ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 69 за 2012 г.

Аптекарев А.И., Ахмедов Р.Э., Буяров В.С.

О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Аптекарев А.И., Ахмедов Р.Э., Буяров В.С. О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 69. 23 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-69

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ИМ. М. В. КЕЛДЫША

А.И. Аптекарев, Р.Э. Ахмедов, В.С. Буяров

О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе

МОСКВА, 2012 г.

Аптекарев А. И., Ахмедов Р. Э. и Бuяров В. С.

О представлении оператора Гаусса-Бабенко в степенном базисе [1]

Аннотация. В работе рассматриваются формальные свойства оператора Гаусса. Приводится постановка задачи Гаусса. Выводится интегральная форма этого оператора, ранее полученная К.И. Бабенко. Получено формальное матричное представление этого оператора в степенном базисе.

Ключевые слова. Теория чисел; статистика Гаусса-Кузьмина; непрерывные дроби.

Aptekarev A. I., Akhmedov R. E. and Buyarov V. S.

Representation of the Gauss-Babenko operator in the power series basis

Abstract

Formal properties of the Gauss operator are considered. We give statement of the Gauss problem. An integral form of this operator (discovered before by K.I. Babenko) is derived. The representation of this operator in the power series basis is obtained.

Key words. Number theory; Gauss-Kuzmin statistic; continued fraction.

[1]Работа частично поддержана грантом научных школ НШ–8033.2010.1, грантами РФФИ-11-01-00245 и РФФИ-11-01-12045-офи-м.

1 Оператор Гаусса и его интегральная форма

1.1 Определение, связь с непрерывными дробями

Оператор Гаусса G (иногда в литературе его называют оператором Гаусса-Кузьмина-Вирзинга) формально определяется следующим образом

$$(Gf)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f\left(\frac{1}{x+k}\right). \tag{1}$$

Этот оператор впервые появился в работе Р.О. Кузьмина [2] при решении проблемы Гаусса. Кузьмин рассматривал этот оператор в пространстве непрерывно дифференцируемых функций.

Изучение спектральных свойств оператора Гаусса играет принципиальную роль для решения проблемы Гаусса, которая исторически была первой задачей метрической теории цепных дробей. Приведем постановку этой задачи и краткую историю вопроса(подробнее см. в книге А.Я. Хинчина [1]).

Рассмотрим разложение числа $\alpha \in (\,0, 1]$ в цепную дробь

$$\alpha = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}} = [\,0,\, a_1,\, a_2, \ldots,\, a_n, \ldots\,] \tag{2}$$

и обозначим через $z_n = z_n(\alpha)$ величину цепной дроби

$$[\,0,\, a_{n+1},\, a_{n+2}, \ldots\,].$$

Очевидно, что всегда $0 \le z_n(\alpha) < 1$. Обозначим через $m_n(x)$ меру (Лебега) множества чисел α интервала $(0,1)$, для которых $z_n(\alpha) < x$:

$$m_n(x) \;:=\; \mathrm{mes}\{\,\alpha \in (0,\,1) \;\;:\quad z_n(\alpha) < x\}\,. \tag{3}$$

В одном из писем к Лапласу Гаусс утверждал, что ему удалось найти доказательство теоремы, в силу которой

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln 2}\,;$$

там же он указывал на то, что весьма желательно было бы оценить порядок малости разности

$$m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \tag{4}$$

при больших значениях n, что, по его словам, ему совершенно не удалось. Доказательство Гаусса нигде не было опубликовано, и поэтому эта задача была названа проблемой Гаусса. Первое доказательство теоремы Гаусса с оценкой скорости сходимости было получено Кузьминым [2] и независимо П. Леви, причем, последний нашел правильную по порядку оценку для разности (4), именно

$$m_n(x) - \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} = O(\, q^n) \,, \;\; q = 0,6 \,.$$

Е. Вирзинг [3] (1974) и независимо К.И. Бабенко [4] (1977) решили задачу Гаусса, доказав что

$$F_n(x) \; = \; \frac{\ln(1+x)}{\ln 2} \; + \; \lambda^n \phi(x) \; + \; \mathcal{O}(\rho^n) \,,$$

где $\lambda = -0.30366300 \, + \, \vartheta \cdot 5.85 \cdot 10^{-6}$, $|\vartheta| < 1 \,, \quad \rho < 0.15 \,.$

Уже Гауссу было известно, что последовательность функций $m_n(x)$, $n = 0, 1, \ldots$ удовлетворяет реккурентному соотношению

$$m_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right)\right) \,, \quad m_0(x) = x \,. \tag{5}$$

В самом деле, неравенство $z_n < x$ в силу очевидного соотношения

$$z_n = \frac{1}{a_{n+1} + z_{n+1}}$$

выполняются тогда и только тогда, когда выполняются неравенства

$$\frac{1}{k+x} < z_n \leq \frac{1}{k} \,,$$

а так как мера множества чисел, удовлетворяющих этим неравенствам, есть, очевидно,

$$m_n\left(\frac{1}{k}\right) - m_n\left(\frac{1}{k+x}\right)$$

и соответствующие множества (для различных k) не пересекаются то отсюда и вытекает соотношение (5).

Легко непосредственно проверить, что функция

$$\varphi(x) = C \ln(1+x)$$

удовлетворяет при любом постоянном C соотношению

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{k}\right) - \varphi\left(\frac{1}{k+x}\right)\right) \,.$$

1.2 Оператор Гаусса в $L_2[0,1]$

Операторный подход в решении проблемы Гаусса был продолжен Вирзингом [3]. Как и Кузьмин, Вирзинг рассматривал оператор в пространстве непрерывно дифференцируемых функций.

Естественной областью определения оператора Гаусса является пространство $L_2[0,1]$. В самом деле, оператор G получается как оператор, сопряженный к некоторому оператору, естественным образом возникающем, в теории динамических систем, и является частным случаем оператора Перрона-Фробениуса.

Пусть T - отображение отрезка $[\,0,1]$ на себя: $T(x) = \{1/x\}$.
С этим отображением связан ограниченный линейный оператор

$$U_T:\ L_2[\,0,1\,]\ \to\ L_2[\,0,1\,],\quad (U_T\, g)(x) := g(T(x))\,. \tag{6}$$

Легко проверить, что $G = U_T^*$. В самом деле,

$$\int_0^1 g(T(x))f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} g\left(\frac{1}{x}-k\right)f(x)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 g(x)\frac{1}{(x+k)^2}\,f\left(\frac{1}{x+k}\right)dx =$$

$$= \int_0^1 g(x)(Gf)(x)\,dx\,.$$

Нетрудно найти норму оператора G. Так как $\|G\|_2 = \|U_T\|_2$, то следующие оценки позволяют оценить норму G

$$\int_0^1 g^2(T(x))dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 g^2(x)\frac{1}{(x+k)^2}\,dx \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 g^2(x)\frac{1}{k^2}\,dx = \zeta(2)\int_0^1 g^2(x)\,dx.$$

Таким образом, $\|G\|_2 \le \pi/\sqrt{6}$. Для получения оценки снизу рассмотрим последовательность функций $g_n(x) = n\chi_n(x)$, где $\chi_n(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0, 1/n^2]$. Имеем для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_0^1 g_n^2(T(x))\,dx = n^2\int_0^{1/n^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\,dx \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1/n^2)^2} = \zeta(2)-\varepsilon\,,$$

когда $n \geq n_o(\varepsilon)$. Отсюда следует, что $\|G\|_2 = \pi/\sqrt{6}$. Для более точной локализации спектра найдем спектральный радиус оператора Гаусса (радиус наименьшего замкнутого круга с центром в нуле, содержащего спектр оператора). Так как

$$\rho(G) = \rho(U_T) = \lim_{n\to\infty} \|U_T^n\|_2^{1/n},$$

то следующие оценки позволяют оценить спектральный радиус оператора Гаусса

$$\int_0^1 g^2(T^n(x))\,dx \leq 2\int_0^1 g^2(T^n(x))\frac{dx}{1+x} =$$

$$2\int_0^1 g^2(T^{n-1}(x))\frac{dx}{1+x} = 2\int_0^1 g^2(x)\frac{dx}{1+x} \leq 2\int_0^1 g^2(x)\,dx\,.$$

Мы воспользовались равенством

$$\int_0^1 g^2(T(x))\frac{dx}{1+x} = \int_0^1 g^2(x)\frac{dx}{1+x}\,,$$

которое является следствием тождества

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x+1}{(x+j)(x+j+1)} = 1\,.$$

Таким образом, $\|U_T^n\|_2 \leq \sqrt{2}$ и, значит, $\rho(G) \leq 1$. С другой стороны, так как функция $g \equiv 1$ является собственной функцией оператора U_T с собственным значением, равным единице, то $1 \leq \rho(U_T) = \rho(G)$. Таким образом, $\rho(G) = 1$.

1.3 Оператор Гаусса в пространствах аналитических функций. Интегральный опрератор Гаусса-Бабенко

Проблема Гаусса заключается в получении наиболее точной асимптотики для $F_n(x)$ функции распределения меры Гаусса (3)

$$F_n(x) = G^n[F_0(x)] = G^n(x)\,, \tag{7}$$

где G есть определённый на функциях распределения оператор Гаусса

$$G\,[F(x)] = \sum_{j=1}^{\infty} F\left(\frac{1}{j}\right) - F\left(\frac{1}{j+x}\right)\,. \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что, во-первых, по индукции

$$\text{a) } F_n(z) \in H(\overline{\mathbb{C}}\backslash[-1;\,-\infty]) \quad n = 1, 2, \dots\ , \tag{9_1}$$

а во-вторых, пространство голоморфных в $\overline{\mathbb{C}}\backslash[-1;\,-\infty] = D_0$ функций переводится оператором Гаусса в себя

$$\text{б) } G : H(\overline{\mathbb{C}}\backslash[-1;\,-\infty]) \to H(\overline{\mathbb{C}}\backslash[-1;\,-\infty])\,. \tag{9_2}$$

Поэтому естественно рассматривать оператор Гаусса на $H(\overline{\mathbb{C}}\backslash[-1;\,-\infty])$. Из (8) легко проверить, что $\lambda_1 = 1$ и $\varphi_1(x) = \log(1+x)$ являются собственным значением и собственной функцией оператора Гаусса.

$$G[\varphi_1(x)] = \lambda_1\,\varphi_1(x)\,.$$

Действительно,

$$G\left[\log(1+x)\right] = \sum_{j=1}^{\infty}\left(\log\left(1+\frac{1}{j}\right) - \log\left(1+\frac{1}{j+x}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\,\log\prod_{j=1}^{n}\frac{(j+1)(j+x)}{j(j+x+1)} = \lim_{n\to\infty}\,\log\frac{(n+1)(1+x)}{(n+1+x)} = \log\left(1+x\right)\,.$$

Рассмотрим вместо оператора G оператор G_1, действующий на производную функции $F(x)$. Дифференцируя правую часть (8), имеем

$$G_1[F\,'(x)] := (G[F(x)])' = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(x+j)^2}\,F\,'\left(\frac{1}{x+j}\right) \tag{10}$$

Далее, по индукции

$$F_n\,'(x) = (G[F_{n-1}(x)])' = G_1[F_{n-1}\,'(x)] = G_1^n[F_0\,'(x)] = G_1^n[1]\,, \tag{11}$$

а собственная функция G_1, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 1$, равна

$$G_1[\varphi_1'] = \lambda_1\varphi_1'\,,\quad \varphi_1' = (\log(1+x))' = \frac{1}{1+x}\,,\quad \lambda = 1\,.$$

Рассмотрим ψ-функцию Эйлера

$$\psi(z+1) = \frac{d}{dz}\,\ln\,\Gamma(z+1) = \frac{\Gamma'(z+1)}{\Gamma(z+1)} = \frac{\Gamma(z) + z\Gamma'(z)}{z\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\,,$$

$$\text{т.е.}\quad \psi(z+1) = \frac{1}{z} + \psi(z)\,,\quad \psi(z+1) - \psi(z) = \frac{1}{z}\,. \tag{12}$$

Складывая почленно равенства (12) для $z+1,\ldots,z+n$, получим

$$\psi(n+z+1) - \psi(z+1) = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j+z}\,. \tag{13}$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n\right)=\gamma$, а также формулу Стирлинга

$$\Gamma(z+n+1)\sim\left(\frac{z+n}{e}\right)^{z+n}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(z+n)}}\ ,$$

получаем из (13)

$$\psi(z+1)=\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+z}\right)-\gamma+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\Gamma'(z+n+1)}{\Gamma(z+n+1)}-\ln n\right)=$$

$$=-\gamma+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+z}\right)+\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2(z+n)}+\ln(z+n)-\ln n\right)= \qquad (14)$$

$$=-\gamma+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}-\frac{1}{j+z}\right)\in H\left(D_0\right).$$

Дифференцируем (14) почленно:

$$\psi'(z+1)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+z)^2}\ ,\quad \psi^{(k+1)}(z+1)=(-1)^k(k+1)!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+z)^{k+2}}\ ,$$

для $k=0,1,2,\ldots$.

Возьмём произвольную функцию $f(z)\in H\left(D_0\right)$. В единичном круге она представлена своим степенным разложением

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}f_k z^k\ ,\quad |z|<1\ ,$$

а также вне единичного круга имеем

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{z^{k+2}}\ ,\quad |z|>1 \qquad (15)$$

равномерно по z. Поэтому при $z\in\{z:\ \bigcup\limits_{j=1}^{\infty}|z+j|>1\}=D_1$ действие оператора G_1 может быть представлено в виде

$$G_1[f'(z)]=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(z+j)^2}f\left(\frac{1}{z+j}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{(z+j)^{k+2}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}f_k\,\psi^{(k+1)}(z+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}f_k\,D_z^{k+1}[\psi(z+1)]\ . \qquad (16)$$

Обозначая $\hat{f}(w)$ преобразование Бореля для (15)

$$\hat{f}(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} f_k \, w^{k+1} , \quad w \in \mathbb{C} \tag{17}$$

и подставляя в качестве переменной в правую часть (16) оператор дифференцирования D_z, получаем

$$G_1[f'(z)] = -\hat{f}(D_z)\,[\psi(z+1)] \, . \tag{18}$$

Таким образом, действие оператора G_1 на некоторую функцию $f(z)$ при $z \in D_1$ представляется как действие дифференциального оператора $\hat{f}(D_z)$, зависящего от этой функции, на фиксированную функцию $\psi(z)$.

Заметим, что, во-первых, для любой функции $f(z)$ в круге её голоморфности $\{|z| < R_n\}$ справедливо

$$f(D_z)\, e^{az} = \sum_{k=0}^{\infty} f_k D_z^k[e^{az}] = \sum_{k=0}^{\infty} f_k a^k e^{az} = f(a)\, e^{az} \ ,$$

а во-вторых, производная ψ-функции Эйлера (14) имеет удобное интегральное представление в правой полуплоскости в виде преобразования Лапласа:

$$D_z[\psi(z+1)] = \int\limits_0^{\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}\, e^{-tz}\, dt = \int\limits_0^{\infty} h(t)\, e^{-tz}\, dt \ , \quad \Re z > 0$$

с функцией $h(t) = \dfrac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$. Поэтому при $Rez > 0$, с учётом того что $\frac{f(\hat{w})}{w}$ есть целая функция, справедливо

$$G_1[f'(z)] = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\hat{f}(D_z)}{D_z}\, e^{-iz} h(t)\, dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{\hat{f}(-t)}{t}\, e^{-iz} h(t)\, dt \ . \tag{19}$$

Таким образом, оператор G_1 представляется как композиция преобразований :

- Бореля
$$B[f] = \frac{\hat{f}(-t)}{t} \ , \tag{20}$$
- умножения на функцию
$$h(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$$

- и преобразования Лапласа $L[g] = \int\limits_0^\infty g(t)\, e^{-iz} dt$,

$$\text{т.е.} \quad G_1[f'(z)] = (L \circ h \circ B)[f](z) \ .$$

Обозначим новую область определения оператора Гаусса $\tilde{H}(D_0)$. Обозначим образ пространства $\tilde{H}(D_0)$ при преобразовании Бореля (20) через $\hat{H}(\mathbb{C})$

$$\hat{H}(\mathbb{C}) = B[\tilde{H}(D_0)] \ .$$

$\hat{H}(\mathbb{C})$ есть пространство целых функций. Рассмотрим, как преобразование Гаусса отображает пространство $\hat{H}(\mathbb{C})$ в себя, т.е. получим представление для оператора G_B, такого, что

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}(D_0) \arrow[r, "G_1"] \arrow[d, "\mathrm{B}"'] & \tilde{H}(D_0) \arrow[d, "\mathrm{B}"'] \\
\hat{H}(\mathbb{C}) \arrow[r, "G_B"] & \hat{H}(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

Так как интегральное представление (19) для G_1 даёт

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}(D_0) \arrow[r, "G_1"] \arrow[d, "\mathrm{B}"'] & \tilde{H}(D_0) \\
\hat{H}(\mathbb{C}) \arrow[ur, "{L[h^*]}"'] &
\end{tikzcd}$$

то достаточно выяснить, во что переходит образ G_1 при отображении B. Для функций из $H(|z| < 1)$ преобразование Бореля (16) имеет интегральное представление

$$\hat{f}(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{1}{z^2} f\left(-\frac{1}{z}\right) e^{wz} dz \ , \tag{21}$$

где γ есть замкнутый контур, охватывающий единичную окружность. Действительно, разлагая функцию $\dfrac{1}{z^2} f\left(-\dfrac{1}{z}\right)$ в ряд Лорана, получим

$$\frac{1}{z^2} f\left(-\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k (-1)^k \frac{1}{z^{k+2}} \ ,$$

и

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z^2}\,f\left(-\frac{1}{z}\right)\,e^{wz}dz=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(-1)^k\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{wz}}{z^{k+2}}\,dz\;=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}f_k(-1)^k\frac{w^{k+1}}{(k+1)!}=\hat{f}(w)\;.$$

Обозначая $g(z)=G_1[f'(z)]$, применим к $g(z)$, $Re\,z>0$ преобразование B (20), и с учётом (19), (21) имеем

$$\frac{\hat{g}(-w)}{w}=\frac{-1}{w}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z^2}\,g\left(\frac{-1}{z}\right)\,e^{-wz}dz=\frac{-1}{2\pi i w}\int\limits_{\gamma}e^{-wz}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\hat{f}(-t)}{tz^2}\,h(t)\,e^{\frac{t}{z}}dt\,dz\;.$$

Ввиду сходимости обоих интегралов, меняя порядок интегрирования по теореме Фубини, получаем

$$\frac{\hat{g}(-w)}{w}=-\frac{1}{w}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\hat{f}(-t)}{t}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{-wz+\frac{t}{z}}}{z^2}\,dz\,h(t)\,dt\;,$$

или, обозначая $F^B(w)=\dfrac{\hat{F}(-w)}{w}$,

$$g^B(w)=-\frac{1}{w}\int\limits_{0}^{\infty}f^B(t)\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{-wz+\frac{t}{z}}}{z^2}\,dz\,h(t)\,dt\;.$$

Для внутреннего интеграла, разлагая подинтегральную функцию в ряды по w и t (равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}$), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{-wz+\frac{t}{z}}}{z^2}dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{1}{z^2}\,\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\,\frac{1}{l!}\,\left(\frac{t}{z}\right)^k(-wz)^l\,dz=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{t^k w^l(-1)^l}{k!\,l!}\,z^{l-k-2}dz=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k w^{k+1}(-1)^{k+1}}{k!\,(k+1)!}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dz}{z}=-w\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(tw)^k}{k!\,(k+1)!}\;.$$

Замечая, что последняя сумма есть известное разложение функции Бесселя

$$J_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\frac{z}{2})^{1+2k}}{k!\,(k+1)!}\;,\qquad\frac{J_1(2\sqrt{wt})}{\sqrt{wt}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(wt)^k}{k!\,(k+1)!}\;,$$

окончательно получаем

$$g^B(w) = G_B[f^B](w) = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{wt})}{\sqrt{wt}}\, h(t)\, f^B(t)\, dt\,. \tag{22}$$

Интегральный оператор (22) был получен К.И. Бабенко (см. [4], [5]). Явный вид этого оператора играл ключевую роль в решении Бабенко проблемы Гаусса.

Операторы G_B, G_1 и G связаны соотношением

$$G_B[f^B](w) = (G_1[f'])^B(w) = B[(G[f])'](w)\,. \tag{23}$$

Соответственно, собственная функция оператора G_B, соответствующая собственному значению $\lambda_1 = 1$, есть преобразование Бореля собственной функции φ_1' оператора G_1:

$$B[\varphi_1'](w) = \frac{\hat{\varphi}_1'(-w)}{w}\,. \tag{24}$$

Так как

$$\varphi_1'(z) = \frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, z^k\;, \quad |z| < 1\,,$$

то

$$\varphi_B(w) = \frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\cdot(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\,(-w)^{k+1} = -\frac{1}{w}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-w)^{k+1}}{(k+1)!} =$$

$$= -\frac{1}{w}\left(e^{-w} - 1\right) = \frac{1-e^{-w}}{w}\,.$$

Далее в (24) вместо $\varphi_B(w)$ будем писать $\varphi_1(w)$ (собственная функция оператора G_B), т.е.

$$\varphi_1(z) = \frac{1-e^{-z}}{z}\,. \tag{25}$$

2 Оператор Гаусса-Бабенко в степенном базисе

2.1 Некоторые свойства многочленов Лагерра

Для дальнейшего исследования собственных функций G_B будем использовать многочлены Лагерра.

Пусть на полуоси $x \in (0:\infty)$ задана весовая функция $h(x) = x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$ - фиксированное число. По формуле Лейбница дифференцирования произведения функций

$$(x^{\alpha+n}e^{-x})^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} C_n^k (x^{\alpha+n})^{(n-k)}(e^{-x})^{(k)} = h(x)\,\sum_{k=0}^{\infty} p_k(x)\,,$$

где $p_k(x)$ — многочлены степени k.

Многочленом Лагерра с показателем $\alpha > 1$ называется

$$L_n(x;\alpha) = \frac{1}{n!}\, e^x x^{-\alpha} \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)} . \tag{26}$$

Старший коэффициент многочлена (26) равен $\dfrac{(-1)^n}{n!}$. Обозначим $\tilde{L}_n(x;\alpha)$ многочлен со старшим коэффициентом 1, т.е.

$$\tilde{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n n!\, L_n(x;\alpha) = (-1)^n n!\, e^x x^{-\alpha} \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)} .$$

Многочлены Лагерра ортогональны с весом $(x^\alpha e^{-x})$ и имеют норму

$$\|L_n(x;\alpha)\|^2_{(x^\alpha e^{-x})} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} . \tag{27}$$

Следовательно, ортонормированные многочлены Лагерра имеют вид

$$\hat{L}_n(x;\alpha) = (-1)^n \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}}\, L_n(x;\alpha) = \frac{(-1)^n\, x^{-\alpha} e^x \left(x^{\alpha+n} e^{-x}\right)^{(n)}}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}} . \tag{28}$$

Его старший коэффициент равен $\dfrac{1}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}$.

2.2 Степенные ряды для собственных функций оператора Гаусса-Бабенко

Перепишем (22), подставив вместо f^B собственную функцию φ_j оператора G_B.

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_1(2\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}}\, \frac{y\, e^{-\psi}}{1-e^{-\psi}}\, \varphi_j(y)\, dy = \lambda_j \varphi_j(x) . \tag{29}$$

Будем искать $\varphi_j(x)$ в виде степенного ряда

$$\varphi_j(x) = \sum_{n=0}^\infty c_n x^n . \tag{30}$$

Перемножая ряды для $\dfrac{J_1(2\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}}$ и e^x, получим

$$\frac{J_1(2\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}}\, e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (xy)^k}{k!\,(k+1)!}\ \sum_{l=0}^\infty \frac{x^l}{l!} = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k+l=n} \frac{(-1)^k y^k}{k!\,(k+1)!\,l!} \right) x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!(n-k)!}\, y^k \right) x^n . \tag{31}$$

Беря в (26) $\alpha = 1$ и обозначая $L_n(y;1) = L_n(y)$, получим

$$L_n(y) = \frac{1}{n!}\, y^{-1} e^y (y^{n+1} e^{-y})^{(n)} = \frac{1}{n!}\, y^{-1} e^y \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, (y^{n+1})^{(n-k)}\, (e^{-y})^{(k)} =$$

$$= \frac{1}{n!}\, y^{-1} e^y \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{(n+1)!}{(k+1)!} (-1)^k y^{k+1} (e^{-y}) = (n{+}1)! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!\,(n-k)!}\, y^k \ ,$$

или, что то же самое,

$$\frac{L_n(y)}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!\,(n-k)!}\, y^k \ .$$

Отсюда и из (31) вытекает, что

$$\frac{J_1(2\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(y)}{(n+1)!}\, x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\, x^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(y)}{(n+1)!}\, x^n =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k+n=m} \frac{(-1)^k\, L_n(y)}{k!\,(n+1)!}\, x^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m-k}\, L_k(y)}{(m-k)!\,(k+1)!}\, x^m \ .$$

Обозначая

$$b_k^{(m)} = \frac{(-1)^{m-k}}{(m-k)!\,(k+1)!} \ , \tag{32}$$

запишем последнее равенство в виде

$$\frac{J_1(2\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}} = e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(y)}{(n+1)!}\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)}\, L_k(y) \right) x^n \,. \tag{33}$$

Далее, при $y > 0$ имеем

$$\frac{1}{1 - e^{-y}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ny} \ . \tag{34}$$

Разложим каждое слагаемое в (34) в ряд по полиномам Лагерра $L_\nu(y)$. Для этого рассмотрим функцию

$$F(y,t) = \frac{1}{(1-t)^2}\, \exp\left(\frac{yt}{t-1} \right) \ , \quad y > 0\,. \tag{35}$$

Функция (35) голоморфна по t в круге $\{|t| < 1\}$, а следовательно, разлагается в этом круге в сходящийся степенной ряд

$$F(y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(y)\, t^n \,. \tag{36}$$

Коэффициенты в (36) вычисляются по формулам

$$C_n(y) = \frac{1}{n!} \, F_t^{(n)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{F(y,\tau)}{\tau^{n+1}} \, d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=\rho} \frac{1}{(1-\tau)^2} \, e^{\frac{y\tau}{\tau-1}} \, \tau^{-n-1} \, d\tau \, .$$

Сделаем замену переменных $\dfrac{1}{1-\tau} = u$, $1-\tau = \dfrac{y}{u}$, $d\tau = \dfrac{y}{u^2}\,du$. Такое преобразование переводит окружность $\{|\tau| = \rho, \ \rho < 1\}$ в окружность Γ, охватывающую точку $y > 0$ и не охватывающую точку 0. Поэтому

$$C_n(y) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \left(\frac{u}{y}\right)^2 \left(1 - \frac{y}{n}\right)^{-n-1} e^{-n(1-\frac{y}{n})} \frac{y}{u^2} \, du =$$

$$= y^{-1} \, e^{y} \, \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u^{n+1} \, e^{-n}}{(u-y)^{n+1}} \, du = \frac{1}{n!} \, y^{-1} \, e^{y} \, (y^{n+1} \, e^{-y})^{(n)} = L_n(y) \, . \tag{37}$$

Таким образом, получим разложение функции $F(y,t)$ (35)

$$\frac{1}{(1-t)^2} \, \exp\left(\frac{yt}{t-1}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(y) \, t^\nu \, , \quad |t| < 1 \, . \tag{38}$$

Возьмём в качестве t в (38) $t = \dfrac{n}{n+1}$, получим

$$(n+1)^2 \, e^{-ny} = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(y) \, \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\nu} \; ;$$

$$e^{-ny} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+2}} \, L_\nu(y) \, ,$$

и (34) перепишется в виде

$$\frac{1}{1-e^{-y}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ny} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+2}} \, L_\nu(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+2}} \right) L_\nu(y) \, ,$$

или с учётом обозначения

$$a_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+2}}$$

$$\frac{1}{1-e^{-y}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, L_\nu(y) \, . \tag{39}$$

Коэффициенты a_ν в (39) можно выразить через значения дзета-функции Римана

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\,.$$

Для этого рассмотрим вспомогательные величины

$$a_{\nu,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+p}}\ , \quad \nu = 0,1,2,\dots\ ,\ p = 2,3,\dots\ .$$

Искомые величины $a_\nu = a_{\nu,2}$. Очевидно, что

$$a_{0,p} = \zeta(p)\ .$$

Далее, имеем

$$a_{\nu,p} - a_{\nu+1,p} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+p}} - n^{\nu+1}(n+1)^{\nu+1+p} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+p}} \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^\nu}{(n+1)^{\nu+p+1}} = a_{\nu,p+1}\ . \tag{40}$$

Переписав (40) в виде

$$a_{\nu+1,p} = a_{\nu,p} - a_{\nu,p+1}\ , \tag{40$'$}$$

находим последовательно

$$a_{1,p} = a_{0,p} - a_{0,p+1} = \zeta(p) - \zeta(p+1)\ ,$$

$$a_{2,p} = a_{1,p} - a_{1,p+1} = (\zeta(p) - \zeta(p+1)) - (\zeta(p+1) - \zeta(p+2)) =$$

$$\zeta(p) - 2\zeta(p+1) + \zeta(p+2)\ ,$$

и индукцией по ν получаем

$$a_{\nu+1,p} = a_{\nu,p} - a_{\nu,p+1} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k\, C_\nu^k\, \zeta(p+k) - \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k\, C_\nu^k\, \zeta(p+k+1) =$$

$$= \zeta(p) + \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k\ \left(C_\nu^k + C_\nu^{k-1} \right)\ \zeta(p+k) + (-1)^{\nu+1} \zeta(p+\nu+1) =$$

$$= \zeta(p) + \sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k\, C_{\nu+1}^k\, \zeta(p+k) + (-1)^{\nu+1}\, \zeta(p+\nu+1) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu+1} (-1)^k\, C_{\nu+1}^k\, \zeta(p+k)\ .$$

Таким образом, получена формула

$$a_{\nu,p} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \, C_\nu^k \, \zeta(p+k) \; . \tag{41}$$

В частности, при $p = 2$

$$a_{\nu,} = a_{\nu,2} = \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \, C_\nu^k \, \zeta(2+k) \; . \tag{41'}$$

Подставляем (30), (34), (39) в (29), получаем

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} \, L_k(y) \right) \, x^n \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, L_\nu(y) \, \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, y^m \right) \, y \, e^{-y} \, dy = \lambda_j \, \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, x^n \; . \tag{42}$$

Обозначаем

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} \, \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \, \int\limits_0^\infty y^m \, L_k(y) \, L_\nu(y) \, y \, e^{-y} \, dy \; .$$

Проинтегрируем (42) почленно, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \, \sum_{m=0}^{\infty} c_m \, A_{n,m} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, \lambda_j \, c_n \, . \tag{42'}$$

2.3 Одна вспомогательная лемма

Для вычисления интегралов $\int\limits_0^\infty y^m \, L_k(y) \, L_\nu(y) \, y \, e^{-y} \, dy$ нам понадобится один известный факт. Сформулируем его в виде следующей леммы и проведём доказательство.

Lemma 2.1 *Пусть* $\{p_n(x)\}_{n=0}^\infty$ *— система ортонормированных многочленов по мере* $d\sigma(x)$*, т.е.* $\int p_n(x) \, p_m(x) \, d\sigma(x) = \delta_{n,m}$*. Пусть, далее,* J *— симметричная якобиева матрица, связанная с этой системой многочленов, т.е.*

$$\sum_{l=0}^{\infty} J_{k,l} \, p_l(x) = x \, p_k(x) \; , \quad k = 0, 1, 2, \ldots \; .$$

Тогда имеет место формула

$$\int x^k \, p_n(x) \, p_m(x) \, d\sigma(x) = J_{n,m}^k \; .$$

Доказательство. Поскольку J симметрична, то J^k — симметричные матрицы, $k = 0, 1, 2, \dots$. Обозначим

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad .$$

Получаем по индукции для матриц J_k , $k = 0, 1, 2, \dots$

$$J\,\bar{p} = x\,\bar{p}, \quad J^k\,\bar{p} = J\,J^{k-1}\,\bar{p} = J\,x^{k-1}\,\bar{p} = x \cdot x^{k-1}\,\bar{p} = x^k\,\bar{p}\,, \quad J^k\,\bar{p} = x^k\,\bar{p}\;.$$

Запишем последнее равенство в виде

$$x^k\,p_n(x) = \sum_{l=0}^{\infty} J^k_{n,l}\,p_l(x)\;.$$

В силу ортонормированности многочленов $\{p_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$ имеем

$$\int x^k\,p_n(x)\,p_m(x)\,d\sigma(x) = \int \sum_{l=0}^{\infty} J^k_{n,l}\,p_l(x)\,p_m(x)\,d\sigma(x) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} J^k_{n,l} \int p_l(x)\,p_m(x)\,d\sigma(x) = \sum_{l=0}^{\infty} J^k_{n,l}\,\delta_{l,m} = J^k_{n,m}\;,$$

что и требовалось доказать.

Многочлены $\hat{L}_n(x)$ удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$\sqrt{(n+1)(n+2)}\,\hat{L}_{n+1}(x) + (2n+2)\,\hat{L}_n(x) + \sqrt{n(n+1)}\,\hat{L}_{n-1}(x) = x\,\hat{L}_n(x), \tag{43}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$.

Таким образом, многочлены $\{\hat{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ имеют якобиеву матрицу

$$\hat{J} - \begin{pmatrix} (2\cdot 0+2) & \sqrt{(0+1)(0+2)} & 0 & \cdot \\ \sqrt{(0+1)(0+2)} & (2\cdot 1+2) & \sqrt{(1+1)(1+2)} & \cdot \\ 0 & \sqrt{(1+1)(1+2)} & (2\cdot 2+2) & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Теперь, с учётом леммы и обозначения

$$d_k = (-1)^k \sqrt{k+1}$$

имеем

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \int\limits_0^\infty y^m L_k(y)\, L_\nu(y)\, y\, e^{-y}\, dy = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\, d_\nu\, \hat{J}^m_{k,\nu}\ . \tag{44}$$

Очевидно, что матрицы $\hat{J}^m$, как и $\hat{J}$, имеют ленточную структуру, причём

$$\hat{J}^m_{k,\nu} \neq 0 \Leftrightarrow |k-\nu| \leqslant m\ ,$$

и (44) перепишется в виде

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k \sum_{\nu=0}^{k+m} \hat{J}^m_{k,\nu}\, d_\nu\, a_\nu = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k \sum_{\nu=0}^{n+m} \hat{J}^m_{k,\nu}\, d_\nu\, a_\nu \tag{44'}$$

2.4 Формальное представление оператора в степенном базисе

Запишем (44') в несколько другой форме

$$A_{n,m} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k \sum_{\nu=0}^{n+m} \hat{J}^m_{k,\nu}\, d_\nu\, a_\nu = \sum_{j=0}^{n+m} \alpha_{n,m;j}\, \zeta(2+j)\ . \tag{45}$$

Будем вычислять коэффициенты $\alpha_{n,m;,j}$ индукцией по m. Сначала найдём $\alpha_{n,0;j}$ для $j = 0, \ldots, n$.
С помощью (41') получим

$$A_{n,0} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k \sum_{\nu=0}^{n} \hat{J}^0_{k,\nu}\, d_\nu\, a_\nu = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)} d_k^2\, a_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!\,(k+1)!}\,(k+1) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, C_k^j\, \zeta(2+j) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,0;j}\, \zeta(2+j)\ ,$$

где

$$\alpha_{n,0;j} = (-1)^j \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!\,k!}\, C_k^j = \frac{(-1)^{j+n}}{j!} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^k}{(n-k)!\,k!}\, \frac{k!}{(k-j)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{j+n}}{j!(n-j)!} \sum_{k=j}^{n} \frac{(-1)^k (n-j)!}{(n-k)!\,(k-j)!} == \frac{(-1)^{j+n}}{j!(n-j)!} \sum_{k=j}^{n} (-1)^k\, C_{n-j}^{k-j} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{j!(n-j)!} \sum_{l=0}^{n-j} (-1)^l\, C_{n-j}^{l} = 0\,, \quad \text{если } 0 \leqslant j < n\,. \tag{46}$$

При $j = n$

$$\alpha_{n,0;n} = \frac{(-1)^n}{n!}\,. \tag{46$'$}$$

Следовательно,

$$A_{n,0} = \frac{(-1)^n}{n!}\,\zeta(2+n)\,. \tag{47}$$

Покажем, что для любых m, n коэффициенты $\alpha_{n,m;j}$ в (45) обладают свойством

$$\alpha_{n,m;j} = 0 \qquad 0 \leqslant j < n+m\,. \tag{48}$$

Для этого нужно установить соотношения

$$\alpha_{n,m;j} = \beta \cdot \alpha_{n,m-1;j-1}\,, \quad 1 \leqslant j < m+n \tag{48$_1$}$$

$$\alpha_{n,m;0} = 0 \quad \text{для всех} \quad n, m. \tag{48$_2$}$$

Мы опустим вывод соотношений (48_1). Установим (48_2). Имеем

$$\alpha_{n,m;0} = \beta_0 \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)}\, d_k\, \hat{J}_{k,0}^{m-1} + \ldots + \beta_{n+m-1} \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)}\, d_k\, \hat{J}_{k,n+m-1}^{m-1}\,,$$

$$\beta_0 = 2 \cdot (0+1)\, d_0\, C_0^0 + \sqrt{1\,(1+1)}\, d_1\, C_1^0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) \cdot 1 = 0\,,$$

$$\beta_\nu = \sqrt{\nu\,(\nu+1)}\, d_{\nu-1}\, C_{\nu-1}^0 + 2\,(\nu+1)\, d_\nu\, C_\nu^0 + \sqrt{(\nu+1)\,(\nu+2)}\, d_{\nu+1}\, C_{\nu+1}^0 =$$

$$= \sqrt{\nu\,(\nu+1)}\,(-1)^{\nu-1}\sqrt{\nu} \cdot 1 + 2\,(\nu+1)\,(-1)^\nu \sqrt{\nu+1} \cdot 1 +$$

$$+ \sqrt{(\nu+1)\,(\nu+2)}\,(-1)^{\nu+1}\sqrt{\nu+2} \cdot 1 =$$

$$= (-1)^\nu \sqrt{\nu+1}\,(-\nu + 2\,(\nu+1) - (\nu+2)) = 0\,, \quad \nu \geqslant 1\,,$$

следовательно, $\alpha_{n,m;0} = 0$. Свойство коэффициентов (48) теперь можно доказать индукцией по m.
Для $m = 0$ это есть равенство (46).
Если (48) верно для $m-1$, т.е. $\alpha_{n,m-1;j-1} = 0,\ 0 \leqslant j-1 < n+m-1$, то $\alpha_{n,m;j} = 0$ по (48_1), и с учётом (48_2) получаем

$$\alpha_{n,m;j} = 0, \quad 0 \leqslant j < n+m\,, \text{т.е. (48) верно для } m\,.$$

Следовательно, для всех n, m верно

$$\alpha_{n,m;j} = 0, \quad 0 \leqslant j < n+m\,,$$

и из (45) следует, что

$$A_{n,m;j} = \alpha_{n,m;n+m}\,\zeta(2+n+m)\ . \tag{50}$$

Найдём $\alpha_{n,m;n+m}$.

$$\alpha_{n,m;n+m} = \sum_{k=0}^{n} b_k^{(n)}\,d_k\,d_{n+m}\,\hat{J}^m_{k,n+m}\,(-1)^{n+m}\,C^{n+m}_{n+m} =$$

$$= b_k^{(n)}\,d_k\,d_{n+m}\,\hat{J}^m_{n,n+m}\,(-1)^{n+m} = (-1)^n\,\frac{\sqrt{(n+1)\,(m+n+1)}}{(n+1)!}\,\hat{J}^m_{n,n+m}\,.$$

Необходимо найти $\hat{J}^m_{n,n+m}$. Из рекуррентной формулы

$$\hat{J}^m_{n,n+m} = \hat{J}^{m-1}_{n,n+m-1}\,\sqrt{(n+m)\,(n+m+1)}$$

и условия $\hat{J}^0_{n,n+0} = 1$ следует, что

$$\hat{J}^m_{n,n+m} = \sqrt{(n+1)\,(n+m+1)}\,\prod_{j=2}^{m}(n+j)\ . \tag{51}$$

Из (50), (51) вытекает, что

$$A_{n,m} =$$
$$(-1)^n\,\frac{\sqrt{(n+1)\,(n+m+1)}}{(n+1)!}\,\sqrt{(n+1)\,(n+m+1)}\,\prod_{j=2}^{m}(n+j)\,\zeta(n+m+2) =$$
$$\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,\prod_{j=1}^{m+1}(n+j)\,\zeta(n+m+2) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,(m+1)!\,C^n_{n+m+1}\,\zeta(n+m+2)\ . \tag{52}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях в ($42'$), получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m\,A_{n,m} = \lambda_j\,c_n\ , \quad \lambda_j = 1,\ n = 0,1,2,\dots\ .$$

Подставляя в это равенство выражение для $A_{n,m}$ (52) и

$$c_m = \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\ ,$$

должны получить тождество

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!}\,\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\,(m+1)!\,C_{n+m+1}^{n}\,\zeta(n+m+2) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\ ,$$

которое после сокращения на $c_n = \dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}$ примет вид

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,C_{n+m+1}^{n}\,\zeta(n+m+2) = 1\,, \quad n = 0, 1, \dots\ . \tag{53}$$

Так как $\zeta(n+m+2) > 1$ для всех $n = 0, 1, \dots$, то ряды (53) расходящиеся. Однако, если подставить в (53) выражение для дзета-функции Римана $\zeta(s)$, а затем поменять порядок суммирования, то полученный повторный ряд будет сходящимся и его сумма равна 1. Действительно,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,C_{n+m+1}^{n}\,\zeta(n+m+2) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,\frac{(n+m+1)!}{n!\,(m+1)!}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n+m+2}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m\,\frac{(n+m+1)!}{n!\,(m+1)!}\,\frac{1}{k^{n+m+2}} =$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n!\,k^{n+1}}\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{n!\,(m+1)!}\ ,$$

и вычисляя сумму ряда

$$-\sum_{m=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{k}\right)^{m+1}\frac{(n+m+1)!}{n!\,(m+1)!} = -\left(\sum_{m=0}^{\infty} x^{n+m+1}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=-\frac{1}{k}} =$$

$$= \left(\frac{x^{n+1}-1}{x-1} + \frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=-\frac{1}{k}} = \left(x^n + x^{n-1} + \ldots + 1 + \frac{1}{x-1}\right)^{(n)}\Bigg|_{x=-\frac{1}{k}}$$

$$= n! + (-1)^n\,n!\,\left(-\frac{1}{k} - 1\right)^{-n-1} = n!\,\left(1 - \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n+1}\right)\ ,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{n!\,k^{n+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{k}\right)^{m+1} \frac{(n+m+1)!}{(m+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,k^{n+1}}\, n! \left(1 - \frac{k^{n+1}}{(k+1)^{n+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{n+1}} - \frac{1}{(k+1)^{n+1}}\right) = \frac{1}{1^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots = 1\ ,$$

что и показывает справедливость равенства (53).
Таким образом, получена матрица системы ($42'$) для нахождения коэффициентов степенного разложения собственной функции оператора G_B. Она имеет вид

$$A_{n,m} = (-1)^n \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!\,n!}\, \zeta(n+m+2)\ ; \quad n, m = 0, 1, 2, \ldots,$$

и её следует понимать как бесконечную сумму

$$A_{n,m} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k)_{n,m}\ ,$$

$$(A_k)_{n,m} = (-1)^n \frac{(n+m+1)!}{(n+1)!\,n!} \cdot \frac{1}{k^{n+m+2}}\ , \quad k = 1, 2, \ldots\quad .$$

Список литературы

[1] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, М.-Л., ОНТИ, 1935; (4th edition - М., Наука, 1978).

[2] R. O. Kuzmin, *Sur un problem de Gauss*, Atti Congr. Intern. Bologne, 6, 1928, P. 83-89.

[3] E. Wirsing, *On a theorem of Gauss-Kuzmin-Levy and a Frobenius-type theorem for function spaces*, Acta Arithmetica, 24, 1974, P. 507-528.

[4] К. И. Бабенко, С. П. Юрьев, *Об одной задаче Гаусса*, Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 63, 1977.

[5] К. И. Бабенко, *Об одной задаче Гаусса*, ДАН СССР, 238(5) , 1978, С. 1021–1024.