



Ильин И.С., Сазонов В.В.,
Тучин А.Г.

Траектории перелета с
низкой околоземной орбиты
на многообразии
ограниченных орбит в
окрестности точки либрации
 L_2 системы Солнце – Земля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 66. 25 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-66>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

И.С. Ильин, В.В. Сазонов, А.Г. Тучин

**ТРАЕКТОРИИ ПЕРЕЛЕТА С НИЗКОЙ ОКОЛОЗЕМНОЙ ОРБИТЫ
НА МНОГООБРАЗИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ ОРБИТ В ОКРЕСТНОСТИ
ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L_2 СИСТЕМЫ СОЛНЦЕ – ЗЕМЛЯ**

Москва – 2012

Аннотация

Предложен способ построения орбиты перелета космического аппарата с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля. Орбита строится в два этапа. Первый этап состоит в построении орбиты перелета в рамках круговой ограниченной задачи трех тел. На втором этапе эта орбита преобразуется в решение ограниченной задачи четырех тел с учетом реальных движений Солнца, Земли и Луны. Прототип орбиты первого этапа задается в виде комбинации решения, лежащего в плоскости движения больших тел, и решения линейной системы второго порядка, описывающей малые отклонения КА от этой плоскости вдоль этого решения. Плоское решение начинается в окрестности Земли и с течением времени стремится к решению Ляпунова, существующему в окрестности точки L_2 . Орбита первого этапа ищется как решение задачи трех тел, наилучшим образом аппроксимирующее прототип в среднем квадратичном. Построенная орбита служит аналогичным прототипом на втором этапе. На обоих этапах аппроксимирующие решения строятся методом продолжения по параметру, которым служит длина интервала аппроксимации. Начальные условия аппроксимирующих решений соответствуют отлету КА с низкой околоземной орбиты с заданными расстоянием в перигее и наклоном.

I.S. Ilyin, V.V. Sazonov, A.G. Toochin. Construction of the flights from low Earth orbits to local orbits near the L_2 libration point in the Sun – Earth system. We describe the way to construct spacecraft orbits for the flight from a low Earth orbit to a halo-orbit near the L_2 libration point of the Sun –Earth system. We construct them in two stages. The first stage consists in constructing the orbit as a solution of the restricted three-body problem. On the second stage that orbit is transformed to the solution of the restricted four-body problem with real orbits of the Sun, the Earth, and the Moon. A prototype of the first stage orbit is formed by a solution lying in the orbital plane of the large bodies and a solution of the second order system that describes small deviations of the spacecraft from this plane along the plane solution. The plane solution begins near the Earth and tends with time to a Lyapunov solution that exists in the vicinity the L_2 libration point. The desired orbit is looked for as a solution of three-body problem that provides the best approximation of the prototype in the least squares sense. That orbit is an analogous prototype for the second stage. The approximating solutions are constructed in both stages by the continuation on the length of the approximation interval. Initial conditions of approximating solutions correspond to a spacecraft start from a low Earth orbit with prescribed values of the perigee distance and the inclination.

Данный препринт – продолжение работы [1]. В нем описано построение траекторий перелета космического аппарата (КА) с низкой околоземной орбиты на многообразии ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля. Траектории строятся по схеме, использованной в [1]: сначала – в рамках круговой ограниченной задачи трех тел (материальных точек), затем полученные траектории преобразовываются в решения ограниченной задачи четырех тел с реальными орбитами Солнца, Земли и Луны.

1. Гало-орбиты в окрестности точки L_2 . Рассмотрим движение трех материальных точек с массами m_1 , m_2 и m , притягивающихся по закону Ньютона. Сами точки также будем обозначать буквами m_1 , m_2 и m . Полагаем, что $m_1 > m_2$ и что масса m исчезающе мала по сравнению с m_1 и m_2 , т.е. точка m не влияет на движение точек m_1 и m_2 . Движение двух последних точек считаем круговым. Введем вращающуюся систему координат с началом в точке m_2 . Ось x этой системы направлена вдоль прямой m_1m_2 от точки m_1 к точке m_2 , ось z направлена по вектору суммарного кинетического момента точек m_1 и m_2 относительно их центра масс, ось y дополняет систему до правой. Единицей измерения длины будем считать отрезок m_1m_2 . Время обозначим τ . Единицу его измерения выберем так, чтобы период движения точек m_1 и m_2 в инерциальной системе отсчета был равен 2π . Уравнения движения КА в системе координат m_2xyz имеют вид

$$\begin{aligned} x'' - 2y' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) x &= (1-\mu) \left(1 - \frac{1}{r_1^3} \right), \\ y'' + 2x' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} - 1 \right) y &= 0, \quad z'' + \left(\frac{\mu}{r^3} + \frac{1-\mu}{r_1^3} \right) z = 0, \\ r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{(1+x)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Переменные этих уравнений – одноименные координаты КА, штрихом обозначено дифференцирование по времени τ , $\mu = m_2(m_1 + m_2)^{-1}$. Точки m_1 и m_2 служат моделью системы Солнце – Земля. Символ m_2 в зависимости от контекста означает и массу, и барицентр системы Земля – Луна. Для этой системы $\mu = 3.040424 \cdot 10^{-6}$.

Уравнения (1) имеют три стационарных решения вида $x = x_0$, $y = z = 0$, где x_0 – корень уравнения

$$x = \sqrt[3]{\frac{\mu(1+x)^2}{3-2\mu+(3-\mu)x+x^2}}.$$

В [1] и ниже рассматривается корень из интервала $(0, +\infty)$, задающий точку либрации L_2 . Для системы Солнце – Земля $x_0 = 1.007824 \cdot 10^{-2}$. В [1] построены решения уравнений (1), остающиеся длительное время вблизи точки L_2 , – так называемые гало-орбиты. Исходным пунктом построения гало-орбит послужили периодические решения Ляпунова, существующие в окрестности L_2 и имеющие $z \equiv 0$. Численное построение решений Ляпунова с периодом T сводилось к решению краевой задачи

$$x'(0) = y(0) = x'\left(\frac{T}{2}\right) = y\left(\frac{T}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

для системы, образованной первыми двумя уравнениями (1), в которых $z = 0$. Для удобства ссылок обозначим эти уравнения (1^*) . Найденные решения образуют однопараметрическое семейство, которое в [1] называлось семейством I. Параметром в нем служил период.

Решению $x = x_*(\tau)$, $y = y_*(\tau)$ семейства I сопоставим линейное уравнение второго порядка

$$z'' + F(\tau)z = 0, \quad F = \frac{\mu}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1 - \mu}{\sqrt{(1 + x)^2 + y^2}}. \quad (3)$$

Произвольное решение этого уравнения обозначим $z_*(\tau)$. Набор функций $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ зависит от трех параметров – периода T решения семейства I и начальных условий $z_*(0)$, $z'_*(0)$. Вместо периода можно использовать одно из начальных условий $x_*(0)$, $y'_*(0)$. Такие наборы функций, которым отвечают траектории в окрестности точки L_2 , использовались в [1] в качестве прототипа (первого приближения) гало-орбит.

Вычисление прототипа $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $z_*(\tau)$ состояло в интегрировании системы (1^*) , (3). Пусть прототип получен на сетке $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots$. Построение гало-орбиты по прототипу сводилось к минимизации на решениях системы (1) функционала

$$\Phi_N = \sum_{n=0}^N \{ [x(\tau_n) - x_*(\tau_n)]^2 + [y(\tau_n) - y_*(\tau_n)]^2 + [z(\tau_n) - z_*(\tau_n)]^2 + [x'(\tau_n) - x'_*(\tau_n)]^2 + [y'(\tau_n) - y'_*(\tau_n)]^2 + [z'(\tau_n) - z'_*(\tau_n)]^2 \}. \quad (4)$$

Минимизация Φ_N выполнялась методом Левенберга – Марквардта (см. [1]) по начальным условиям решения системы (1) в точке $\tau = 0$. Решения системы (1), лежащие в окрестности прототипа, сильно экспоненциально неустойчивы. По этой причине минимизация выполнялась шаг за шагом для последовательности возрастающих значений $N = N_1, N_2, \dots$. Минимизация Φ_{N_1} начиналась из точки $x(0) = x_*(0)$, $y(0) = x'(0) = 0$, $y'(0) = y'_*(0)$, $z(0) = z_*(0)$, $z'(0) = z'_*(0)$. Минимизация Φ_{N_k} при $k > 1$ начиналась из точки минимума $\Phi_{N_{k-1}}$. Процесс

заканчивался, когда решение системы (1) при $\tau > \tau_{N_k}$ начинало заметно удаляться от точки L_2 .

Найденное решение системы (1) служило прототипом решения ограниченной задачи четырех тел – Солнца, Земли, Луны и КА. Движение КА в этой задаче описывается уравнением

$$\ddot{\boldsymbol{\rho}} = -\frac{\gamma m_E \boldsymbol{\rho}}{|\boldsymbol{\rho}|^3} + \gamma m_S \left(\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|^3} - \frac{\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}|^3} \right) + \gamma m_M \left(\frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho}|^3} - \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right). \quad (5)$$

Здесь $\boldsymbol{\rho}$ – геоцентрический радиус-вектор КА, \mathbf{r} – геоцентрический радиус-вектор Луны, \mathbf{R} – гелиоцентрический радиус-вектор Земли. Уравнение (5) в скалярной форме записывалось во второй геоэквиаториальной системе координат стандартной эпохи J2000. Ее оси X и Z направлены в соответствующие точку весеннего равноденствия и северный полюс мира. Ось Y дополняет систему до правой. Функции $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ рассчитывались согласно теории DE403. Эта теория позволяет для произвольного момента времени t найти векторы \mathbf{r} , $\mathbf{r}_B = \mathbf{R} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}$, $\dot{\mathbf{r}}$ и $\dot{\mathbf{r}}_B$, где $\boldsymbol{\varepsilon} = m_M (m_E + m_M)^{-1}$, \mathbf{r}_B – гелиоцентрический радиус-вектор барицентра системы Земля – Луна. Согласно приведенным формулам, $\mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_B(t) - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}(t)$. При численном интегрировании уравнения (5) единицами измерения времени и длины служили 10^7 с и 10^{11} м. В этих единицах земной год равен 3.156 ($\approx \pi$), единица измерения скорости – 10 км/с. Числовые значения параметров уравнения (5) взяты в соответствии с теорией DE403.

Чтобы соотнести решения системы (1) с решениями уравнения (5), введем орбитальную систему координат, связанную с барицентром системы Земля – Луна. Орты базиса этой системы

$$\mathbf{i} = \frac{\mathbf{r}_B}{r_B}, \quad \mathbf{k} = \frac{\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B}{|\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B|}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \quad r_B = |\mathbf{r}_B|.$$

Производные по времени введенных ортов выражаются приближенными формулами

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \omega_0 \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = -\omega_0 \mathbf{i}, \quad \dot{\mathbf{k}} = 0, \quad \omega_0 = \frac{|\mathbf{r}_B \times \dot{\mathbf{r}}_B|}{r_B^2}.$$

Пусть $x(\tau)$, $y(\tau)$, $z(\tau)$ – представляющее интерес решение системы (1). Введем функции [1]

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{\text{ref}}(t) &= r_B(t)[x(\tau)\mathbf{i}(t) + y(\tau)\mathbf{j}(t) + z(\tau)\mathbf{k}(t)] + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{r}(t), \\ \mathbf{v}_{\text{ref}}(t) &= \{r_B(t)[n_0 x'(\tau) - \omega_0(t)y(\tau)] + \dot{r}_B(t)x(\tau)\}\mathbf{i}(t) + \\ &+ \{r_B(t)[n_0 y'(\tau) + \omega_0(t)x(\tau)] + \dot{r}_B(t)y(\tau)\}\mathbf{j}(t) + \\ &+ [r_B(t)n_0 z'(\tau) + \dot{r}_B(t)z(\tau)]\mathbf{k}(t) + \boldsymbol{\varepsilon} \dot{\mathbf{r}}(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\tau = n_0(t - t_0)$, n_0 – среднее движение точек m_1 и m_2 в модели системы Солнце – Земля, t_0 – некоторый фиксированный момент времени. Формулы (6) построены на основе формул введения координат Нехвилла в ограниченной эллиптической задаче трех тел [2, 3]. Функции $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ будем рассматривать как прототип решения уравнения (5), соответствующего выбранному решению системы (1). Поиск самого решения сводится к минимизации на решениях уравнения (5) функционала

$$\Psi_N = \sum_{n=0}^N \left[|\mathbf{p}(t_n) - \mathbf{p}_{\text{ref}}(t_n)|^2 + w |\dot{\mathbf{p}}(t_n) - \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_n)|^2 \right]. \quad (7)$$

Здесь $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ – сетка, на которой вычислен прототип. Она получена пересчетом сетки, на которой вычислено решение систем (1), из переменной τ в переменную t , $w = 10^{14} \text{ с}^2$ (в единицах численного интегрирования уравнения (5) $w = 1$).

2. Плоские траектории перелета в задаче трех тел. Похожим образом прототипы использовались для задания траекторий перелета. Начнем с плоских траекторий перелета, описываемых решениями системы (1*). В этом пункте будем рассматривать только такие траектории. Пусть $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$ – T -периодическое решение семейства I. Назовем его базовым решением и рассмотрим для него систему уравнений в вариациях (варьирование выполняется только в плоскости орбиты больших тел). Возьмем нетривиальное решение $\Delta x(\tau)$, $\Delta y(\tau)$ этой системы, отвечающее ее минимальному действительному мультипликатору ρ_{\min} . Для представляющих интерес решений семейства I этот мультипликатор – простой и лежит в пределах $0 < \rho_{\min} \ll 1$. Решение $\Delta x(\tau)$, $\Delta y(\tau)$ единственно с точностью до скалярного множителя. По определению мультипликатора имеют место соотношения [4]:

$$\Delta x(\tau + T) \equiv \rho_{\min} \Delta x(\tau), \quad \Delta y(\tau + T) \equiv \rho_{\min} \Delta y(\tau),$$

в силу которых $\Delta x(\tau) \rightarrow 0$, $\Delta y(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$ и $\Delta x(\tau) \rightarrow \infty$, $\Delta y(\tau) \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow -\infty$.

Обозначим $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$ решения системы (1*) с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_*(0) + c \Delta x(0), & y(0) &= y_*(0) + c \Delta y(0), \\ x'(0) &= x'_*(0) + c \Delta x'(0), & y'(0) &= y'_*(0) + c \Delta y'(0). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь c – варьируемый параметр. При малом $|c|$ и достаточно больших по модулю, но отрицательных значениях τ решение $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$ существенно отличается от базового решения $x_*(\tau)$, $y_*(\tau)$; при малом $|c|$ и умеренно больших значениях τ это решение лежит в малой окрестности базового решения. При любом $c \neq 0$ и $\tau \rightarrow +\infty$ решение $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$ покинет малую окрестность базового решения вследствие неустойчивости последнего и нелинейных эффек-

тов. Однако, выбирая подходящим образом c , интервал близости этих решений можно сделать большим. Выбор можно осуществить таким образом, что то же решение $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$ при некоторых $\tau < 0$ окажется вблизи точки m_2 ($x = y = 0$). Выполнение первого из этих условий обеспечивается достаточной малостью $|c|$. Второе условие выполняется на множестве интервалов значений c , которые стягиваются к точке $c = 0$ и длина которых стремится к нулю. Эти интервалы находятся в результате численных экспериментов.

Эксперименты показали, что попасть в достаточно малую окрестность точки m_2 можно только при специальном выборе базового решения. А именно, оно должно значительно отклоняться от точки L_2 . Иными словами, чтобы уравнение

$$x_1^2(\tau, c) + y_1^2(\tau, c) = A^2 \quad (9)$$

относительно τ имело корень при сравнительно малых значениях A/x_0 и $|c|$, величина $|y'_*(0)|$ (или, что эквивалентно $|x_*(0) - x_0|$) должна быть достаточно большой.

Пример решения $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$, проходящего вблизи точки m_2 и являющегося на некотором отрезке времени гало-орбитой, приведен на рис. 1. В левой и средней частях рисунка изображены графики координат и компонент скорости точки m в этом решении; в правой части изображена траектория точки m в плоскости (x, y) . Кривые на рисунке представлены в размерном виде, отвечающем системе Солнце – Земля. Правильный овал в правой части – изображение окружности с центром в точке m_2 и радиусом 100 тыс. км. Минимальная длина отрезка m_2m – 7 тыс. км. В этом примере начальные условия (8):

$$\begin{aligned} x(0) &= 7.86062655881\text{E-}3, & y(0) &= -2.6518353735\text{E-}7, \\ x'(0) &= 8.7536999685\text{E-}8, & y'(0) &= 1.279326165035\text{E-}2. \end{aligned}$$

Начальные условия базового решения:

$$x(0) = 7.8606528502018\text{E-}3, \quad y'(0) = 1.279320861342\text{E-}2.$$

3. Пространственные траектории перелета в задаче трех тел. Отправляясь от плоских решений $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$, можно построить пространственные решения системы (1), которые при $\tau < 0$ проходят вблизи точки m_2 а на некотором отрезке полуоси $0 \leq \tau$ являются гало-орбитами. Построение выполняется по схеме, описанной в п. 1: сначала задается прототип, затем ищется решение системы (1), близкое к нему в смысле метода наименьших квадратов.

Функции прототипа для переменных x и y – это подходящее решение $x_1(\tau, c)$, $y_1(\tau, c)$. Оно рассматривается на интервале $\tau_1 \leq \tau$, где τ_1 – наибольший отрицательный корень уравнения (9) для $A = 100$ тыс. км. Функция прототипа для переменной z – решение уравнения (3), в котором $x = x_1(\tau, c)$, $y = y_1(\tau, c)$. Это решение обозначим $z_1(\tau)$. Оно также рассматривается на интервале $\tau_1 \leq \tau$ и

задается начальными условиями в точке τ_1 . Значения $z_1(\tau_1)$, $z'_1(\tau)$ выбираются из дополнительных соображений так, чтобы получить траекторию перелета с нужными кеплеровыми геоцентрическими элементами в перигее. Полагаем, что эти элементы практически совпадают с кеплеровыми геоцентрическими элементами в момент τ_1 . Из этих соображений и было выбрано указанное выше значение A . Подчеркнем, что здесь имеются в виду именно геоцентрические, а не m_2 -центрические элементы. Геоцентрические элементы рассчитываются в рамках описанной выше ограниченной задачи четырех материальных точек. Расчетные формулы будут приведены ниже.

Построение перелетной траектории по выбранному прототипу сводится к минимизации функционала (ср. (4))

$$\Phi_N = \sum_{n=1}^N \{ [x(\tau_n) - x_1(\tau_n, c)]^2 + [y(\tau_n) - y_1(\tau_n, c)]^2 + [z(\tau_n) - z_1(\tau_n)]^2 + [x'(\tau_n) - x'_1(\tau_n, c)]^2 + [y'(\tau_n) - y'_1(\tau_n, c)]^2 + [z'(\tau_n) - z'_1(\tau_n)]^2 \}. \quad (10)$$

Здесь $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \dots$ – сетка, на которой вычислены функции прототипа. Минимизация Φ_N выполнялась методом Левенберга – Марквардта по начальным условиям решения системы (1), параметризованным соотношениями

$$\begin{aligned} x(\tau_1) &= A \cos p_1, & y(\tau_1) &= A \sin p_1, & z(\tau_1) &= p_4, \\ x'(\tau_1) &= p_2, & y'(\tau_1) &= p_3, & z'(\tau_1) &= p_5. \end{aligned} \quad (11)$$

Параметры p_j при минимизации не были свободными. Они выбирались так, чтобы перигей пролетной траектории и ее наклонение в системе J2000 принимали заданные значения. Эти условия были формализованы следующим образом. Выбирался момент времени t_0 , и по формулам (6) при $t_1 = t_0 + \tau_1/n_0$ вычислялись векторы $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t_1)$, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t_1)$. Их компоненты выражались через параметры p_j . Затем находились величины

$$\mathbf{c} = \mathbf{p}_{\text{ref}}(t_1) \times \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_1) = (c_X, c_Y, c_Z), \quad h = |\mathbf{v}_{\text{ref}}(t_1)|^2 - \frac{2\gamma m_E}{|\mathbf{p}_{\text{ref}}(t_1)|}.$$

Здесь компоненты вектора \mathbf{c} относятся к системе J2000. Обозначим r_π заданное значение перигея, i – заданное значение наклонения. Указанные выше условия на радиус перигея и наклонение задаются соотношениями

$$\sqrt{c_X^2 + c_Y^2} - c_Z \tan i = 0, \quad c_X^2 + c_Y^2 + c_Z^2 - r_\pi^2 h = 2\gamma m_E r_\pi. \quad (12)$$

Эти соотношения рассматривались как ограничения, накладываемые на параметры p_j .

Минимизация функционала (10) выполнялась методом Левенберга – Марквардта. Использовались два варианта минимизации. В первом функционал рассматривался как функция p_1 , p_2 и p_3 . На каждой итерации алгоритма минимизации соотношения (12) разрешались относительно p_4, p_5 ; поправки

$\Delta p_4, \Delta p_5$ выражались через поправки $\Delta p_1, \Delta p_2, \Delta p_3$, и эти соотношения использовались для уменьшения числа неизвестных в линейных уравнениях, определяющих значения указанных поправок. Если разрешить уравнения (12) относительно p_4, p_5 не удавалось, то применялся второй вариант. Функционал (10) рассматривался как функция всех 5 параметров; на каждой итерации алгоритма при решении линейных уравнений относительно поправок Δp_j линеаризованные соотношения (11) учитывались как штраф, после вычисления новых значений параметров $p_j + \Delta p_j$ в них вносилась дополнительная поправка с минимальной евклидовой нормой так, чтобы удовлетворить соотношениям (12). Подробности см. в [1].

Чтобы процесс минимизации функционала (10) с учетом ограничений (12) сходился при достаточно больших значениях N , необходимо правильно выбрать функции прототипа и момент t_0 . Выбор функций $x_1(\tau, c), y_1(\tau, c)$ был описан выше. Выбор начальных значений $z_1(\tau_1), z_1'(\tau_1)$ при фиксированном t_0 выполнялся так. В формулы (6) подставлялись величины

$$t = t_0 + \tau_1 / n_0 \equiv t_1, \quad x(\tau) = x_1(\tau_1, c), \quad y(\tau) = y_1(\tau_1, c), \quad z(\tau) = z_1(\tau_1), \\ x'(\tau) = x_1'(\tau_1, c), \quad y'(\tau) = y_1'(\tau_1, c), \quad z'(\tau) = z_1'(\tau_1),$$

причем $z_1'(\tau_1)$ считалась варьируемым параметром, а $z_1(\tau_1)$ подлежала определению. Заданные формулами (6) векторы $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t_1), \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_1)$ подставлялись в первое соотношение (12), которое аналитически преобразовывалось в квадратное уравнение относительно $z_1(\tau_1)$. Уравнение решалось в каждом узле мелкой сетки для параметра $z_1'(\tau_1)$. Этот параметр и отвечающий ему корень $z_1(\tau_1)$ подставлялись в $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t_1), \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_1)$, а последние – во второе соотношение (12). Узел сетки, в котором второе соотношение (12) выполнялось наиболее точно, давал искомые значения $z_1(\tau_1), z_1'(\tau_1)$. Для надежности они затем уточнялись посредством численного решения системы (12) методом Ньютона подобно описанному выше определению параметров p_4, p_5 в первом варианте минимизации функционала (10). Варьирование параметра $z_1'(\tau_1)$ можно заменить незначительным варьированием момента t_0 . Варьирование этого момента в широких пределах – предмет отдельного численного эксперимента. Выбирая t_0 , кроме соотношений (12), надо проверять и ряд других условий, которые выражаются неравенствами и не очень стесняют выбор прототипа.

Примеры двух перелетных траекторий (решений системы (1)), построенных описанным способом для $r_\pi = 6578$ км, $i = 51.6^\circ$, приведены на рис. 2 – 7. Функции прототипа $x_1(\tau, c), y_1(\tau, c)$ для обеих траекторий – это плоское решение, представленное на рис. 1. Для траектории, представленной на рис. 2 – 4,

$$z_1(\tau_1) = 3.199654827448\text{E-}5, \quad z_1'(\tau_1) = 1.509750067329\text{E-}2;$$

для траектории на рис. 5 – 7

$$z_1(\tau_1) = 2.300796924160E-4, \quad z_1'(\tau_1) = 3.998932992626E-2.$$

На рис. 2, 5 в единых координатных осях изображены графики решений системы (1) и функций прототипа. На рис. 3, 6 повторены графики решений системы (1). На рис. 4, 7 изображены проекции этих решений на плоскости (x, y) и (y, z) .

4. Траектории перелета в задаче четырех тел. Построение траекторий перелета в рамках задачи четырех материальных точек сводилось к минимизации функционала

$$\Psi_N = \sum_{n=1}^N \left[|\mathbf{p}(t_n) - \mathbf{p}_{\text{ref}}(t_n)|^2 + w |\dot{\mathbf{p}}(t_n) - \mathbf{v}_{\text{ref}}(t_n)|^2 \right] \quad (13)$$

на решениях уравнения (5). Это – прежний функционал (7), только функциями прототипа $\mathbf{p}_{\text{ref}}(t)$, $\mathbf{v}_{\text{ref}}(t)$ в нем служат пересчитанные в систему J2000 по формулам (6) перелетные решения системы (1), и нумерация точек сетки, на которой заданы функции прототипа, начинается с 1. Начальная точка t_1 этой сетки совпадает с точкой t_1 , введенной в предыдущем пункте. При минимизации начальные условия решений уравнения (5) задавались в точке t_1 и были стеснены ограничениями (12), в которых принималось

$$\mathbf{c} = \mathbf{p}(t_1) \times \dot{\mathbf{p}}(t_1) = (c_x, c_y, c_z), \quad h = |\dot{\mathbf{p}}(t_1)|^2 - \frac{2\gamma m_E}{|\mathbf{p}(t_1)|}. \quad (14)$$

Минимизация функционала (13) выполнялась методом Левенберга – Марквардта. Использовались два варианта минимизации, аналогичные вариантам минимизации функционала (10). В первом варианте функционал рассматривался как функция начальных условий $X(t_1)$, $Y(t_1)$, $\dot{X}(t_1)$ и $\dot{Y}(t_1)$. На каждой итерации алгоритма минимизации соотношения (12), (14) разрешались относительно $Z(t_1)$, $\dot{Z}(t_1)$; поправки $\Delta Z(t_1)$, $\Delta \dot{Z}(t_1)$ выражались через поправки к независимым координатам, и эти соотношения использовались для уменьшения числа неизвестных в линейных уравнениях, определяющих значения указанных вариаций. Если разрешить уравнения (12), (14) относительно $Z(t_1)$, $\dot{Z}(t_1)$ не удавалось, то применялся второй вариант. Функционал (13) рассматривался как функция всех 6 начальных условий; на каждой итерации алгоритма при решении линейных уравнений относительно поправок к начальным условиям линеаризованные соотношения (12), (14) учитывались как штраф, после вычисления новых значений начальных условий в них вносилась поправка с минимальной евклидовой нормой так, чтобы удовлетворить соотношениям (12), (14). Подробности приведены в [1].

Примеры двух перелетных траекторий – решений уравнения (5), построенных описанным способом для $r_\pi = 6578$ км, $i = 51.6^\circ$, приведены на рис. 8 – 13. Прототип при построении траектории на рис. 8 – 10 задавался с использованием решения системы (1), представленного на рис. 3. При построении траектории на рис. 11 – 13 прототип был задан с помощью решения системы (1), приведенного на рис. 6. Начальные условия траекторий указаны в п. 5 (решения

1 и 4). На рис. 8, 11 в единых координатных осях изображены графики решений уравнения (5) и функций прототипа. На рис. 9, 12 приведены графики решений уравнения (5), пересчитанных в орбитальную систему координат барицентра системы Земля – Луна. На рис.10, 13 изображены проекции рассматриваемых решений на плоскости (x, y) и (y, z) этой системы.

5. Начальные условия перелетных траекторий. Ниже приводятся начальные условия нескольких траекторий перелета с низкой околоземной орбиты на гало-орбиту в окрестности точки либрации системы Земля – Луна. Начальные условия заданы в геоцентрической системе координат J2000. Единица измерения длины – 10^{11} м, скорости – 10^4 м/с. Для приведенных решений указаны также элементы начальной околоземной орбиты: e – эксцентриситет; Ω и ω – долгота восходящего узла и аргумент широты перицентра в геоцентрической системе координат J2000. Все решения имеют радиус перигея 6578 км, скорость в перигее 10.98 км/с и наклонение в системе J2000 51.6° .

Решение 1 (рис. 8 – 10). Начальная точка t_1 : 14:51:48.902 UTC 2014.09.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.6893384473285379E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.6202626901221425E-1, \\ Y(t_1) &= -3.5344449872940259E-6, & \dot{Y}(t_1) &= 4.5341290229115656E-2, \\ Z(t_1) &= 4.3630159535334155E-5, & \dot{Z}(t_1) &= 7.0166006882750881E-2 \\ e &= 0.9892, & \Omega &= -2.254^\circ, & \omega &= -147.7^\circ. \end{aligned}$$

Решение 2. Начальная точка t_1 : 10:50:04.786 UTC 2014.09.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.6829078352882987E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.5070558059582254E-1, \\ Y(t_1) &= -8.0105279549206740E-5, & \dot{Y}(t_1) &= 2.5590399601850009E-2, \\ Z(t_1) &= 1.8085112695817187E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.0373274992508443E-1, \\ e &= 0.9894, & \Omega &= -1.321^\circ, & \omega &= -137.8^\circ. \end{aligned}$$

Решение 3. Начальная точка t_1 : 15:11:44.786 UTC 2014.09.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.6786023050056319E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.4506001153515360E-1, \\ Y(t_1) &= -1.0225990986960819E-4, & \dot{Y}(t_1) &= 2.0460494494778627E-2, \\ Z(t_1) &= 2.2795685077374465E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.1372503681824765E-1 \\ e &= 0.9895, & \Omega &= -1.673^\circ, & \omega &= -134.5^\circ. \end{aligned}$$

Решение 4 (рис. 10 – 13). Начальная точка t_1 : 21:06:44.786 UTC 2014.09.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.6622272989130870E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.3900558257169037E-1, \\ Y(t_1) &= -1.2303462751604192E-4, & \dot{Y}(t_1) &= 1.5998016679833988E-2, \\ Z(t_1) &= 2.7445983934745738E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.2288341133292730E-1, \\ e &= 0.9896, & \Omega &= -2.016^\circ, & \omega &= -131.402^\circ. \end{aligned}$$

Решение 5. Начальная точка t_1 : 09:56:33.060 UTC 2014.09.30,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.5853234411678029E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.4228895805157527E-1, \\ Y(t_1) &= 1.7758778025442431E-4, & \dot{Y}(t_1) &= 9.1694342504909309E-2, \\ Z(t_1) &= 1.1725622209670588E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 8.8465581952371585E-2 \\ e &= 0.9897, & \Omega &= 5.026^\circ, & \omega &= -142.4^\circ. \end{aligned}$$

Решение 6. Начальная точка t_1 : 11:36:23.640 UTC 2014.09.30,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 9.5672078700589279E-4, & \dot{X}(t_1) &= 2.2141922588644339E-1, \\ Y(t_1) &= 4.1550802397158936E-5, & \dot{Y}(t_1) &= 5.6515418772985025E-2, \\ Z(t_1) &= 3.5963983759700948E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.4043424866733521E-1, \\ e &= 0.9901, & \Omega &= -1.483^\circ, & \omega &= -125.1^\circ. \end{aligned}$$

Решение 7. Начальная точка t_1 : 20:37:58.652 UTC 2014.10.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 8.3367368342151721E-4, & \dot{X}(t_1) &= 1.7362118290072736E-1, \\ Y(t_1) &= 3.1354768451996139E-4, & \dot{Y}(t_1) &= 1.1911292657836939E-1, \\ Z(t_1) &= 4.8014288466547928E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.6766372510515677E-1, \\ e &= 0.9895, & \Omega &= -4.682^\circ, & \omega &= -114.4^\circ. \end{aligned}$$

Решение 8. Начальная точка t_1 : 20:37:58.651 UTC 2014.10.15,

$$\begin{aligned} X(t_1) &= 8.53310628173240E-4, & \dot{X}(t_1) &= 1.74037410334160E-1, \\ Y(t_1) &= 3.19714760026519E-4, & \dot{Y}(t_1) &= 1.17781966851762E-1, \\ Z(t_1) &= 4.79567298724719E-4, & \dot{Z}(t_1) &= 1.63971899415683E-1, \\ e &= 0.9895, & \Omega &= -4.113^\circ, & \omega &= -115.4^\circ. \end{aligned}$$

Литература

1. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации L_2 системы Солнце – Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 65. 28 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-65>
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., «Наука», 1978.
3. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
4. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.

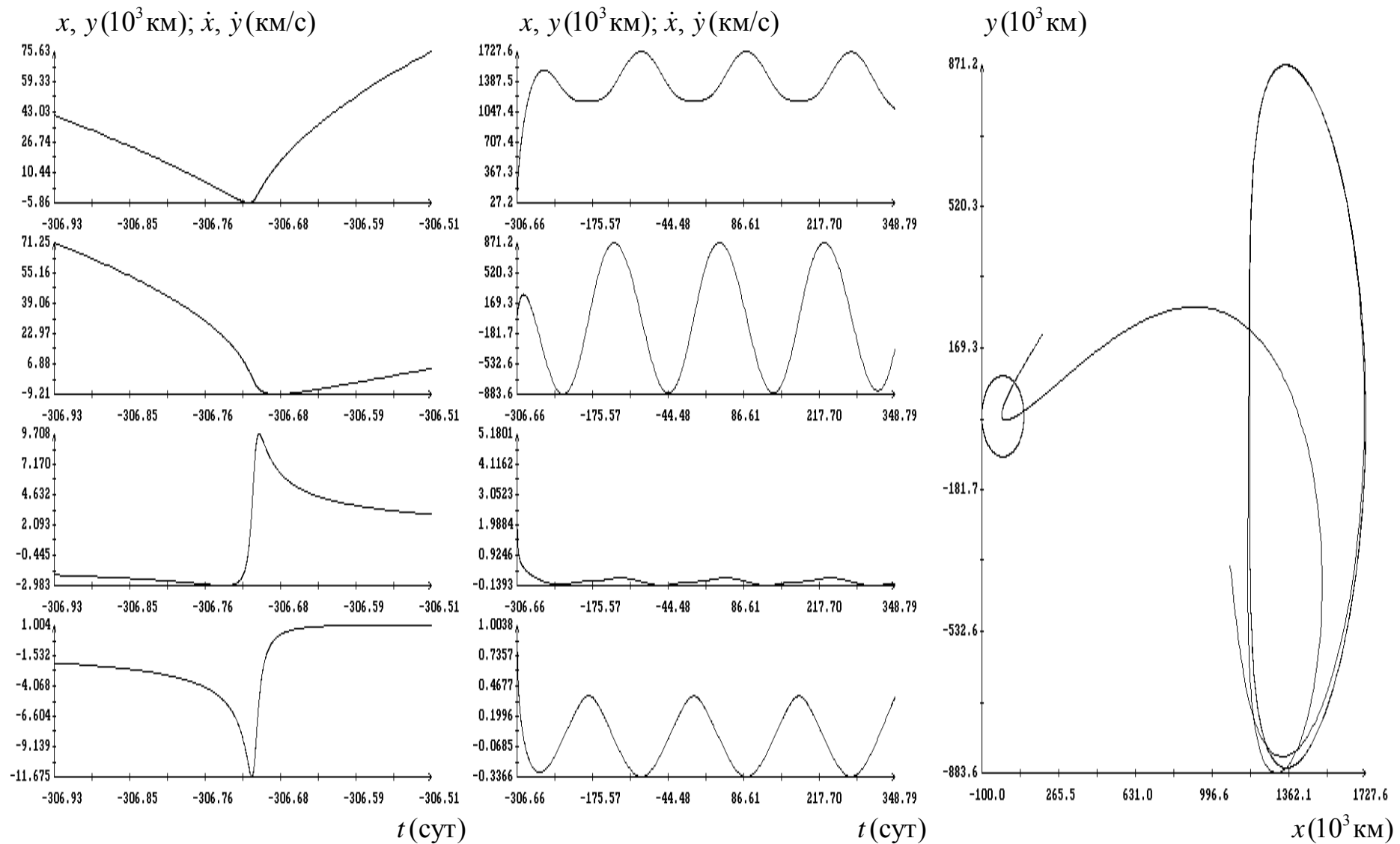


Рис. 1. Плоская перелетная траектория, рассчитанная в рамках задачи трех тел. Графики слева иллюстрируют сближение точки m с точкой m_2 , графики в центре иллюстрируют траекторию после сближения

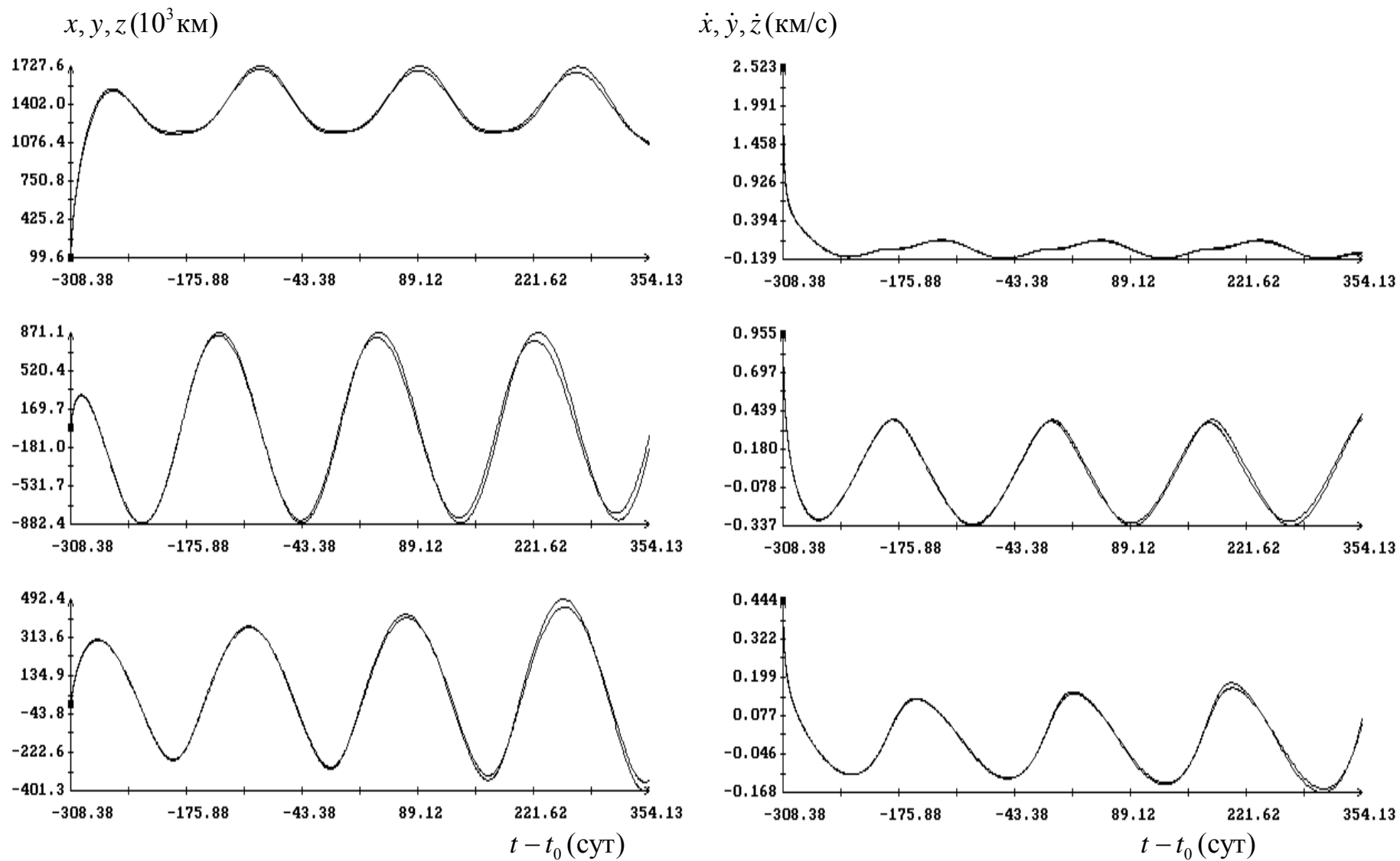


Рис. 2. Перелетная траектория, рассчитанная в рамках задачи трех тел и ее прототип; $t_0 = 0$ с UTC 2015.07.20.
Начальный момент движения (отмечен маркером) 14:51:48.902 UTC 2014.09.15

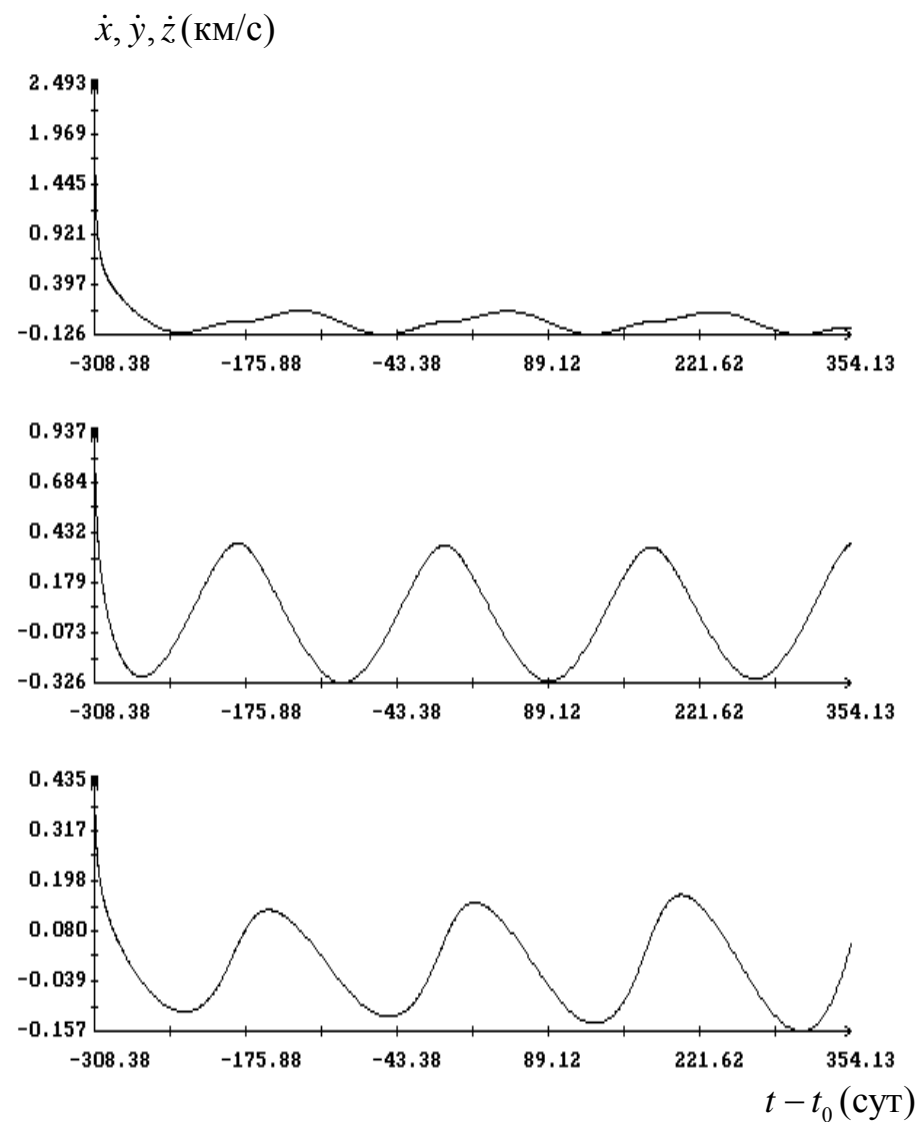
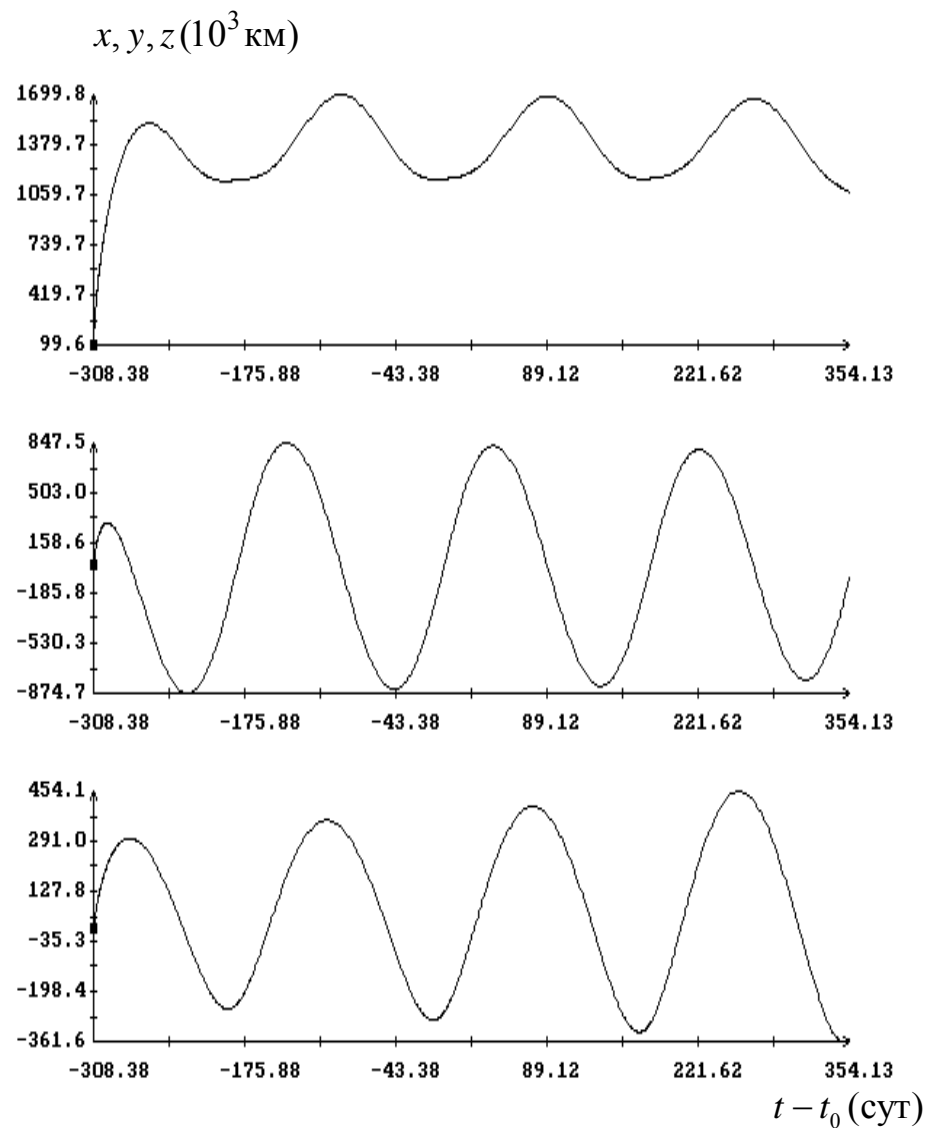


Рис. 3. Перелетная траектория, рассчитанная в рамках задачи трех тел; $t_0 = 0$ с UTC 2015.07.21.
 Начальный момент движения (отмечен маркером) 14:51:48.902 UTC 2014.09.15

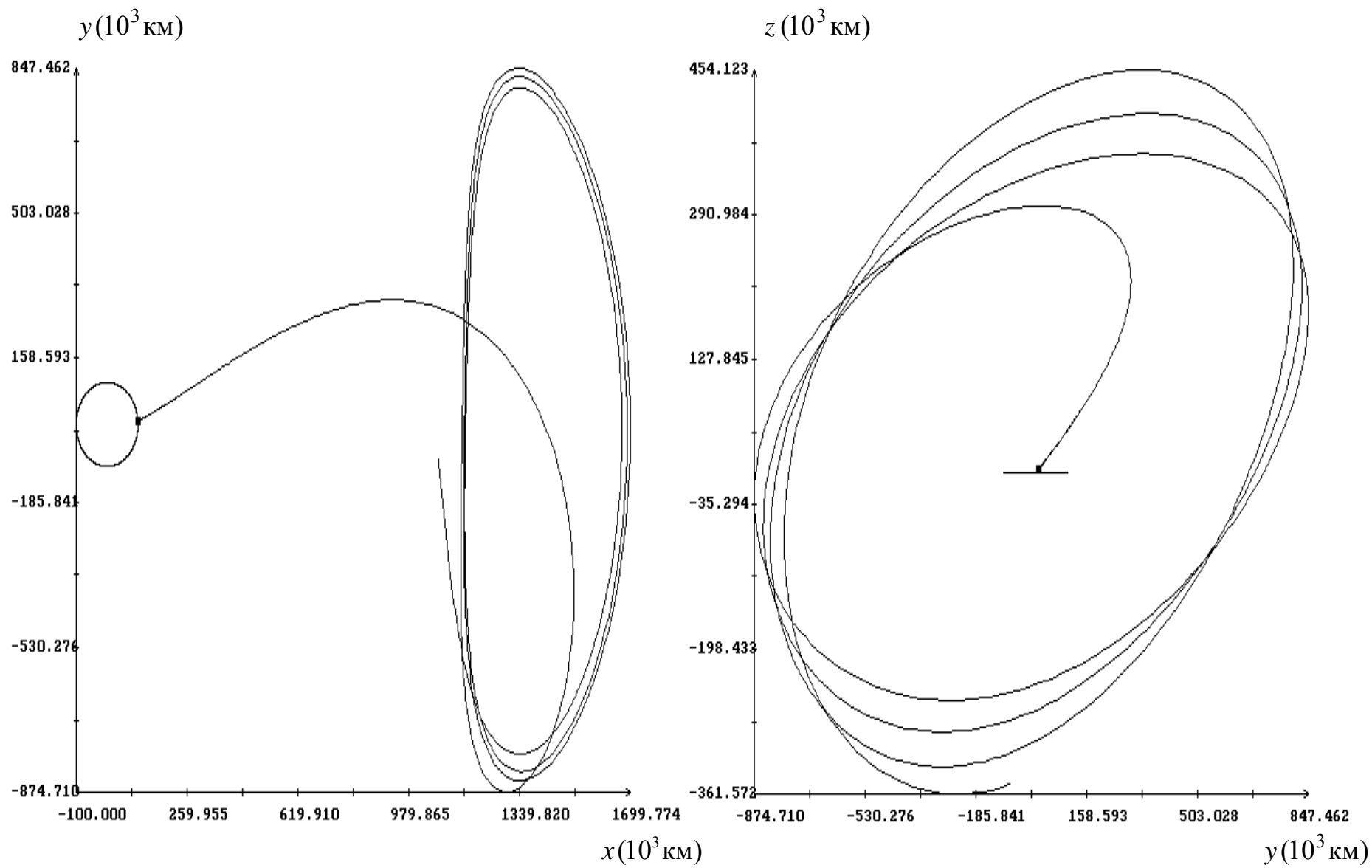


Рис. 4. Проекция перелетной траектории (см. рис. 3) на плоскости (x, y) и (y, z)

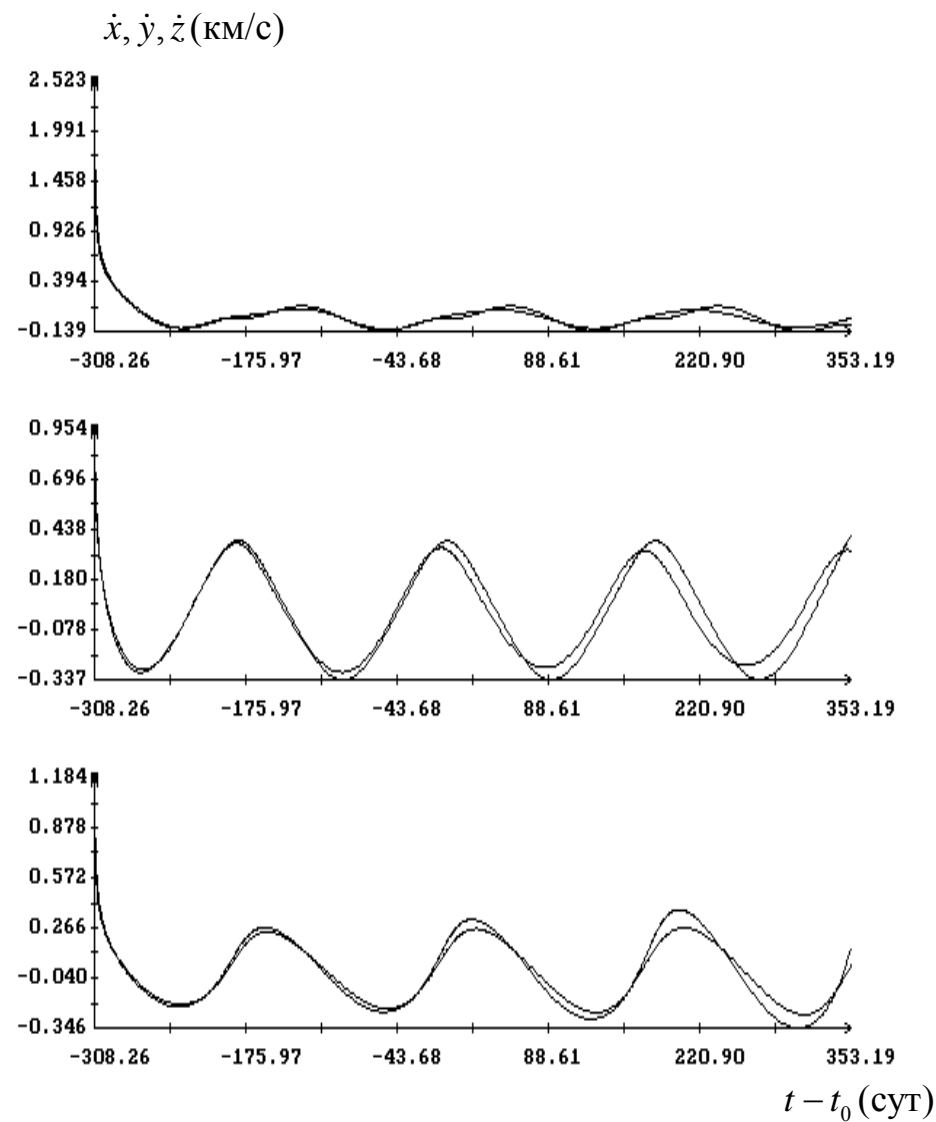
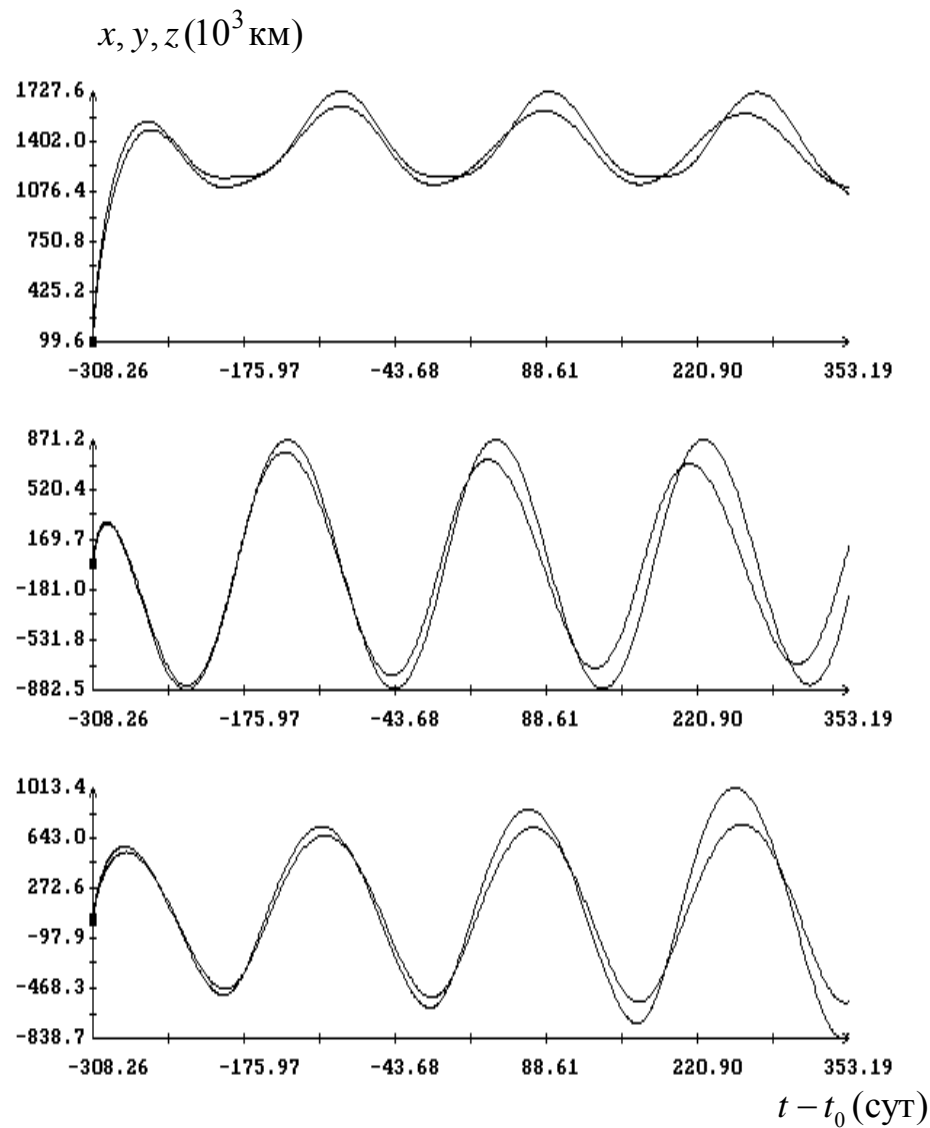
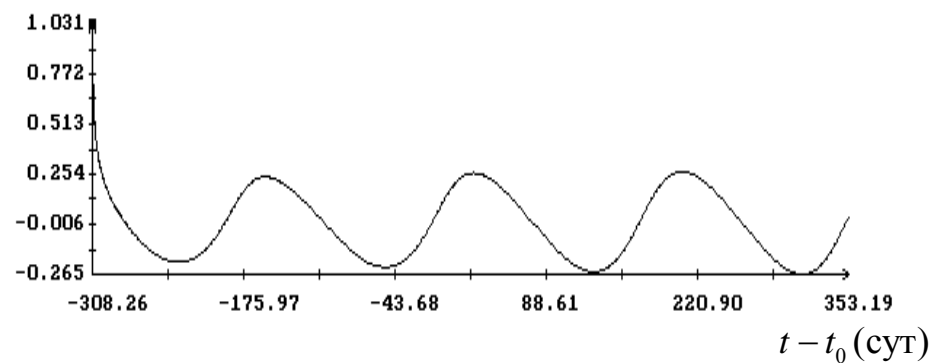
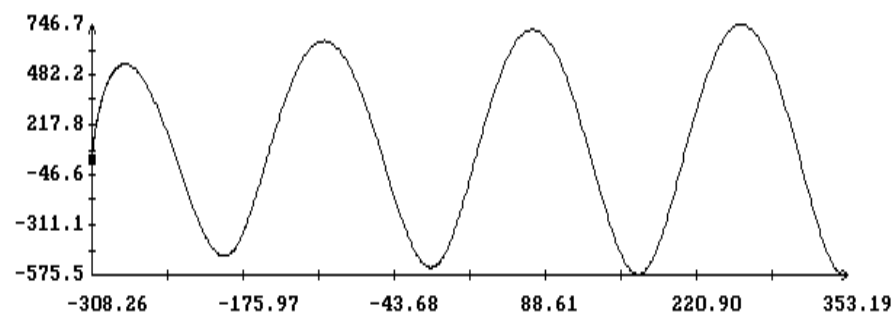
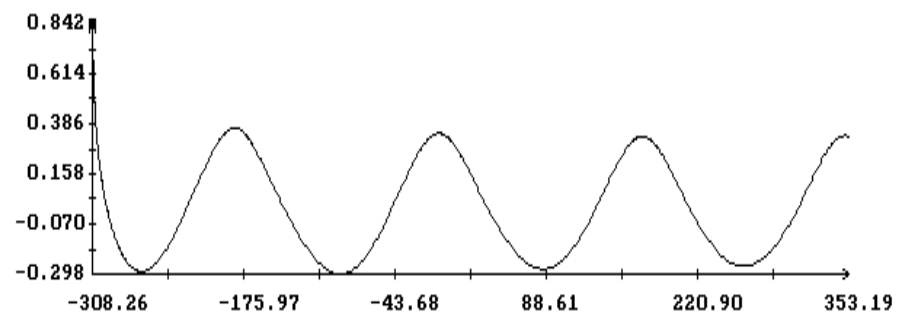
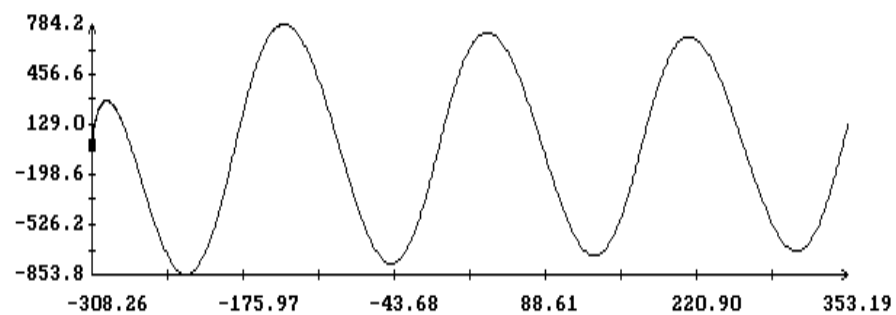
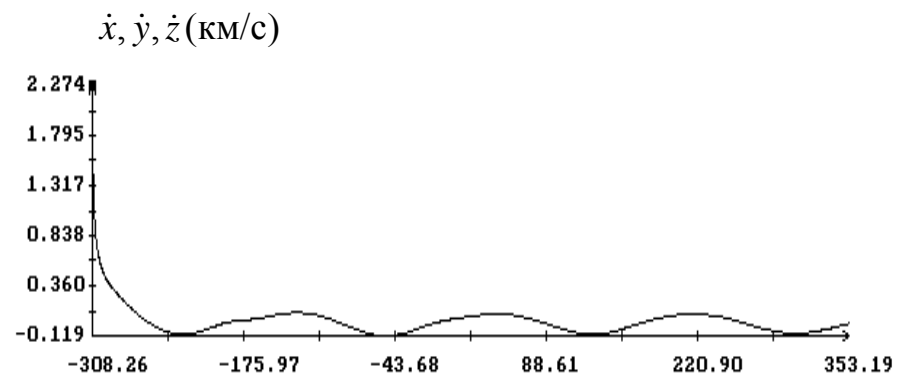
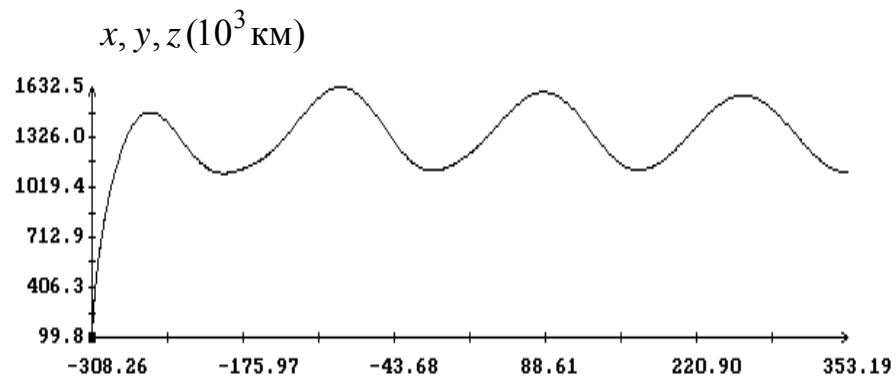


Рис. 5. Перелетная траектория, рассчитанная в рамках задачи трех тел и ее прототип; $t_0 = 12300\text{с UTC 2015.07.21}$.
 Начальный момент движения (отмечен маркером) 21:06:44.786 UTC 2014.09.15



$t - t_0$ (сут)

$t - t_0$ (сут)

Рис. 6. Перелетная траектория, рассчитанная в рамках задачи трех тел; $t_0 = 12300$ с UTC 2015.07.21.

Начальный момент движения (отмечен маркером) 21:06:44.786 UTC 2014.09.15

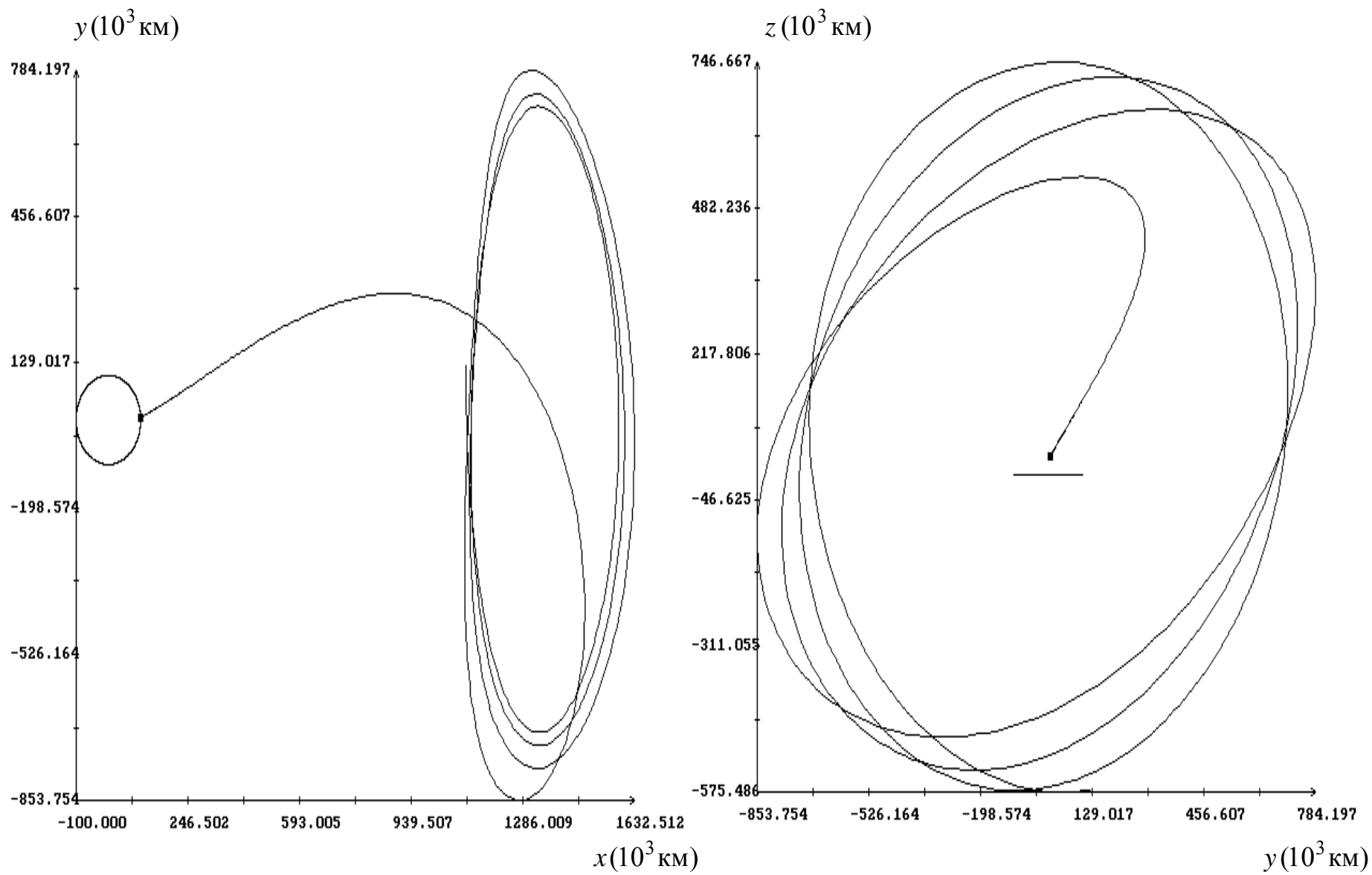


Рис. 7. Проекция перелетной траектория (см. рис. 6) на плоскости (x, y) и (y, z)

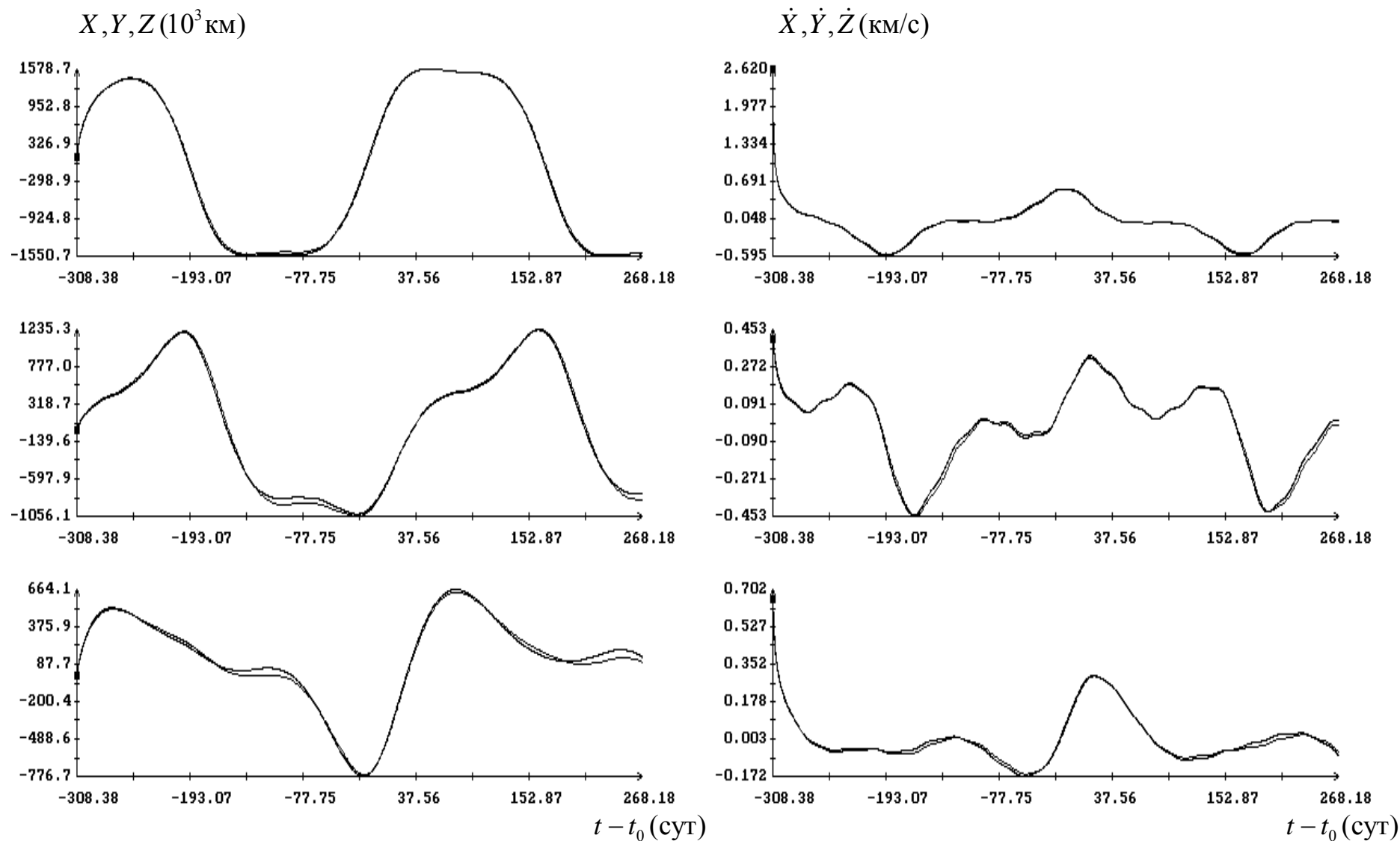


Рис. 8. Решение уравнения (5) и функции прототипа в системе координат J2000; $t_0 = 0$ с UTC 2015.07.21.
Начальный момент движения (отмечен маркером) 14:51:48.902 UTC 2014.09.15

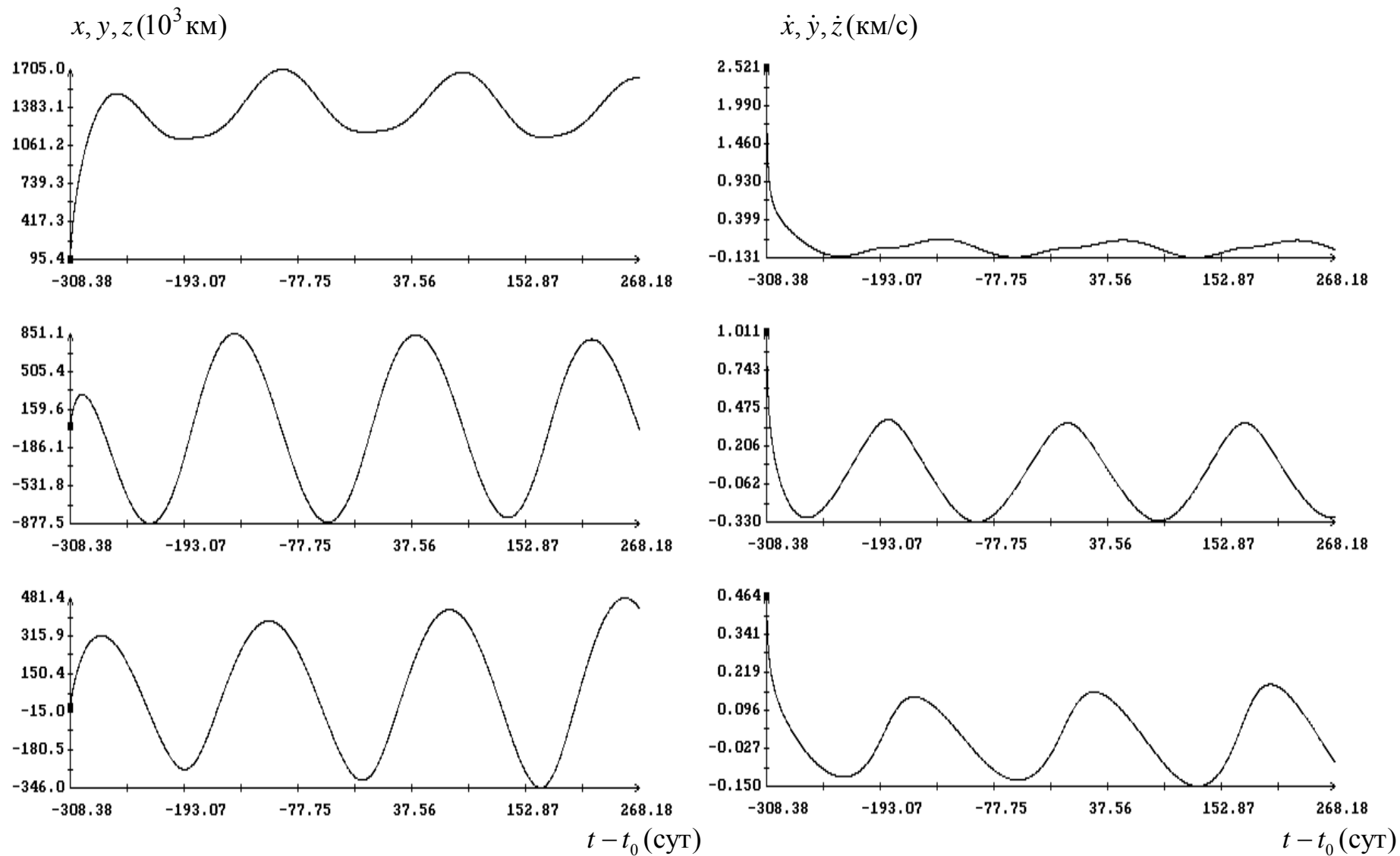


Рис. 9. Решение уравнения (5) (рис. 8), пересчитанное в орбитальную систему координат барицентра системы Земля – Луна; $t_0 = 0$ с UTC 2015.07.21. Начальный момент движения (отмечен маркером) 14:51:48.902 UTC 2014.09.15

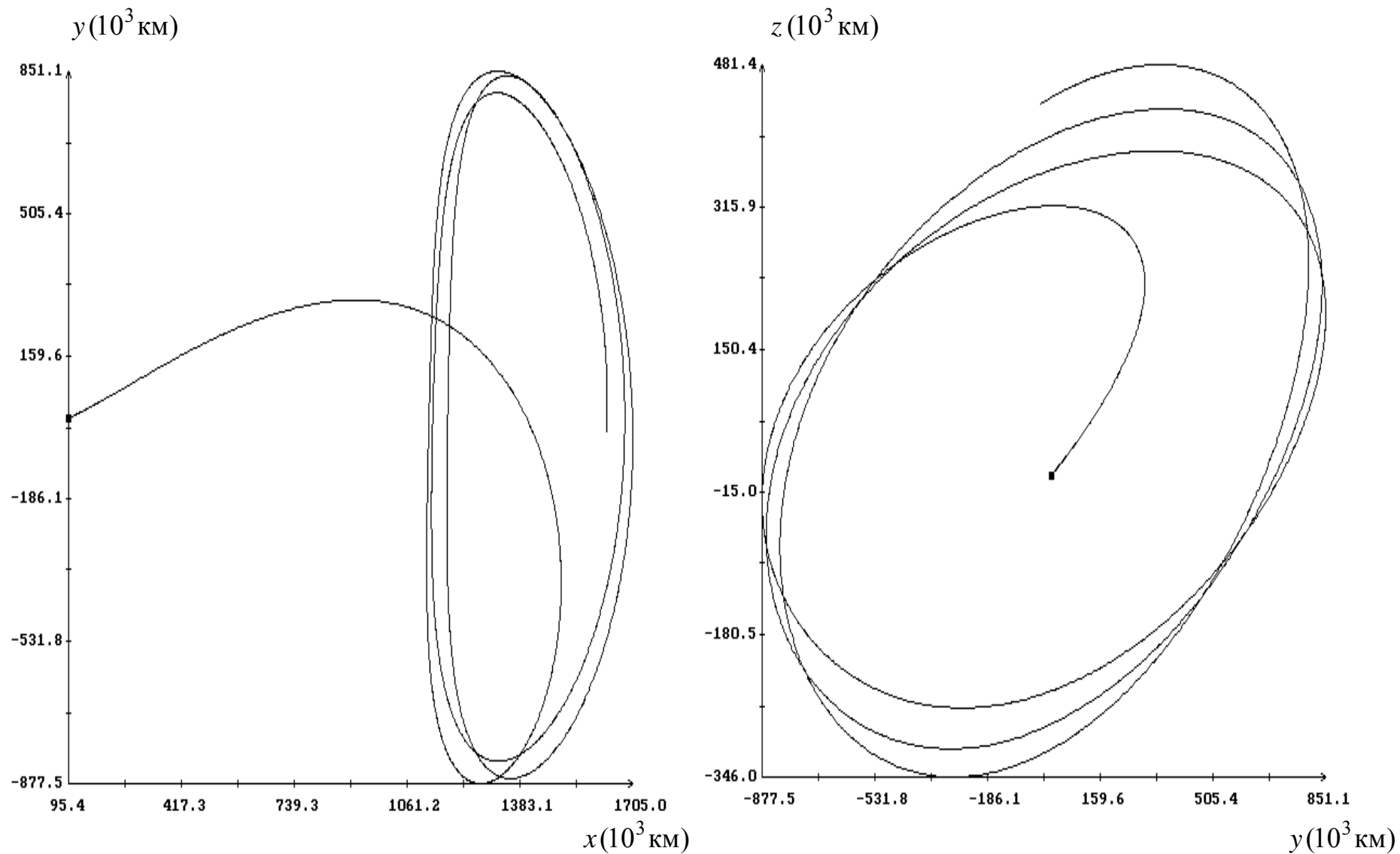
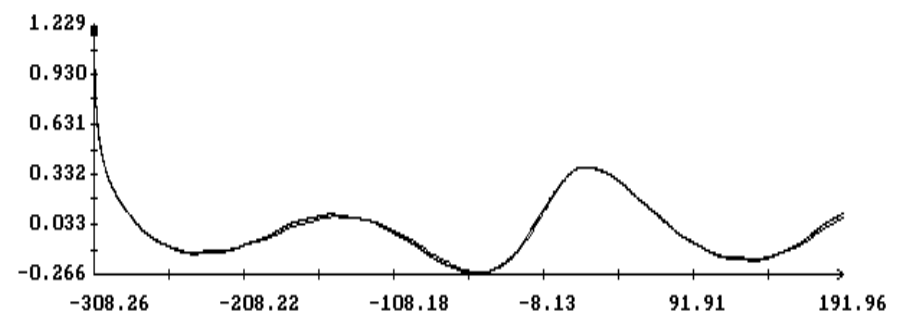
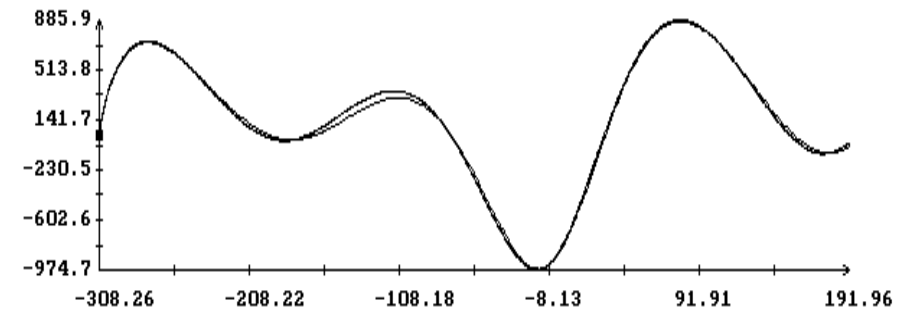
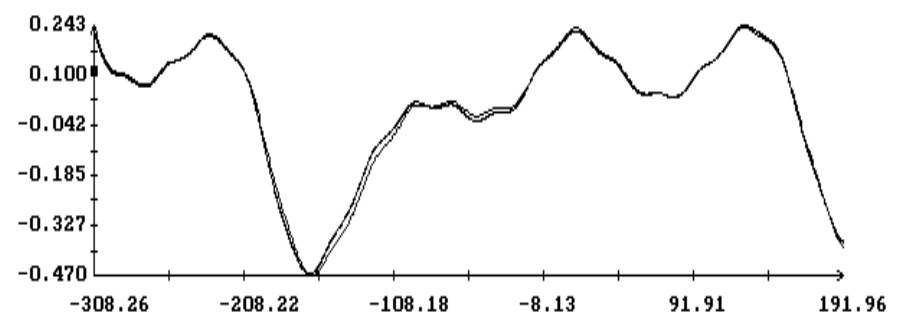
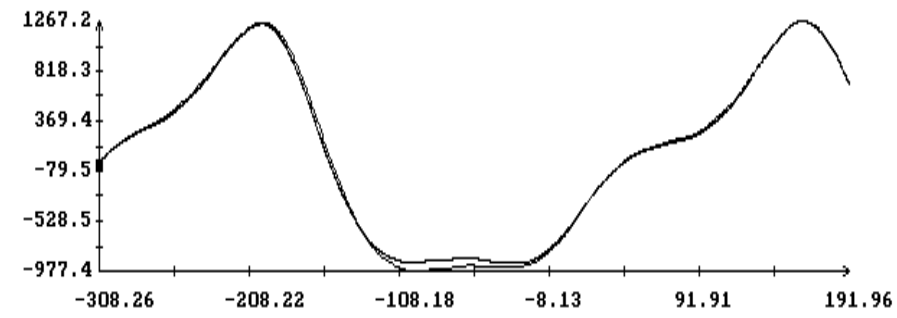
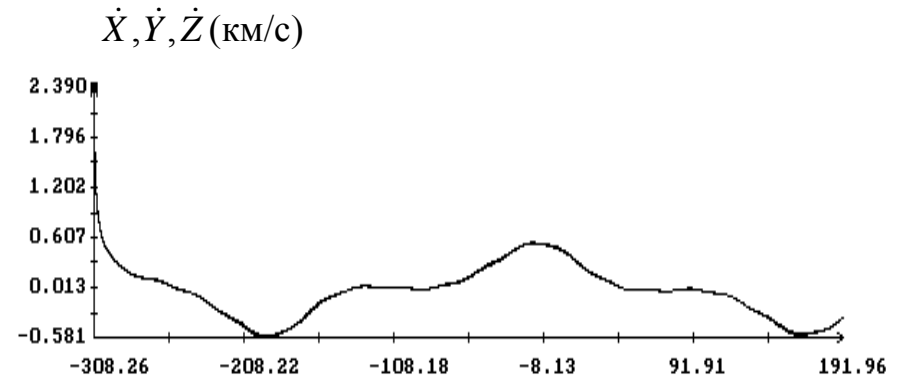
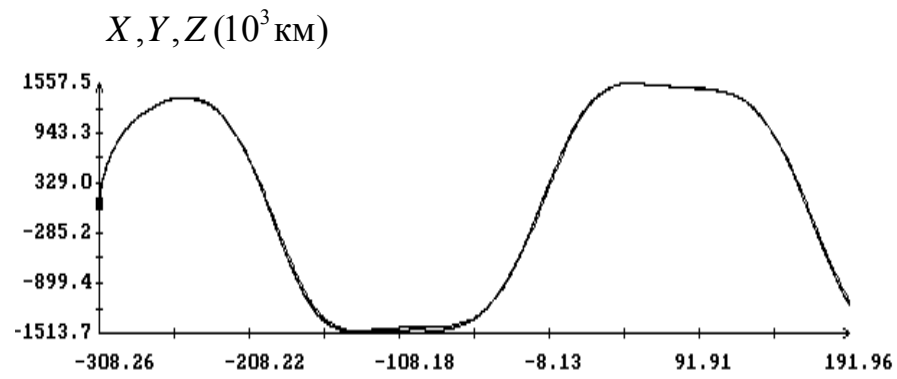


Рис. 10. Проекция решения уравнения (5) (рис. 8) на плоскости (x, y) и (y, z) орбитальной системы координат барицентра системы Земля – Луна



$t - t_0$ (сут)

$t - t_0$ (сут)

Рис. 11. Решение уравнения (5) и функции прототипа в системе координат J2000; $t_0 = 12300$ с UTC 2015.07.21.
Начальный момент движения (отмечен маркером) 21:06:44.786 UTC 2014.09.15

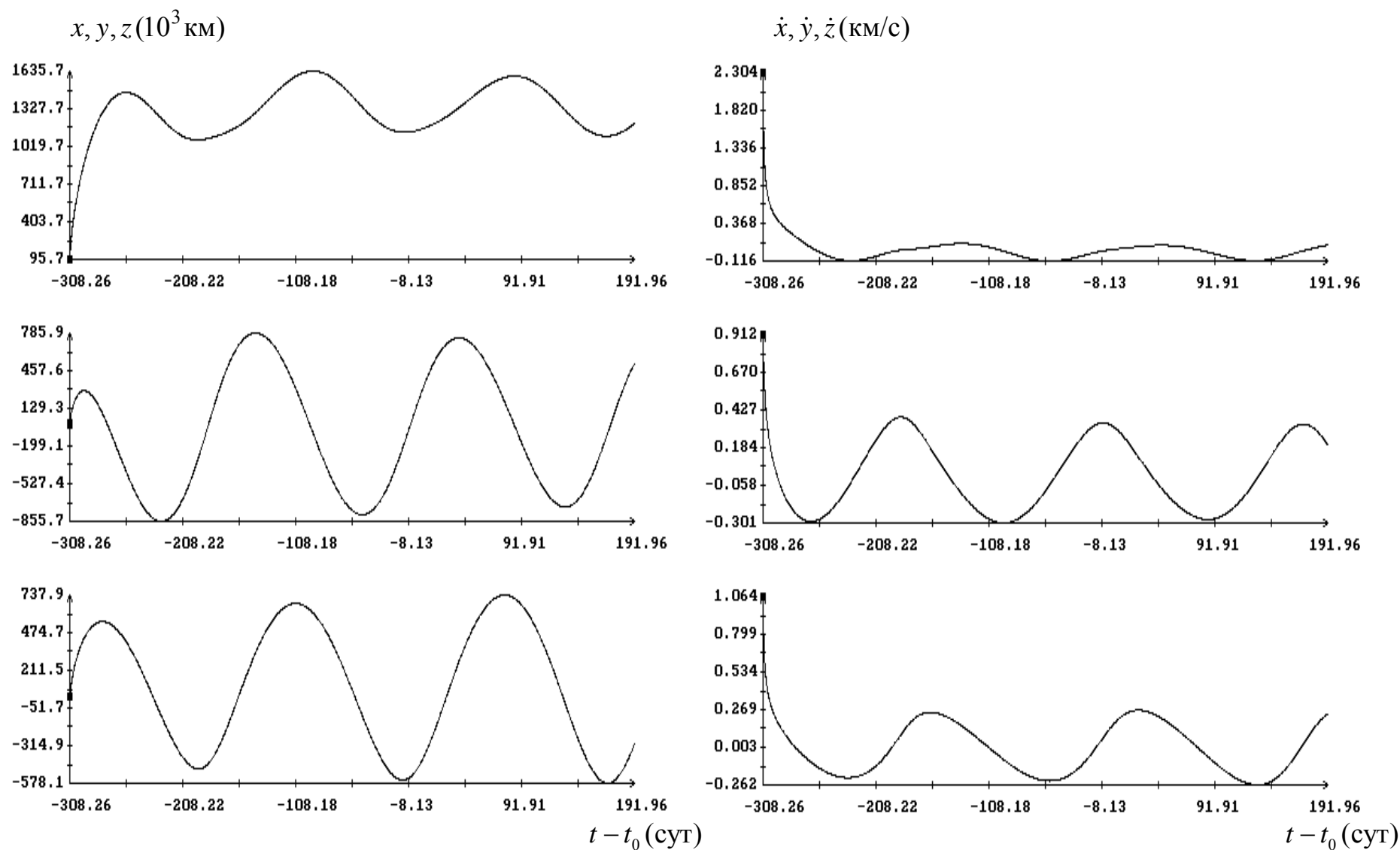


Рис. 12. Решение уравнения (5) (рис. 11) в орбитальной системе координат барицентра системы Земля – Луна; $t_0 = 12300$ с UTC 2015.07.21. Начальный момент движения (отмечен маркером) 21:06:44.786 UTC 2014.09.15

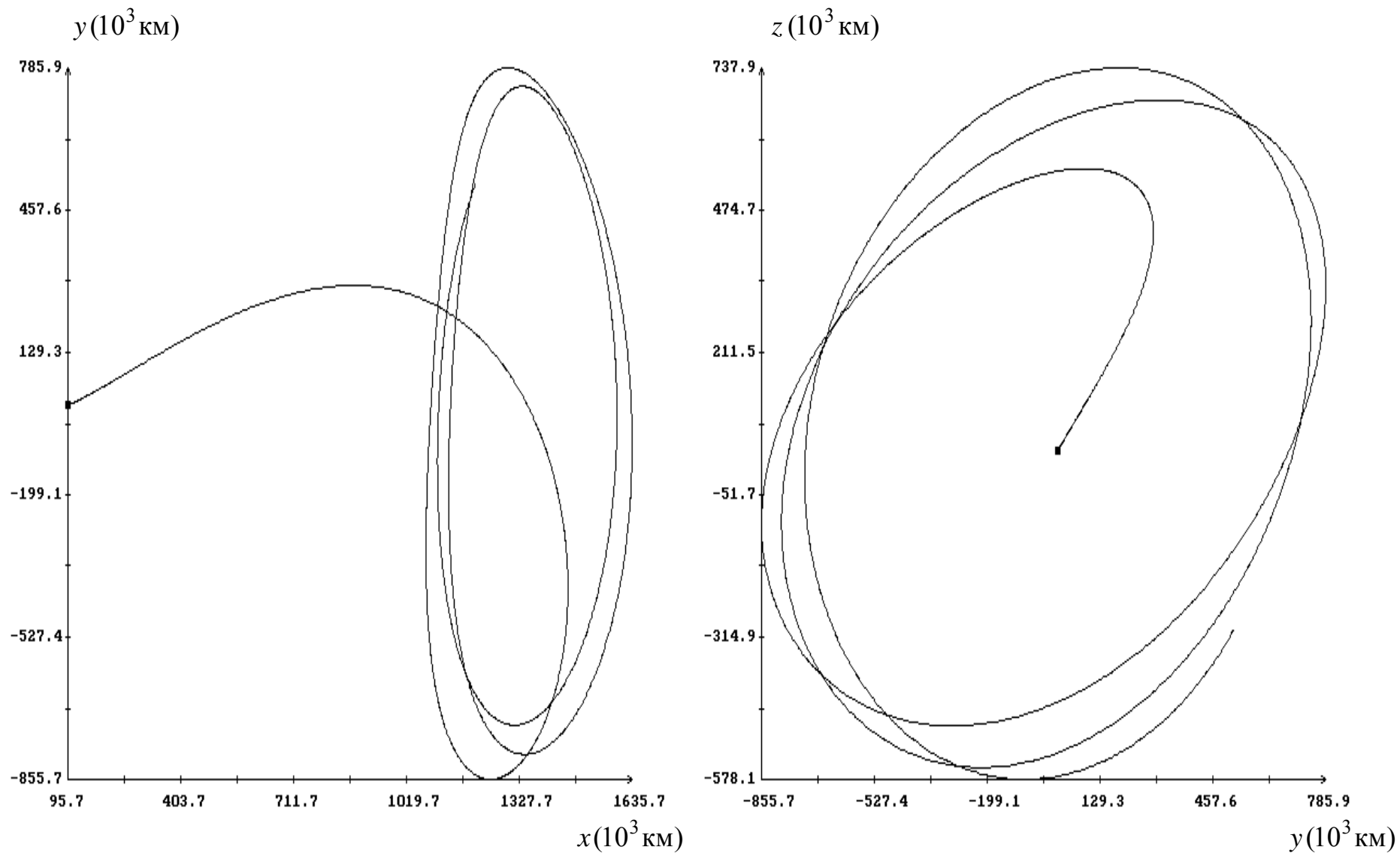


Рис. 13. Проекция решения уравнения (5) (рис. 11) на плоскости (x, y) и (y, z) орбитальной системы координат барицентра системы Земля – Луна