



Босов А.Д., [Орлов Ю.Н.](#)

Эмпирическое уравнение
Фоккера-Планка для
прогнозирования
нестационарных временных
рядов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Босов А.Д., Орлов Ю.Н. Эмпирическое уравнение Фоккера-Планка для прогнозирования нестационарных временных рядов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 3. 30 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-3>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

А.Д. Босов, Ю.Н. Орлов

ЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА
ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Москва, 2013

А.Д. Босов, Ю.Н. Орлов

ИПМ им. М.В. Келдыша РАН

Эмпирическое уравнение Фоккера-Планка для прогнозирования нестационарных временных рядов

Строится прогнозная модель среднего выборочного значения нестационарного временного ряда на основе системы уравнений эволюции моментов выборочного распределения ряда первых разностей. Эволюция распределения моделируется двумерным уравнением Фоккера-Планка по координатам и их приращениям. Приведены примеры моделирования эволюции нестационарного распределения и собственно ряда.

A.D. Bosov, Yu.N. Orlov

Keldysh Institute for Applied Mathematics of RAS

The non-stationary time series forecasting with the use of Fokker-Plank equation and evolution equations for momentum of empirical distribution function

The forecasting model for non-stationary time series are constructed with the use of Fokker-Plank equation. The model contains evolution equations for momentum of the empirical distribution function. The examples of distribution function and time series modeling are given.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Цель и направление исследований

Цель работы состоит в том, чтобы с помощью уравнения Фоккера-Планка, примененного к выборочной плотности функции распределения нестационарного временного ряда, получить математическую модель самого временного ряда как динамической системы.

Идея предлагаемого подхода опирается на представление о случайном процессе как о нестационарной динамической системе. Если динамическая система известна, то можно выписать систему зацепляющихся уравнений эволюции относительно частичных функций распределения (цепочка Боголюбова). Уравнения эволюции моментов этих распределений прямо следуют из цепочки. Если из некоторых априорных соображений оборвать цепочку – либо для функций распределения, либо для моментов, – то получится замкнутое статистическое описание макроскопических свойств изучаемой динамической системы.

Существует большое число различных моделей для стационарных временных рядов (см., напр., [1-3]), однако они не подходят для моделирования нестационарных рядов, каковыми являются на практике большинство реализаций случайных процессов. Для таких рядов надо выписывать уравнение эволюции нестационарного распределения, из которого берутся наблюдаемые значения процесса, т.е. строить соответствующее кинетическое уравнение. Кинетический подход к конструированию моделей нестационарных временных рядов был предложен в [4]. Идея состоит в том, чтобы по выборочным распределениям временного ряда, построенным в различные моменты времени, определить эмпирическое уравнение эволюции этих распределений, построить для них зацепляющуюся систему уравнений, выписать уравнения эволюции их моментов, а затем замкнуть систему и решить ее относительно самих нестационарных распределений. Прогноз временного ряда по среднему значению прогнозного распределения будет даваться первым моментом эмпирического распределения, а модель этого ряда будет представлять собой динамическую систему, т.е. систему уравнений для моментов распределения, наподобие того, как уравнения гидродинамики в статистической механике моделируют движение большого числа частиц посредством сведения его к движению одной частицы со средними характеристиками.

Проблемы, которые требуют решения для такой постановки задачи, состоят в следующем: 1) выборкой какого объема сканировать временной ряд для вычисления средних значений; 2) каким кинетическим уравнением и для функции распределения какой размерности описывать изменяющиеся характеристики этого ряда; 3) сколько моментов выборочного распределения учитывать для замыкания кинетической модели. Первая задача была рассмотрена ранее в [4, 5]; здесь предложена некоторая модификация введенной в [4] статистики горизонтного ряда, что позволило задать уровень нестационарности исходного ряда, который можно выявить на практически

приемлемом уровне значимости. В настоящей работе нас будет интересовать также вопрос о типе модельного кинетического уравнения для описания эволюции выборочного распределения. Как оказалось, вопрос о способе замыкания моментной системы применительно к выборочным распределениям решается автоматически после того, как определена размерность выборочной плотности функции распределения (далее ВПФР). Тем самым задача об обрыве цепочки ВПФР на определенной размерности – координаты; координаты и скорости; координаты, скорости и ускорения и т.д. – становится основной применительно к выбору модели описания процесса.

1.2. Актуальность темы

В настоящее время нестационарный анализ данных представляет большую практическую важность и востребованность в различных сферах человеческой деятельности: прогнозирование погоды в метеорологии, анализ функционирования организма человека в биомедицине, прогноз ценовых рядов на финансовых и сырьевых рынках, корректная обработка результатов социологических опросов. Модели стационарных процессов не отвечают потребностям специалистов в этих областях, поскольку они дают слишком большую ошибку. Поэтому построение статистически корректной модели случайного процесса, учитывающей свойство его нестационарности, является актуальной задачей. Трудность представляет математически строгое обоснование достоверности статистических оценок, а также вывод самой модели динамической системы из уравнений эволюции эмпирических статистик. Настоящая работа продолжает исследования авторов [5-6] в этой области.

1.3. Новизна разработки

Основными статистическими методами исследования временных рядов являются: метод выделения тренда (временного сглаживания), регрессионный, автокорреляционный, скользящих средних, адаптивный, метод гармонического анализа, сингулярного спектрального анализа, бутстреп (численное размножение выборок) и нейросетевой метод.

Перечисленные подходы корректно применимы только к стационарным процессам, в которых средние величины (математическое ожидание, дисперсия, ковариация и т.п.) постоянны во времени. Уточнение этих моделей в случае зависимости указанных величин от времени может быть сделано посредством аналитического моделирования такой зависимости, либо переходом к первым, вторым и т.д. разностям в нестационарных временных рядах с полиномиальным трендом, либо регрессией изучаемых величин на время. Окно усреднения становится при этом скользящим, однако остается невыясненным, какой ширины должно быть это окно.

Неоптимальность объема выборки и неизвестный горизонт прогноза, на котором этот прогноз имеет гарантированную точность, например, в среднем квадратичном, являются основными препятствиями на пути применения

стационарных моделей к нестационарным временным рядам. Также следует сказать, что если временной ряд нестационарный, то классические теоремы об эффективности, состоятельности и асимптотической нормальности выборочных оценок и их дисперсий в общем случае не выполняются.

Первая модель нестационарного временного ряда, полученная с использованием метода эволюции выборочных распределений, была построена в работе [4]. В монографии [7] был описан класс моделей, получающихся из эмпирического уравнения Лиувилля для выборочной функции распределения нестационарного временного ряда.

В настоящей работе впервые строится гидродинамическая модель временного ряда, получаемая как обрыв моментной системы на уравнении эволюции момента второго порядка совместной функции распределения случайной величины и ее приращений в рамках приближения уравнения Фоккера-Планка. Так как плотность распределения выборочная, необходимо оценить, насколько на практике нарушаются условия, накладываемые на распределение непрерывного случайного процесса по сравнению с теоретическими требованиями. Для этого в следующем разделе выводится классическое уравнение Фоккера-Планка, строится его выборочный аналог и обсуждается его связь со стохастическим дифференциальным уравнением.

2. ЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА

2.1. Уравнение Колмогорова

Вывод кинетического уравнения для плотности распределения опирается на уравнение Колмогорова для вероятности перехода системы из одного состояния в другое в единицу времени. Пусть $f(x, t)$ есть плотность вероятности, рассматриваемая в фазовом пространстве Γ точек x . Пусть также для каждой пары точек $x, x' \in \Gamma$ и для любых двух моментов времени t и t' определена условная вероятность $P(x', t' | x, t)$ того, что система находится в точке x' в момент t' при условии, что она находилась в точке x в момент t . Эта условная вероятность трактуется как обобщенная функция, т.е. все равенства следует понимать в слабом смысле. В частности, $\lim_{\tau \rightarrow 0} P(x', t + \tau | x, t) = \delta(x' - x)$. Считается также, что в модели отсутствует действие из будущего, т.е. $P(x', t' | x, t) = 0$ при $t' < t$. В этих терминах вероятность перехода $w(x, x'; t)$ в единицу времени из точки x в точку x' в момент времени t определяется формулой

$$w(x, x'; t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} (P(x', t + \tau | x, t) - \delta(x' - x)). \quad (2.1)$$

Поскольку фазовое пространство считается полным, то переход в какую-либо точку обязателен, откуда следует условие нормировки

$\int P(x', t' | x, t) dx' = 1$. Тогда из (2.1) для вероятности перехода получаем условие консервативности $\int w(x, x'; t) dx' = 0$.

Введем двумерную плотность вероятности $F(x', t'; x, t)$ того, что система находится в состоянии (x', t') и находилась в состоянии (x, t) . Условие согласованности распределений состоит в том, что

$$\int F(x', t'; x, t) dx' = f(x, t)$$

и, кроме того, по определению условной вероятности

$$P(x', t' | x, t) \cdot f(x, t) = F(x', t'; x, t).$$

Основным кинетическим уравнением называется уравнение эволюции для одномерной плотности $f(x, t)$. Поскольку

$$f(x, t + \tau) = \int F(x', t; x, t + \tau) dx' = \int P(x', t | x, t + \tau) f(x', t) dx',$$

то

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{f(x, t + \tau) - f(x, t)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left(\int P(x', t | x, t + \tau) f(x', t) dx' - f(x, t) \right) = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int (P(x', t | x, t + \tau) - \delta(x - x')) f(x', t) dx' = \int w(x', x; t) f(x', t) dx'. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение эволюции плотности $f(x, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int w(x', x; t) f(x', t) dx'. \quad (2.2)$$

Например, в случае детерминированной эволюции переход с вероятностью единица осуществляется между точками, лежащими на одной интегральной кривой динамической системы $\dot{x} = v(x)$, и с вероятностью ноль между другими точками. Тогда легко проверить, что обычное уравнение Лиувилля статистической механики следует из (2.2), если вероятность перехода определяется равенством

$$w(x, x'; t) = \frac{\partial}{\partial t} \delta(x'(t) - x). \quad (2.3)$$

Действительно, подставляя (2.3) в (2.2) и выполняя дифференцирование, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &= \int \frac{dx'}{dt} \frac{\partial \delta(x' - x)}{\partial x'} f(x', t) dx' = \\ &= - \int \frac{dx'}{dt} \frac{\partial \delta(x' - x)}{\partial x} f(x', t) dx' = - \frac{\partial}{\partial x} (v(x) f(x, t)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если вероятность перехода в точку x' в момент t' определяется только вероятностью находиться в точке x в момент времени t (марковские процессы), условные вероятности $P(x', t' | x, t)$ удовлетворяют уравнению Колмогорова-Смолуховского-Чепмена

$$\forall t'', t \leq t'' \leq t': \quad P(x', t' | x, t) = \int P(x', t' | x'', t'') P(x'', t'' | x, t) dx'', \quad (2.5)$$

Поскольку многие модели случайных процессов выводятся из уравнения (2.5), полезно проследить связь между получающимися уравнениями, призванными описать определенные свойства процесса, и исходными предположениями. Например, уравнение Фоккера-Планка (так называемое прямое уравнение Колмогорова) часто применяют для описания динамики приростов цен на те или иные финансовые инструменты, считая приросты случайным блужданием. При этом надо помнить, что модели, явно или неявно использующие марковское свойство, имеют весьма ограниченную область применения для финансового рынка, так как рынок обладает некоторой конечной памятью, а модель предполагает отсутствие таковой уже через один шаг по времени. И если для физических процессов такое приближение корректно (см., напр., [8]), то на рынке ценных бумаг оно чаще всего не выполняется. Тем не менее, в отдельных случаях такие упрощенные представления могут дать полезные результаты.

2.2. Уравнение Фоккера-Планка

Можно построить два уравнения эволюции условной вероятности $P(x, t | x_0, t_0)$ для процесса перехода из точки (x_0, t_0) в точку (x, t) : по конечному времени t и по начальному времени t_0 . В первом случае уравнение называется прямым уравнением Колмогорова или уравнением Фоккера-Планка, а во втором случае – обратным [9]. Если задано начальное распределение вероятностей $f(x, t)|_{t=t_0} = f_0(x)$ и требуется найти вероятность в будущий момент времени t , то решается прямое уравнение. Если же надо вычислить распределение первого момента времени достижения фиксированного уровня $x = x^*$, то решается обратное уравнение.

Для вывода прямого уравнения рассмотрим в уравнении Колмогорова (2.5) изменение условной вероятности $P(x, t | x_0, t_0)$ при увеличении на τ времени перехода из точки x_0 в точку x . Формально из (2.5) имеем

$$P(x, t + \tau | x_0, t_0) = \int P(x, t + \tau | x', t') P(x', t' | x_0, t_0) dx'.$$

Поскольку время t' любое, большее t_0 и меньшее $t + \tau$, можно взять $t' = t$. Тогда

$$P(x, t + \tau | x_0, t_0) = \int P(x, t + \tau | x', t) P(x', t | x_0, t_0) dx'. \quad (2.6)$$

Для дальнейших преобразований удобно перейти к представлению характеристической функции (т.е. к фурье-образу) условной вероятности $P(x, t + \tau | x', t)$ случайного приращения $x - x'$ за время τ при фиксированном значении x' . Введем

$$X(\omega, t + \tau | x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t + \tau | x', t) \exp(i\omega(x - x')) dx. \quad (2.7)$$

Разлагая экспоненту под интегралом в (2.7) в ряд Тэйлора, получаем эквивалентное представление характеристической функции через условные моменты:

$$X(\omega, t + \tau | x', t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} P(x, t + \tau | x', t) (x - x')^n dx \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} m_n(x', t; \tau). \quad (2.8)$$

Обратное к (2.7) преобразование имеет вид

$$P(x, t + \tau | x', t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega, t + \tau | x', t) \exp(-i\omega(x - x')) d\omega,$$

которое с учетом (2.8) можно представить в виде ряда по производным дельта-функции:

$$\begin{aligned} P(x, t + \tau | x', t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^n}{n!} m_n(x', t; \tau) \exp(-i\omega(x - x')) d\omega = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} m_n(x', t; \tau) \frac{\partial^n}{\partial x^n} \delta(x' - x). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя итоговое выражение (2.9) в интеграл в правой части уравнения (2.6) и выделяя в нем первое слагаемое в бесконечной сумме (при $n = 0$), получаем после интегрирования дельта-функций следующее разложение:

$$P(x, t + \tau | x_0, t_0) = P(x, t | x_0, t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (m_n(x, t; \tau) P(x, t | x_0, t_0)). \quad (2.10)$$

Разложение (2.10) можно использовать для вычисления производной условной вероятности по конечному моменту времени (т.е. по времени t):

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{P(x, t + \tau | x_0, t_0) - P(x, t | x_0, t_0)}{\tau} = \\ &= \lim_{\tau \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(\frac{m_n(x, t; \tau)}{\tau} P(x, t | x_0, t_0) \right). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что для существования производной в левой части (2.11) должны существовать пределы условных моментов в правой части.

Итак, пусть существуют величины

$$M_n(x, t) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{m_n(x, t; \tau)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (x' - x)^n P(x', t + \tau | x, t) dx'. \quad (2.12)$$

Тогда (2.11) представляется в виде

$$\frac{\partial P(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (M_n(x, t) P(x, t | x_0, t_0)). \quad (2.13)$$

По определению (см. [10]), процесс $x(t)$ называется диффузионным, если в правой части (2.13) отличны от нуля только первые два момента,

которые мы будем обозначать как $u(x,t)$ (коэффициент сноса) и $\lambda(x,t)$ (по построению неотрицательный коэффициент диффузии). Если $\lambda(x,t)$ строго больше нуля, непрерывный марковский процесс называется регулярным.

Аналогичным способом получается и обратное эволюционное уравнение (по начальному времени), которое для диффузионного процесса записывается в виде

$$\frac{\partial P(x,t|x_0,t_0)}{\partial t_0} = -u(x_0,t_0) \frac{\partial P(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0} - \frac{1}{2} \lambda(x_0,t_0) \frac{\partial^2 P(x,t|x_0,t_0)}{\partial x_0^2}. \quad (2.14)$$

Для одномерной плотности вероятности $f(x,t)$ регулярного диффузионного процесса в соответствии с представлением $f(x,t) = \int F(x',t;x,t) dx' = \int P(x',t|x,t) f(x',t) dx'$ получаем из (2.13) одномерное уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u(x,t) f(x,t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\lambda(x,t) f(x,t)). \quad (2.15)$$

Как следует из вывода уравнения Фоккера-Планка, оно представляет собой обрыв разложения обратного преобразования Фурье для условной вероятности на втором порядке по производной дельта-функции.

2.3. Стохастическое дифференциальное уравнение

Между стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) и уравнением Фоккера-Планка (2.15) существует тесная связь, которую полезно напомнить для того, чтобы представлять, какие именно требования к эмпирическому распределению должны быть выполнены, чтобы о наблюдаемом случайном процессе можно было говорить как о приближенном решении определенного СДУ.

Для строгого определения стохастического дифференциального уравнения вводится следующая вероятностная схема. Ее следует напомнить, чтобы представлять отличия конкретно производимых вычислений с конечной дискретной выборкой от теоретической схемы, в рамках которой выведена модель процесса.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, \sigma, P\}$ и измеримый при всех $t \in [0; T]$ винеровский процесс $\xi(t, \omega), \omega \in \Omega$. Напомним [10], что параметризация временем «превращает» случайную величину $\xi(\omega)$ в случайный процесс $\xi(t, \omega)$, но обычно для краткости указание на пространство допустимых исходов опускается. Случайный процесс, определенный при $t \in [0; T]$, называется винеровским, если он:

- 1) является процессом с независимыми приращениями;
- 2) его среднее значение равно нулю $M\xi(t) = 0$;
- 3) дисперсия $\sigma_\xi^2 = const$;
- 4) среднеквадратичное приращение пропорционально разности времен

$$M(\xi(t+\tau) - \xi(t))^2 = \sigma_\xi^2 |\tau|; \quad (2.16)$$

5) распределения процессов $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau) - \xi(t)$ нормальны.

Функция распределения приращений винеровского процесса имеет вид

$$P\{\xi(t+\tau) - \xi(t) < x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma_\xi^2|\tau|}\right) dz. \quad (2.17)$$

На вероятностном пространстве $\{\Omega, \sigma, P\}$ рассматривается совокупность σ -алгебр $\{\Psi_t\}$ при $t \in [0; T]$, связанная с винеровским процессом $\xi(t)$ условиями:

- 1) $\Psi_s \subset \Psi_t \subset \sigma$ при $s < t$;
- 2) при всех $t \in [0; T]$ процесс $\xi(t)$ измерим относительно Ψ_t ;
- 3) процесс приращений $\xi(t+\tau) - \xi(t)$ при всех $t > 0, \tau \geq 0$ не зависит от событий σ -алгебры Ψ_t .

Пусть x_t есть случайный процесс, являющийся решением СДУ:

$$dx_t = u(x_t, t)dt + \lambda(x_t, t)d\xi_t, \quad x_0 = x(0, \omega), \omega \in \Omega. \quad (2.18)$$

В уравнении (2.18) $\xi_t = \xi(t, \omega)$ - винеровский процесс, $u(x, t)$ и $\lambda(x, t)$ - измеримые функции при каждом $t \in [0; T]$. Тогда [11], если выполнены условия

- 1) $\exists K < \infty: \forall x, y \in R, \forall t \in [0; T]$
 $|u(x, t) - u(y, t)| + |\lambda(x, t) - \lambda(y, t)| \leq K|x - y|;$
- 2) $|u(x, t)|^2 + |\lambda(x, t)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2);$ (2.19)
- 3) $M|x(0, \omega)|^2 < \infty,$

то с вероятностью 1 (т.е. почти наверное) существует непрерывное решение СДУ (2.18), и плотность $f(x, t)$ распределения процесса ξ_t удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка (2.15). Тем самым обеспечивается перевод с языка СДУ на язык кинетических уравнений. Важно подчеркнуть, что теория оперирует с непрерывными генеральными распределениями случайных процессов, тогда как на практике приходится иметь дело с некоторой конечной реализацией, может быть, даже и не случайного (в смысле данных выше определений) процесса. Поэтому представляется важным описать ту кинетическую структуру, которая появляется в задачах математической статистики нестационарных временных рядов, чтобы теория могла быть применена в конкретном случае.

2.4. Двумерное уравнение Фоккера-Планка для ВПФР

Перейдем от генеральных распределений к выборочным. Пусть $f(x, t)$ - одномерная ВПФР, построенная по выборке некоторого объема, который в дальнейшем считается постоянным; $F(x, v, t)$ - двумерная ВПФР, $\Phi(x, v, w, t)$ -

трехмерная ВПФР. В соответствии с (2.15) в приближении Фоккера-Планка функция $F(x, v, t)$ удовлетворяет двумерному уравнению диффузионного типа. Если матрица диффузионных коэффициентов не зависит от x, v , а зависит только от времени t , то уравнение Фоккера-Планка примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(vF) + \frac{\partial}{\partial v}(WF) - \frac{\lambda(t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \chi(t) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} - \frac{\mu(t)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0, \quad (2.20)$$

$$W(x, v, t) = \frac{1}{F(x, v, t)} \int w \Phi(x, v, w, t) dw.$$

Эту модель, дополняющую уравнение Лиувилля (2.4) случайным нестационарным блужданием, мы будем использовать для описания эволюции выборочных распределений нестационарных временных рядов.

Поскольку одномерная ВПФР $f(x, t)$ получается из двумерной по формуле

$$f(x, t) = \int F(x, v, t) dv, \quad (2.21)$$

то, учитывая обращение в ноль ВПФР всех порядков на границе области интегрирования, получаем из (2.20) одномерное уравнение Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uf) - \frac{\lambda(t)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad u(x, t) = \frac{1}{f(x, t)} \int vF(x, v, t) dv. \quad (2.22)$$

Производные по времени в (2.20), (2.22) записаны для удобства восприятия. В конкретном случае, когда ВПФР временного ряда является гистограммой, эти уравнения записываются в конечных разностях в соответствии с выбранным разбиением гистограммы и естественным шагом по времени для временного ряда.

Из (2.20-2.22) видно, что уравнение эволюции для каждой частичной ВПФР не является замкнутым. Оно связывает между собой концентрации и потоки, причем последние выражаются через ВПФР от большего числа переменных. Важно учитывать, что, хотя одномерное уравнение (2.22) не содержит в явном виде некоторых коэффициентов, которые входят в двумерное уравнение (2.20), эти коэффициенты влияют на эволюцию моментов распределения $F(x, v, t)$ по скоростям.

Если мы обрываем цепочку совместных распределений на бинарной ВПФР $F(x, v, t)$, то среднее ускорение $W(x, v, t)$ следует задать независимо от трехмерной ВПФР. Это можно сделать в духе наивного прогноза, считая ускорение известным с предыдущего шага по времени (производная по времени трактуется в разностном смысле): $W(x, v, t) = W(x, v, t-1)$. Это же замечание относится и к коэффициентам λ, χ, μ . Если окажется, что такое приближение слишком грубо, то и обрывать на двумерной ВПФР нельзя, а требуется использовать аналогичное уравнение для $\Phi(x, v, w, t)$, и тогда моменты четырехмерного распределения считать известными, и т.д.

Подчеркнем, что нашей целью является решение одномерного уравнения (2.22), а двумерное уравнение (2.20) будет использоваться для того,

чтобы замыкать моментную систему. Замыкание требуется потому, что уравнение (2.22) не является замкнутым, оно содержит неизвестную функцию $u(x, t)$, для которой также надо получить уравнение эволюции.

3. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ

3.1. Эволюция среднего значения и локальной средней скорости

Рассмотрим уравнение эволюции первого выборочного момента, определяемого как

$$m(t) = \langle x \rangle_t = \int x f(x, t) dx. \quad (3.1)$$

Из уравнения Фоккера-Планка (2.22) следует, что эволюция первого момента определяется уравнением

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int x \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} dx = - \int x \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) f(x, t) dx + \frac{\lambda(t)}{2} \int x \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

После интегрирования по частям с учетом того, что в граничных ячейках плотность распределения равна нулю, получаем

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int u(x, t) f(x, t) dx = \langle u \rangle_t = U(t), \quad (3.2)$$

где $U(t)$ есть среднее значение эмпирической скорости $u(x, t)$ по одномерному распределению в момент времени t .

С другой стороны, то же самое изменение первого выборочного момента, вычисляемого непосредственно по выборке $\{x(k)\}_{t-T+1}^t$, равно

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &= m(t+1) - m(t) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(t-T+k+1) - \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T x(t-T+k) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \dot{x}(t-T+k). \end{aligned}$$

По своему статистическому смыслу последнее выражение есть среднее значение приращений (т.е. скоростей в двумерной терминологии), и потому должно вычисляться по формуле

$$\frac{dm(t)}{dt} = \int v F(x, v, t) dx dv,$$

которая преобразуется в (3.2) с учетом определения средней скорости из (2.22). Эти выкладки выясняют статистический смысл эмпирической скорости $u(x, t)$, с которой дрейфует одномерное распределение.

Рассмотрим теперь эволюцию самой эмпирической скорости. С одной стороны, из (2.22) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial t} (f(x, t) u(x, t)) = u \frac{\partial f}{\partial t} + f \frac{\partial u}{\partial t} = u \left(- \frac{\partial (uf)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) + f \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.3)$$

С другой стороны, используя (2.20), получаем, что та же самая правая часть (3.3) равна

$$\frac{\partial(uf)}{\partial t} = \int v \frac{\partial F(x, v, t)}{\partial t} dv = \int v \left(-v \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial(WF)}{\partial v} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) dv.$$

После интегрирования по частям последнее выражение преобразуется к виду

$$\frac{\partial(uf)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int v^2 F(x, v, t) dv + \int W(x, v, t) F(x, v, t) dv + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(uf)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Введем обозначения для входящих в (3.4) интегралов:

$$e(x, t) f(x, t) = \int v^2 F(x, v, t) dv, \quad a(x, t) f(x, t) = \int W(x, v, t) F(x, v, t) dv. \quad (3.5)$$

Если мы имеем дело с динамической системой, то статистико-механический смысл интегралов в (3.5) следующий: $e(x, t)$ есть удвоенная плотность средней кинетической энергии, а $a(x, t)$ представляет среднее локальное (по координате и времени) ускорение от внешнего поля. В результате из (3.3) и (3.4) получаем уравнение эволюции скорости $u(x, t)$:

$$f \frac{\partial u}{\partial t} = u \left(\frac{\partial(uf)}{\partial x} - \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial(e f)}{\partial x} + a f + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(uf)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (3.6)$$

Из (3.4), (3.5) следует, что изменение со временем средней макроскопической скорости $U(t)$ равно среднему ускорению, обусловленному внешними причинами, что согласуется с традиционными представлениями:

$$\frac{dU(t)}{dt} = A(t) \equiv \int a(x, t) f(x, t) dx = \iint W(x, v, t) F(x, v, t) dx dv.$$

Из входящих в уравнение (3.6) величин, кроме $u(x, t)$ и $f(x, t)$, неизвестной функцией является второй момент двумерного распределения по скорости $e(x, t)$. Если мы предполагаем непрерывность случайного процесса, то все средние по двумерному распределению берутся в один и тот же момент времени. Тогда из проведенного рассмотрения следует, что для определения эволюции первого момента двумерной ВПФР по скорости надо знать эволюцию ее второго момента по той же переменной. Возникает зацепляющаяся система уравнений эволюции для моментов. Уравнения эволюции высших моментов двумерной ВПФР по скоростям выводятся в следующем разделе 3.2.

3.2. Уравнения эволюции высших моментов двумерной ВПФР

В уравнение (3.6) входит величина $e(x, t)$, эволюция которой также должна быть определена. Используя тот же метод, что и при выводе (3.6), получаем из (3.5) и (2.20)

$$\frac{\partial(e f)}{\partial t} = \int v^2 \frac{\partial F(x, v, t)}{\partial t} dv = -\frac{\partial(e_3 f)}{\partial x} - 2\chi \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(e f)}{\partial x^2} + \mu + \beta f. \quad (3.7)$$

Здесь введены две новые величины:

$$\begin{aligned} e_3(x,t)f(x,t) &= \int v^3 F(x,v,t)dv, \\ \beta(x,t)f(x,t) &= \int \left(2vW + v^2 \frac{\partial W}{\partial v} \right) F(x,v,t)dv. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, эволюция момента второго порядка выражается, кроме ранее введенных величин, через градиент момента третьего порядка и новый потоковый член. Если обозначить через $e_k(x,t)$ плотность момента k -го порядка двумерной ВПФР по скоростям

$$e_k(x,t)f(x,t) = \int v^k F(x,v,t)dv, \quad (3.9)$$

то уравнение эволюции этой величины имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_k f)}{\partial t} &= \int v^k \frac{\partial F(x,v,t)}{\partial t} dv = \\ &= \int v^k \left(-v \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial(WF)}{\partial v} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \chi \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \right) dv = \\ &= -\frac{\partial(e_{k+1}f)}{\partial x} - k\chi \frac{\partial(e_{k-1}f)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(e_k f)}{\partial x^2} + k(k-1) \frac{\mu}{2} e_{k-2}f + \beta_k f, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$\beta_k(x,t)f(x,t) = \int \left(kW + v \frac{\partial W}{\partial v} \right) v^{k-1} F(x,v,t)dv. \quad (3.11)$$

Во многих случаях можно приближенно считать, что локальные ускорения W малы, либо что локальное ускорение является однородной формой скорости порядка s . Тогда эволюция момента k -го порядка выражается через уже известные величины и момент $(k+1)$ -го порядка:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(e_k f)}{\partial t} &= -\frac{\partial(e_{k+1}f)}{\partial x} + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(e_k f)}{\partial x^2} - k\chi \frac{\partial(e_{k-1}f)}{\partial x} + \\ &+ (k+s)ae_{k-1}f + k(k-1) \frac{\mu}{2} e_{k-2}f. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если на каком-либо порядке оборвать моментную систему, т.е. задать $e_{k+1}(x,t)$ независимо, то уравнение для момента k -го порядка будет представлять собой уравнение диффузии со сносом и источником.

Выясним теперь статистический смысл остальных коэффициентов, входящих в уравнение Фоккера-Планка (2.20).

3.3. Эволюция дисперсии, скоса и коэффициента корреляции

Рассмотрим сначала, как эволюционирует второй центральный выборочный момент одномерного распределения. Обозначим

$$\sigma^2(t) = \int (x - m(t))^2 f(x,t)dx. \quad (3.13)$$

В соответствии с (2.22), (3.1) и (3.2) имеем

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = -\int (x - m(t))^2 \frac{\partial(uf)}{\partial x} dx + \frac{\lambda}{2} \int (x - m(t))^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx = \lambda + 2 \int uxf dx - 2mU.$$

Поскольку ковариация координаты и скорости равна

$$\begin{aligned} R(t) = \text{cov}_{x,v}(t) &= \int xvF(x, v, t) dx dv - \int xF(x, v, t) dx dv \cdot \int vF(x, v, t) dx dv = \\ &= \int xu(x, t) f(x, t) dx - m(t)U(t) \equiv \text{cov}_{x,u}(t), \end{aligned}$$

то эволюция выборочной дисперсии в силу уравнения Фоккера-Планка (2.22) имеет вид

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = \lambda + 2R. \quad (3.14)$$

Тем самым выявлен статистический смысл параметра $\lambda(t)$ в уравнении (2.20). Это есть разность между производной текущей выборочной дисперсии ряда и удвоенной выборочной ковариацией исходного ряда и ряда его первых разностей. Сам же коэффициент ковариации $R(t)$ эволюционирует следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= -\frac{d(mU)}{dt} + \int x \frac{\partial(uf)}{\partial t} dx = \\ &= -U^2 - mA + \int x \left(-\frac{\partial(ef)}{\partial x} + af + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(uf)}{\partial x^2} - \chi \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx = \\ &= -U^2 + \text{cov}_{x,a} + E + \chi. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь

$$E = E(t) = \int e(x, t) f(x, t) dx. \quad (3.16)$$

Следовательно, коэффициент $\chi(t)$ в уравнении (2.20) представляет собой разность между производной по времени ковариации координаты-скорости и ковариацией координаты-ускорения, минус разность между средней энергией $E(t)$ и энергией среднего движения $U^2(t)$.

По аналогии с (3.14), эволюция выборочной дисперсии скорости имеет вид

$$\frac{d\sigma_v^2}{dt} = \mu + 2\text{cov}_{v,a}. \quad (3.17)$$

Следовательно, если задать левые части выражений (3.14), (3.16) и (3.17) исходя из той информации, которая известна к текущему моменту времени, то в рамках приближения двумерного уравнения Фоккера-Планка (2.20) его коэффициенты полностью определены.

Коэффициент асимметрии γ (или скос) одномерного распределения вычисляется по формуле

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sigma^3(t)} \int (x - m(t))^3 f(x, t) dx. \quad (3.18)$$

Эволюция этого коэффициента в силу уравнения Фоккера-Планка (2.22) дается формулой

$$\frac{d\gamma}{dt} = -3\gamma \frac{\lambda + 2R}{2\sigma^2} + \frac{3}{\sigma^3} \int (x - m(t))^2 u(x, t) f(x, t) dx. \quad (3.19)$$

Аналогично можно рассмотреть и другие высшие центральные моменты одномерного выборочного распределения.

3.4. Положительная определенность диффузионной матрицы

Как следует из вывода уравнения Фоккера-Планка (2.20) из уравнения Колмогорова (2.5), матрица коэффициентов при вторых производных положительно определена. Смысл этих коэффициентов выяснен выше в (3.14-3.17): ими определяется эволюция моментов и ковариаций двумерного распределения. С другой стороны, для выборочного распределения положительная определенность диффузионной матрицы отнюдь не очевидна, поскольку элементы этой матрицы определяются эмпирически по конкретной выборке временного ряда, для которой не известны моменты условной вероятности (2.12). Иными словами, на практике матрица подбирается эмпирически так, чтобы согласовать эволюцию средних величин по выборке с их эволюцией в силу кинетического уравнения. Если же матрица будет отрицательно определена, не очень осмысленно решать в этом случае эволюционную задачу как диффузионную с мнимым среднеквадратичным отклонением. Таким образом, для корректности модели необходимо

исследовать главные миноры матрицы $D = \begin{vmatrix} \lambda(t) & \chi(t) \\ \chi(t) & \mu(t) \end{vmatrix}$. Заметим, однако, что

для наших целей достаточно доказать неотрицательность только одного коэффициента $\lambda(t)$, поскольку в явном виде эволюционная модель моментов временного ряда имеет дело с одномерным уравнением Фоккера-Планка (2.22).

Теорема. Если величина $\lambda(t)$ определена по некоторой выборке временного ряда в соответствии с уравнением (3.14) $\lambda = \frac{d\sigma^2}{dt} - 2\text{cov}_{x,v}$, то уравнение (2.22) является уравнением Фоккера-Планка с неотрицательным коэффициентом диффузии.

Доказательство. Поскольку для временного ряда производная по времени понимается в разностном смысле, то скорость равна $v(t) = x(t+1) - x(t)$, а производная выборочной дисперсии по времени равна

$\frac{d\sigma^2}{dt} = \sigma^2(t+1) - \sigma^2(t)$. Пусть длина выборки равна n . Тогда для

выборочного среднего $\bar{x}(t)$ справедлива рекуррентная формула

$$\bar{x}(t+1) = \bar{x}(t) + \frac{x(t+1) - x(t-n+1)}{n}, \quad (3.20)$$

а для выборочной ковариации между двумя рядами имеем

$$\begin{aligned} \text{cov}_{xy}(t+1) &= \text{cov}_{xy}(t) - \frac{1}{n^2} (y(t+1) - y(t-n+1)) \cdot (x(t+1) - x(t-n+1)) + \\ &+ \frac{1}{n} \{y(t+1) \cdot (x(t+1) - \bar{x}(t)) - \bar{y}(t) \cdot (x(t+1) - x(t-n+1)) + \bar{x}(t) \cdot y(t-n+1)\}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Из (3.21) в частном случае $x = y$ получаем рекуррентную формулу для выборочной дисперсии:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2(t+1) &= \sigma_x^2(t) - \frac{1}{n^2} (x(t+1) - x(t-n+1))^2 + \\ &+ \frac{1}{n} (x(t+1) - x(t-n+1))(x(t+1) + x(t-n+1) - 2\bar{x}(t)). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Ковариация же координаты и скорости равна

$$\begin{aligned} \text{cov}_{xv}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t (x(k) - \bar{x}(t))(v(k) - \bar{v}(t)) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t x(k)(x(k+1) - x(k)) - \frac{1}{n} \bar{x}(t)(x(t+1) - x(t-n+1)). \end{aligned} \quad (3.23)$$

В результате получаем, что

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \sigma^2(t+1) - \sigma^2(t) - 2 \text{cov}_{x,v}(t) = -\frac{1}{n^2} (x(t+1) - x(t-n+1))^2 + \\ &+ \frac{1}{n} (x^2(t+1) - x^2(t-n+1)) - \frac{2}{n} \sum_{k=t-n+1}^t x(k)(x(k+1) - x(k)) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=t-n+1}^t (x(k) - x(k+1))^2 - \frac{1}{n^2} (x(t+1) - x(t-n+1))^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Последняя оценка в цепочке преобразований (3.24) следует из того, что

$$\sum_{k=t-n+1}^t (x(k) - x(k+1))^2 \geq \left(\sum_{k=t-n+1}^t (x(k) - x(k+1)) \right)^2 = (x(t+1) - x(t-n+1))^2$$

и $1/n \geq 1/n^2$. Теорема доказана.

Аналогично показывается, что и коэффициент $\mu(t) \geq 0$. Поскольку же локально по времени симметрическая диффузионная матрица постоянна (не зависит от x, v), ее можно привести к диагональному виду невырожденным линейным преобразованием. Для диагональной матрицы по доказанному выше следует неотрицательность собственных значений, поэтому на каждом шаге по времени модель, использующая двумерное уравнение Фоккера-Планка (2.20), корректна.

4. ПРОГНОЗНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА

4.1. Концепция прогнозирования временного ряда

Идея прогнозирования распределения и собственно значений нестационарного временного ряда состоит в следующем. Сначала определяется оптимальный объем выборки для прогнозирования ВПФР на τ шагов вперед с заданной точностью ε в соответствии с методикой, развитой в [4]. Затем по имеющимся данным вычисляются эмпирические статистики: лиувиллева скорость, второй и третий моменты, фигурирующие в уравнениях (3.5)-(3.7). Если какие-либо из этих статистик оказалось возможным функционально смоделировать с требуемой точностью ε , то выбирается соответствующий способ замыкания моментных уравнений, после чего решается система этих уравнений, включая уравнение Фоккера-Планка. Прогнозом временного ряда на следующем шаге по времени называется среднее значение построенного прогнозного распределения.

Продемонстрируем эту схему решения на примере эмпирического уравнения Лиувилля, получаемого из уравнения Фоккера-Планка при $\lambda(t) = 0$. Если нам известна скорость $u(x, t)$ в текущий момент времени, тем самым известна и функция распределения в будущий момент времени. Действительно, из формулы (2.12) следует, что скорость $u(i, t)$ изменения ВПФР в i -ой ячейке в момент t может быть представлена в виде

$$u(i+1, t)f(i+1, t) = - \sum_{k=1}^i (f(k, t+1) - f(k, t)), \quad (4.1)$$

т.е. выражается через изменение выборочной интегральной функции распределения за один шаг по времени. Предположим, что нам удалось замкнуть моментную систему, описанную в п. 3.2. Тогда эта система оказывается рекуррентно разрешима, так что после численного нахождения $u(i, t)$ распределение $f(i, t+1)$ определяется из (4.1):

$$\begin{aligned} f(1, t+1) &= f(1, t) - u(2, t)f(2, t); \\ f(2, t+1) &= f(2, t) - u(3, t)f(3, t) + u(2, t)f(2, t); \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

Прогнозным значением $\tilde{x}(t+1)$ будет считаться среднее значение по распределению $f(x, t+1)$:

$$\tilde{x}(t+1) = \int xf(x, t+1)dx = \sum_i if(i, t+1). \quad (4.3)$$

Динамическая система, порождающая этот временной ряд, приближенно находится из (4.1). Обозначая правую часть (4.1), деленную на $f(i+1, t)$, через $g(i, t)$, получаем

$$u(i, t) = g(i-1, t). \quad (4.4)$$

В формуле (4.4) скорость $u(i, t)$ трактуется как изменение значения самого временного ряда, т.е. $u(i, t) = x(t+1) - x(t)$. Если окажется, что правая часть приближенно может считаться независимой явно от времени t , то получающаяся динамическая система будет автономна, т.е. приращение

значения случайной величины $x(t)$ (номера ячейки i) будет определяться только значением самой этой величины. В нестационарном случае правая часть (4.4) помимо $x(t)$ зависит также явно от времени:

$$x(t+1) = x(t) + g(x(t), t). \quad (4.5)$$

Для стационарного распределения лиувиллева скорость равна нулю, и прогноз дает одну и ту же величину, равную среднему значению по этому распределению.

Аналогичный подход будем применять и для уравнения Фоккера-Планка и согласованных с ним уравнений эволюции моментов. В зависимости от порядка момента двумерной ВПФР, на котором замыкается кинетическое уравнение для одномерной ВПФР, получается более или менее сложная динамическая система, моделирующая временной ряд. Однако, если учесть, что естественным шагом по времени является обратная частота наблюдения данных временного ряда, то для двумерного уравнения Фоккера-Планка эволюция моментов порядка выше первого не дает новой информации. В результате замыкание может быть проведено на втором уравнении системы, т.е. на уравнении эволюции для скорости.

4.2. Замыкание моментной системы

Считаем, что параметр $\lambda(t)$ в уравнении Фоккера-Планка (2.22), оцениваемый по временному ряду, известен с предыдущего шага по времени: $\lambda(t) = \lambda(t-1)$. Тогда, если считать, что скорость $u(x, t)$ в момент t откуда-либо известна, например, по наивному прогнозу $u(x, t) = u(x, t-1)$, то модель замыкается на первом же уравнении, т.е. на уравнении (2.22). Сама ВПФР находится в этом случае автоматически по уравнению (4.1). С точки зрения прогнозирования временного ряда как среднего значения по текущему распределению, такая модель представляет наивный прогноз по скорости изменения среднего значения. При этом для прогноза ряда находить будущую ВПФР не нужно, так как для этих целей достаточно знания скорости изменения ВПФР $u(x, t)$, а эта скорость известна с предыдущего шага по времени в рамках наивного прогноза.

Если требуется спрогнозировать и саму эту скорость, то в описанную схему надо добавить уравнение (3.6) для эволюции $u(x, t)$, в котором параметры $e(x, t)$, $a(x, t)$ и $\chi(t)$ считаются известными с предыдущего шага по времени, т.е. теперь уже в отношении этих величин используется концепция наивного прогноза. Тогда вместо (4.1) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(uf); \\ \frac{\partial(uf)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(uf)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(e + \chi)f + af. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Может показаться, что получилась самосогласованная система диффузионных уравнений со сносом и источником. Однако на самом деле вторая строка решается независимо от первой. Дело в том, что начальные условия для плотности $f(x,t)$ и скорости $u(x,t)$ задаются в разные моменты времени: если задана $f_0(x) = f(x, t_0)$, то скорость задается в предыдущий дискретный момент времени $u_0(x) = u(x, t_0 - 1)$. В противном случае, если задать и $u(x, t_0)$, то в силу первого уравнения (4.6) сразу будет найдена $f(x, t_0 + 1)$, а второе уравнение превратится в тождество.

На следующем уровне по порядку учитываемых моментов добавляется уравнение (3.7) эволюции для $e(x,t)$. Если бы мы не оборвали цепочку кинетических уравнений на двумерной ВПФР, а учли бы и уравнение эволюции для трехмерной ВПФР $\Phi(x, v, w, t)$, то потребовалось бы еще и уравнение эволюции локальной плотности ускорения $a(x,t)$. В нашей модели ускорение определяется в соответствии с (2.20) и (3.5), так что функция $W(x, v, t)$ известна в рамках наивного прогноза. Поэтому и $a(x,t)$ считается известной функцией с пред-предыдущего шага по времени. В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(uf); \\ \frac{\partial(uf)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(uf)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(e + \chi)f + af; \\ \frac{\partial(ef)}{\partial t} &= \frac{\lambda}{2} \frac{\partial^2(ef)}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}(e_3 + 2\chi u)f + \beta f + \mu. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Аналогично можно получить замкнутую систему относительно выборочных моментов двумерного распределения более высокого порядка. Но на практике при прогнозировании выборочных распределений с шагом по времени, равным шагу появления значений временного ряда (например, цены закрытия какого-либо финансового инструмента с шагом 1 минута), достаточно использовать систему (4.6). Это связано с тем, что моменты высших порядков $e_k(x,t)$, $k \geq 2$ известны в тот же момент времени, что и скорость $u(x,t)$. В результате третье уравнение в системе (4.7) обращается в тождество.

4.3. Численная схема решения задачи прогнозирования ВПФР

Запишем дискретную схему для решения задачи (4.6) на шаг вперед. Тильдой обозначим прогнозируемые величины. Мы используем явную схему для эволюции по времени и стандартный шаблон левой разностной производной.

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}: \quad & \tilde{f}(x, t+1) = f(x, t) + f(x, t)\tilde{u}(x, t) - f(x+1, t)\tilde{u}(x+1, t) + \\
& + \frac{\lambda(t-1)}{2}(f(x+2, t) - 2f(x+1, t) + f(x, t)); \\
\mathbf{u}: \quad & f(x, t)\tilde{u}(x, t) = f(x, t-1)u(x, t-1) + a(x, t-2)f(x, t-1) + \\
& + (e(x, t-1) + \chi(t-1))f(x, t-1) - \\
& - (e(x+1, t-1) + \chi(t-1))f(x+1, t-1) + \\
& + \frac{\lambda(t-1)}{2}(f(x+2, t-1)u(x+2, t-1) + f(x, t-1)u(x, t-1)) - \\
& - \lambda(t-1)f(x+1, t-1)u(x+1, t-1).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Правая часть второго уравнения в (4.8) известна, поэтому прогноз скорости строится автоматически во всех ячейках гистограммы, представляющей практическую ВПФР, в которых $f(x, t) > 0$. В тех ячейках, где $f(x, t) = 0$, скорость $\tilde{u}(x, t)$ будем полагать равной нулю. Это не приведет к артефактам вычислений, так как в уравнении эволюции ВПФР скорость входит в комбинации с произведением на плотность распределения в той же ячейке. После нахождения $\tilde{f}(x, t)$ отрицательные значения (если они есть) обнуляются, и проводится перенормировка построенного распределения.

Эта схема может быть продолжена для прогнозирования на произвольный горизонт вперед. При этом каждое найденное решение на следующем шаге присоединяется к скользящему окну выборки, по которой строится уравнение Фоккера-Планка. Начальные условия ставятся на момент начала прогнозирования, граничные условия – нулевые.

Альтернативным методом прогнозирования эмпирической скорости является вероятностное продолжение траектории динамической системы. Если по имеющимся данным к текущему моменту времени собрана информация о распределении параметра λ - соответствующую плотность обозначим через $h(\lambda)$ - и о распределении $p_x(u)$ скорости u в x -ой ячейке гистограммы, то первое уравнение системы (4.8) можно усреднить по этим распределениям. В результате на шаге, равном горизонту прогнозирования, получаем модель

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x, t+1) &= f(x, t)(1 + \bar{u}(x)) - f(x+1, t)\bar{u}(x+1) + \\
&+ \frac{\bar{\lambda}}{2}(f(x+2, t) - 2f(x+1, t) + f(x, t)); \\
\bar{u}(x) &= \int p_x(u)du, \quad \bar{\lambda} = \int \lambda h(\lambda)d\lambda.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Возможна и другая модификация модели (4.8), когда аналогичное усреднение проводится во втором уравнении системы, но мы ограничимся в данной работе рассмотрением первого варианта.

5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВПФР И ВРЕМЕННОГО РЯДА

5.1. Временной ряд валютного курса EUR/USD

Рассмотрим применение моделей (4.8) и (4.9) на примере временного ряда, образованного минутными данными закрытия $p(t)$ валютного курса EUR/USD [12] (для краткости на рисунках ниже приведен фрагмент анализа данных за первый квартал 2011 г.). Обозначим

$$M = \max_t (p(t+1) - p(t)), \quad m = \min_t (p(t+1) - p(t)) \quad (5.1)$$

и введем нормированные приросты курса закрытия

$$x(t) = \frac{p(t+1) - p(t) - m}{M - m}. \quad (5.2)$$

Временной ряд $x(t)$ представлен на рис. 1. Автокорреляция с лагом от 1 до 1440 (сутки) для этого ряда не превосходит по модулю величину 0,04, так что величины приростов исходного ряда $p(t)$ можно считать статистически независимыми.

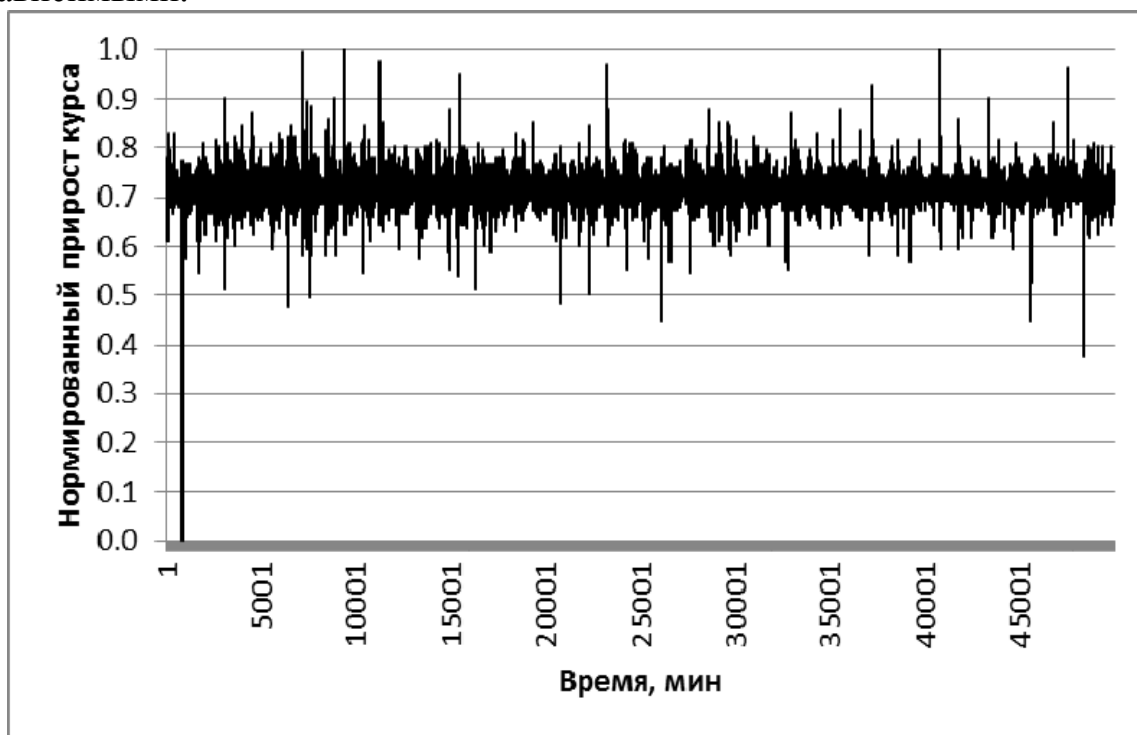


Рис. 1. Фрагмент ряда $x(t)$ нормированных приростов валютного курса

Ряд $x(t)$ не является стационарным в узком смысле (стационарность распределения), что видно из сравнения двух ВПФР (рис. 2), построенных по половинам данных рис. 1 (25 тыс. точек) при равномерном разбиении единичного промежутка на 30 классовых интервалов. Минимальный прирост курса в исходных единицах составил величину -0,01, а максимальный 0,004, максимум пришелся на 23-ий промежуток (примерно 0,0007).

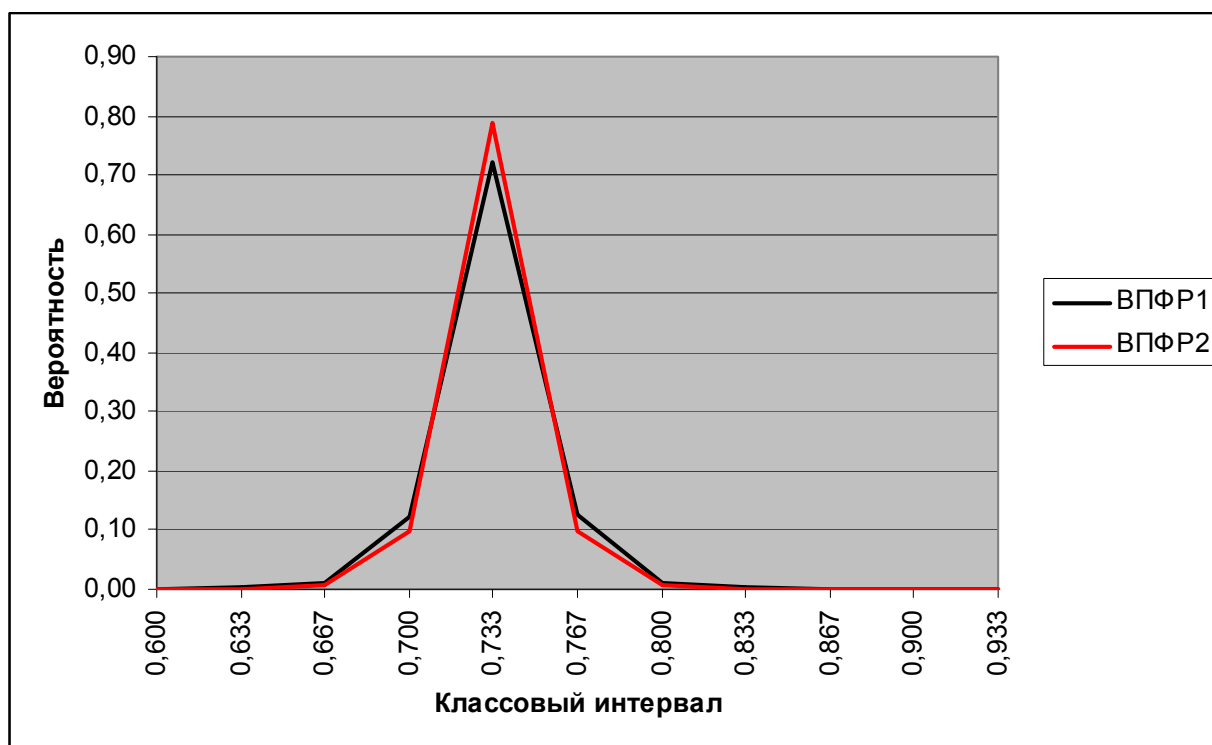


Рис. 2. ВПФР двух встык-выборок ряда $x(t)$

Среднеквадратичное относительное отклонение минутных приростов курса EUR/USD в этом примере составило $3,57 \cdot 10^{-6}$, а среднеквадратичное отклонение нормированных величин $x(t)$ по равно примерно 0,018. Заметим, что такая же точность $\varepsilon = 0,018$ гарантируется при прогнозировании изменения ВПФР ряда $x(t)$ по выборке заданной длины $n = 800$ на $\tau = 7$ шагов (т.е. минут) вперед, согласно оценке $\tau \leq n\varepsilon/2$ [4].

Из рис. 2 может показаться, что распределение приростов за довольно большой промежуток времени (около месяца) практически не меняется. На самом деле изменения хоть и малы, но значительны по сравнению со стационарной ситуацией. Чтобы оценить флуктуации эмпирических вероятностей, надо определить точность, с которой определяются вероятности в стационарном распределении по выборке конечной длины. Для этого мы используем согласованный уровень точности, т.е. такой, при котором уровень значимости оценки совпадает с мерой доверительного интервала. Этот уровень α определяется условием

$$\frac{t_{1-\alpha}(n-1)}{\alpha} = \frac{\sqrt{n-1}}{S(n,k)}, \quad S(n,k) = \sum_{i=1}^k \sqrt{f_n(i)(1-f_n(i))}, \quad (5.3)$$

где n есть длина выборки, k - число классовых интервалов при равномерном разбиении гистограммы ВПФР, $f_n(i)$ - эмпирическая вероятность попадания значения случайной величины в заданной выборке длины n в i -ый классовой интервал, а $t_{1-\alpha}(n-1)$ есть соответствующий $(1-\alpha)$ -квантиль распределения Стьюдента для $n-1$ степени свободы [10].

Для распределений на рис. 2 правая часть формулы (5.3) равна 330, что приводит к отличию распределений в норме L1 в среднем не более 0,0075 на уровне значимости $\alpha = 0,0075$. Это означает, что если бы распределение приростов было стационарным, характерное расстояние между двумя гистограммами было бы равно 0,015, т.е. вероятность того, что расстояние между ними больше, чем 0,015, была бы равна 0,015. В нашем же примере расстояние между двумя встык-выборками равно 0,134, т.е. почти на порядок больше. Проведенное рассмотрение показывает, сколь тонкий эффект требуется смоделировать при анализе конкретного нестационарного ряда.

5.2. Репрезентативность выборки и уровень стационарности

Если уменьшать число интервалов разбиения гистограммы и/или увеличивать длину выборки, правая часть (5.3) возрастает, т.е. повышается точность оценки эмпирической вероятности. С другой стороны, от этих действий зачастую снижается ценность анализа ВПФР: либо мы взяли слишком крупное разбиение (например, на два интервала, что, может быть, и интересно, но не в терминах распределений), либо данные взяты из слишком удаленного прошлого, так что существенная их часть не влияет на текущую ситуацию.

Следовательно, данный подход можно применять в тех случаях, когда существует разбиение, сохраняющее точность оценки эмпирических вероятностей на достаточном уровне. При этом желательно минимизировать длину выборки, чтобы наилучшим образом выявить эффект нестационарного поведения временного ряда, одновременно уменьшая мелкость разбиения гистограммы для повышения точности аппроксимации плотности распределения. Эти два условия конкурентны, так как второе условие в противовес первому требует увеличения длины выборки. Поэтому можно ожидать, что существует оптимальная длина выборки для анализа нестационарности.

Построим плотность распределения $g_{n,k}(\rho)$ расстояний между встык-выборками заданной длины n в норме L1 при разбиении гистограммы на k равномерных промежутков и найдем долю $\beta(n,k)$ расстояний, меньших, чем точность определения самих этих расстояний:

$$\int_0^{2\alpha(n,k)} g_{n,k}(\rho) d\rho = \beta(n,k). \quad (5.4)$$

Величина $\beta(n,k)$ представляет собой вероятность того, что распределение стационарно с точностью $\alpha(n,k)$. Если оказалось, что $\beta \leq \alpha$, то эффект нестационарности отображается корректно и можно применять модель (4.8). Если же $\beta > \alpha$, то в статистически значимой доле случаев наилучший прогноз ВПФР – наивный, а в доле $1 - \beta$ случаев используется либо модель (4.8), либо (4.9). Строго говоря, величина $\beta(n,k)$ зависит от способа разбиения гистограммы, но в данной работе мы не будем искать

оптимального разбиения гистограммы и исследовать устойчивость соотношения (5.4) относительно способа разбиения.

Важно понимать, что величины $\alpha(n, k)$ не являются постоянными при движении скользящего временного окна, поэтому равенство (5.4) следует понимать не поточечно, а на уровне средних значений по всему анализируемому массиву данных. Пример распределения $\psi_{n, k}(\alpha)$ величин α для выборок длины $n = 1000$ точек по совокупности 50 тыс. точек приведен на рис. 3 для разных вариантов k . Из него видно, что с увеличением числа классовых интервалов точность оценки распределения вероятностей снижается (мода распределения точности смещается в сторону больших значений), но одновременно уменьшается разброс значений точности. Поэтому в уменьшении мелкости разбиения имеется и положительная с точки зрения увеличения точности составляющая.

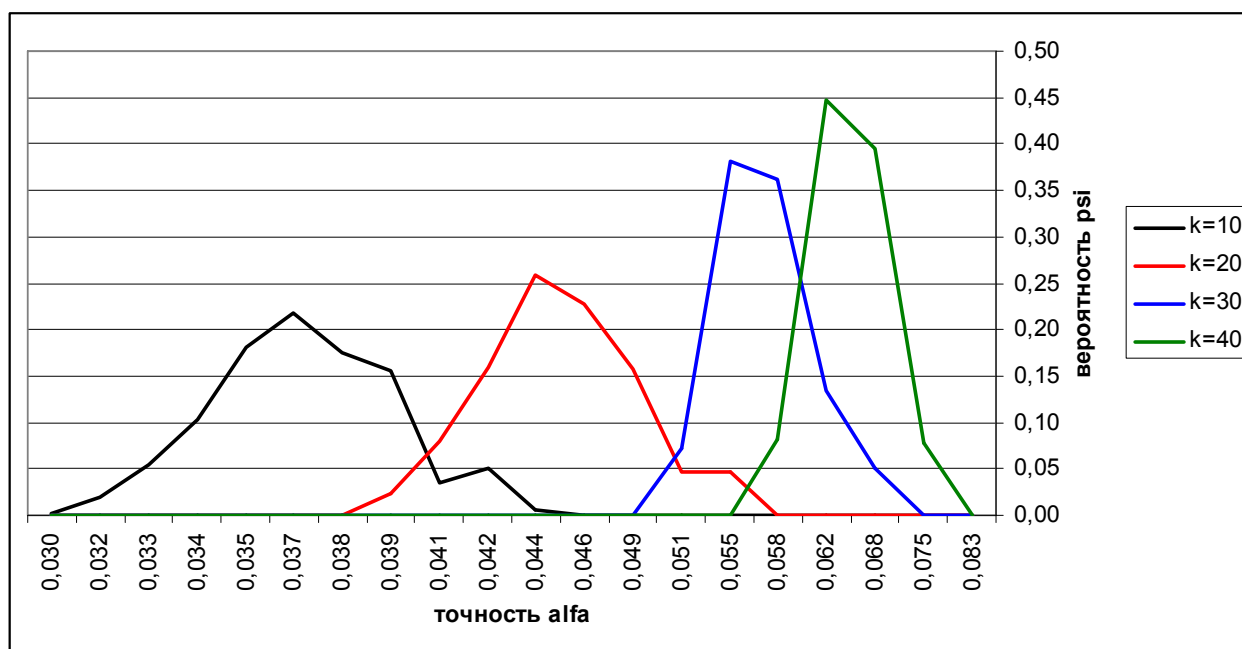


Рис. 3. Распределение точности оценки ВПФР (рис. 2) в зависимости от числа классовых интервалов k для длины выборки $n = 1000$ точек

На рис. 4 показана зависимость моды распределения $\psi_{n, k}(\alpha)$ от длины n выборки, по которой строилась соответствующая гистограмма. Как и должно быть для стационарных оценок, эта зависимость монотонна: мода растет с увеличением числа классовых интервалов (т.е. точность оценки вероятностей снижается), и уменьшается с увеличением длины выборки.

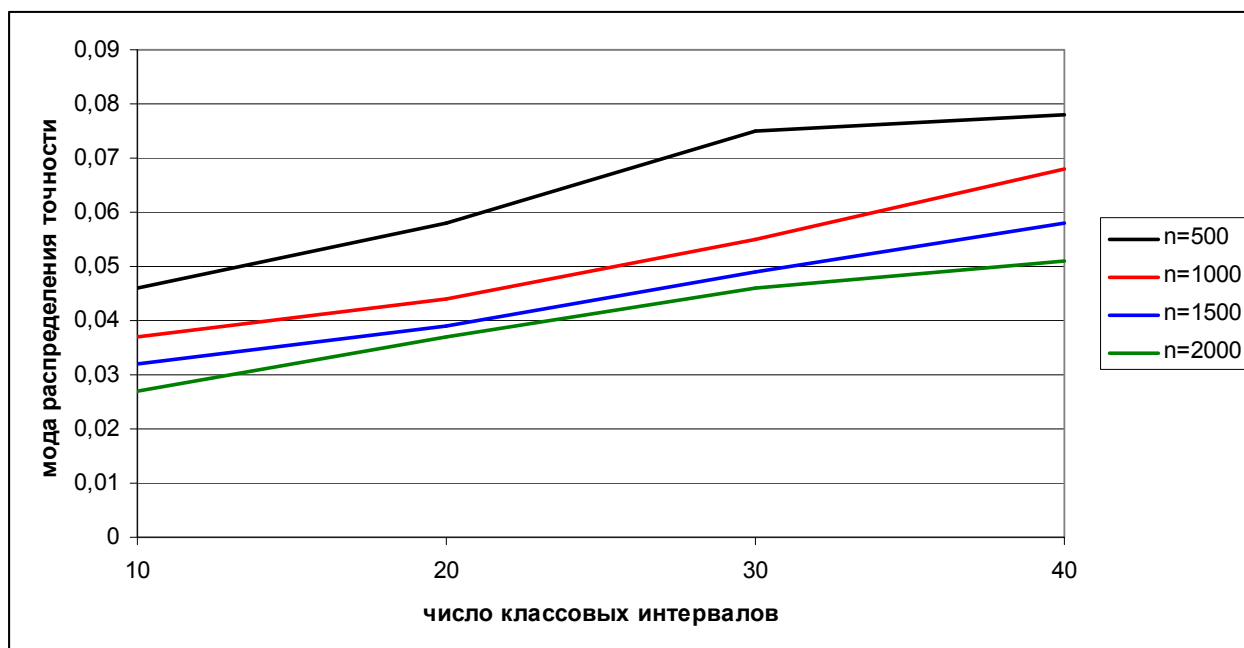


Рис. 4. Зависимость моды распределения точности в зависимости от числа классовых интервалов и длины выборки n

На рис. 5 показаны распределения расстояний между встык-выборками в зависимости от числа классовых интервалов. В целом при увеличении числа интервалов расстояние между выборками возрастает.

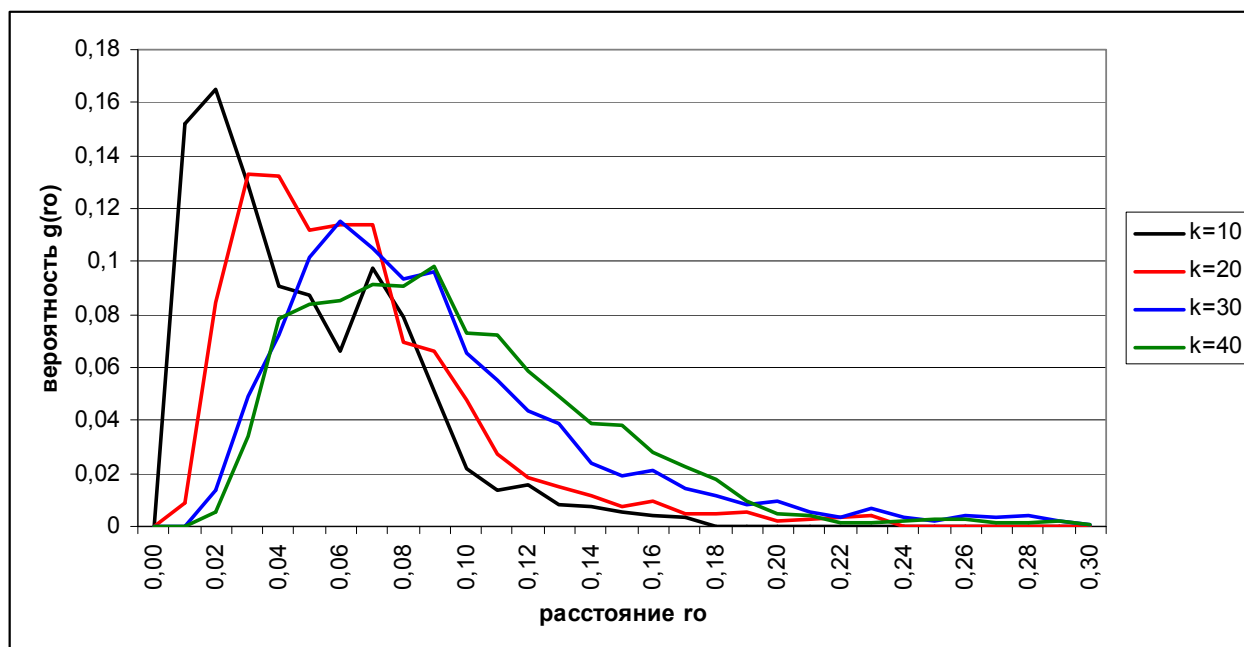


Рис. 5. Распределение расстояний между встык-выборками в зависимости от числа классовых интервалов k для длины выборки $n = 1000$ точек

На рис. 6 для распределений рис. 5 приведена доля расстояний $\beta(n, k)$, меньших $2\alpha(n, k)$. В отличие от $\alpha(n, k)$, величина $\beta(n, k)$ не является монотонной функцией ни длины выборки, ни мелкости разбиения.

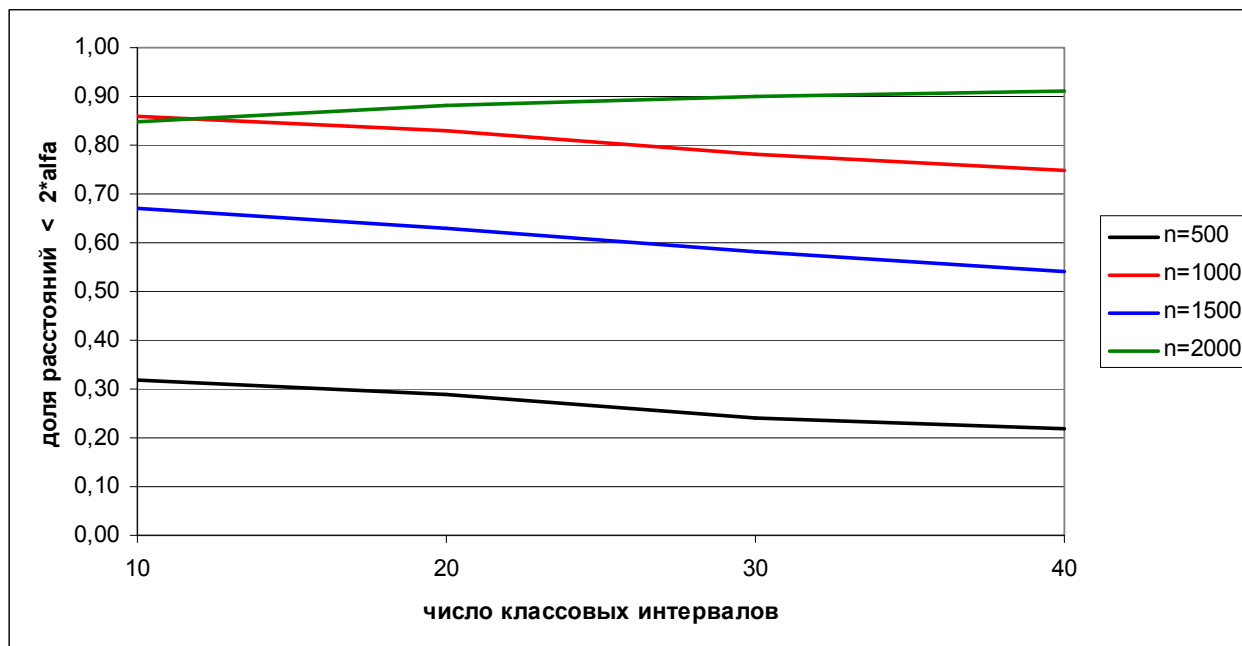


Рис. 6. Зависимость характерного расстояния между встык-выборками в зависимости от числа классовых интервалов и длины выборки n

Из рис. 6 следует, что при длинах выборок порядка 1000-2000 точек наилучшим прогнозом ВПФР будет наивный, поскольку почти все расстояния между ВПФР укладываются в точность, обусловленную чисто статистическим разбросом данных. Для выборок длин $n = 500 - 600$ точек нестационарность достоверно проявляется примерно в 70-80% случаев, когда и следует применять кинетическую модель прогнозирования.

5.3. Точность прогнозирования ВПФР и временного ряда

Приведем результаты прогнозирования ВПФР и временного ряда по модели (4.8). Заметим, что прогнозировать ВПФР на 1 шаг в терминах частоты появления значений временного ряда не очень осмысленно, т.к. изменение ВПФР за этот промежуток не превзойдет малой величины $2/n$. Такая точность не может быть достигнута в модели эволюции моментов ВПФР, поэтому на малый горизонт прогнозирования наилучшее приближение – квазистационарное, т.е. наивный прогноз ВПФР. Применение модели представляет интерес при прогнозировании на более длительный горизонт. Мы будем рассматривать прогноз на горизонт, равный длине окна выборки для случая $n = 600$.

Точность прогнозирования на τ шагов вперед включает в себя несколько аспектов. Во-первых, следует определить точность прогнозирования ВПФР в определенной норме, в данном случае в норме $L1$. Эта величина определяется по формуле

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \|f(x, t + \tau) - f(x, t)\|, \quad (5.5)$$

где N есть число экспериментов по прогнозированию ВПФР.

Во-вторых, если целью моделирования было получение прогноза значения ряда через определенный промежуток времени, то интерес представляет как относительная среднеквадратичная точность отклонения прогноза $\tilde{x}(t; \tau)$ от факта $x(t)$

$$\bar{\delta}(\tau) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\tilde{x}(t; \tau) - x(t))^2}, \quad (5.6)$$

так и точность τ -шаговой траектории

$$\delta = \sqrt{\frac{1}{N\tau} \sum_{t=1}^N \sum_{k=1}^{\tau} (\tilde{x}(t; k) - x(t))^2}, \quad (5.7)$$

а также скорость нарастания ошибки с увеличением горизонта прогнозирования

$$r(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\tilde{x}(t; k) - x(t))^2}, \quad k=1, 2, \dots, \tau. \quad (5.8)$$

Наилучшая точность прогнозирования ВПФР по формуле (5.5) оказалась равной 0,03 для модели (4.9) с усредненными показателями скорости и дисперсии. Точность 0,05 была достигнута на гидродинамической модели (4.8). При этом следует подчеркнуть, что характерное расстояние между ВПФР встык-выборки в 600 точек равно 0,24. Это означает, что наивный прогноз распределения в квазистационарном приближении на порядок хуже, чем прогнозы по кинетическим моделям, так что они представляют собой не просто математические упражнения по статистической механике, но вполне адекватны для описания нестационарной эволюции распределений временных рядов. Следует также сказать, что стандартные прогнозы приростов курса по стационарным регрессионным и авторегрессионным моделям любого порядка на оптимальных объемах выборки дают ошибку, приблизительно совпадающую (до второго знака) с ошибкой наивного прогноза, т.е. они не являются эффективными.

Описанные в работе модели не исчерпывают все способы замыкания системы прогнозных уравнений, получаемых в рамках кинетического подхода. Эти методы носят эвристический характер и не являются универсальными для любых временных рядов. Тем не менее, они показывают, что выбор адекватной модели может быть сделан и для нестационарных процессов без предположений об их функциональной принадлежности.

В дальнейшем предполагается классифицировать временные ряды по типам нестационарности и выбрать наиболее подходящую модель для их прогнозирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
2. Harris R., Sollis R. Applied Time Series. Modelling and Forecasting. – Wiley, 2003. – 302 p.
3. Кремер Н.Ш., Путко Б.А. Эконометрика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 311 с.
4. Орлов Ю.Н., Осминин К.П. Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда. // Мат. Мод., 2008. № 9. С. 23-33.
5. Босов А.Д., Орлов Ю.Н. Моделирование нестационарных временных рядов с помощью эмпирического уравнения Лиувилля и уравнений эволюции моментов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2011. № 52. 28 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2011-52>
6. Босов А.Д., Орлов Ю.Н. Кинетико-гидродинамический подход к прогнозированию нестационарных временных рядов на основе уравнения Фоккера-Планка // Труды МФТИ, 2012. Т. 3. № 4.
7. Орлов Ю.Н., Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. – 384 с.
8. Хир К. Статистическая механика, кинетическая теория и стохастические процессы. – М.: Мир, 1976. – 600 с.
9. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
10. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
11. Кузнецов Д.Ф. Численное моделирование стохастических дифференциальных уравнений и стохастических интегралов. – М.: Мир, 1999. – 463 с.
12. Статистические данные по ценам финансовых инструментов / www.finam.ru

Содержание

1. ВВЕДЕНИЕ	3
1.1. Цель и направление исследований.....	3
1.2. Актуальность темы	4
1.3. Новизна разработки.....	4
2. ЭМПИРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА-ПЛАНКА	5
2.1. Уравнение Колмогорова.....	5
2.2. Уравнение Фоккера-Планка.....	7
2.3. Стохастическое дифференциальное уравнение.....	9
2.4. Двумерное уравнение Фоккера-Планка для ВПФР	10
3. УРАВНЕНИЯ ЭВОЛЮЦИИ ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ	12
3.1. Эволюция среднего значения и локальной средней скорости.....	12
3.2. Уравнения эволюции высших моментов двумерной ВПФР	13
3.3. Эволюция дисперсии, скоса и коэффициента корреляции	14
3.4. Положительная определенность диффузионной матрицы	16
4. ПРОГНОЗНАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ТИПА .	18
4.1. Концепция прогнозирования временного ряда	18
4.2. Замыкание моментной системы	19
4.3. Численная схема решения задачи прогнозирования ВПФР.....	20
5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВПФР И ВРЕМЕННОГО РЯДА	22
5.1. Временной ряд валютного курса EUR/USD.....	22
5.2. Репрезентативность выборки и уровень стационарности	24
5.3. Точность прогнозирования ВПФР и временного ряда	27
ЛИТЕРАТУРА.....	29