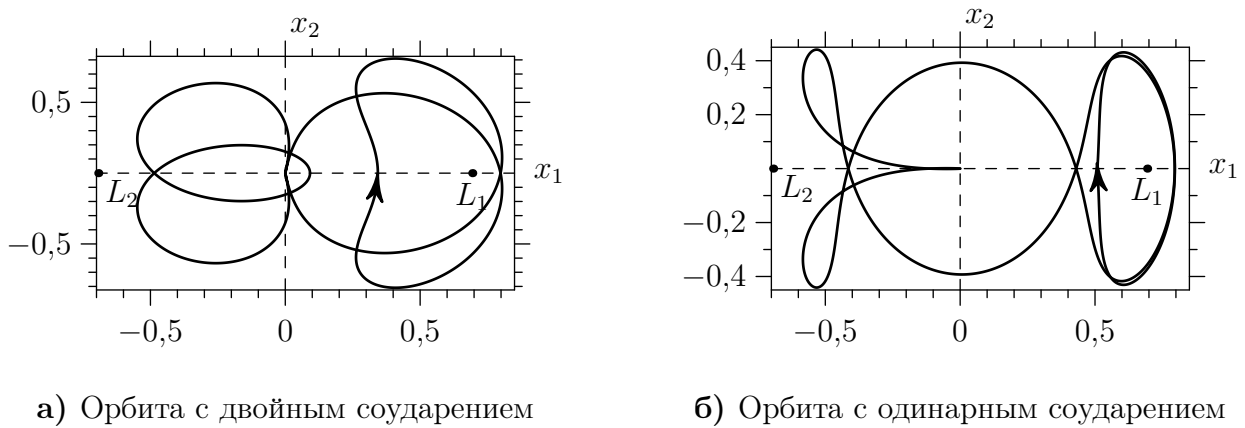
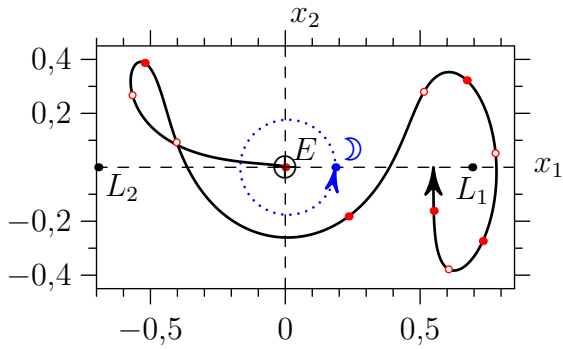


Рис. 8. Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{-2, (+1)^2\}$

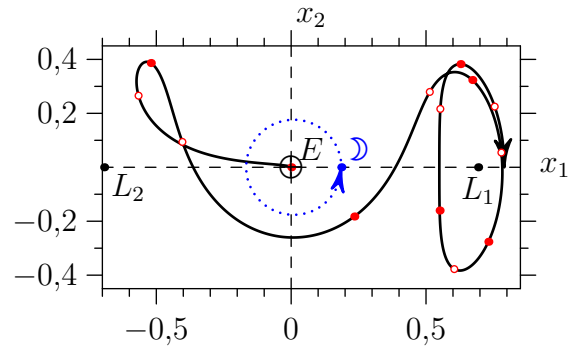
При значениях параметра C , близких к максимальным, орбита состоит из участка выведения в окрестность точки L_2 , участка перелета в окрестность точки L_1 , где она совершает вокруг нее n оборотов, и участка возвращения. Примеры орбит показаны на рис. 9.

Отметим, что порождающая последовательность $\{-2, +1\}$ задает семейство периодических решений, названное в [9, п. 4.3.6] $f_{I\Sigma_1}^{1/4}$, которое достигает экстремума по параметру C при $C = -2.567$, где пересекается с семейством обратных однооборотных орбит f . При этом локальная кратность семейства $f_{I\Sigma_1}^{1/4}$ по отношению к семейству f равна 4. Само семейство не содержит орбит соударения, а его орбиты являются вариантом квазиспутниковых орбит [20]. Аналогичное поведение демонстрирует и семейство, задаваемое последовательностью $\{-2, -2, +1, +1\}$, за исключением того, что оно не пересекается с семейством f .

Рассмотрим семейство с порождающей последовательностью $\{+2, +1, -1, +1\}$. Оно обладает фактически теми же свойствами, что и описанные выше семейства с последовательностями $\{-2, (+1)^n\}$, $n \geq 2$, но его орбиты при $C \approx 3.8056$ состоят из участка выведения в окрестность



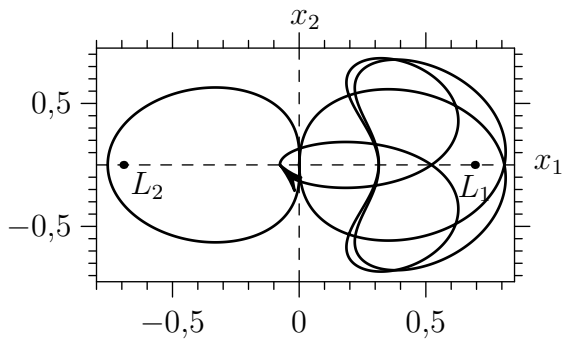
а) Орбита семейства $\{-2, (+1)^2\}$



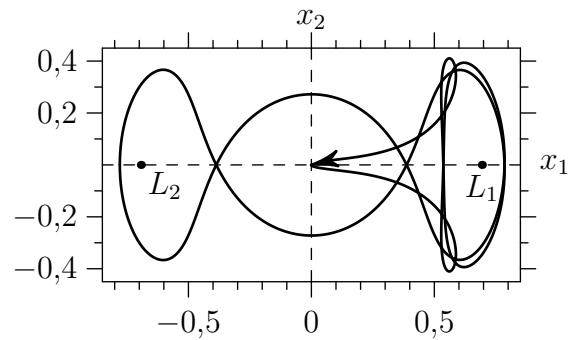
б) Орбита семейства $\{-2, (+1)^3\}$

Рис. 9. Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{-2, (+1)^n\}$, $n = 2, 3$. Показаны орбиты, соответствующие половине периода

точки L_1 , а затем совершает облеты вокруг точек либрации, переходя последовательно от L_1 к L_2 и затем вновь к L_1 . Две орбиты этого семейства показаны на рис. 10.



а) Орбита с двойным соударением



б) Орбита при $C = 3.8056$

Рис. 10. Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{+2, +1, -1, +1\}$

Заключение

Приведенный в разделе 4 алгоритм исследования семейств симметричных периодических решений позволил найти новые семейства, орбиты которых обладают полезными свойствами с точки зрения проектирования космических миссий в окрестность ближайших к Земле коллинеарных точек либрации. Все описанные выше периодические решения могут быть использованы в качестве начального приближения для проектирования условно-периодических орбит.

Список литературы

- [1] *Себекей В.* Теория орбит: ограниченная задача трех тел. М. : Наука, 1982. 656 с.
- [2] *Батхин А. Б.* Символическая динамика и порождающие решения плоских периодических орбит задачи Хилла. Препринт № 34. М. : ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2011. 31 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2011/source/prep2011_34.pdf.
- [3] *Hénon M.* New families of periodic orbits in Hill's problem of three bodies // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2003. Vol. 85. P. 223–246.
- [4] *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. V. Hill's case: Periodic orbits and their stability // *Astron. & Astrophys.* 1969. Vol. 1. P. 223–238.
- [5] *Hénon M.* Generating Families in the Restricted Three-Body Problem. Lecture Note in Physics. Monographs no. 52. Berlin, Heidelberg, New York : Springer, 1997. 278 p.
- [6] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem II: Second species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* 1981. Vol. 104, no. 2. P. 353–397.
- [7] *Hénon M.* Numerical exploration of the restricted problem. Hill's case: non-periodic orbits // *Astron. & Astr.* 1970. no. 9. P. 24–36.
- [8] *Parker T. S., Chua L. O.* Practical numerical algorithms for chaotic systems. Springer-Verlag, 1989.
- [9] *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Задача Хилла. Волгоград : Волгоградское научное издательство, 2009. 200 с.
- [10] *Hénon M.* Families of asymmetric periodic orbits in Hill's problem of three-bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2005. Vol. 93. P. 87–100.
- [11] *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трех тел: Плоские периодические орбиты. М. : Наука, 1990. 296 с.
- [12] *Breakwell J. V., Perko L. M.* Second-order matching in the restricted three-body problem (small μ) // *Celestial Mechanics*. 1974. Vol. 9. P. 437–450.
- [13] *Perko L.* Families of symmetric periodic solutions of Hill's problem I: First species periodic solutions for $C \ll -1$ // *Amer. J. Math.* 1981. Vol. 104, no. 2. P. 321–352.

- [14] *Simó C., Stuchi T. J.* Central stable/unstable manifolds and the destruction of KAM tori in the planar Hill problem // *Physica D*. 2000. Vol. 140. P. 1–32.
- [15] *Tsirogiannis G. A., Perdios E. A., Markellos V. V.* Improved grid search method: an efficient tool for global computation of periodic orbits. application to Hill's problem // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* 2009. no. 103. P. 49–78.
- [16] *Брюно А. Д.* Нулькратные и обратные периодические решения ограниченной задачи трех тел. Препринт № 93. ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 1996. 32 с.
- [17] *Брюно А. Д., Варин В. П.* Периодические решения ограниченной задачи трех тел при малых μ // *ПММ*. 2007. Т. 71, № 6. С. 1034–1066.
- [18] *Брюно А. Д.* Периодические решения системы Гамильтона // *Космические исследования*. 2006. Т. 44, № 3. С. 258–271.
- [19] *Батхин А. Б., Батхина Н. В.* Новые семейства периодических решений задачи Хилла // Труды XXXV академических чтений по космонавтике. М. : Комиссия РАН, 2011. С. 122–123.
- [20] *Venest D.* Libration effects for retrograde satellites in the restricted three-body problem. I: Circular plane Hill's case // *Celestial Mechanics*. 1976. no. 13. P. 203–215.
- [21] *Коган А. Ю.* Далекие спутниковые орбиты в ограниченной задаче трех тел // *Космические исследования*. 1988. Т. XXVI, № 6. С. 813–818.
- [22] *Боярский М. Н., Шейхет А. И.* Об одноимпульсном переходе с орбиты ИСЗ на условнопериодическую траекторию вокруг коллинеарной точки либрации системы Солнце–Земля // *Космические исследования*. 1987. Т. 25, № 1. С. 152.
- [23] *Лидов М. Л., Ляхова В. А., Тесленко Н. М.* Одноимпульсный перелет на условнопериодическую орбиту в окрестности точки L_2 системы Земля–Солнце и смежные задачи // *Космические исследования*. 1987. Т. 25, № 2. С. 163–185.
- [24] *Крейсман Б. Б.* Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации L_1 или L_2 // *Космические исследования*. 2011. Т. 49, № 4. С. 335–344.
- [25] *Батхин А. Б.* Использование порождающих решений для конструирования перелетов в окрестность коллинеарной точки либрации // Труды XXXIV академических чтений по космонавтике. М. : Комиссия РАН, 2010. С. 122–123.

Список иллюстраций

1	Согласующие гиперболы для дуг первого типа j_1 и j_2	9
2	Характеристики семейств двояко симметричных и однократно симметричных периодических решений в координатах (x_1, y_2) и (x_2, y_1)	18
3	Орбиты семейства, порожденного дугой $\{+4\}$, при разных значения параметра C	21
4	Орбиты семейств периодических решений, порожденных дугами $\{+j\}$, $j = 4, 5, 6$	22
5	Характеристики семейств, порожденных дугами $\{+j\}$, $j = 1, \dots, 7$, а также семейства f в координатах (X_1, Y_2)	23
6	Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{(+1)^n, +2\}$, $n = 3, 4$	24
7	Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями вида $\{(+1)^n, (-1)^m\}$, $n + m \leq 4$	26
8	Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{-2, (+1)^2\}$	27
9	Примеры орбит семейств, задаваемых последовательностями $\{-2, (+1)^n\}$, $n = 2, 3$	28
10	Примеры орбит семейства, задаваемого последовательностью $\{+2, +1, -1, +1\}$	28

Список таблиц

1	Преобразование дуг	4
2	Знаки ординат входящей и выходящей дуг	10
3	Значения величин $\tau_j, Q_i^j, i = 1, 2, 4, 5$	13
4	Сводная таблица основных семейств периодических решений	17
5	Критические значения параметра C для семейств, задаваемых дугами $\{+j\}$, $i = 2, \dots, 7$	20
6	Период и время пребывания в окрестности точки либрации для типичных орбит семейств $\{(+1)^n, (+2)^m\}$, $n + m \leq 5$	25

Оглавление

Введение	3
1 Симметрии порождающих последовательностей	4
2 Глобальная кратность порожденного решения	9
3 Асимптотики начальных условий и индекса устойчивости	11
4 Алгоритм исследования семейства периодических орбит	13
5 Краткий обзор семейств симметричных периодических решений	16
6 Семейства, задаваемые дугами $\{\pm j\}$, $j \in \mathbb{N}$	17
7 Одноимпульсные перелеты в окрестность точки либрации	21
7.1 Семейства, задаваемые порождающими последовательностями $\{(+1)^n, (+2)^m\}$	23
7.2 Семейства, задаваемые порождающими последовательностями $\{(+1)^n, (-1)^m\}$	25
7.3 Новые семейства, орбиты которых совершают перелет в окрестность точки либрации	26
Заключение	28
Список литературы	29
Список иллюстраций	31
Список таблиц	31