ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 80 за 2012 г.

Страховская Л.Г.

Модель эволюции самогравитирующего газового диска

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Страховская Л.Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 80. 24 с. URL: **http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-80**

О р д е н а   Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й   а к а д е м и и   н а у к

Л.Г. Страховская

Модель эволюции самогравитирующего газового диска

Москва — 2012

Страховская Л.Г.

Модель эволюции самогравитирующего газового диска

Модель описывается 3D нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала диска. Известные аналитические решения с равновесными конфигурациями политропного газа, не учитывающие самогравитацию, оказываются неустойчивыми в используемой постановке задачи. Предлагается численное моделирование начальной равновесной конфигурации, учитывающей самогравитацию. Показано, что численное решение полной системы уравнений становится квазистационарным, дисковая структура сохраняется, но конфигурация отличается от начальной.

Ключевые слова: газовый диск, самогравитация, равновесие, устойчивость

Liudmila Glebovna Strakhovskaya

Evolution model of the self-gravitating gas disk

The model is described by 3d non-stationary gas dynamic equations in Euler's variables in the cylindrical coordinates and by Poisson's equation for the gravitational potential of disk. The known analytical solutions with equilibrium configurations of polytrophic gas, which do not consider self-gravitation, prove to be unstable. The numerical simulation of the initial equilibrium configuration, which considers self-gravitation, is proposed. It is shown that the numerical solution of complete system of equations is quasi-stationary, the disk structure remains, but the configuration differs from the initial one.

Key words: gas disk, self-gravitation, equilibrium, stability.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 12-01-00071а.

Оглавление

Введение

Проблема эволюции протопланетного облака ведет начало от работ Лапласа, создание теории гравитационной неустойчивости связано с именем Джеймса Джинса, исследовавшего гравитационную нестабильность самотяготеющего газового облака [1]. Условия равновесия и устойчивости гравитирующих систем подробно исследуются в [2, 3]. В настоящей работе рассматривается система, состоящая из гравитирующего центра и вращающегося вокруг него газового облака. Гравитирующий центр представляет собой компактный объект, в качестве которого могут выступать нейтронные звезды, черные дыры, новые звезды, белые карлики и протозвезды. Наблюдения протозвезд (типа T Tau) подтверждают наличие газовых дисков вокруг центрального объекта и указывают на присутствие газопылевых протопланетных дисков [4]. Существующие модели образования Солнечной системы исходят из идеи о коллапсе газопылевого облака с образованием Солнца и протопланетного диска [5]. Монографии [4, 5] оказали определяющее влияние на понимание автором современного состояния астрофизики.

Численная модель диска описывается 3D нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах. Суммарная удельная сила в правых частях уравнений состоит из центробежной силы, силы гравитации центрального объекта и силы гравитации самого диска. Гравитационный потенциал диска должен удовлетворять уравнению Пуассона. При выборе начального состояния существенно, чтобы конфигурация диска была равновесной. Известны аналитические равновесные конфигурации идеального политропного газа, не учитывающие самогравитацию. В данной работе предлагается по заданной плотности при условии гидростатического равновесия численно найти начальную равновесную конфигурацию, учитывающую самогравитацию. Затем решать полную нестационарную систему уравнений газодинамики и уравнение Пуассона. Расчеты показывают, что решение со временем становится квазистационарным, дисковая структура сохраняется, но конфигурация отличается от начальной. Приведены расчеты 7 примеров, сделан анализ полученных результатов.

1. Постановка задачи

Модель эволюции диска описывается 3D нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах r, φ, z с началом координат в гравитирующем центре:

$$\frac{\partial(\rho)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\frac{\rho u}{r} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial\left(p+\rho u^2\right)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho uv)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\rho(u^2-v^2)}{r} + \rho\frac{\partial\Phi_d}{\partial r} + \rho\frac{\partial}{\partial r}(\frac{G\cdot M_s)}{R} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial r} + \frac{\partial\left(p+\rho v^2\right)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{2\rho uv}{r} + \rho\frac{\partial\Phi_d}{r\partial\varphi} \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho wv)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial\left(p+\rho w^2\right)}{\partial z} = -\frac{\rho uw}{r} + \rho\frac{\partial\Phi_d}{\partial z} + \rho\frac{\partial}{\partial z}(\frac{G\cdot M_s)}{R} \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial((e+p)u)}{\partial r} + \frac{\partial((e+p)v)}{r\partial\varphi} + \frac{\partial((e+p)w)}{\partial z} = -\frac{(e+p)u}{r} + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla\Phi_d + \rho\mathbf{v}\cdot\nabla(\frac{G\cdot M_s)}{R} \tag{1.5}$$

Здесь r – радиус, φ – полярный угол, z – ось вращения, ρ – плотность газа, p – давление, ε – внутренняя энергия единицы массы газа, $e = \rho(\varepsilon + \frac{\mathbf{v}^2}{2})$ – полная энергия (сумма внутренней и кинетической) единицы объема газа, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости, $\mathbf{v}^2 = u^2 + v^2 + w^2$. Φ_d – гравитационный потенциал диска, G – постоянная гравитации, M_s – масса центрального гравитирующего объекта, $\Phi_s = \frac{G\cdot M_s}{R}$ – соответствующий гравитационный потенциал, а $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ и вектор $\nabla = (\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{r\partial\varphi}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Уравнение состояния идеального газа используется в виде:

$$p = (\gamma\text{-}1)\rho\varepsilon \quad . \tag{1.6}$$

Будем также пользоваться уравнением политропного газа $p = k\rho^\gamma$.

Система (1.1-1.5) представляет одну из дивергентных форм уравнений газовой динамики в цилиндрических координатах в поле собственного тяготения диска Φ_d (столбец 2 правой части) и тяготения центрального объекта Φ_s (столбец 3).

Гравитационный потенциал диска удовлетворяет уравнению Пуассона, которое в цилиндрических координатах имеет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\Phi_d}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi_d}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi_d}{\partial z^2} = -4\pi G\rho \tag{1.7}$$

Область расчета Ω находится между двумя коаксиальными цилиндрами $r_1 < r < r_2$ малой высоты h по сравнению с внешним радиусом r_2: $h \approx 10^{-1} r_2$, $r_1 \approx 10^{-2} r_2$. $Z = 0$ – плоскость симметрии, h – полувысота диска.

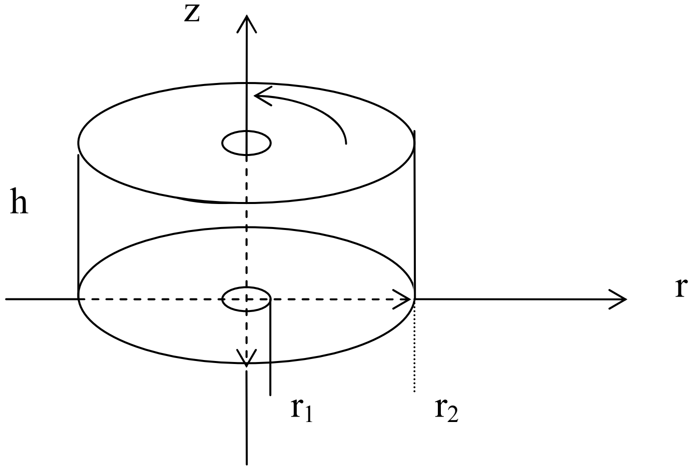


Рис. 1. Расчетная область Ω

Система уравнений (1.1-1.5) дополняется следующими граничными условиями:

при $z=0$, $w = 0$, $\dfrac{\partial}{\partial z}(\rho, u, v, p) = 0$ (условие симметрии), (1.8)

при $r=r_1$, $u = 0$ (жесткая стенка),

на остальной поверхности либо $\mathbf{v}_n = 0$, либо $\dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0$, задание этих величин однозначно определяет граничные значения других неизвестных функций. Для гравитационного потенциала граничные значения в каждой точке P поверхности вычисляются через интеграл Пуассона

$$\Phi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(Q)}{\overline{PQ}} dV, \quad Q \in \Omega, \quad P \in \partial\Omega. \qquad (1.9)$$

Выбор начальных данных обсуждается ниже.

Задача предложена В.Т. Жуковым в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 28, подпрограмма № 1 "Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца". Газодинамическое приближение является первым шагом в моделировании эволюции протопланетного диска. На следующем шаге надо учесть поведение пылевой составляющей диска, благодаря которой формируются сгущения и затем под действием самогравитации вырастают планетезимали. Нужно учитывать излучение, влияние магнитного поля и т.д.

Переход к безразмерным переменным осуществляется для удобства вычислений на ЭВМ. В качестве основных масштабных единиц выберем величины M_s, G, R_0, где R_0 – характерный пространственный размер задачи. Введем безразмерные переменные, помеченные штрихом, согласно формулам:

$$
\begin{array}{lll}
r = R_0 r', & t = t_0 t', & \mathbf{v} = v_0 \mathbf{v}', \\
\rho = \rho_0 \rho', & p = p_0 p', & e = e_0 e', \\
\Phi = \Phi_0 \Phi', & \omega = \omega_0 \omega', & \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon',
\end{array}
$$

здесь $\omega = v / r$ – угловая частота вращения. Масштабные единицы выражаются следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
v_0^2 = \dfrac{GM_s}{R_0}, & t_0^2 = \dfrac{R_0^3}{GM_s}, & \rho_0 = \dfrac{M_s}{4\pi R_0^3}, & p_0 = \dfrac{GM_s^2}{4\pi R_0^4}, \\
e_0 = \dfrac{GM_s}{R_0}, & \Phi_0 = \dfrac{GM_s}{R_0}, & \omega_0^2 = \dfrac{GM_s}{R_0^3}, & \varepsilon_0 = \dfrac{GM_s^2}{4\pi R_0^4}.
\end{array}
$$

Для солнечной системы, например, выбираются следующие масштабные единицы: $M_s = 1.989 \cdot 10^{33}$ *г*, $R_0 = 4.52 \cdot 10^{14}$ *см*.

Тогда с учетом $G = 6.67 \cdot 10^{-8} \, см^3 / г \cdot сек^2$ в системе CGS:
$v_0 = 5.42 \cdot 10^5$, $t_0 = 8.34 \cdot 10^8$, $\rho_0 = 1.7 \cdot 10^{-12}$, $p_0 = 0.503$,
$e_0 = 2.94 \cdot 10^{11}$, $\Phi_0 = 2.94 \cdot 10^{11}$, $\omega_0 = 1.2 \cdot 10^{-9}$, $\varepsilon_0 = 0.503$.

В безразмерных переменных вид уравнений газовой динамики не меняется, изменяются только выражение для гравитационного потенциала звезды $\Phi_s = \dfrac{1}{R}$ и правая часть в уравнении Пуассона:

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -\rho .
$$

Здесь опущен штрих в обозначении безразмерных переменных, так как в дальнейшем будем использовать только их.

2. Методы решения

Уравнение Пуассона решается многосеточным методом Федоренко (Multigrid), который давно применяется автором для решения краевых эллиптических задач [6, 7]. Используется 3–5 вложенных сеток. Уравнения газовой динамики решаются по схеме Годунова. Расчет потоков ведется с использованием программы расчета плоского распада разрыва [8], любезно предоставленной В.Т.Жуковым. Задаются граничные условия (1.8) (в безразмерной форме).

В области Ω: $r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le h$ вводится ортогональная, быть может, неравномерная сетка с шагами h_r, h_φ, h_z. Задаются начальные данные, решается уравнение Пуассона, рассчитываются потоки и правые части в уравнениях (1.1–1.5), и пересчитываются значения неизвестных на следующем шаге по времени.

Основную трудность составляет выбор согласованных начальных данных для системы уравнений (1.1–1.5).

3. Равновесные конфигурации газового диска

Для выбора начального состояния существенно, чтобы конфигурация диска была равновесной. При условии гидростатического равновесия $\partial / \partial t \equiv 0$, $u = w = 0$ система (1.1–1.7) в безразмерных переменных приводится к виду

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \rho \frac{v^2}{r} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R};$$

$$\frac{\partial p}{r\partial \varphi} - v^2 \frac{\partial \rho}{r\partial \varphi} = \rho \frac{\partial \Phi}{r\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}; \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial \varphi} = 0; \qquad \frac{\partial (e+p)v}{r\partial \varphi} = \rho v \frac{\partial \Phi}{r\partial \varphi};$$

$$\Delta \Phi = -\rho; \qquad ,$$

ρ – плотность газа, p – давление, v – линейная скорость вращения, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Суммарная сила гравитации в правых частях состоит из суммы силы собственного тяготения диска и силы тяготения центрального объекта, под действием этих сил газовое облако сжимается. Этим силам противодействует давление газа (силы упругости) и центробежная сила, которые стремятся рассеять газ. Введем результирующую силу или невязку (residual) этих сил, которая нам понадобится в дальнейшем для оценки состояния равновесия:

$$Res_r = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho \frac{v^2}{r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R};$$

$$Res_\varphi = -\frac{\partial p}{r\partial \varphi} + v^2 \frac{\partial \rho}{r\partial \varphi} + \rho \frac{\partial \Phi}{r\partial \varphi}; \tag{3.2}$$

$$Res_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}.$$

Если $Res < 0$, то преобладают силы тяготения, и облако сжимается, если $Res > 0$, то облако расширяется. На рис. 3б представлены эти силы для распределения (4.6) примера 2.

4. Равновесные конфигурации политропного газа без самогравитации

В [9] в цилиндрически симметричном случае $(\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0)$ для идеального политропного газа $p = k\rho^{\gamma}$ получены аналитические решения уравнений (3.1) в зависимости от заданной вращательной компоненты скорости v без учета самогравитации диска, т.е. без уравнения Пуассона. Показано также, что можно построить решения, описывающие дискообразные конфигурации вещества любой формы, задавая только границу вещества $Z(r)$. Отмечено, что для политропного газа вращательная компонента скорости v зависит только от радиуса и что не существует стационарных трехмерных дисков с кеплеровским законом вращения при любых значениях индекса политропы. Тем не менее при моделировании динамики газового диска часто пользуются кеплеровским законом или его модификациями.

Аналитическое решение в зависимости от заданной вращательной компоненты скорости

Согласно формулам из [9] построим аналитическое решение уравнений (3.1) без учета самогравитации диска в зависимости от заданной скорости $V(r)$, пропорциональной скорости Кеплера:

$$V = c\sqrt{\frac{1}{r}}\ ; \tag{4.3}$$

$$\rho(r,z) = [\frac{\gamma-1}{k\gamma}(\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} - 1 + I(r) - I(1))]^{\frac{1}{\gamma-1}}\ ; \tag{4.4}$$

$$I(r) = \int\frac{V^2(r)}{r}dr, \quad \Psi(r) = 1 + rI(r) - r - rI(1), \ \ v(r,z) = V(r). \tag{4.5}$$

Вид характеристической функции $\Psi(r)$ определяет вид границы вещества и поведение решения уравнений (3.1). Поэтому, чтобы получить решение с границей в виде сечения тора, нужно, чтобы характеристическая функция $\Psi(r)$

была положительна при $r \in [a,b] \subset [r_1, r_2]$, имела корни на его концах, а вне отрезка была отрицательной. Для (4.3) получены два основных случая:

1) $c^2 < 1,\quad 0 < r \le 1$, 2) $c^2 > 1,\quad 1 < r \le 1 + 1/(c^2 - 1)$.

При $c^2 = 1$ плотность вырождается в нуль.

Построенное двумерное аналитическое решение системы (3.1) для политропного газа продолжим на всю область Ω и возьмем в качестве начальных данных для системы (1.1–1.5). Проследим эволюцию диска, не учитывая самогравитацию (именно для этого случая было построено равновесное аналитическое решение).

Отметим, что граница положительной плотности Γ лежит внутри области Ω и делит ее на две подобласти $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$, поэтому в области отрицательной плотности Ω_1 плотность всегда заменяется малой положительной величиной, например, $10^{-4}\rho_{\max}$.

Пример 1. Область Ω: $0.1 \le r \le 1.4,\quad 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad 0 \le z \le 1$,

$k = 0.19,\quad \gamma = 1.43$, сетка $50 \times 8 \times 40$.

На рис. 2а-2г (стр. 10) представлены распределения плотности в сечении $\varphi = 0$ на разные моменты времени: $t = 0;\ 1.03;\ 10;\ 27.9$. Начальная скорость $v = 0.8\sqrt{\dfrac{1}{r}}$. Масса газа получилась при этом $M_d = 0.1$, значение $k = 0.19$ соответствует температуре $\sim 1700^\circ K$. Время $t = 27.9$ соответствует ~ 5 оборотам. Диска нет, газ рассеивается.

Аналитическое решение в зависимости от заданной границы положительной плотности вещества

Также в соответствии с [9] построим аналитическое решение уравнений (3.1) без учета самогравитации диска в зависимости от заданной границы положительной плотности вещества $Z(r)$, дважды дифференцируемой и удовлетворяющей условию $r + Z(r)Z'(r) > 0,\quad r \in [a,b]$. Характеристическая функция имеет вид $\Psi(r) = 1 - \dfrac{r}{(r^2 + Z^2(r))^{1/2}}$;

$$\rho(r,z) = \left[\frac{\gamma-1}{k\gamma}\left(\frac{1}{(r^2+z^2)^{1/2}} + \frac{1}{r}(\Psi(r)-1)\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}; \tag{4.6}$$

$$v^2(r,z) = \frac{1}{r}(1 + r\Psi'(r) - \Psi(r)); \tag{4.7}$$

$$p = k\rho^{\gamma}. \tag{4.8}$$

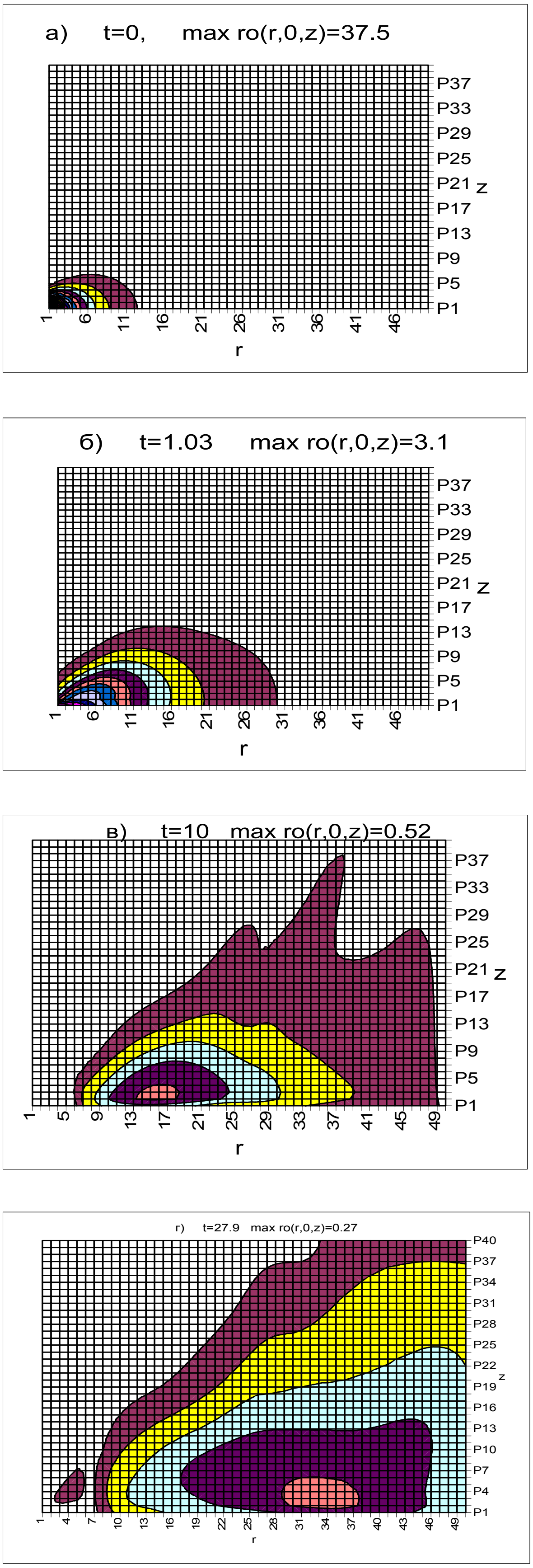


Рис. 2а-2г. Линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$ (ρ=ro)

Построенное аналитическое решение для политропного газа возьмем в качестве начальных данных для системы (1.1-1.5): $\rho(r,\varphi,z)=\rho(r,z),\quad v(r,\varphi,z)=v(r,z)$. Гравитационный потенциал диска $\Phi=0$, уравнение Пуассона не решается.

$Z(r)$ - граница положительной плотности вещества (рис. 3а) делит расчетную область Ω на две подобласти $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$. В области отрицательной плотности Ω_2 (верхняя на рис. 3а) и там, где значения плотности были меньше некоторой заданной величины $\rho<\rho_{\min}$, плотность и давление заменялись малыми положительными константами $\rho_{\min}$, $p_{\min}$.

Пример 2. Область Ω: $0.1\le r\le 1.4,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le z\le 0.2$, $k=0.0106$, $\gamma=1.43$, сетка $50\times 8\times 16$.

$$Z(r)=0.32re^{-9(r-0.55)^2}. \tag{4.9}$$

На рис. 3а, 3б (стр. 12,13) представлены распределения плотности, давления, скорости вращения и невязки в сечении $\varphi=0$ на разные моменты времени: $t=0;\ 0.9;\ 34.7;\ 60.6$. Масса газа $M_d=0.09856$. Значение $k=0.0106$ соответствует температуре $\sim 95^\circ K$. Время $t=60.6$ соответствует ~ 14 оборотам. Начальная конфигурация диска изменилась, но стала квазистационарной: максимальное значение плотности медленно падает, и газ постепенно расширяется.

Аналитическое решение в зависимости от заданной угловой скорости

В [10] также для политропного газа в случае $(\frac{\partial}{\partial\varphi}=0)$ и тоже без учета самогравитации диска рассматриваются аналитические решения уравнений (3.1) в зависимости от заданной угловой скорости ω, близкой к кеплеровскому закону вращения. В качестве примера приводится двумерный расчет сечения тороидального протопланетного кольца, которое описывает одну зону протопланетного диска и резко отличается от дисковой конфигурации.

Пример 3. Область Ω: $0.8\le r\le 1.1,\quad 0\le\varphi\le 2\pi,\quad 0\le z\le 0.4$, $k=0.7358$, $\gamma=1.43$, сетка $30\times 8\times 20$.

$$\omega=\omega_0 e^{-\frac{r^2}{r_0^2}}. \tag{4.10}$$

Плотность вычисляется по формуле, аналогичной (4.4). Построенное аналитическое решение с $v=\omega\cdot r$ и $\omega_0=1668,\quad r_0=0.3319$ возьмем в качестве начальных данных для системы (1.1–1.5) и проследим динамику диска без учета самогравитации.

На рис. 4 (стр. 14) представлены распределения плотности и вращательной компоненты скорости $v=\omega\cdot r$ в сечении $\varphi=0$ на разные моменты времени $t=0;\ 11.3;\ 38.2;\ 77.3$. Масса кольца $M_d=0.471\cdot 10^{-5}$.

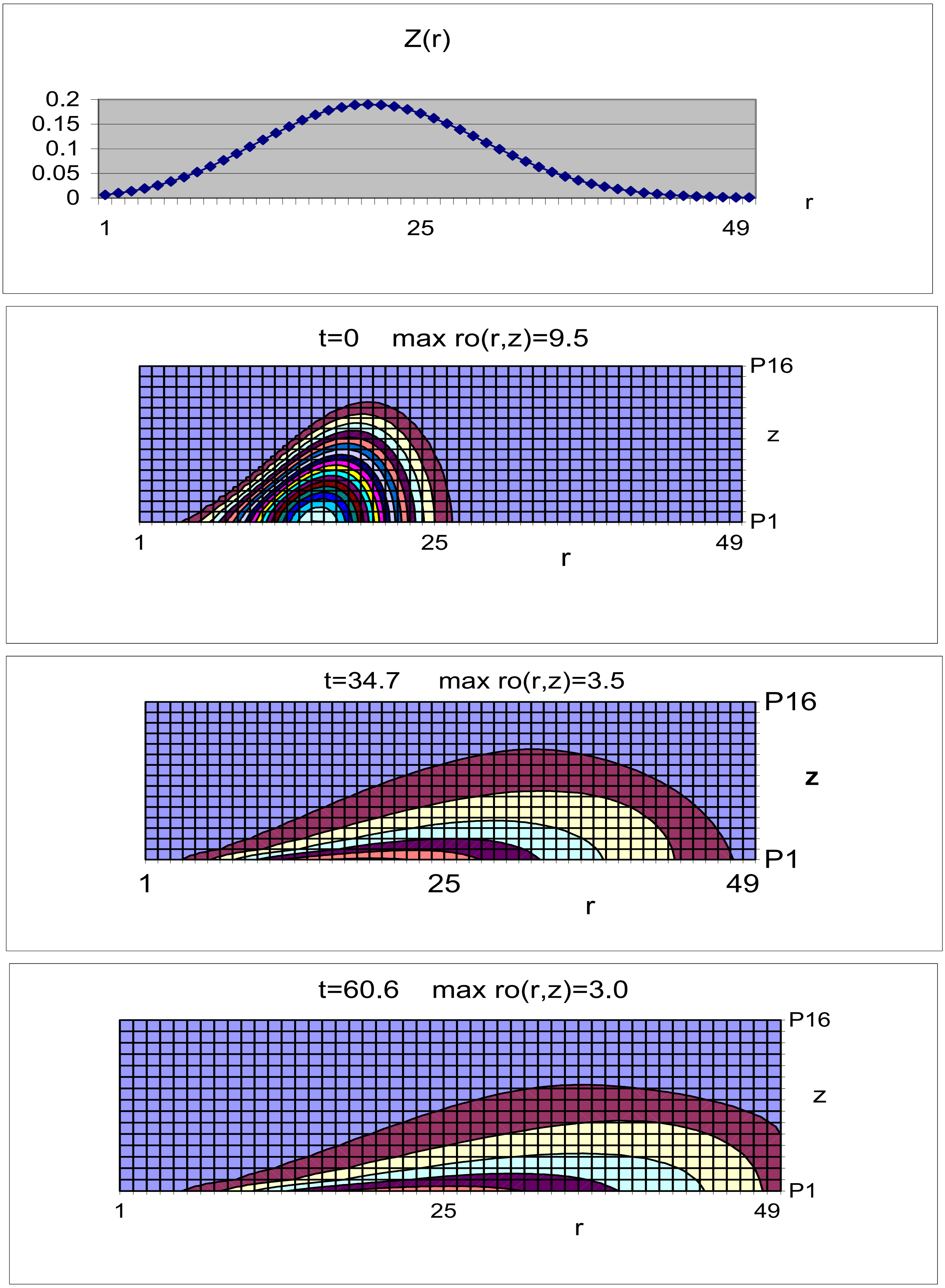
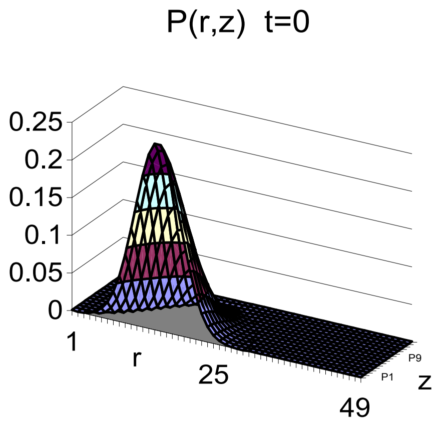
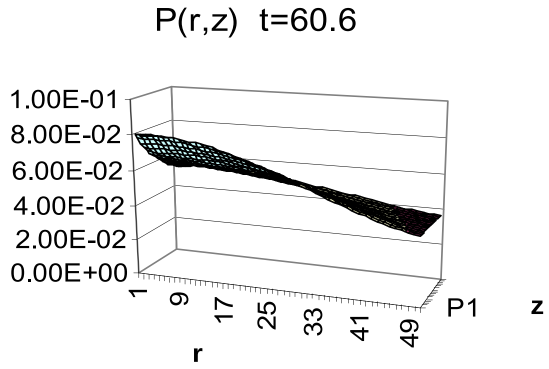
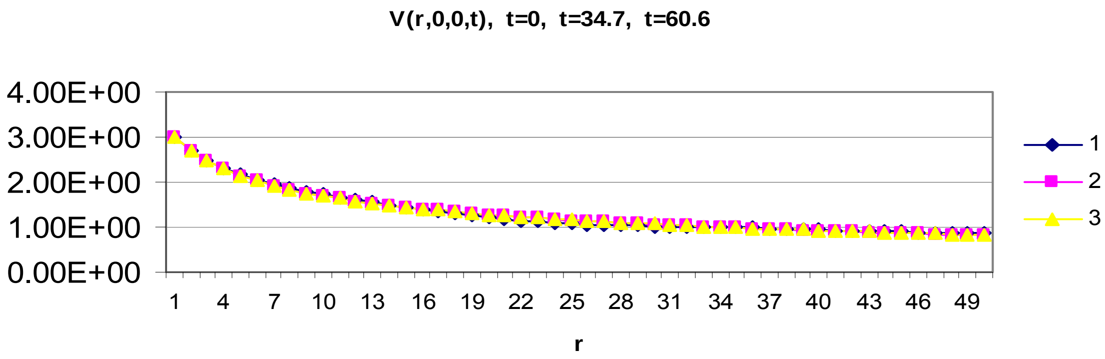
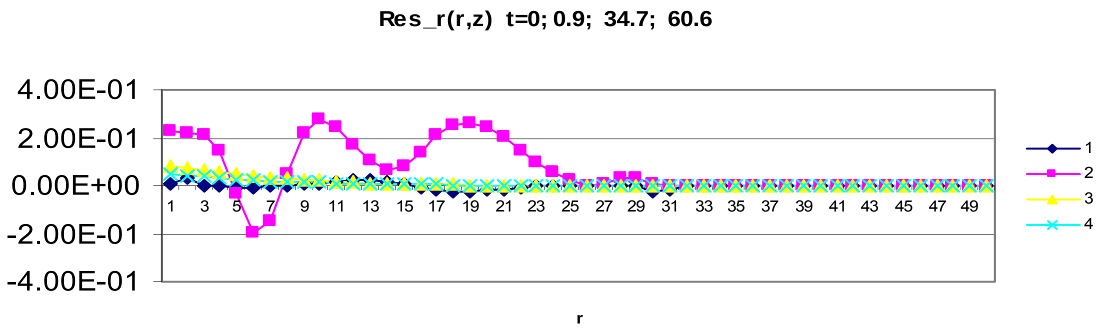


Рис. 3а. Линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$ (ρ=ro)









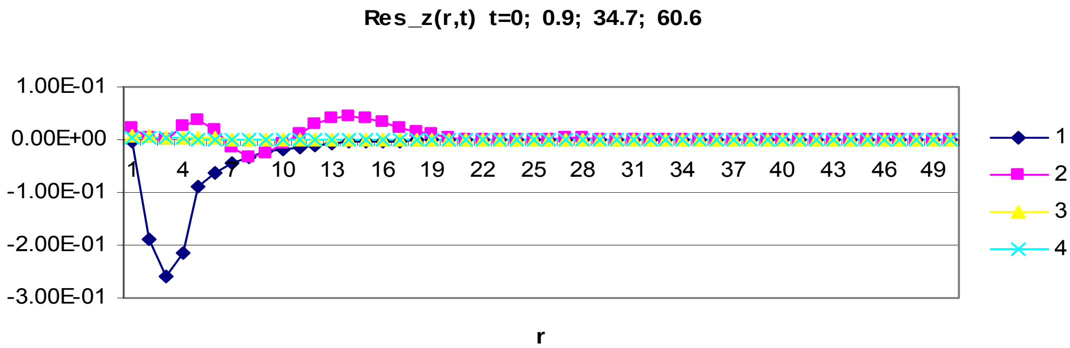


Рис. 3б. Значения давления $p(r,0,z,t)$, скорости $v(r,0,0,t)$ и невязки $Res(r,0,0,t)$

Время одного оборота равно ~ 7. Значение $k = 0.7358$ соответствует температуре $\sim 6500^{\circ} K$, т.е. газ очень «горячий» и малой плотности. Начальная конфигурация диска совершенно изменилась, максимальное значение плотности упало в два раза, но затем почти не меняется $\rho_{max} \sim 2 \cdot 10^{-4}$. Решение стало квазистационарным, диск медленно расширяется.

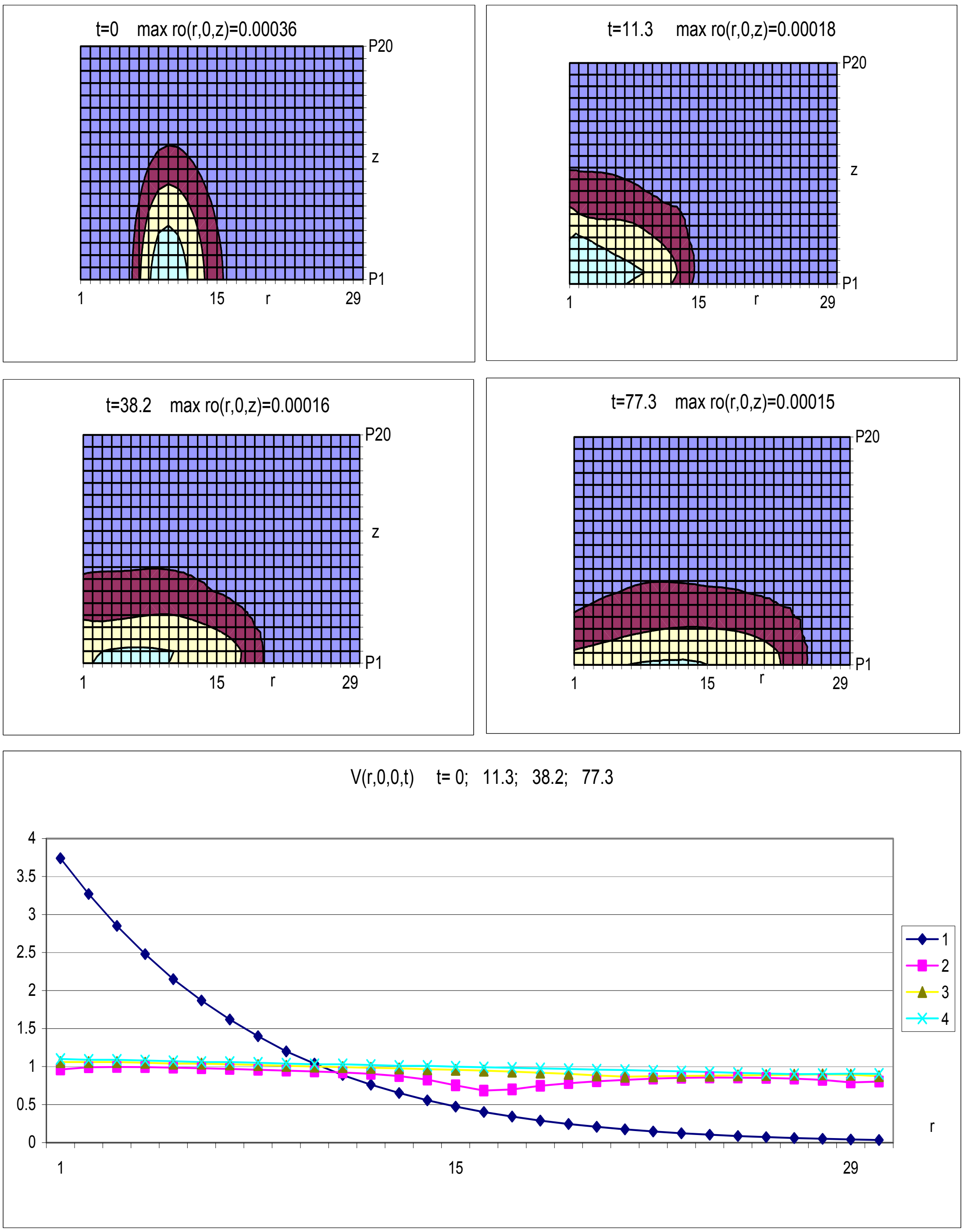


Рис. 4. Линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$ и скорость $v(r,0,0,t)$

Для сравнения с примером 3 приведем расчет с теми же параметрами, изменив только значение температуры $T \sim 95^{\circ} K$ (см. рис.5).

Пример 4. Область Ω: $0.8 \le r \le 1.1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 0.4$, $k = 0.0106$, $\gamma = 1.43$, сетка $30 \times 8 \times 20$, $\omega_0 = 1668$, $r_0 = 0.3319$.

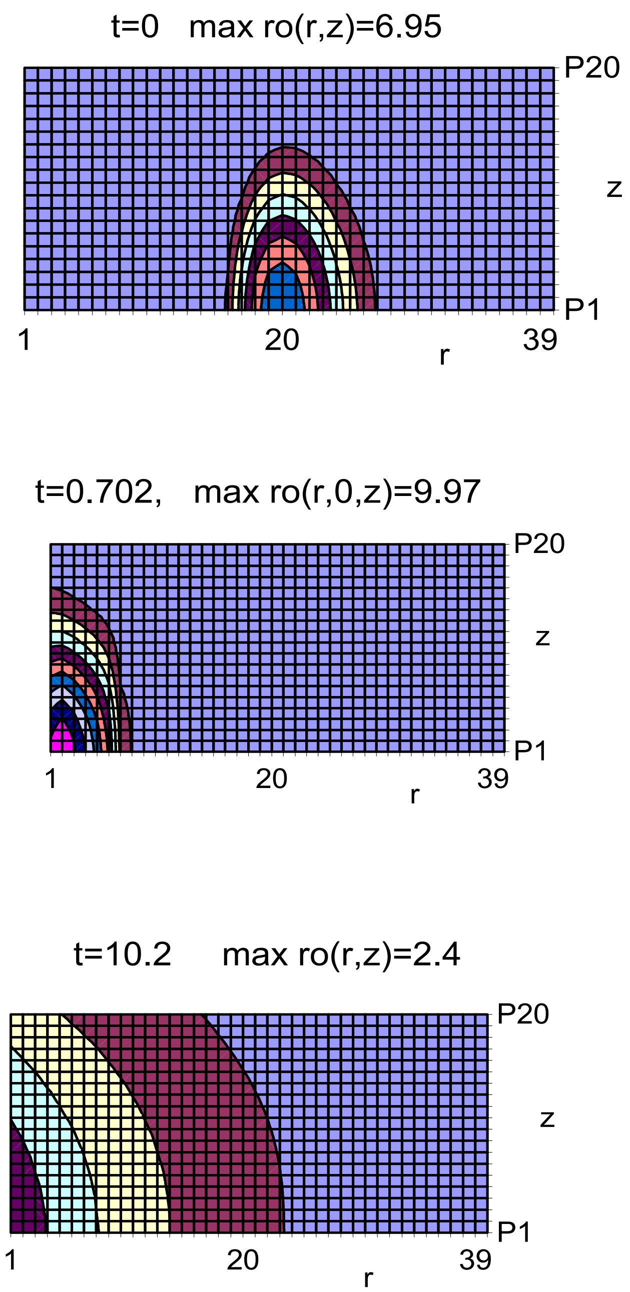


Рис.5. Линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$

Значение $k = 0.0106$ соответствует температуре $\sim 95^\circ K$. Масса кольца получилась $M_d = 0.07414$, т.е. газ «холодный» и большой плотности, сила гравитации центрального объекта преобладает над силами упругости (давление) и центробежной. Газ сначала притягивается к центру области, а затем постепенно расширяется.

5. Моделирование равновесной конфигурации самогравитирующего газа

Аналитические решения уравнений (3.1) возможно построить только для политропного газа и без учета самогравитации диска. В данной работе предлагается по заданной плотности численно найти начальную равновесную конфигурацию, решив систему (3.1) вместе с уравнением Пуассона. Затем решать полную нестационарную систему уравнений газодинамики с самогравитацией.

Сначала рассмотрим цилиндрически симметричный случай. Зададим начальное распределение плотности $\rho(r,z)$ по формулам (4.6), (4.8) в соответствии с заданной границей $Z(r)$. Затем будем решать уравнения (3.1) при условии $\dfrac{\partial}{\partial \varphi} = 0$:

1) находится гравитационный потенциал $\Phi(r,z)$ из уравнения Пуассона;

2) находится $p(r,z)$ из уравнения $\dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} + \rho \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{1}{R}$, используется краевое условие на границе (например, $p(r,h) = 0$);

3) из уравнения $\dfrac{\partial p}{\partial r} - \rho \dfrac{v^2}{r} = \rho \dfrac{\partial \Phi}{\partial r} + \rho \dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{R}$ вычисляется $v(r,z)$.

Пример 5. Область Ω: $0.1 \le r \le 1.4,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ \ 0 \le z \le 0.2$,

сетка $50 \times 20 \times 16$, $Z(r) = 0.32 r e^{-9(r-0.55)^2}$, $M_d = 0.09856$.

Построим по распределению начальной плотности из примера 2 численное двумерное решение системы (3.1) согласно описанному методу. Возьмем $\rho(r,\varphi,z) = \rho(r,z),\quad v(r,\varphi,z) = v(r,z),\quad p(r,\varphi,z) = p(r,z),\quad u(r,\varphi,z) = w(r,\varphi,z) = 0$ в качестве начальных данных системы (1.1-1.5) и будем решать ее, учитывая самогравитацию.

На рис. 6 представлены распределения плотности в сечении $\varphi = 0$ на моменты времени: $t = 1.01;\ 10;\ 18.3$. Начальное распределение плотности на рис. 3а. Конфигурация диска перераспределяется, под действием гравитации максимум плотности перемещается к центру, на момент времени $t = 1$ образуется два локальных максимума: $\rho(0.3,0,0) = 2.64$; $\rho(0.85,0,0){=}2.37$. Затем выделяется один максимум приблизительно в том же месте, что и в начальном распределении.

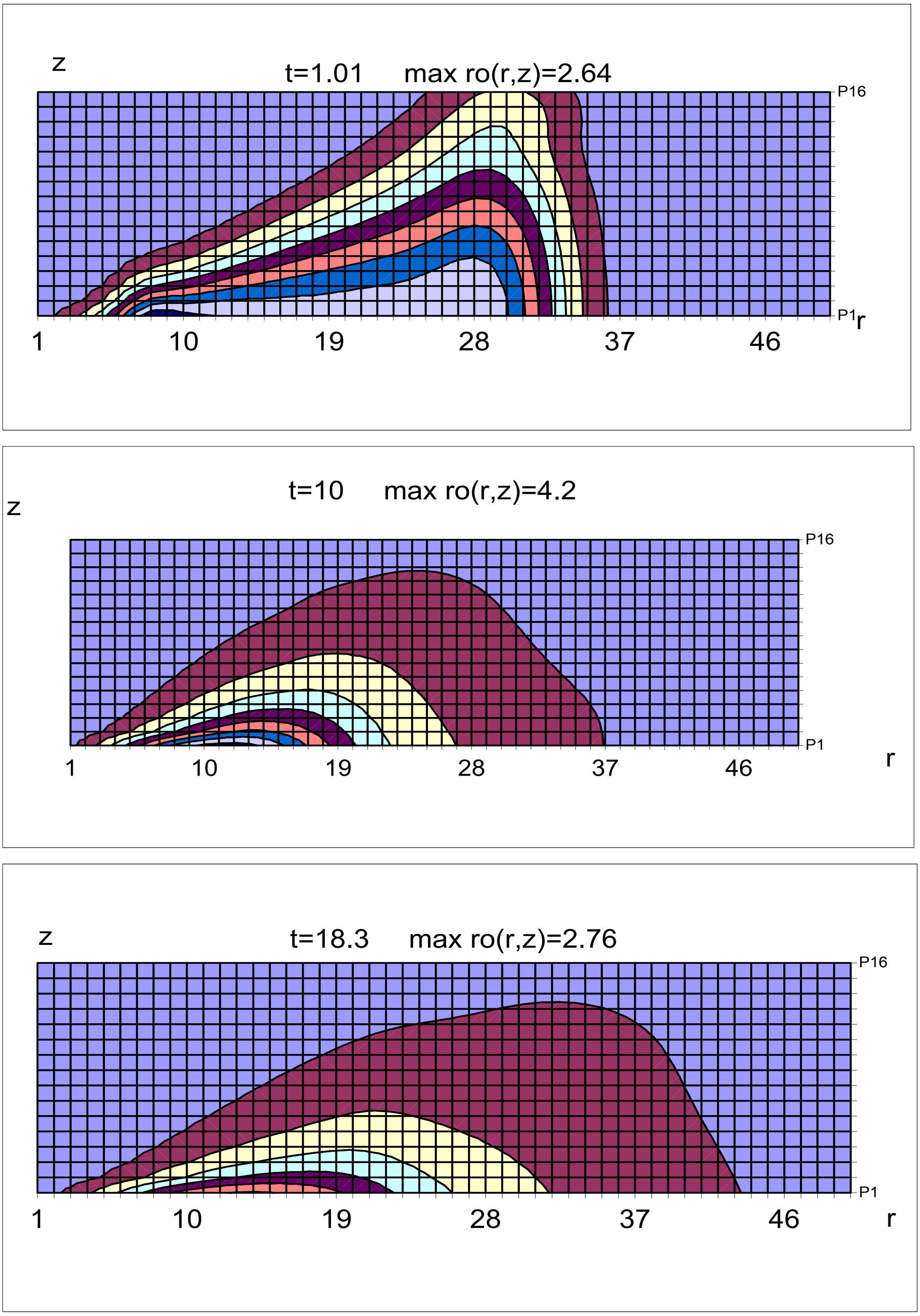


Рис. 6. Эволюция плотности $\rho(r,0,z,t)$ примера 5, цилиндрически симметричный случай, учитывается самогравитация, начальная плотность $\rho(r,z)$ из примера 2, начальные $p(r,z)$ и $v(r,z)$ рассчитаны по уравнениям (3.1)

Для сравнения проведен расчет уравнений (1.1-1.5) с самогравитацией, но с начальным аналитическим равновесным распределением примера 2, построение которого не учитывало самогравитацию (формулы 4.6–4.9).

Пример 6. Область Ω: $0.1 \le r \le 1.4$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 0.2$, $\gamma = 1.43$, $k = 0.0106$, сетка $50 \times 20 \times 16$, $Z(r) = 0.32re^{-9(r-0.55)^2}$, $M_d = 0.09856$.

На рис. 7 (стр. 19) представлены распределения плотности в сечении $\varphi = 0$ на моменты времени: $t = 1;\ 10.1;\ 11.6$. Начальное распределение плотности на рис. 3а. Конфигурация диска также меняется, но максимумы более выражены. Это связано с тем, что начальная скорость и давление в этом варианте меньше, чем в примере 5.

6. Расчет трехмерных возмущенных конфигураций

В предыдущих примерах рассматривались цилиндрически симметричные конфигурации. Интерес представляют распределения, зависящие от угла φ. В [11] изучалось влияние малых периодических возмущений скорости v и плотности на перераспределение углового момента вещества диска.

В приводимом ниже примере 7 начальные данные для системы (1.1-1.5) задавались следующим образом. Сначала задавалось цилиндрически симметричное распределение плотности $\rho_0(r,z)$ по формулам (4.6), (4.8) и скорость $v_0(r,z) = r / (r^2 + z^2)^{3/4}$, при которой центробежная сила компенсирует градиент гравитационного потенциала центрального объекта. Вычислялась вспомогательная функция $c(r,z) = \rho_0(r,z)v_0(r,z)$, чтобы выполнить первое уравнение системы (3.1) $\dfrac{\partial \rho v}{\partial \varphi} = 0$, и задавались трехмерные распределения плотности $\rho(r,\varphi,z) = \rho_0(r,z)(1 + 0.2\sin\varphi)$, давления $p(r,\varphi,z) = k\rho^{\gamma}(r,\varphi,z)$ и скоростей $u(r,\varphi,z) = w(r,\varphi,z) = 0$, $v(r,\varphi,z) = c(r,z) / \rho(r,\varphi,z)$.

Пример 7. Область Ω: $0.1 \le r \le 1.4$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le z \le 0.2$, $\gamma = 1.43$, $k = 0.0106$, сетка $50 \times 60 \times 16$, $Z(r) = 0.32re^{-9(r-0.55)^2}$, $M_d = 0.09856$.

На рис. *8а-8в* (стр. 20-22) представлены распределения плотности, скорости v и давления в сечениях $\varphi = 0$ и $z = 0$ на разные моменты времени.

На рис. *8а* представлены значения плотности $\rho(r,\varphi,0,t)$ в сечении $z = 0$ на моменты времени $t = 0;\ 1.01;\ 13.3$. На рис. *8б* представлены линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$ в сечении $\varphi = 0$ на времена $t = 0;\ 1.01;\ 10.6,\ 13.3$. На рис. *8в* представлены значения скорости $v(r,\varphi,0,t)$ на времена $t = 0;\ 13.3$ и значения давления $p(r,\varphi,0,13.3)$ в сечении $z = 0$.

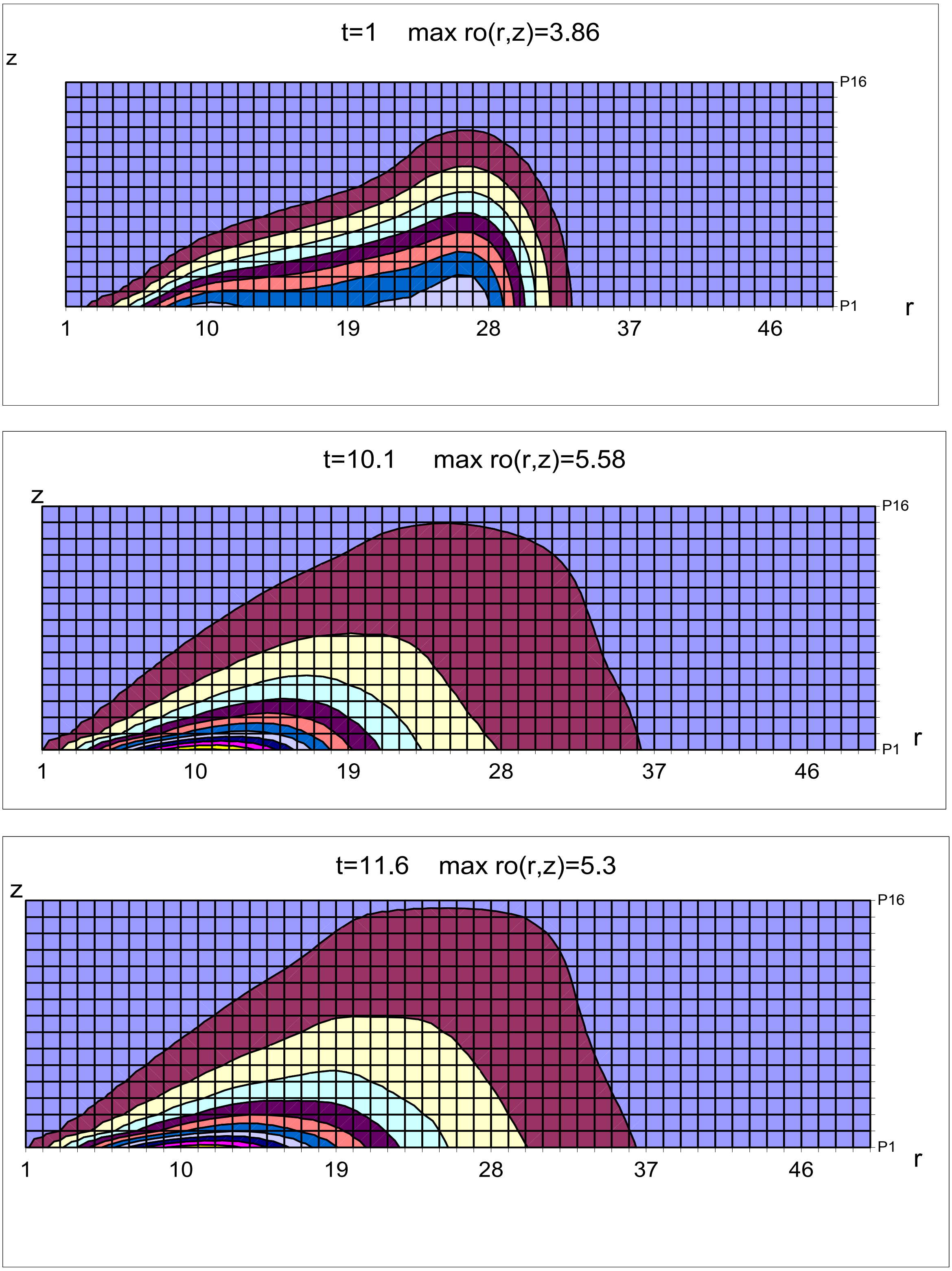


Рис.7. Эволюция плотности $\rho(r,0,z,t)$ примера 6, цилиндрически симметричный случай, учитывается самогравитация, начальные аналитические равновесные распределения $\rho(r,z)$, $p(r,z)$ и $v(r,z)$ из примера 2

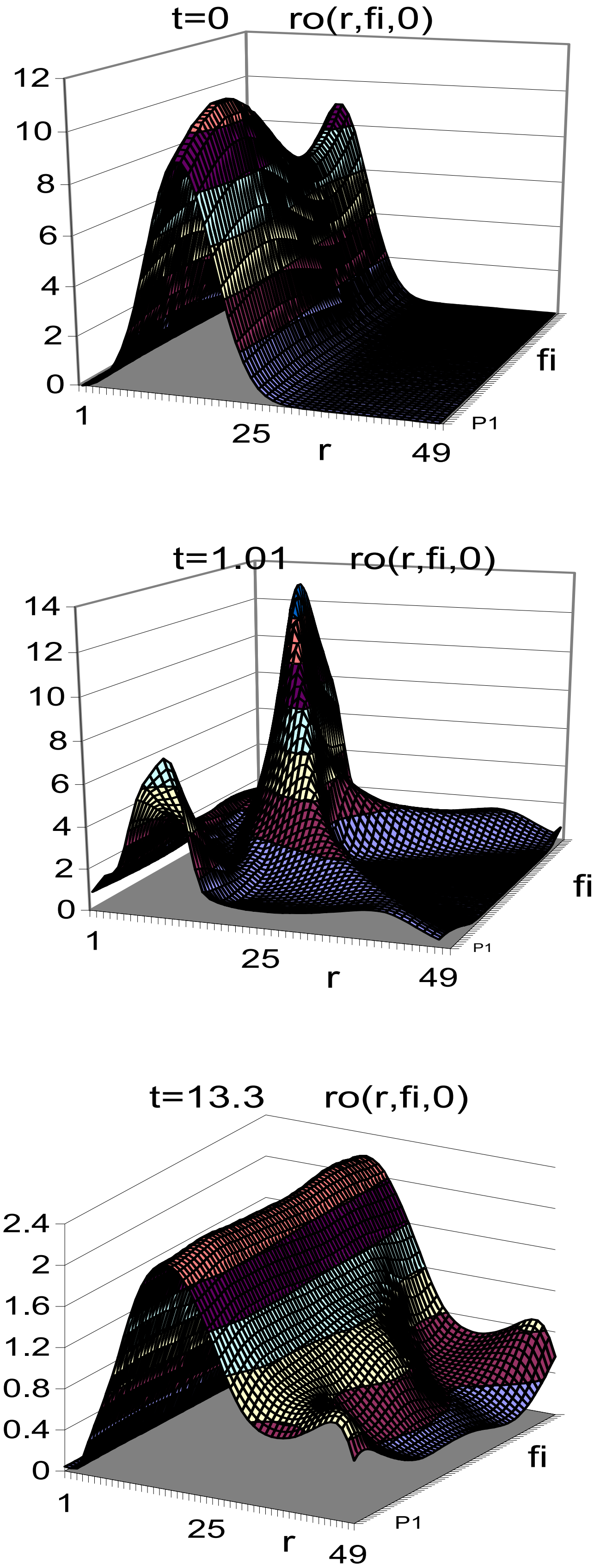


Рис. 8а. Значения плотности $\rho(r,\varphi,0,t)$ в сечении $z = 0$ ($\varphi = \mathrm{fi}$)

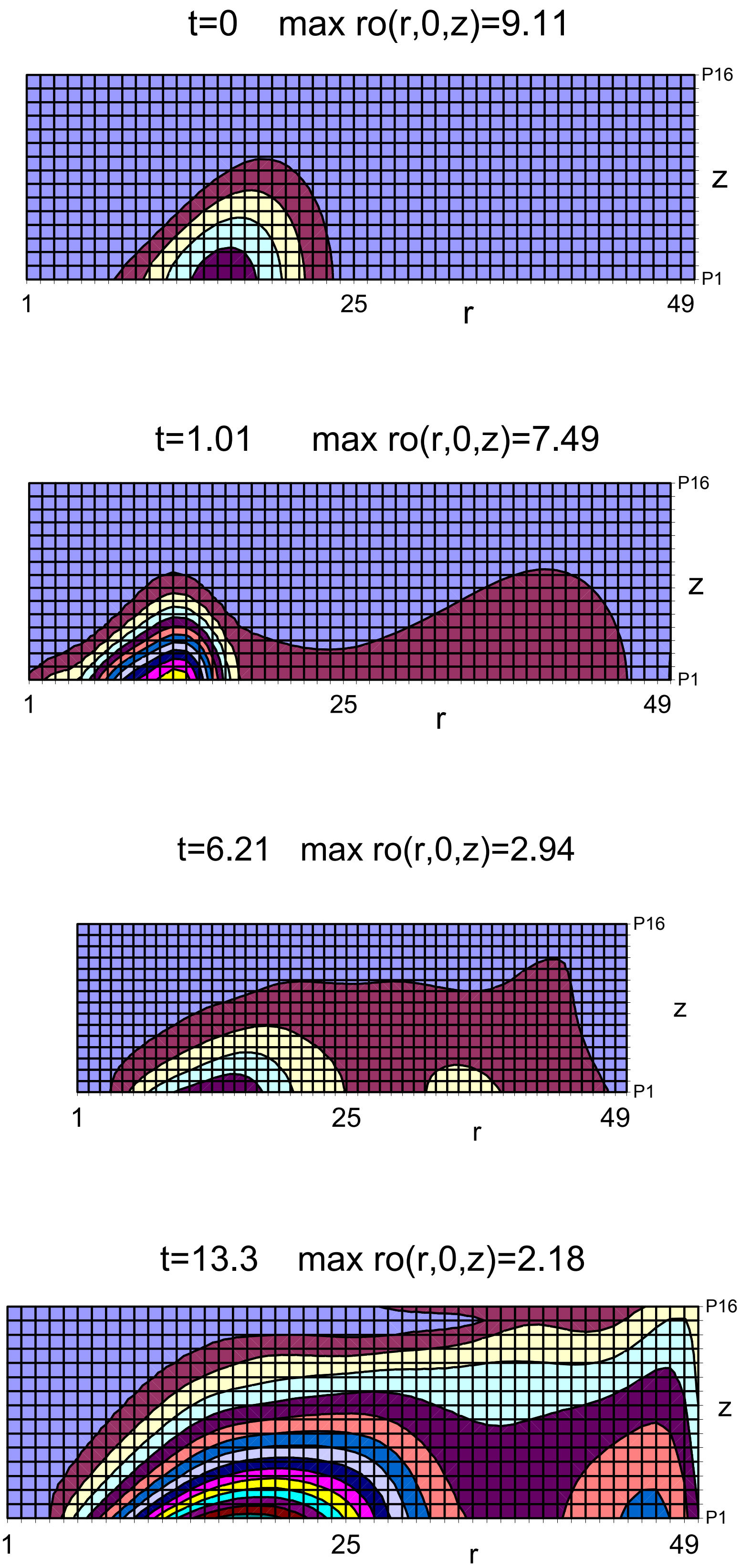


Рис. 8б. Линии уровня плотности $\rho(r,0,z,t)$ в сечении $\varphi=0$

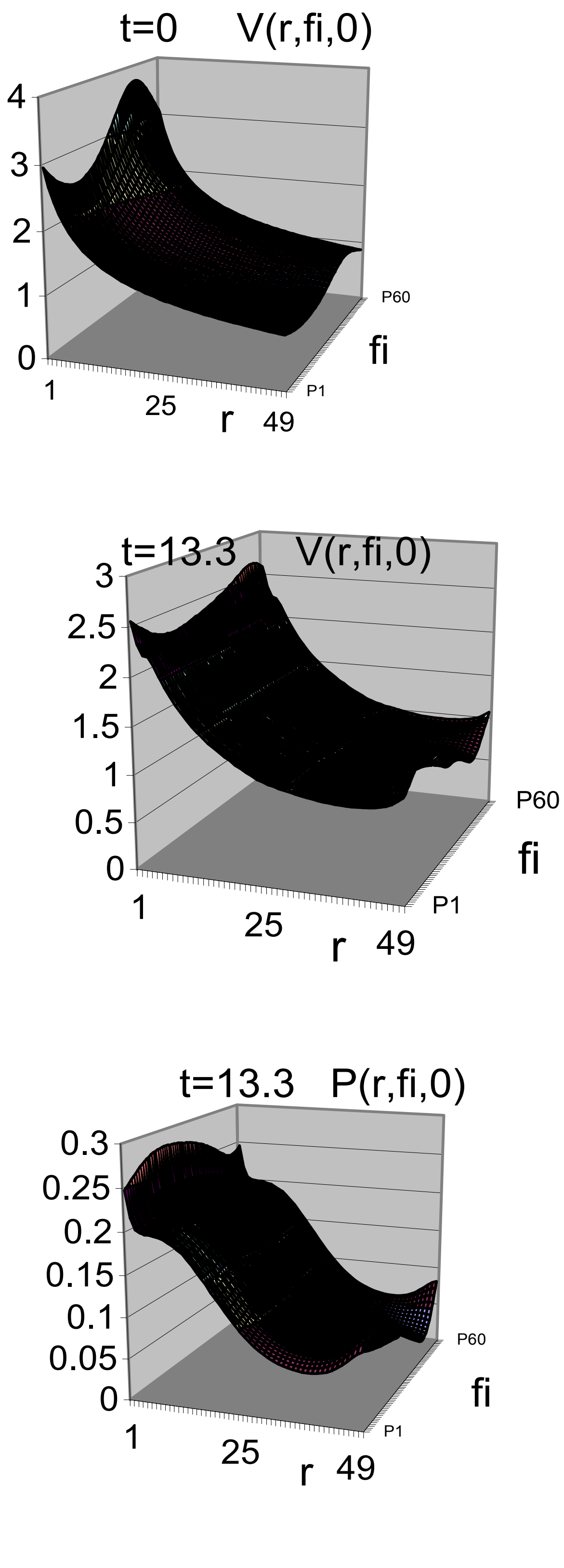


Рис. 8в. Значения скорости $v(r,\varphi,0,t)$ и давления $p(r,\varphi,0,13.3)$

7. О стационарности равновесных конфигураций

Уравнения (3.1) для гидростатического равновесия $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0,\ u = w = 0$ системы (1.1–1.7) в цилиндрически симметричном случае и в отсутствие самогравитации диска для политропного газа принимают вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{v^2}{r} + \rho \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}; \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}; \tag{7.2}$$

$$p = k\rho^{\gamma}. \tag{7.3}$$

Рассмотренные в примерах 1–4 аналитические решения уравнений (7.1–7.3) являются равновесными решениями газодинамической системы (1.1–1.5) только в области Ω_0, ограниченной поверхностью $Z(r)$ (рис. 3а).

В области отрицательной плотности Ω_1 и там, где значения плотности были меньше некоторой заданной величины $\rho < \rho_{\min}$, плотность и давление заменялись малыми положительными константами $\rho_{\min}$, $p_{\min}$. Следовательно, в этих областях $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$. Уравнение (7.1) можно выполнить за счет центробежной силы, полагая $v^2 = -r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{R}$, но уравнение (7.2) в этой области не выполнено. Следовательно, уравнение для импульса (1.4) становится нестационарным: $\frac{\partial \rho w}{\partial z} = \rho \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{R}$.

Поэтому примеры 1– 4 не могут рассматриваться в качестве теста компьютерного кода, их можно рассматривать как задание некоторого возмущения в области Ω. Численные решения газодинамической системы (1.1–1.5), не учитывающие самогравитацию, с начальными данными в виде аналитического решения уравнений (7.1–7.3), в данной геометрии не являются стационарными.

Заключение

Построена компьютерная модель эволюции трехмерного газового диска с самогравитацией. Предложен способ расчета начального равновесного состояния, учитывающего самогравитацию. Проведены расчеты как в цилиндрически симметричном, так и в общем случае. Из расчетов видно, что самогравитация в тестированных примерах стабилизирует ситуацию, хотя и незначительно. Показано, что известные аналитические равновесные решения для политропного газа, не учитывающие самогравитацию, в используемой геометрии не являются стационарными. По результатам работы сделан доклад [12].

Выражаю искреннюю благодарность К.В. Брушлинскому за плодотворные обсуждения задачи, а также Л.А. Плинер и Е.А. Забродиной за полезные советы при разработке компьютерной модели.

Библиографический список

1. ↑ *J.H. Jeans*. The Stability of a Spherical Nebula. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character, Vol. 199, (1902), pp. 1-53.

2. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Строение и эволюция Вселенной. М.; Наука, 1975.

3. Поляченко В.Л., Фридман А.М. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: Наука, 1976.

4. Фридман А.М., Хоперсков А.В. Физика галактических дисков. Москва: Физматлит, 2011, 640 с.

5. Морозов А.Г., Хоперсков А.В. Физика дисков. Волгоград: ВолГУ, 2005, 423 с. — URL: http://www.astronet.ru/db/msg/1169400

6. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. О решении главной спектральной задачи в математическом моделировании ядерных реакторов // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. № 6. С. 920-928.

7. Страховская Л.Г. Итерационный метод вычисления первой собственной функции эллиптического оператора // Ж. вычис. матем. и матем. физ. 1977. Т. 17. № 3. С. 649-663.

8. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.М., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976.

9. Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Чечеткин В.М. Стационарные дисковые структуры около гравитирующих компактных объектов // АЖ. 1996. Т. 73. № 3. С. 407-418.

10. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции / А.В. Забродин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2006. № 70. 45 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-70

11. Луговский А.Ю., Мухин С.И., Попов Ю.П., Чечеткин В.М. Развитие крупномасштабной неустойчивости в аккреционных звездных дисках и ее влияние на перераспределение углового момента // АЖ. 2008. Т. 85. № 8. С. 1-5.

12. Страховская Л.Г. 3D газодинамическая модель самогравитирующего астрофизического диска. Тезисы докладов XIX Всероссийской конференции, посвящённой памяти К.И. Бабенко. Дюрсо. 2012.