



Борисов В.Е., Савенков Е.Б.

Численное исследование
метода предобуславливания
Generalized Nested
Factorization для
промышленных задач
пластовой фильтрации

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Борисов В.Е., Савенков Е.Б. Численное исследование метода предобуславливания Generalized Nested Factorization для промышленных задач пластовой фильтрации // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 12. 18 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-12>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.Е. Борисов, Е.Б. Савенков

**Численное исследование метода предобуславливания
Generalized Nested Factorization для промышленных
задач пластовой фильтрации**

Москва, 2013

В.Е. Борисов, Е.Б. Савенков, Численное исследование метода предобуславливания Generalized Nested Factorization для промышленных задач пластовой фильтрации

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию метода предобуславливания Generalized Nested Factorization (GNF) для промышленных задач пластовой фильтрации, отличительной особенностью которых являются использование неструктурированных сеток и наличие нелокальных связей между ячейками.

Приведены результаты сравнительного анализа представленного алгоритма с широко распространенными предобуславливателями на основе неполного LU разложения (ILU(0), ILU(1), ILUT). Численно исследованы спектральные свойства предобусловленных матриц.

Результатом работы является вывод о хорошей робастности алгоритма GNF для промышленных задач пластовой фильтрации.¹

Ключевые слова: пластовая фильтрация, предобуславливание, неполное LU-разложение, методы подпространств Крылова, generalized nested factorization.

V.E. Borisov, E.B. Savenkov, Numerical Investigation of Generalized Nested Factorization Preconditioning Technique for Industrial Reservoir Simulation Problems

Abstract. In this paper we present some results on application of Generalized Nested Factorization (GNF) preconditioning technique for industrial reservoir simulation problems. The test problems considered in the paper share some important features with reservoir models arise in real-life practice, e.g., a presence of non-local cell connections and unstructured computational grids.

Numerical results are compared with the ones obtained using standard ILU-type preconditioning techniques (ILU(0), ILU(1), ILUT). Besides, spectral properties of preconditioned matrices are analyzed, too.

As a result very good performance of GNF preconditioner is observed for industrial reservoir simulation problems.

Key words and phrases: reservoir simulation, preconditioning, incomplete LU factorization, Krylov subspace methods, generalized nested factorization.

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00793-а)

1 Введение

В ходе разработки нефтегазового месторождения неизбежно возникает необходимость численного моделирования происходящих процессов, с помощью которого можно оптимизировать процесс добычи и сделать прогноз на несколько лет вперед.

Процесс оптимизации добычи и поиска наиболее подходящей схемы разработки месторождения состоит в многократном моделировании с варьированием многих параметров, отражающих свойства исследуемого газонефтяного пласта. Таким образом, расчет может длиться несколько часов или даже дней. Это обстоятельство приводит к тому, что поиск более эффективных и экономичных с вычислительной точки зрения алгоритмов расчета становится одной из основных задач.

Большинство практических вычислительных задач, связанных с моделированием процессов разработки нефтегазовых месторождений, в частности, задача фильтрации жидкости в пористой среде, так или иначе сводится к многократному решению СЛАУ (системы линейных алгебраических уравнений) — основной задаче линейной алгебры и матричного анализа. В силу специфики задач фильтрации пластовых нефтегазовых систем (аспектные отношения ячеек $\sim 10 - 100$, скачки коэффициентов $\sim 10 - 100$, наличие в системе уравнений, которые описывают сильно различающиеся по скорости процессы), такие системы являются плохо обусловленными системами общего вида (несимметричными и не положительно определенными) и обладают большой размерностью (порядка $\sim 10^6 - 10^9$ уравнений), что значительно затрудняет их решение, увеличивая время расчета. Поэтому эффективность решения СЛАУ является критичной для эффективной работы программы-симулятора.

На данный момент существуют два класса методов для решения линейных систем — прямые и итерационные методы. Прямые методы (на основе LU разложения) требуют больших вычислительных затрат, что делает неприемлемым их использование для задач актуальной размерности. Основной идеей итерационных методов является получение решения с помощью повторяющегося процесса в результате последовательных приближений к решению. Наиболее универсальными, эффективными и употребительными на практике в настоящее время являются так называемые проекционные итерационные методы, в частности, методы на основе подпространств Крылова.

Среди методов этого типа для решения больших разреженных несимметричных систем линейных алгебраических уравнений общего вида чаще всего используют методы BiCGStab (стабилизированный метод бисопряженных градиентов) и метод GMRes (обобщенный метод минимальных невязок) в комбинации с различными видами предобуславливателей, повышающих эф-

фективность методов [1].

В настоящее время известно много разных типов предобуславливателей, например, предобуславливатели на основе аппроксимации матрицы системы: семейства ILU, IQR и ILQ; предобуславливатели на основе аппроксимации обратной матрицы: полиномиальные, разреженные аппроксимации обратной матрицы (например, AINV), аппроксимации обратной матрицы в факторизованной форме (такие как FSAI, SPAI и др.) [2].

При решении задач пластовой фильтрации наиболее часто используются предобуславливатели семейства ILU, в частности, различные модификации алгоритма Nested Factorization, а также иерархические предобуславливатели типа CPR (Constrained Pressure Residual) [3].

Предобуславливатель Nested Factorization (NF) — эффективный предобуславливатель, являющийся разновидностью блочного ILU предобуславливания [4]. Его отличительной особенностью является малое время построения и умеренное количество памяти для хранения. При построении предобуславливателя NF используется тот факт, что при аппроксимации задач на регулярных сетках с помощью стандартных двухточечных аппроксимаций потока через грани ячеек матрица системы уравнений имеет рекурсивно блочный трехдиагональный вид. При использовании структурированных сеток и стандартных аппроксимаций потоков предобуславливатель NF очень эффективен.

Цель настоящей работы — программная реализация и численное исследование предобуславливателя Generalized Nested Factorization (GNF) [5], применимого в случае использования неструктурированных сеток и при наличии нелокальных связей между ячейками сетки. В настоящей работе продемонстрирована его численная эффективность при расчете ряда тестовых и реальных задач пластовой фильтрации. Отдельное внимание уделено вопросу влияния рассмотренных предобуславливателей на спектральные свойства предобусловленных матриц. Несмотря на то что предобуславливатель GNF был предложен сравнительно давно, результаты численного исследования его эффективности и применимости при решении практических задач моделирования пластовых систем авторам неизвестны.

2 Предобуславливатель Nested Factorization

Предобуславливатель Nested Factorization (NF) предложен в работе [4]. Он представляет собой разновидность блочного ILU предобуславливания, с тем отличием, что матрица предобуславливателя имеет рекурсивно трехдиагональный вид. Несмотря на то что соответствующие множители L и U могут быть построены в явном виде, обычно это не делается. Вместо этого используется более эффективная на практике рекурсивная форма построения предо-

буславливателя и его применения, описанная ниже. Оригинальный алгоритм NF разработан для работы с матрицами, полученными с помощью аппроксимации задач на регулярных сетках с помощью стандартных двухточечных аппроксимаций потоков через грани ячеек. При отсутствии нелокальных связей между ячейками каждая ячейка сетки связана не более чем с 6-ю соседними ячейками, и матрица системы в случае однофазной задачи имеет семидиагональный вид.

Рассмотрим прямоугольную сетку, состоящую из $N_x \times N_y \times N_z$ расчетных ячеек. Зададим порядок обхода ячеек сетки, зафиксировав какую-либо перестановку (α, β, γ) координат x, y и z : первой меняющейся координатой станет координата вдоль оси α , затем последовательно вдоль осей β и γ . В общем случае эффективность предобуславливания методом NF сильно зависит от выбора ориентации координатных осей. В качестве *главной* оси (по которой происходит обход ячеек сетки в последнюю очередь) выбирается та координатная ось, вдоль которой коэффициенты уравнений системы связаны наиболее сильно — в большинстве практических задач фильтрации это будет ось z . В соответствии с алгоритмом метода, ячейки сетки объединятся в «столбцы» ($\beta, \gamma = const$), которые, в свою очередь, объединяются в слои ячеек ($\gamma = const$). Совокупность всех слоев составляет полную сеточную область.

В этом случае матрицу A можно представить в виде

$$A = d + u + l + v + m + w + n,$$

где d — главная диагональ матрицы; u и l — верхняя и нижняя (блочные) диагонали, соответствующие связям ячеек в пределах одной «линии» ячеек, v и m — верхняя и нижняя (блочные) диагонали, соответствующие связям между столбцами ячеек в пределах одного слоя, и, наконец, w и n — верхняя и нижняя диагонали, соответствующие связям между слоями сетки.

Для сетки $4 \times 4 \times 2$ структура матрицы A изображена на рис. 1.

Предобуславливатель $B \approx A$ методом NF строится в следующем виде:

$$B = (P + n)(I + P^{-1}w), \quad (1)$$

$$P = (T + m)(I + T^{-1}v), \quad (2)$$

$$T = (g + l)(I + g^{-1}u), \quad (3)$$

$$g = d - lg^{-1}u - \varepsilon, \quad (4)$$

$$\varepsilon = B - A = mT^{-1}v + nP^{-1}w,$$

где I — единичная матрица; P — блочная трехдиагональная матрица, блоки которой соответствуют «линиям» ячеек в пределах одного слоя; T — трехдиагональная матрица, элементы которой соответствуют связям отдельных

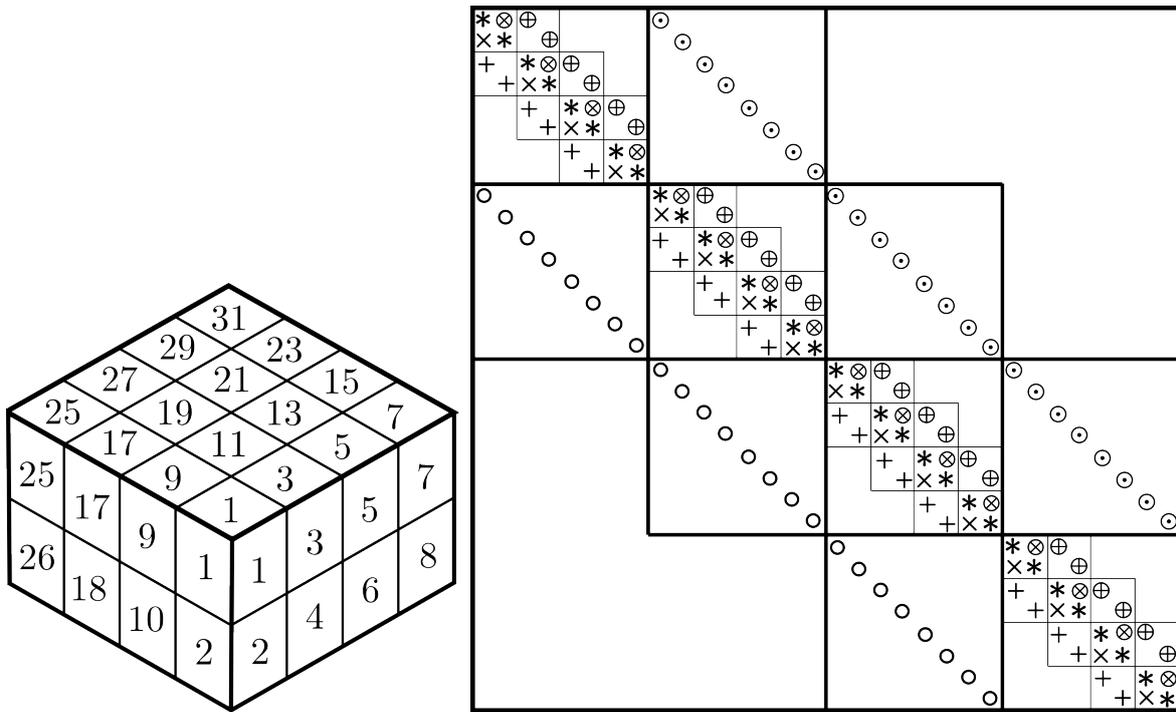


Рис. 1. Сетка (слева) и структура матрицы B (справа) для сетки $4 \times 4 \times 2$ при использовании предобуславливателя NF (диагонали: « \circ » — n , « $+$ » — m , « \times » — l , « $*$ » — d , « \otimes » — u , « \oplus » — v , « \odot » — w)

ячеек в пределах отдельных «линий» ячеек; g — модифицированная главная диагональ матрицы A ; ε — матрица ошибки.

Отметим, что матрица B имеет блочную трехдиагональную структуру, соответствующую структуре матрицы A .

Построение матрицы ошибки в явном виде имеет ту же вычислительную сложность, что и решение полной задачи обращения матрицы A . Поэтому для построения предобуславливателя используют диагональную матрицу $\tilde{\varepsilon}$, которая является той или иной аппроксимацией матрицы ошибки.

В итоге предобуславливатель NF определяется соотношениями (1)-(4) при замене матрицы ошибки ε на ее аппроксимацию $\tilde{\varepsilon}$. В этом случае получаем

$$B = A + \varepsilon - \tilde{\varepsilon}.$$

Наиболее распространенными являются следующие варианты выбора $\tilde{\varepsilon}$:

$$\tilde{\varepsilon}_{ii}^{(1)} = \varepsilon_{ii}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ii}^{(2)} = \text{colsum}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_{ij}; \quad \tilde{\varepsilon}_{ii}^{(3)} = \text{rowsum}(\varepsilon) = \sum_{j=1}^N \varepsilon_{ij}.$$

Первый способ дает сравнительно грубое приближение и редко используется на практике.

Рассмотрим второй способ. Пусть \tilde{x} — решение системы $B\tilde{x} = b$. Тогда невязка исходной системы на векторе \tilde{x} имеет вид: $r = (B - A)\tilde{x}$. При этом,

в силу построения $\tilde{\varepsilon}^{(2)}$, всегда имеем $\text{colsum}(B - A) = 0$, откуда следует, что сумма всех компонент вектора невязки равна нулю вне зависимости от значений \tilde{x} . Это свойство обеспечивает сохранение полного материального баланса [6] в ходе итераций и сокращение их числа — фактически снижается размерность пространства, в котором ищется очередное приближение. Еще одно важное свойство аппроксимации colsum заключается в том, что его использование гарантирует невырожденность матрицы B предобуславливателя [7]. В свою очередь использование третьего способа (rowsum) гарантирует сохранение локального материального баланса. Как показывают результаты численного исследования вариантов colsum и rowsum предобуславливателя NF (раздел 6), эффективность обоих вариантов сравнима.

Для описанного выше примера расчетной сетки $4 \times 4 \times 2$ (рис. 1) разложение (1) матрицы предобуславливателя B имеет вид:

$$B = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & P_3 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & P_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & P_1^{-1}w_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & P_2^{-1}w_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & P_3^{-1}w_3 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

P_i — матрицы, отвечающие за взаимодействие ячеек внутри слоя i ячеек, n_k и w_k — диагональные матрицы, элементы которых показывают взаимодействие слоев между собой.

Вычисление $y = B^{-1}x$ происходит аналогично обычному предобуславливанию типа неполного LU разложения и сводится к «прямому ходу» с матрицей $(P + n)$ и затем «обратному ходу» с матрицей $(I + P^{-1}w)$: y находится из уравнения $Bu = x$ последовательным решением двух треугольных систем $(P + n)z = x$, $(I + P^{-1}w)y = z$, см. (1).

Таким образом, задача вычисления $y = B^{-1}x$ сводится к вычислению $P_i^{-1}w$ для каждого слоя i ячеек. При этом пространственная размерность задачи уменьшается с 3 до 2.

В соответствии с (2), P_i также представляется в блочном виде:

$$P_i = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 \\ m_1 & T_2 & 0 & 0 \\ 0 & m_3 & T_3 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & T_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & T_1^{-1}v_1 & 0 & 0 \\ 0 & I & T_2^{-1}v_2 & 0 \\ 0 & 0 & I & T_3^{-1}v_3 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix},$$

где T_j — матрицы, соответствующие связям в пределах одной «линии» ячеек, слоя с номером i , m_l и v_l — матрицы, элементы которых соответствуют связям между «линиями» ячеек в пределах слоя i .

Процедура вычисления $P_i^{-1}x$ полностью аналогична вычислению $B^{-1}x$. Следующий уровень рекурсии требует обращения трехдиагональной матрицы T_j , которое легко может быть выполнено методом прогонки.

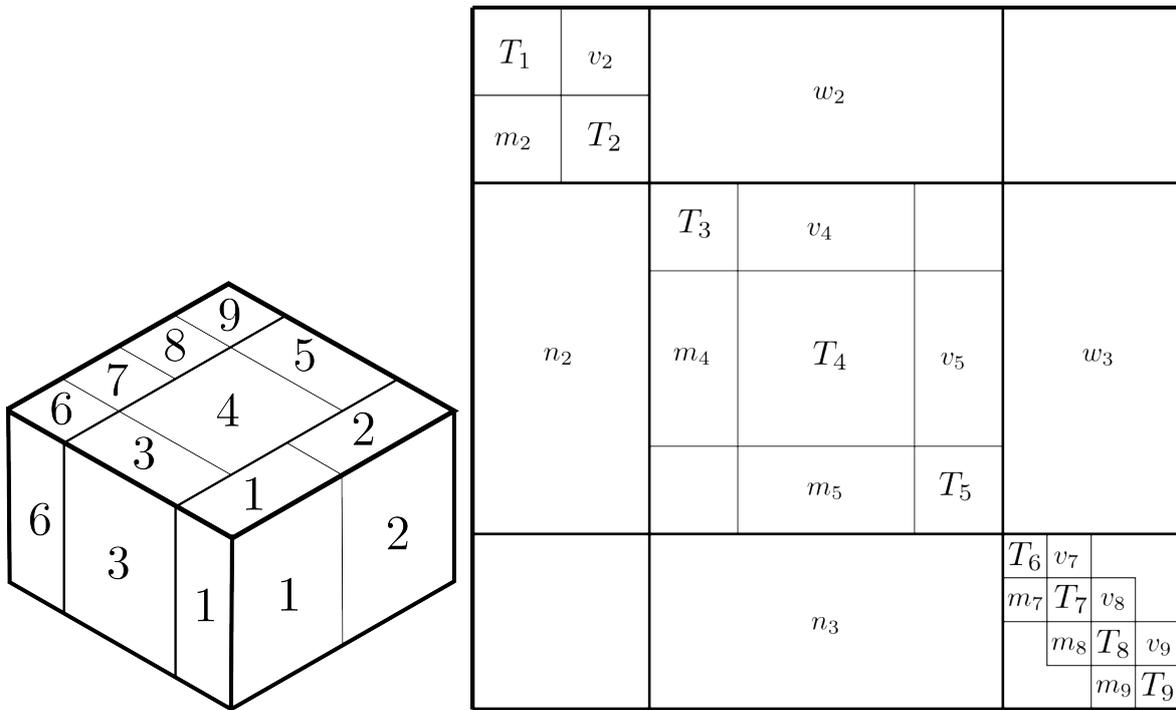


Рис. 2. Сетка (слева) и структура матрицы B для сетки $4 \times 4 \times 2$ при использовании предобуславливателя GNF

3 Предобуславливатель Generalized Nested Factorization

Метод предобуславливания Generalized Nested Factorization впервые рассмотрен в работе [5]. Данный алгоритм является обобщением базового метода Nested Factorization на случай неструктурированных сеток и наличия нелокальных связей между ячейками.

Основным отличием метода GNF от алгоритма NF является отказ от требования строгой трехдиагональной структуры (блочной трехдиагональной структуры для многофазных задач) на самом нижнем уровне построения предобуславливателя. Вместо этого предполагается, что центральная блочная полоса матрицы (в оригинальном NF элемент этой полосы — диагональный блок T_i , отвечающий за взаимодействие ячеек внутри одной «линии» ячеек) является плотной матрицей, которая обращается точно. Такие блоки символически называются «суперклетками». Появившаяся свобода позволяет создавать слои суперклеток, каждая из которых объединяет в себе произвольное число «линий» ячеек по всем трем направлениям пространства. Также предполагается, что ячейки объединяются в суперклетки таким образом, чтобы, как и в оригинальном NF, матрица предобуславливателя имела на каждом шаге построения блочно-трехдиагональную структуру. В этом случае любой слой (суперклетка) граничит с не более чем двумя соседними

слоями (суперклетками), что гарантирует блочную трехдиагональную структуру на верхнем уровне. Изменение способа объединения ячеек в суперклетки не меняет решения системы, но, в случае GNF, может существенно поменять качество предобуславливания.

Алгоритм объединения ячеек сетки в суперклетки и затем в слои суперклеток может базироваться, например, на геометрическом расположении ячеек сетки, либо каком-либо подходе, учитывающем не только взаимное расположение ячеек, но и соответствующие значения коэффициентов матрицы A . Любой из этих подходов устраняет чувствительность предобуславливателя GNF к выбору ориентации координатных осей, критичной для NF, устанавливая связь с координатными осями автоматически внутри алгоритма согласно выбранному методу.

Очевидно, что чем больше размер каждой суперклетки, тем более точное решение может быть получено. В предельном случае одной суперклетки (соответствующей всей сеточной расчетной области) предобуславливатель в точности совпадает с обратной матрицей системы.

Пример объединения ячеек прямоугольной сетки $4 \times 4 \times 2$ в суперклетки, слои и соответствующая структура матрицы B приведены на рис. 2.

Здесь каждая суперклетка первого слоя сетки и одна суперклетка второго слоя содержат по две «линии» ячеек, две суперклетки второго сеточного слоя — по одной «линии» ячеек сетки.

Аналогично методу NF предобуславливание методом GNF состоит из двух этапов:

1. построение матрицы предобуславливателя, которое сводится к корректровке и обращению главной блочной диагонали исходной матрицы;
2. умножение произвольного вектора на предобусловленную матрицу в ходе итераций.

Эти процедуры кратко представлены на рис. 3 и 4.

4 Сравнительный анализ эффективности алгоритма GNF и ILU предобуславливателей

Краткое описание исследуемых для каждой модели матриц приведено в таблице 1. Тест № 1 — модель «SPE9» Американского общества инженеров-нефтяников [9], тест № 2 описан в [11]. Тесты № 3 и 4 соответствуют реальным месторождениям Западной Сибири.

Используемые матрицы были выгружены из гидродинамического симулятора многофазной многокомпонентной фильтрации. Все матрицы были вы-

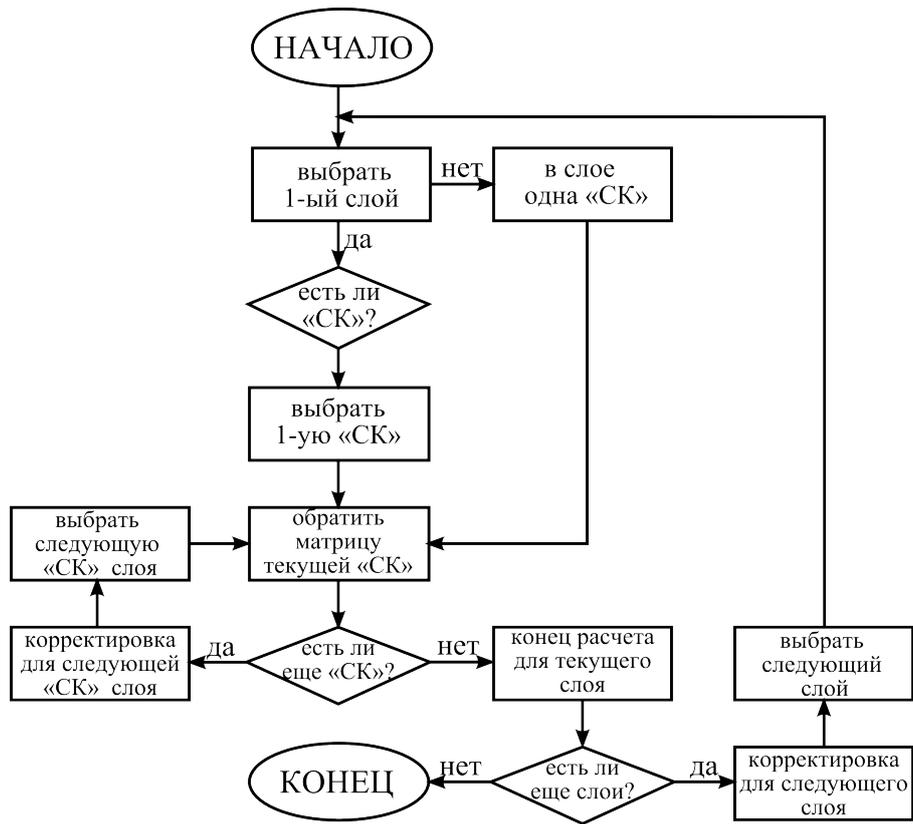


Рис. 3. Алгоритм построения матрицы преобуславливателя GNF

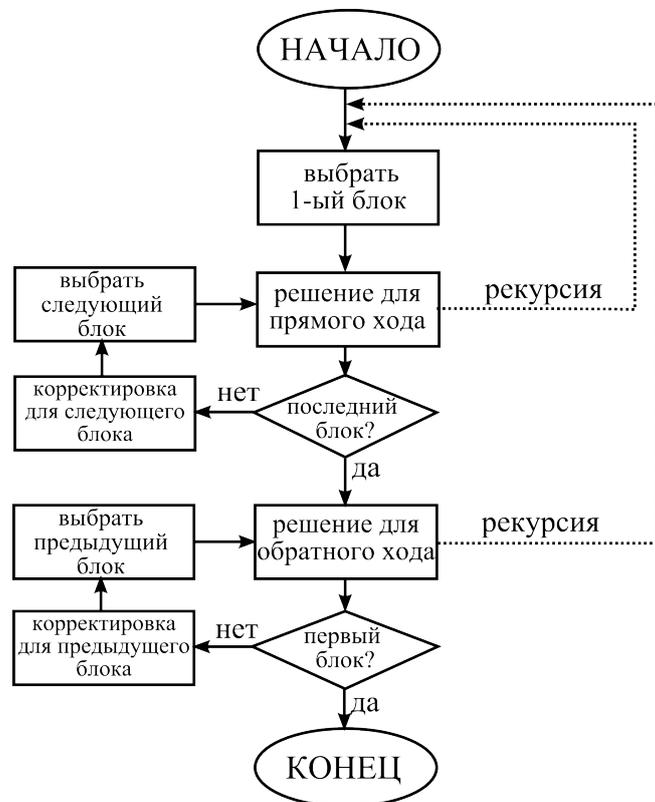


Рис. 4. Процедура умножения вектора на преобусловленную матрицу

Таблица 1. Параметры матриц моделей. Обозначения фаз: «н» — нефтяная, «в» — водная, «г» — газовая

Модель	1	2	3	4
Сетка	$24 \times 25 \times 15$	$40 \times 40 \times 1$	$51 \times 51 \times 15$	$22 \times 69 \times 21$
Число активных ячеек	9 000	1 600	21 489	31 762
Число строк матрицы	27 000	4 800	42 978	63 524
Число ненулевых элементов	542 900	36 043	551 980	423 043
Число фаз	3 (н,в,г)	3 (н,в,г)	2 (н,в)	2 (в,г)
Число скважин	26	1	2	115

гружены приблизительно с середины полного времени расчета модели со второй - третьей нелинейной итерации метода Ньютона. Используемая модель фильтрации — трехфазная трехкомпонентная модель «черная нефть» [6].

Далее рассмотрим результаты сравнительного анализа эффективности предобуславливателя GNF и предобуславливателей семейства ILU: ILU(0), ILU(1), ILUT — универсальных и широко распространенных в настоящее время [1].

В качестве метода решения СЛАУ был выбран алгоритм FGMRes(k) — «гибкий» вариант метода GMRes(k), позволяющий использовать на каждой итерации алгоритма свой предобуславливатель [8].

Используемые для расчета матрицы были получены из полных матриц расчетных моделей, описанных выше, с исключением уравнений для скважин с помощью метода дополнения по Шуру [12].

Итерации метода FGMRes(k) продолжались до достижения неравенства $\|r\|_2 \leq \varepsilon_r \|r_0\|_2 + \varepsilon_a$ при $\varepsilon_r = 10^{-6}$, $\varepsilon_a = 10^{-8}$ ($\|r\|_2$ и $\|r_0\|_2$ — текущая и начальная невязки соответственно). Максимальное число итераций равнялось 500. Размерность k крыловского подпространства равнялась 30. В качестве начального приближения выбирался вектор x с компонентами $x_i = i$.

Параметры предобуславливателя ILUT(l, ε) (в строках матриц L и U сохранялось не более l коэффициентов, превышающих по модулю ε) имели значения $l = 60$ и $\varepsilon = 10^{-4}$.

Внутри предобуславливателя GNF использовался следующий алгоритм

Таблица 2. Время работы итерационного метода FGMRes(k) с различными предобуславливателями на моделях 1 – 4. Время указано в секундах, N_{it} — число итераций, T_{prec} — время построения предобуславливателя, T_{iter} — время, затрачиваемое только на итерации, T_{all} — полное время решения СЛАУ

Модель № 1	N_{it} (с)	T_{prec} (%)	T_{iter} (%)	T_{all} (с)	T_{ilut}/T_{all}
ILU(0)	148	32	68	0.38	0.8
ILU(1)	55	51	49	0.31	1.0
ILUT	43	91	9	0.31	1.0
GNF rowsum	15	72	28	0.14	2.2
GNF colsum	16	70	30	0.15	2.1
Модель № 2	N_{it} (с)	T_{prec} (%)	T_{iter} (%)	T_{all} (с)	T_{ilut}/T_{all}
GNF rowsum	142	42	58	0.19	-
GNF colsum	24	50	50	0.12	-
Модель № 3	N_{it} (с)	T_{prec} (%)	T_{iter} (%)	T_{all} (с)	T_{ilut}/T_{all}
ILUT	287	35	65	1.23	1.0
GNF rowsum	30	59	41	0.81	1.5
GNF colsum	38	53	47	0.94	1.3
Модель № 4	N_{it} (с)	T_{prec} (%)	T_{iter} (%)	T_{all} (с)	T_{ilut}/T_{all}
ILU(1)	22	39	61	0.31	0.9
ILUT	17	63	37	0.29	1.0
GNF rowsum	10	46	54	0.15	1.9
GNF colsum	11	41	59	0.16	1.8

разбиения области на суперклетки и слои: сначала производился выбор ориентации осей координат исходя из физических свойств задачи (распределений коэффициентов абсолютной проницаемости, сообщаемости между ячейками и т.д.), далее объединение в слои и суперклетки производилось согласно геометрическому расположению ячеек внутри расчетной области, нелокальным связям между ячейками и связи ячеек по скважинам.

Обращение внутренних матричных блоков для суперклеток производилось приближенно, с помощью предобуславливателя ILUT(60,10⁻³).

Результаты исследования времени работы итерационного метода FGMRes с различными предобуславливателями для рассматриваемых моделей представлены в таблице 2. Если в таблице не присутствует какой-либо метод предобуславливания, это означает, что он не сходится за максимально допустимое количество итераций. Жирным начертанием в таблице 2 выделена строка, соответствующая применению предобуславливателя ILUT, результа-

ты которого считались «эталонными».

В последней графе каждой таблицы приведено отношение «эталонного» времени решения СЛАУ ко времени решения СЛАУ с используемым предобуславливателем.

Как видно из таблицы 2, предобуславливание методом GNF в целом является эффективным, до 2-х раз опережая на всех моделях предобуславливатели семейства ILU по времени работы и до 9-и раз — по количеству итераций. Кроме того, для модели № 2 только применение предобуславливателя GNF гарантирует сходимость итерационного метода за максимально отведенное количество итераций. Сравнивая влияние выбора корректировки матрицы ошибки в предобуславливателе GNF, можно сделать вывод, что корректировка rowsum обеспечивает в целом лучшую робастность, чем colsum, однако разница во времени работы не является существенной.

В итоге можно сделать следующие выводы:

- «Простые» предобуславливатели ILU(0) и ILU(1) неэффективны для задач рассматриваемого типа.
- Сравнительно хорошие результаты (по числу итераций и времени работы алгоритма) дает лишь применение предобуславливателя ILUT с достаточно малым порогом отбрасывания ненулевых элементов (ILUT(60,10⁻⁴)).
- Наиболее эффективно при использовании рассмотренных тестов ведет себя предобуславливатель GNF — как по числу итераций, так и по времени работы алгоритма. В случае рассмотренных примеров это связано как с меньшим числом обусловленности предобусловленной матрицы, так и со свойством рассматриваемого предобуславливателя лучше кластеризовать собственные значения (см. раздел 5) .

Эффективность использования предобуславливателей NF и GNF, видимо, обусловлена следующими факторами. Скорость построения и применения предобуславливателя в значительной степени обусловлена рекурсивной трехдиагональной структурой матрицы B . При этом, если расчетная сетка незначительно отличается от структурированной (например, число неактивных ячеек сетки мало), то и эффективность GNF будет близка к эффективности стандартного NF.

Перенумерация ячеек сетки в соответствии с выбором «главной» координатной оси (см. раздел 2) концентрирует элементы матрицы с большими абсолютными значениями вблизи главной диагонали. Именно эти элементы входят в диагональные блоки T_i матрицы B , которые обрабатываются точно. Оставшиеся элементы матрицы сравнительно малы. Это повышает качество аппроксимации матрицы A матрицей B . Переупорядочение осей таким образом

является аналогом выбору ведущего элемента при использовании стандартных предобуславливателей типа ILU — но происходит не поэлементно, а сразу достаточно большими блоками, соответствующими слоям ячеек сетки. При наличии в задаче нелокальных связей между ячейками (например, скважин) разбиение должно проводиться таким образом, чтобы все ячейки, связанные одной скважиной, попадали в одну суперклетку. Такая суперклетка в общем случае не будет разреженной диагональной матрицей, однако это не является проблемой в силу того, что матрица, соответствующая суперклетке, обращается «целиком». При этом могут быть использованы эффективные прямые алгоритмы для ленточных матриц, например, из пакета LAPACK [13].

Помимо этого, предобуславливатель GNF, как в варианте colsum, так и в варианте rowsum, сохраняет важные свойства матрицы исходной системы, связанные с физикой задачи (см. раздел 2), что также положительно сказывается на скорости сходимости метода.

В отличие от предобуславливателей семейства NF, общие предобуславливатели семейства ILU являются «универсальными» в том смысле, что не используют какой-либо априорной информации о структуре математической модели, расчетной сетки и используемых аппроксимациях. Этим объясняется их меньшая эффективность для решения рассматриваемого класса задач.

5 Спектральный анализ предобусловленных матриц

В данном разделе представлены результаты сравнительного анализа спектральных свойств предобуславливателя GNF и предобуславливателей семейства ILU (ILU(0), ILU(1), ILUT).

Для вычисления спектров использовался пакет ARPACK [14]. Реализованные в пакете методы являются методами на основе подпространств Крылова и не требуют в явном виде матрицы A или $B^{-1}A$.

Известно [1], что скорость сходимости итерационных методов для решения СЛАУ напрямую зависит от числа обусловленности матрицы системы, которое обычно вычисляется в спектральной норме [10]. Для числа обусловленности несимметричной неопределенной системы справедлива оценка

$$\text{cond}(A) \geq |\lambda_{\max}(A) / \lambda_{\min}(A)|,$$

где $\lambda_{\min, \max}(A)$ — минимальное и максимальное собственные числа матрицы A соответственно.

По спектру матрицы можно судить о порядке числа обусловленности системы. Помимо числа обусловленности на скорость сходимости итерационных

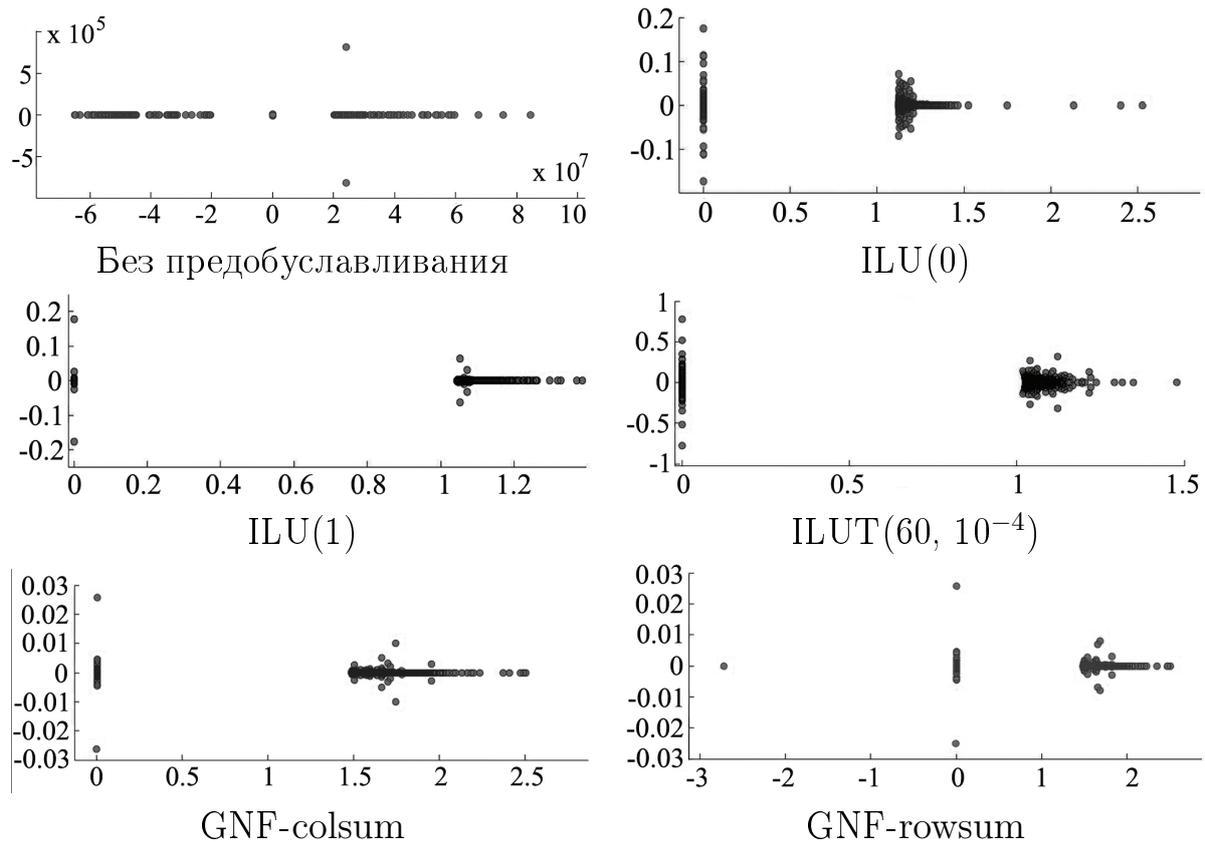


Рис. 5. Спектры предобусловленных матриц для модели № 1

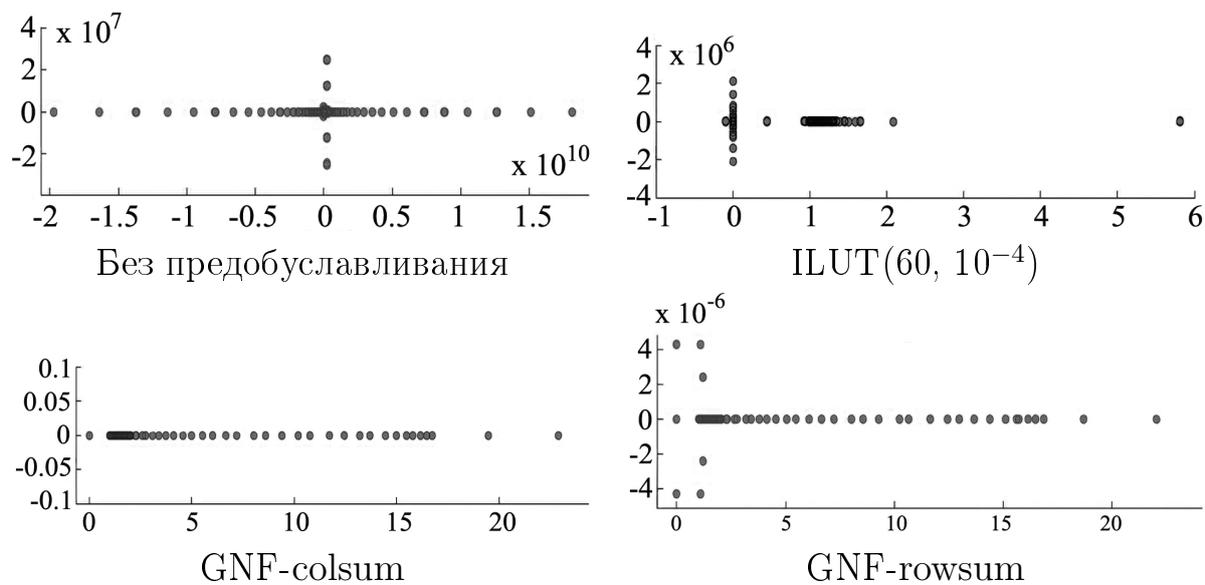


Рис. 6. Спектры предобусловленных матриц для модели № 2

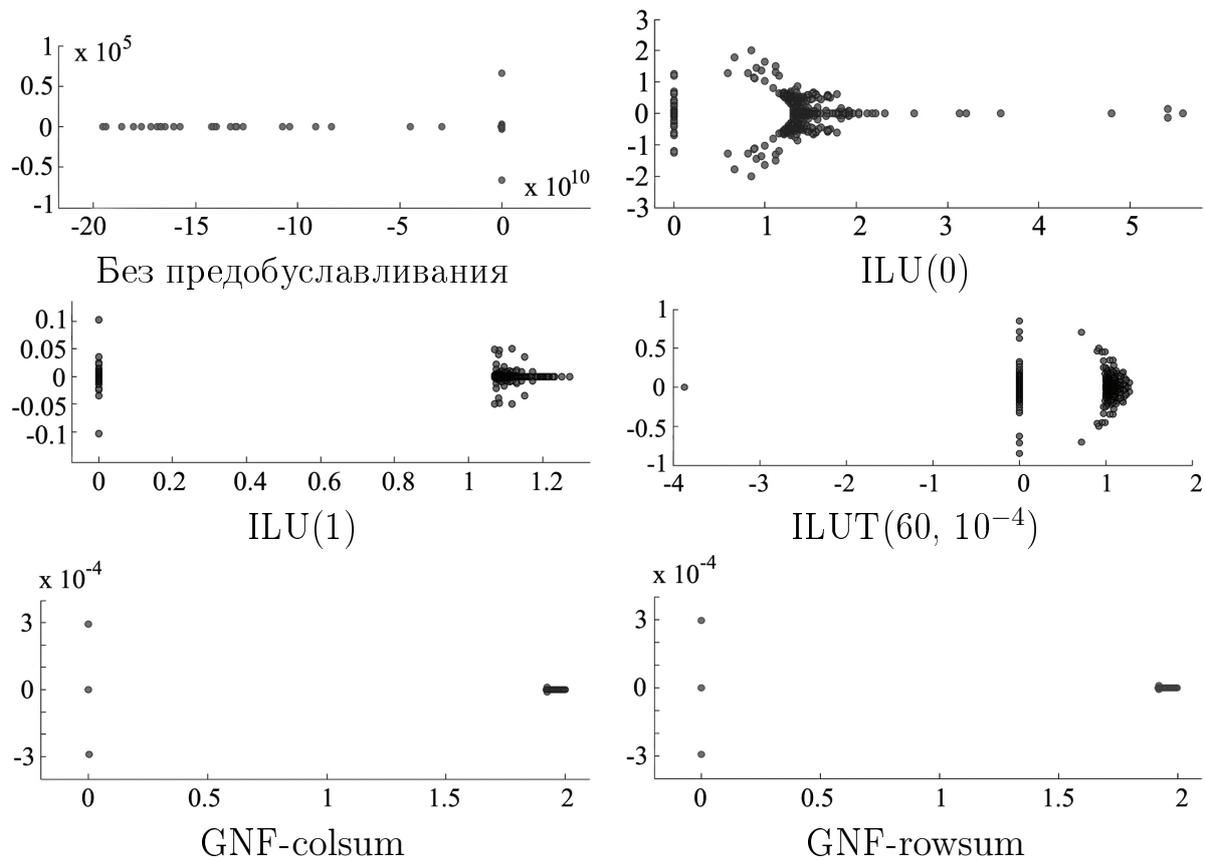


Рис. 7. Спектры предобусловленных матриц для модели № 3

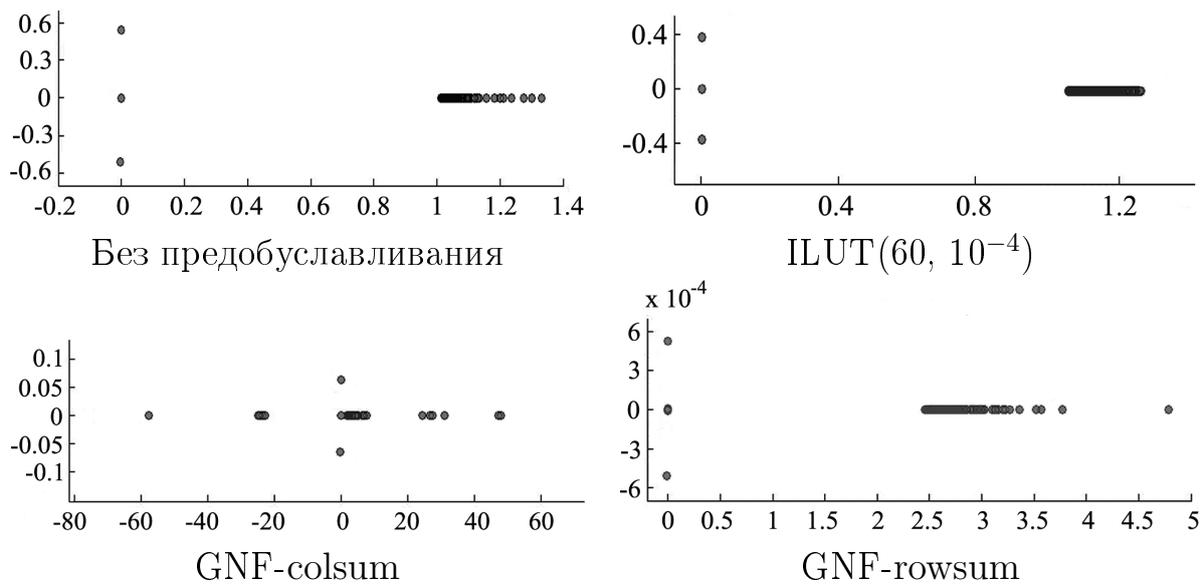


Рис. 8. Спектры предобусловленных матриц для модели № 4

методов также влияет кластеризованность спектра: хорошей является ситуация, когда спектр матрицы состоит из нескольких ярко выраженных кластеров, расположенных вдали от начала координат комплексной плоскости, желательна в районе $|\lambda| = 1$ [10].

Спектры исследуемых предобусловленных матриц представлены на рис. 5 – 8. На рисунках показано распределение 500 минимальных и 500 максимальных по модулю собственных значений.

Для моделей № 2 и № 4 результат применения предобуславливателей $ILU(0)$ и $ILU(1)$ не показан, так как в этом случае итерации не сходились.

Полученные результаты исследования спектров хорошо согласуются с численными результатами исследования работы итерационного метода $FGMRes(k)$, во многом объясняя причины численной эффективности алгоритма предобуславливания GNF : он обеспечивает лучшие по сравнению с остальными предобуславливателями кластеризацию спектра и число обусловленности предобусловленной матрицы системы, что наиболее заметно для модели № 3.

6 Заключение

Данная работа посвящена исследованию метода предобуславливания Generalized Nested Factorization (GNF) для промышленных задач пластовой фильтрации.

Предобуславливатель GNF может использоваться на неструктурированных сетках со сложными нелокальными связями между ячейками без потери эффективности оригинального алгоритма, что подтверждается проведенными численными экспериментами как на тестовых задачах, так и на моделях реальных месторождений. Отдельная глава работы посвящена исследованию спектров предобусловленных матриц, которое во многом объясняет эффективность метода GNF , значительно улучшающего кластеризацию спектров и существенно уменьшающего число обусловленности исследуемых матриц.

По сравнению с универсальными ILU предобуславливателями, являющимися на сегодняшний день стандартными для решаемого класса задач, время решения одной СЛАУ уменьшается до 2-х раз, количество итераций сокращается до 9-ти раз, что позволяет сделать вывод о хорошей робастности предобуславливателя GNF для промышленных задач пластовой фильтрации.

Список литературы

- [1] Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems. — SIAM, 2003.
- [2] Benzi M. Preconditioning Techniques for Large Linear Systems: A Survey // Journal of Computational Physics. — 2002. — Vol. 182, No 2. — Pp. 418–477.
- [3] Constrained Residual Acceleration of Conjugate Residual Methods / J. R. Wallis, R. P. Kendall, T. E. Little, J. S. Nolen // SPE Paper 13536, 8th SPE Symposium on Reservoir Simulation, Dallas, TX. — 1985.
- [4] Appleyard J. R., Cheshire I. M. Nested Factorization // SPE Paper 12264-MS, SPE Reservoir Simulation Symposium. — No 12264. — San Francisco, California: Society of Petroleum Engineers, 1983. — Pp. 315–324.
- [5] Appleyard J. R. Method and Apparatus for Estimating the Physical State of a Physical System // EPA 2068263 A2. — 2010.
- [6] Aziz K., Settari A. Petroleum Reservoir Simulation. — Essex, England: Elsevier Applied Science Publishers, 1979.
- [7] Fourier Analysis of Modified Nested Factorization Preconditioner for Three Dimensional Isotropic Problems: Research report / P. Kumar, L. Grigori, Q. Niu, F. Nataf. — 2010. — URL:<http://hal.inria.fr/inria-00448291>.
- [8] Saad Y. A Flexible Inner-Outer Preconditioned GMRES Algorithm // SIAM Journal on Scientific Computing. — 1993. — Vol. 14, No 2. — Pp. 461–469.
- [9] Killough J. E. Ninth SPE Comparative Solution Project: A Reexamination of Black-Oil Simulation // SPE Paper 29110-MS, SPE Reservoir Simulation Symposium. — San Antonio, Texas: Society of Petroleum Engineers, 1995. — Pp. 135–147.
- [10] Деммель Д. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. — Москва: Мир, 2001.
- [11] Некрасов А. А. Тесты и методики испытания программного обеспечения моделирования разработки месторождений // Вестник ЦКР Роснедра. — 2008. — № 1. — С. 54–64.
- [12] Прасолов В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры. — Москва: Физматлит, 1996.

- [13] LAPACK Users' Guide (3rd edition) / E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof et al. — Philadelphia: SIAM, 1999.
- [14] Lehoucq R., Sorensen D., Yang C. ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. — Computer Based Learning Unit, University of Leeds, 1998.

Содержание

1	Введение	3
2	Предобуславливатель Nested Factorization	4
3	Предобуславливатель Generalized Nested Factorization	8
4	Сравнительный анализ эффективности	9
5	Спектральный анализ	14
6	Заключение	17
	Литература	18