



[Ананьев М.А.](#), [Митин Н.А.](#)

Сравнение линейных и  
нелинейных  
авторегрессионных моделей  
условной  
гетероскедастичности на  
примере доходности  
индекса РТС

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ананьев М.А., Митин Н.А. Сравнение линейных и нелинейных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности на примере доходности индекса РТС // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 19. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-19>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**М.А.Ананьев, Н.А.Митин**

**Сравнение линейных и нелинейных  
авторегрессионных моделей  
условной гетероскедастичности  
на примере доходности индекса РТС**

**Москва — 2013**

М.А.Ананьев, Н.А.Митин

Сравнение линейных и нелинейных авторегрессионных моделей условной гетероскедастичности на примере доходности индекса РТС

АННОТАЦИЯ

В работе проводится сравнение прогнозных способностей линейных и нелинейных моделей условной волатильности на примере *GARCH* моделей для доходности индекса РТС. По данным дневных цен закрытия индекса РТС за 10 лет оценивается ряд параметрических моделей, строится набор прогнозов волатильности для горизонтов различной длины, по которым прогнозные способности моделей сравниваются согласно выбранным критериям. Нелинейные модели были разработаны для учета обнаруженных особенностей временных рядов, однако качество полученных с их помощью прогнозов иногда оказывается под вопросом. Результаты данного исследования дополняют результаты других работ: нелинейные модели условной волатильности показывают лучшие результаты. Возможным объяснением такого успеха может служить тот факт, что нелинейные модели дают более качественный прогноз на относительно коротких горизонтах, а на более длинных могут давать большую погрешность.

*Ключевые слова:* условная гетероскедастичность, GARCH, прогноз волатильности.

Mikhail Alexeevich Ananyev, Nikolay Alexeevich Mitin

Linear vs. Nonlinear GARCH Models for RTS Index Returns

ABSTRACT

This paper compares the predictive abilities of linear vs. nonlinear GARCH models for conditional volatility for the RTSI returns. Using daily data on the RTSI over past 10 years we estimated the models, obtained predicted values for different horizons, and compared the predictive abilities according to selected criteria. Nonlinear models were created to capture stylized facts about time series, but the quality of the obtained forecasts is sometimes questionable. The results of this study complement the results of other authors – namely, that the nonlinear GARCH models for the conditional volatility show the best results. This result might be due to the fact that nonlinear models show better results than linear ones on relatively short horizons, while on the longer ones their predictive ability might be weakened.

*Key words:* conditional heteroscedasticity, GARCH, volatility forecast.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00887-а, 11-06-00471-а, 12-06-00402-а, 13-01-00617-а) и РГНФ (проект 12-03-00387-а).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Волатильность (Изменчивость, *англ.* Volatility) — финансовый показатель, характеризующий тенденцию к разбросу значений временного ряда, например, рыночной цены или доходности, изменяющийся во времени. Является важнейшим финансовым показателем и понятием в управлении финансовыми рисками, где представляет собой меру риска использования финансового инструмента за заданный промежуток времени [1]. Для расчета волатильности обычно применяется выборочное стандартное отклонение, что позволяет инвесторам с некоторой точностью определить риск приобретения финансового инструмента.

Тем не менее, выборочные статистики, такие как выборочное стандартное отклонение, обладают рядом недостатков, из-за которых их использование может давать неверные результаты. Как минимум, оценка волатильности, полученная при помощи выборочного стандартного отклонения, является состоятельной (сходится по вероятности к истинному значению) лишь в асимптотике (т.е. при бесконечно большом объеме выборки), а также не позволяет своевременно идентифицировать изменение волатильности во времени.

Одним из наиболее известных примеров использования волатильности в финансово-математических моделях является уравнение Блэка-Шоулза (Black-Scholes). Хотя уравнения Блэка-Шоулза подразумевает постоянную волатильность [1], ее постоянство не наблюдается при анализе реальных рынков.

Известно, что различные виды активов имеют периоды высокой и низкой волатильности. То есть в некоторые периоды цены могут меняться достаточно быстро, тогда как в другое время они могут практически не изменяться.

Как правило, высокая волатильность не появляется «из ниоткуда», ей предшествуют более крупные изменения, чем обычно (чаще всего отрицательные). Это называется условной авторегрессионной гетероскедастичностью. Конечно, направление изменения предсказать трудно, и вопрос о прогнозировании направления движения не рассматривается в данной работе. Также увеличение волатильности не всегда предвещает дальнейшее ее увеличение, она может просто уменьшиться опять.

Авторегрессионные модели условной гетероскедастичности (*Autoregressive Conditional Heteroscedastic — ARCH Models*), введенные Энгелем в 1982 году [2], и обобщенные ARCH модели (*Generalized ARCH — GARCH*), представленные Боллерслеваем в 1986 году [3], широко используются для моделирования изменения во времени условной волатильности.

Обнаруженное большое количество особенностей поведения временных рядов, таких как асимметричное воздействие положительных и отрицательных шоков цен (например, новостей), особенности распределений этих шоков и пр., привело к тому, что класс стандартных GARCH моделей был расширен до, в некотором роде, «нелинейных», асимметричных спецификаций, для того чтобы улавливать такие особенности.

Сравнение некоторых GARCH моделей для условной волатильности было представлено П. Хансенom и А. Лунде в статье «Сравнение моделей волатильности: ничего нет лучше, чем GARCH (1,1)?» [4]. Они проводят сравнение предсказаний более 300 различных модификаций GARCH моделей и приходят к выводу, что лучшие в определенных рамках модели не дают значительно более точные прогнозы, чем стандартная *GARCH (1,1)* модель.

Данная работа опирается главным образом на результаты, полученные в упомянутой работе Хансена и Лунде [4]. Используя данные индекса РТС, мы сравниваем результаты прогнозирования, полученные с помощью набора дискретных параметрических GARCH моделей.

Главный вопрос этого исследования заключается в том, предоставляют ли параметрические модели асимметричного влияния шоков, которые называются далее «нелинейными», лучший прогноз, чем классические линейные?

Работа организована следующим образом: глава 2 описывает модели, используемые в анализе; в главе 3 описываются данные, на которых производилось тестирование; глава 4 содержит описание построения прогноза и критериев оценки и сравнения прогнозов; в главе 5 приводятся полученные результаты и в последней главе, главе 6, представлены выводы.

## 2. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Моделирование процессов эволюции временных рядов (в данном случае, для доходности) подразумевает под собой моделирование условной плотности распределения временного ряда, что необходимо также для построения прогнозов.

Вообще говоря, моделирование случайных процессов может проводиться как параметрическими методами, так и непараметрическими. Рассматриваемые в данной работе GARCH модели относятся к классу параметрических моделей – моделей, описываемых собственными историческими значениями (подразумевается, что вся необходимая информация уже содержится в исторических значениях временного ряда).

Параметрические модели основаны на предположении существования некоторой зависимости текущих (и, соответственно, будущих) значений временного ряда от собственных исторических значений и от случайных возмущений, так называемого процесса генерации данных (*DGP – Data Generating Process*). При этом делается (как правило, наиболее общее) предположение о виде предполагаемой зависимости в виде функции, зависящей от исторических значений и некоторого набора параметров, которые необходимо оценить.

Моделирование распределения доходностей, или, что практически то же самое, распределения шоков – случайных приращений в процессе генерации данных (которые выражаются через предполагаемую зависимость), и является основной задачей при прогнозировании доходности.

Следуя [4], логарифмическая доходность от держания актива (например, акции, в данной работе – индекса) за один период с момента  $t-1$  до  $t$  определяется как

$$r_t = \log(y_t) - \log(y_{t-1}), \quad t = 1, 2, 3, \dots, n.$$

В работе моделирование условной плотности распределения  $r_t$  ограничено до моделирования условного среднего и условной дисперсии, то есть первых двух условных моментов. Простейшим примером такого моделирования служит авторегрессионная модель условной гетероскедастичности порядка  $p$  —  $ARCH(p)$ , введенная Энгелем.

Формально модель  $ARCH(p)$  можно записать следующим образом:

$$r_t = \mu(\Omega_{t-1}, \theta) + \varepsilon_t,$$

где  $r_t$  – моделируемая доходность,  $\mu(\Omega_{t-1}, \theta)$  – условное на предыстории  $\Omega_{t-1}$  среднее для волатильности, которое зависит от некоторых оцениваемых параметров  $\theta$ .

Предысторией на момент  $t$  классически считается *естественная фильтрация* случайного процесса (фильтрация – неубывающее семейство  $\sigma$ -алгебр). Говоря простым языком, предысторией является реализация всех неизвестных в момент времени  $t-1$  случайных величин, в частности, реализация доходности  $r_t$ , шока доходности  $\varepsilon_{t-1}$  и, возможно, каких-либо других случайных величин, используемых при моделировании.

Предполагается, что случайные приращения имеют некоторое распределение

$$\varepsilon_t \sim (0, \sigma_t^2),$$

которое может быть задано как параметрически, так и непараметрически, и модели также называются тогда параметрическими и непараметрическими соответственно.

При этом дисперсия зависит от времени и, как правило, выражается через предыдущие шоки  $\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots$ , возможно, предыдущие значения условной дисперсии  $\sigma_{t-1}, \sigma_{t-2}, \dots$ , а также набор некоторых параметров  $\psi$ . В общем же виде, поскольку шоки и предшествующие значения волатильности определены на предыстории  $\Omega_{t-1}$ , это можно записать как

$$\sigma_t \equiv \sigma(\Omega_{t-1}, \psi).$$

Для  $ARCH(p)$  данная зависимость выглядит следующим образом:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2,$$

где  $\omega$  и  $\alpha_i$  являются оцениваемыми параметрами.

Стоит отметить вопрос существования безусловной дисперсии, который является одним из ключевых параметров при эконометрическом анализе. Существование безусловной дисперсии накладывает определенные ограничения на оцениваемые параметры для того, чтобы процесс был стационарным. Рассмотрим пример  $ARCH(p)$  процесса:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 ;$$

имеем

$$\omega > 0, \quad \alpha_1 \geq 0, \quad \dots, \quad \alpha_{p-1} \geq 0, \quad \alpha_p > 0 .$$

Безусловная дисперсия получается взятием математического ожидания от обеих частей уравнения для условной дисперсии:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \sim i.i.d. \quad N(0;1)$$

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p} ,$$

которая существует при  $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$ .

Согласно работе Боллерслева [3], GARCH(p,q) является стационарным в узком смысле при  $\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$ .

## 2.1. Условное среднее

Используемая модель условного среднего имеет вид:

$$m_t = \mu_0 + \mu_1 m_{t-1} .$$

Рассматривались две спецификации условного среднего: постоянного среднего ( $\mu_1 = 0$ ) и авторегрессионная модель первого порядка ( $AR(1)$ ) —  $\mu_0, \mu_1 \neq 0$ .

Анализ показал, что наиболее подходит авторегрессионная модель, поэтому процесс моделирования среднего ограничивается этой спецификацией.

## 2.2. Условная дисперсия

Типичными особенностями [5] доходностей активов являются:

1. кластеризация волатильности;
2. тяжелые «хвосты» распределений шоков;
3. асимметричное влияние положительных и отрицательных шоков доходности;

4. периоды высокой волатильности часто сопровождаются большими отрицательными доходностями активов.

Как уже было упомянуто, «нелинейные» GARCH модели позволяют охватывать данные особенности при оценке процессов изменения условной волатильности. В следующей главе будет проведено более подробное рассмотрение приведенных стилизованных фактов на примере используемых данных.

Рассматривались следующие модели: стандартная GARCH модель, введенная Боллерслевым в 1986 году [3], интегрированная GARCH модель (IGARCH), которая предполагает нестационарность условной дисперсии, GJR-GARCH, введенная в 1993 году Глостеном, Джаганнатаном и Рунклем [6] и названная в честь трех своих авторов (GJR — *Glosten, Jagannathan, and Runkle*), и GARCH модель переключения волатильности (*Volatility Switching — VS-GARCH*), введенная в 1996-1997 годах Форнари и Меле [7].

Подробное описание используемых моделей представлено в Таблице 1. Зависимость условной дисперсии от шоков за предыдущий период для рассматриваемых моделей представлена ниже.

Таблица 1

#### Параметрические модели условной волатильности

Модель	Условная дисперсия
GARCH(1,1):	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta\varepsilon_{t-1}^2$
IGARCH(1,1):	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_{t-1}^2 + (1-\alpha)\varepsilon_{t-1}^2$
GJR-GARCH(1,1):	$\sigma_t^2 = \omega + \alpha\sigma_{t-1}^2 + \beta_1\varepsilon_{t-1}^2 I(\varepsilon_{t-1} > 0) + \beta_2\varepsilon_{t-1}^2 (1 - I(\varepsilon_{t-1} > 0))$
VS-GARCH(1,1):	$\sigma_t^2 = (\omega + \alpha_1\sigma_{t-1}^2 + \beta\varepsilon_{t-1}^2) I(\varepsilon_{t-1} > 0) + (\zeta + \alpha_2\sigma_{t-1}^2 + \beta_2\varepsilon_{t-1}^2) (1 - I(\varepsilon_{t-1} > 0))$

Все модели были оценены Методом максимального правдоподобия. Данный метод требует численного решения оптимизационной задачи, который был реализован с помощью MATLAB.

#### Зависимость условной дисперсии от шоков

На рисунках 1 – 4 приведены графики зависимости условной дисперсии от величины и знака шоков для линейных (GARCH, IGARCH) и нелинейных (GJR-GARCH, VS-GARCH) моделей.

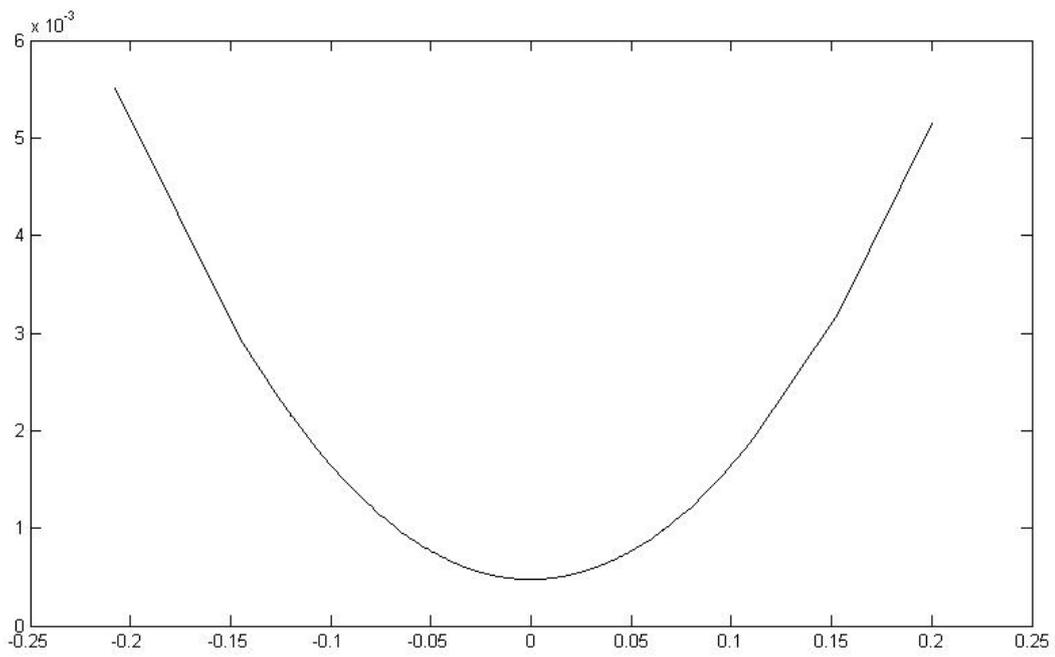


Рис. 1. График зависимости условной дисперсии от величины и знака шоков для GARCH(1,1) модели

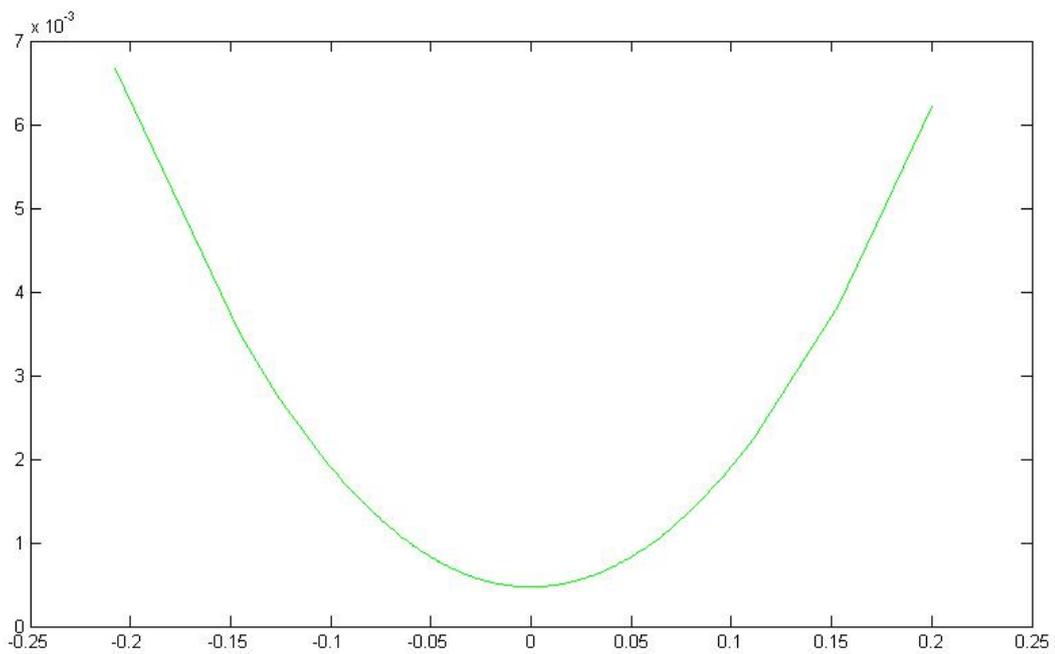


Рис. 2. График зависимости условной дисперсии от величины и знака шоков для IGARCH(1,1) модели

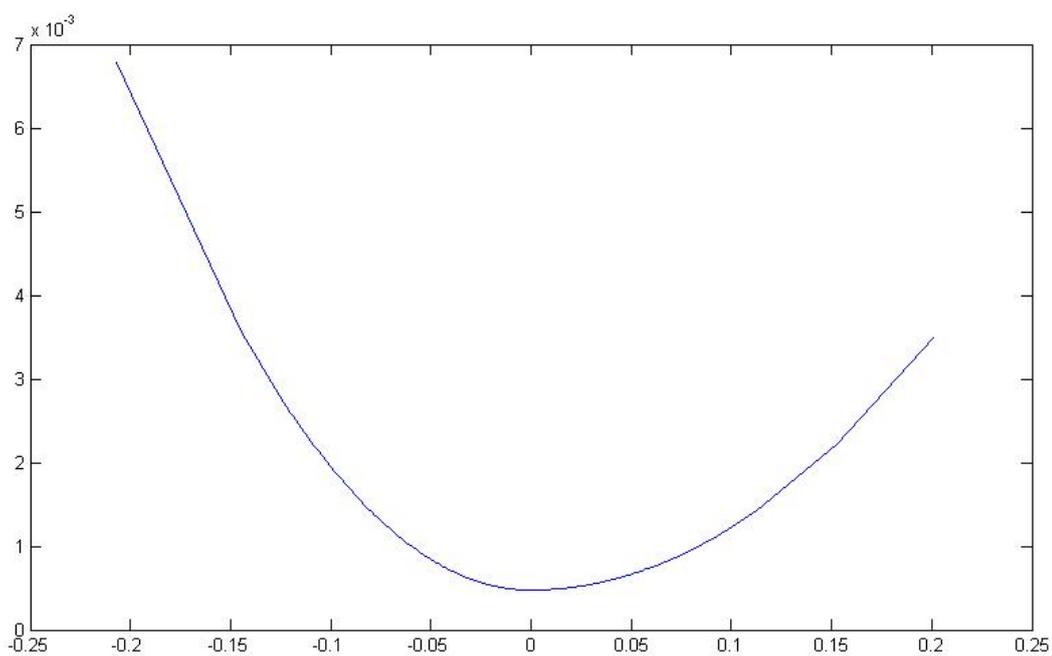


Рис. 3. График зависимости условной дисперсии от величины и знака шоков для GJR-GARCH(1,1) модели

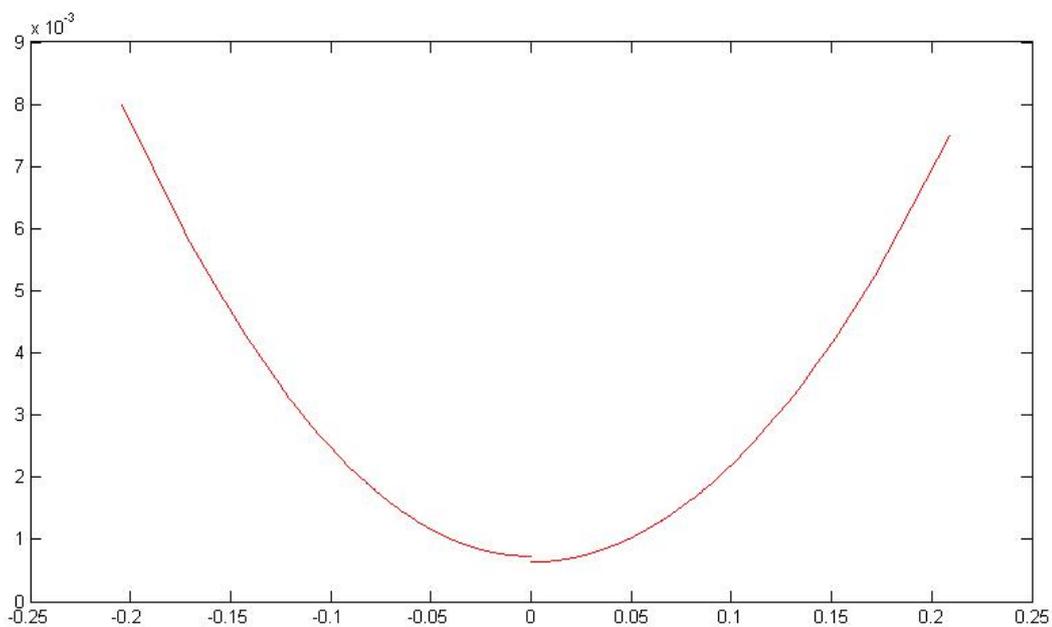


Рис. 4. График зависимости условной дисперсии от величины и знака шоков для VS-GARCH(1,1) модели

В списке рассматриваемых моделей по сравнению со списком, используемым в работе [4], набор оцениваемых моделей был изменен по ряду соображений.

Во-первых, многие модели, используемые в [4], обладают очень схожими свойствами, а именно, зависимостью условной дисперсии от величины и знака предшествующего шока, поэтому не рассматривались модели, которые существенно не отличаются от базовых общих моделей, и вложенные модели.

Во-вторых, некоторые используемые в работе [4] модели не демонстрируют свойств, представляющих особый интерес при анализе условной гетероскедастичности, а именно – EGARCH модели (Exponential GARCH) не демонстрируют кластеризации волатильности. Модель EGARCH описывает временную зависимость волатильности через авторегрессионную зависимость логарифма. Пример – EGARCH(1,1):  $\log \sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2 + \beta \log \sigma_{t-1}^2$ .

В-третьих, используемый авторами [4] набор моделей не включает в себя так называемые модели переключения волатильности.

К классическим линейным моделям относятся модели GARCH и IGARCH, а к нелинейным моделям асимметричного влияния шоков – GJR-GARCH и VS-GARCH. Последние две являются нелинейными по влиянию шоков на условную дисперсию, поскольку, как видно из уравнений для условной дисперсии, значения шоков входят не только в качестве линейной комбинации квадратов, но и в качестве аргумента индикаторной функции, для того чтобы улавливать асимметричное влияние шоков разных знаков.

Как уже было сказано, модели, которые являются предельными случаями вышеупомянутых, а также модели плавного перехода между влиянием шоков разных знаков и модели, где условная волатильность достигает своего минимального значения при ненулевой величине шока, не были включены в анализ.

Оправдание применения «нелинейных» моделей будет кратко оговорено в следующей главе, где упоминаются результаты тестов на наличие стилизованных фактов в используемых данных, в частности, тесты смещения из-за знака (*Sign Bias tests*) [8].

В работе, для упрощения, распределение шоков предполагается гауссовым, поскольку даже при таком распределении можно проследить появление указанных стилизованных фактов для условной волатильности.

*Утверждение 1: Наличие условной гетероскедастичности приводит к увеличению куртозиса (коэффициента эксцесса).*

Для упрощения вычислений рассмотрим пример *ARCH(1)* процесса, для которого ошибки  $\varepsilon_t$  имеют гауссово распределение:

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t,$$

где  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha \varepsilon_{t-1}^2$  – временная структура волатильности, а  $\eta_t \sim iid N(0,1)$  – независимые одинаково распределенные гауссовы случайные величины.

Тогда куртозиз (коэффициент эксцесса):

$$\kappa = E[\varepsilon_t^4] = E[\sigma_t^4 \eta_t^4] = E[\sigma_t^4]E[\eta_t^4].$$

Как известно, коэффициент эксцесса (неприведенный) стандартной случайной нормальной величины  $\eta_t$  равен 3, соответственно

$$\kappa = 3E[(\omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2)^2] = 3(\omega^2 + 2\alpha\omega\sigma^2 + \alpha^2\kappa).$$

Отсюда, поскольку  $\sigma^2 = \omega/(1-\alpha)$ , имеем

$$\kappa = 3\sigma^4 \frac{1-\alpha^2}{1-3\alpha^2}.$$

Следовательно, при гауссовом распределении, поскольку должно выполняться  $0 < \alpha < 1$ , полученный куртозиз превышает 3, то есть куртозиз стандартного нормального распределения.

### 3. ДАННЫЕ

Используемые данные – дневные цены закрытия индекса РТС (*RTSI*) за период с 16 февраля 2001 г. по 31 декабря 2009 г. Данные взяты с сайта ФИНАМ (<http://www.finam.ru>). Всего имеется 2210 наблюдений. Данный период был выбран для анализа, поскольку лишь для этого периода доступны более высокочастотные данные, необходимые для оценки дневной волатильности по внутридневным значениям цен.

Был создан набор следующих дополнительных бинарных переменных. Первая переменная принимает значение, равное 1, если наблюдение приходится на первый торговый день в году, вторая – если биржа не работала один или несколько дней или если наблюдение приходится на первый торговый день месяца, и третья – если наблюдение приходится на первый рабочий день недели. Во всех остальных случаях переменные принимают значение, равное 0.

Эти переменные созданы для того, чтобы улавливать возможные шоки волатильности, имеющие природу, отличную от стандартных шоков, используемых при моделировании.

Соответствующие выборочные характеристики распределения доходностей:

1. куртозиз (коэффициент эксцесса) равен 9.6177 (для стандартного нормального распределения коэффициент эксцесса равен 3);
2. скошенность (коэффициент асимметрии) равняется -0.3766 (0 для стандартного нормального распределения);
3. корреляция между квадратом доходности в момент  $t$  и доходностью в момент  $t-1$  равна -0.2529.

Первые две характеристики говорят о том, что доходность имеет выборочное распределение, отличное от гауссова. Последняя – о том, что имеет место условная гетероскедастичность – более высокая вероятность появления высокой волатильности после крупной отрицательной реализации доходности.

Была проведена серия статистических тестов, определяющих правомерность применения нелинейных моделей к анализу наших данных. Эти тесты проверяют наличие зависимости амплитуды пришедшего шока волатильности от знака лагированного (предыдущего) шока, а также зависимость влияния положительных и отрицательных шоков на условную волатильность от их амплитуды.

Результаты этих тестов, а именно, тестов *Sign Bias*, *Negative Sign Bias* и *Positive Sign Bias* [8], оказались положительными. Они показывают наличие некоторого рода асимметричности данных и подтверждают правомерность использования моделей для учета асимметричного влияния шоков разных знаков на условную волатильность.

На рис. 5 представлен график дневных цен закрытия индекса РТС, а также дневные логарифмические доходности индекса. На графике доходностей видны периоды с высокой волатильностью — большой амплитудой, и с низкой волатильностью — амплитудой поменьше.

На рис. 6 представлена выборочная плотность распределения доходности индекса, а также, для сравнения, приведена плотность нормального распределения с аналогичными средним и дисперсией.

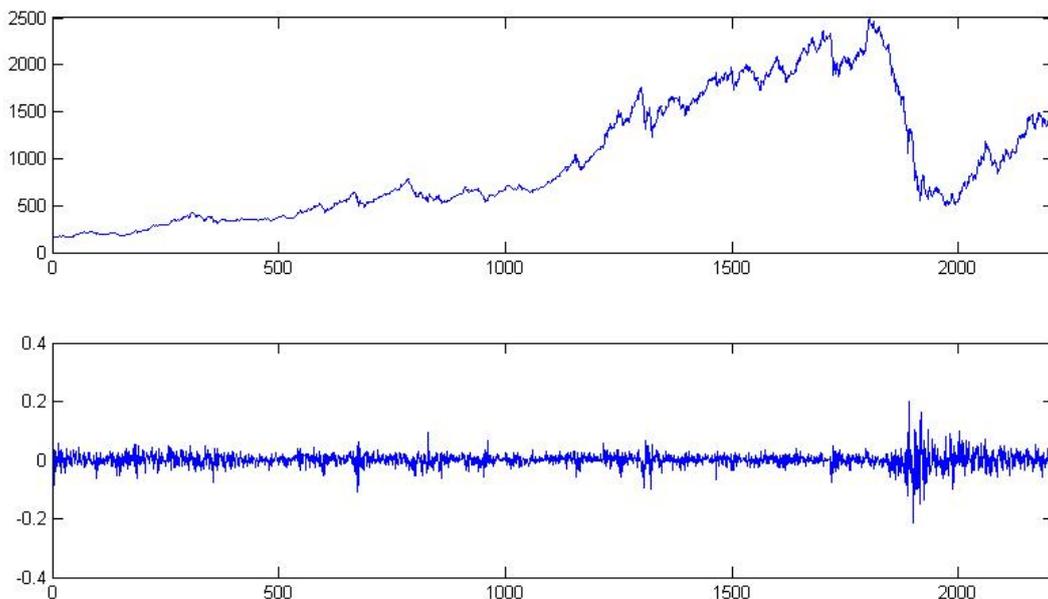


Рис. 5. Дневные цены закрытия индекса РТС и логарифмическая доходность

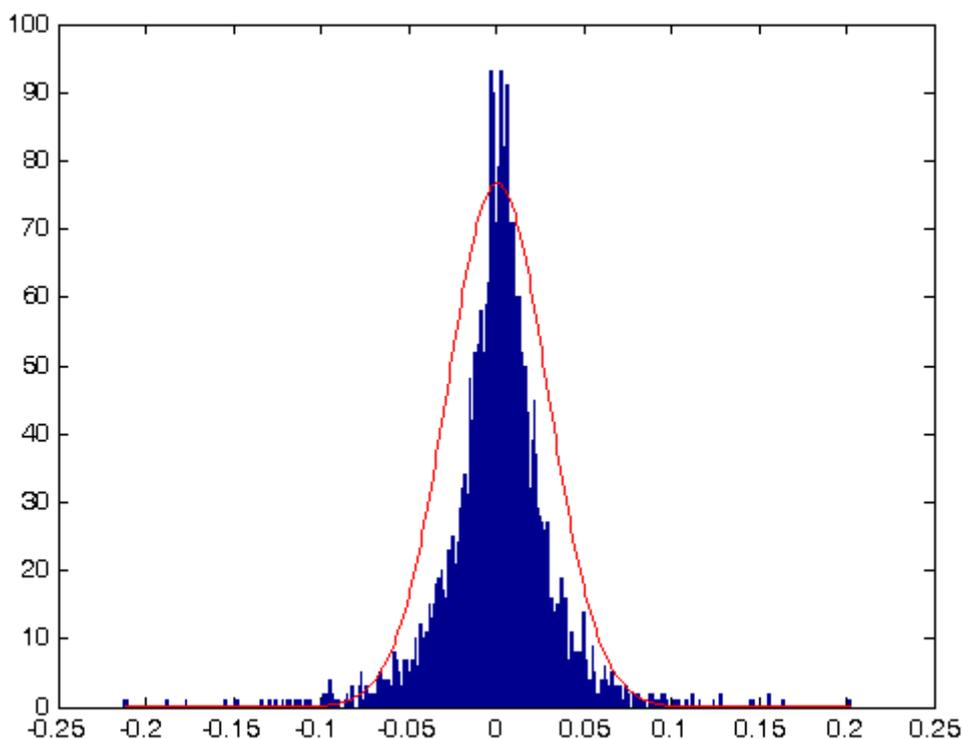


Рис. 6. Плотность распределения доходности индекса РТС. Для сравнения здесь же приведено гауссово распределение с аналогичным средним и дисперсией

Как видно из рис. 6, распределение доходности имеет более тяжелые хвосты, чем нормальное распределение, которое приведено для сравнения на том же графике — большие отклонения встречаются чаще, чем это можно было бы ожидать при гауссовом распределении.

Поскольку волатильность является ненаблюдаемой величиной, необходимо предложить ее оценку. Как было сказано, в работе используются внутридневные цены закрытия для оценки дневной волатильности, о которых будет сказано подробно в следующей главе.

## 4. ПРОГНОЗ

Подробный вывод расчета прогнозов волатильности в используемых моделях можно посмотреть в соответствующей литературе, например, в книге Филиппа Франсеса и Дика ван Дайка «Нелинейные модели временных рядов в эмпирических финансах» [5].

В данном исследовании основным фокусом являются прогнозы условной волатильности на  $s$  шагов вперед.

Для модели  $GARCH(1,1)$  прогнозные значения условной волатильности рассчитываются по формуле:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \sigma^2 + (\alpha + \beta)^{s-1} (h_{t+1} - \sigma^2),$$

где  $\sigma^2 = \frac{\omega}{1-\alpha-\beta}$  — безусловная дисперсия, а  $h_{t+1}$  — значение условной волатильности, которая может быть легко посчитана по известным на момент  $t$  наблюдениям  $r_t, r_{t-1}, \dots$ .

Для *IGARCH(1,1)* модели, в силу того, что  $\alpha + \beta = 1$ , это выражение можно упростить:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \omega(s-1) + h_{t+1}.$$

С нелинейными моделями дело обстоит несколько сложнее. Для *GJR-GARCH(1,1)* прогноз на  $s$  шагов вперед можно вычислить либо рекурсивно:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \omega + ((\beta_1 + \beta_2)/2 + \alpha)\hat{h}_{t+s-1|t},$$

либо напрямую:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \omega \sum_{i=0}^{s-1} ((\beta_1 + \beta_2)/2 + \alpha)^i + ((\beta_1 + \beta_2)/2 + \alpha)^{s-1} h_{t+1}.$$

Для *VS-GARCH(1,1)* можно воспользоваться формулой [7]:

$$\hat{h}_{t+s|t} = \frac{\omega + \zeta}{2} \sum_{i=0}^{s-1} [(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)/2]^i + [(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2)/2]^{s-1} h_{t+1}.$$

Как видно, в общем случае прогнозом является некоторая функция от волатильности, оцененной на текущем шаге.

#### 4.1. Критерии сравнения

Для сравнения прогнозных способностей моделей существует большое количество статистических критериев. Наиболее распространенными являются:

1. среднеквадратичная ошибка прогноза для дисперсии (*Mean Squared Predicted Errors*) – *MSPE1*;
2. среднеквадратичная ошибка прогноза для волатильности – *MSPE2*;
3. логарифмический аналог *MSPE1* – *R2LOG*;
4. более нелинейный критерий – *QLIKE*, аналогичный гауссовой функции потерь;
5. процентная квадратичная ошибка – *PSE*;
6. среднее абсолютное отклонение дисперсии – *MAD1*;
7. среднее абсолютное отклонение волатильности – *MAD2*.

Эти критерии используются и в работе [4]. Формальное описание критериев приведено ниже.

$$\begin{aligned}
MSPE1 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2 - h_{n+s+j}^2)^2 ; \\
MSPE2 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\hat{h}_{n+s+j|n+j} - h_{n+s+j})^2 ; \\
R2LOG &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \log \left( \frac{\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2}{h_{n+s+j}^2} \right) \right]^2 ; \\
QLIKE &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left[ \log(h_{n+s+j|n+j}^2) - \frac{\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2}{h_{n+s+j}^2} \right]^2 ; \\
PSE &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} (\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2 - h_{n+s+j}^2)^2 / h_{n+s+j}^4 ; \\
MAD1 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2 - h_{n+s+j}^2| ; \\
MAD2 &= \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} |\hat{h}_{n+s+j|n+j} - h_{n+s+j}| .
\end{aligned}$$

Все эти критерии являются статистиками, по которым сравниваются модели. Та модель, для которой выбранная статистика принимает наименьшее значение, является наилучшей в смысле выбранного критерия.

В данном случае выбранные критерии измеряют отклонение прогнозируемых на шаге  $n+j$  значений  $\hat{h}_{n+s+j|n+j}^2$  от значений реализовавшейся в момент времени  $n+s+j$  условной дисперсии  $h_{n+s+j}^2$ . Статистики считают сумму ошибок в прогнозных значениях условной дисперсии из  $m$  последовательных прогнозов на  $s$  шагов вперед. Основная проблема заключается в том, что данная условная дисперсия является латентной, то есть ненаблюдаемой. Однако существует несколько способов аппроксимации условной дисперсии.

Первый способ основан на понятии «реализованной волатильности». По более высокочастотным данным, например, внутрисуточным (часовые, минутные или пяти-/десятиминутные цены), подсчитывается среднее значение квадрата доходности, которое и берется в качестве аппроксимации условной дисперсии за день:

$$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{1}{m} \sum_{d=1}^m r_{t,d}^2 ,$$

Где  $\hat{\sigma}_t^2$  – оценка дневной волатильности,  $m$  – количество внутрисуточных наблюдений, а  $r_{t,d}$  – внутрисуточная логарифмическая доходность.

В работе [4] показано, что оценка волатильности, полученная на более высокочастотных данных является состоятельной оценкой дневной волатильности.

На рис. 7 представлена оценка дневной волатильности по внутрисуточным (часовым) ценам закрытия.

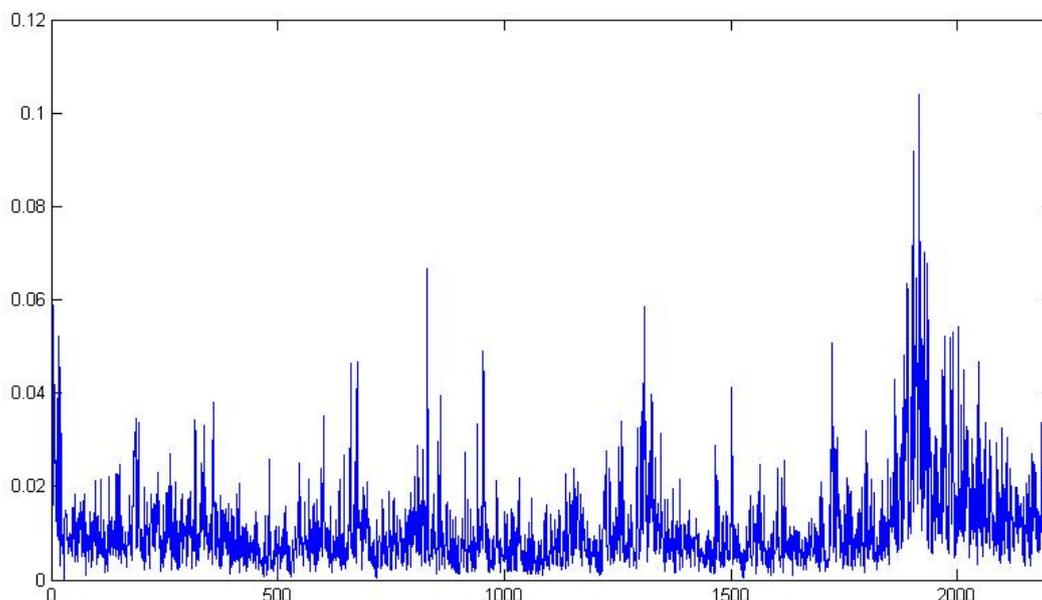


Рис. 7. Оценка дневной волатильности по внутридневным данным

В условиях недоступности более высокочастотных данных можно воспользоваться другим методом, а именно, аппроксимировать реальную условную дисперсию с помощью квадрата ошибок,  $\varepsilon_{n+s+j}^2$ , который является несмещенной оценкой  $h_{n+s+j}^2$ . Однако Андерсен и Боллерслев (1998) [9], а также Кристодулакис и Сатчелл (1998) [10] показали, что при таком методе аппроксимации прогнозная способность GARCH моделей ухудшается.

Рассматривается следующий набор прогнозных параметров:

- количество последовательных прогнозов – 200,
- горизонт прогноза – 1, 5, 10 и 20 шагов.

Таким образом, имеется 7 критериев для сравнения прогнозных способностей моделей на горизонты различной длины: один день, (рабочая) неделя, 2 недели и месяц.

## 5. РЕЗУЛЬТАТЫ

### 5.1. Прогноз

Конкретные значения доходности и волатильности, получаемые при прогнозах, не являются целью данного исследования. Тем не менее, необходимо отметить некоторые особенности получаемых прогнозов. На рис. 8 — 11 представлены зависимости величины прогноза от горизонта прогноза для исследуемых моделей.

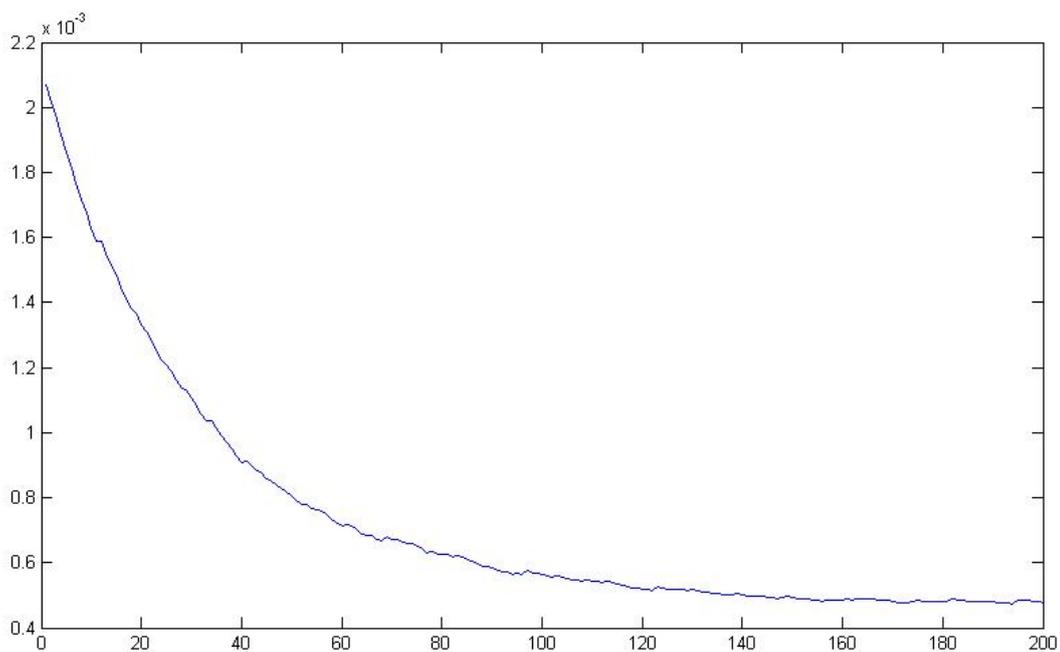


Рис. 8. График зависимости величины прогноза волатильности от горизонта прогноза для модели GARCH(1,1)

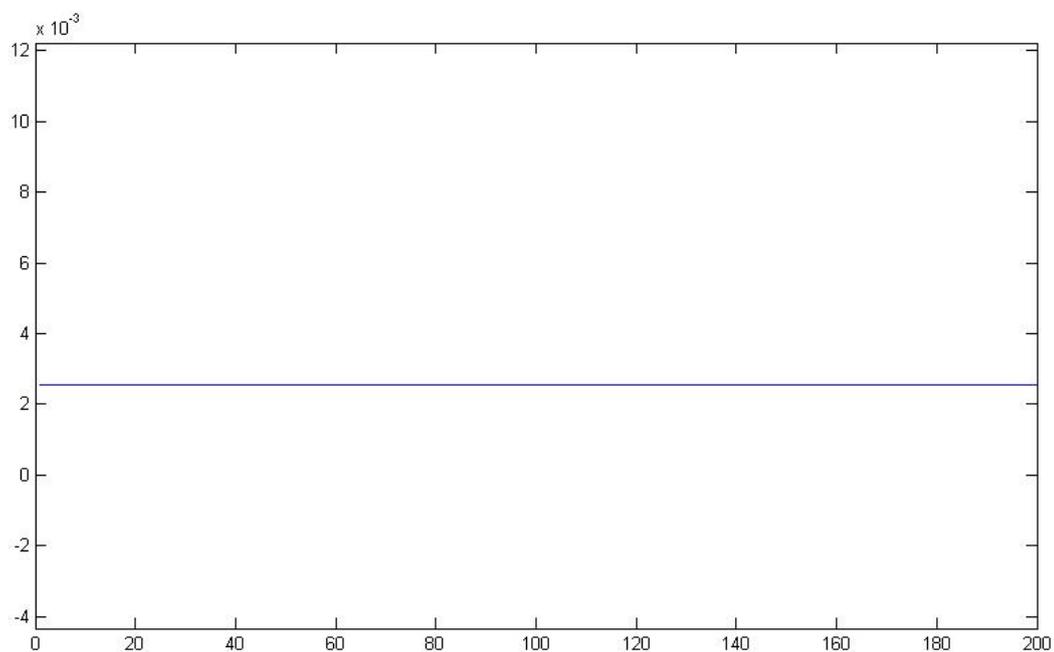


Рис. 9. График зависимости величины прогноза волатильности от горизонта прогноза для модели IGARCH(1,1)

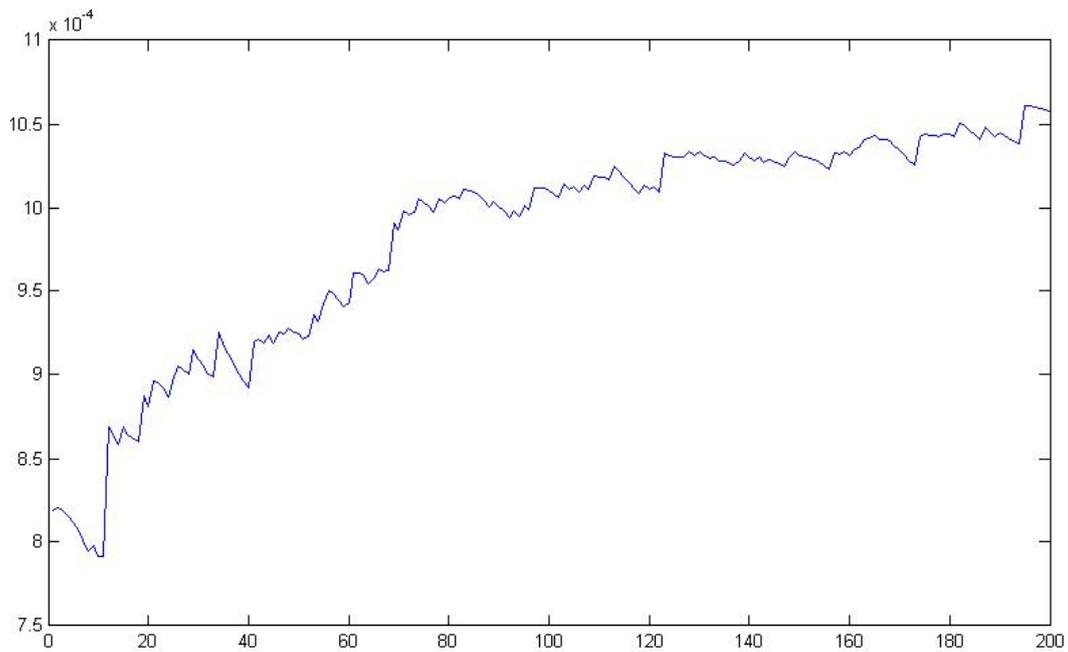


Рис. 10. График зависимости величины прогноза волатильности от горизонта прогноза для модели GJR-GARCH(1,1)

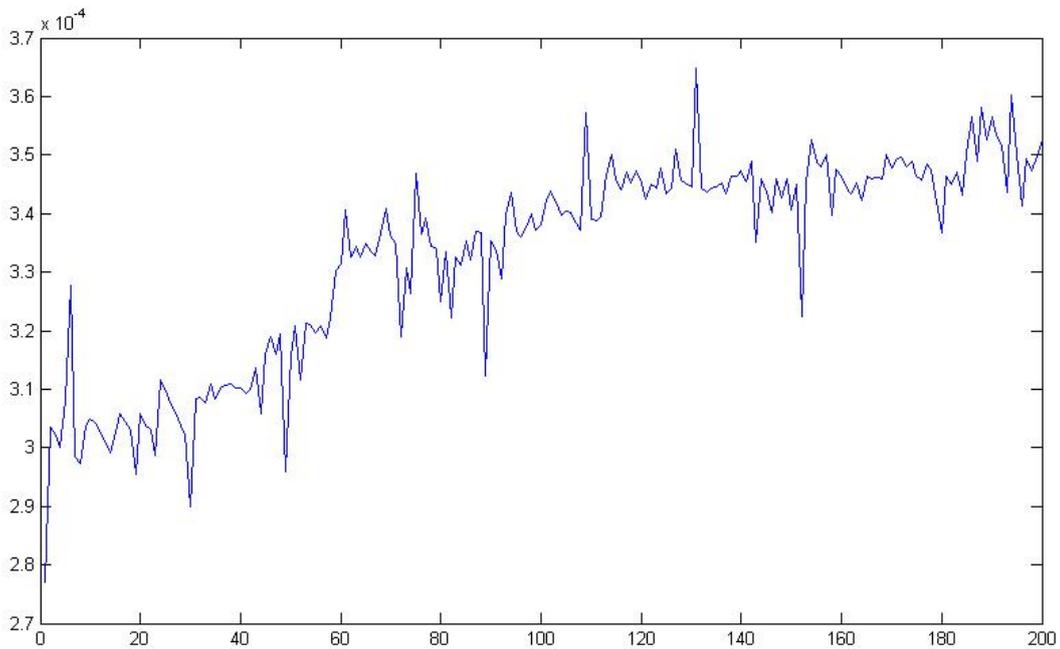


Рис. 11. График зависимости величины прогноза волатильности от горизонта прогноза для модели VS-GARCH(1,1)

При анализе графиков на рис. 8 — 11 можно сделать простой, но тем не менее важный вывод — для *GARCH* модели величина прогноза волатильности

уменьшается с увеличением горизонта прогноза, в то время как для *IGARCH* модели величина прогноза не изменяется, а для нелинейных моделей *GJR-GARCH* и *VS-GARCH* – увеличивается. Это наблюдение подтверждает известный факт, что нелинейные модели показывают результаты, аналогичные линейным моделям и даже лучшие, на сравнительно небольших горизонтах прогнозирования, но качество их прогноза при больших горизонтах может резко снизиться [11].

На рис. 12 и 13 приведены графики 20-шаговых прогнозов условной дисперсии (квадрата волатильности) для моделей *GARCH(1,1)* и *GJR-GARCH(1,1)* и внутридневные оценки дисперсии. Для сравнения также приведены графики аппроксимации условной дисперсии квадратами остатков моделей и in-sample оценки условной дисперсии, полученные по всей выборке.

Из анализа приведенных графиков можно сделать следующие выводы.

Во-первых, как уже говорилось выше, аппроксимация реальной условной волатильности квадратами ошибок не является лучшим методом для оценки прогнозных способностей моделей типа *GARCH*. Основной проблемой выступает тот факт, что периоды высокой и низкой волатильности, полученной аппроксимацией квадратами остатков, не совпадают с аналогичными периодами для волатильности, полученной по внутридневным данным.

Во-вторых, линейные *GARCH* модели склонны завышать прогноз на небольших горизонтах прогнозирования, в то время как нелинейные модели завышают прогноз значения при больших горизонтах прогнозов.

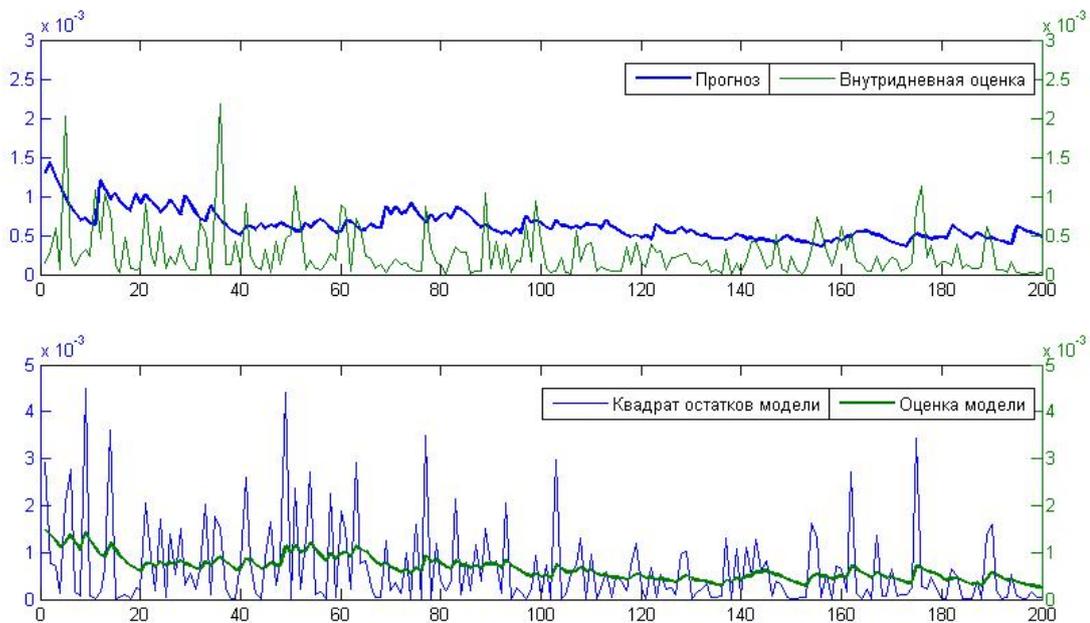


Рис. 12. Графики 200 последовательных 20-шаговых прогнозов для модели *GARCH(1,1)* и внутридневная оценка дисперсии. Для сравнения приведены квадраты остатков и in-sample оценка условной дисперсии

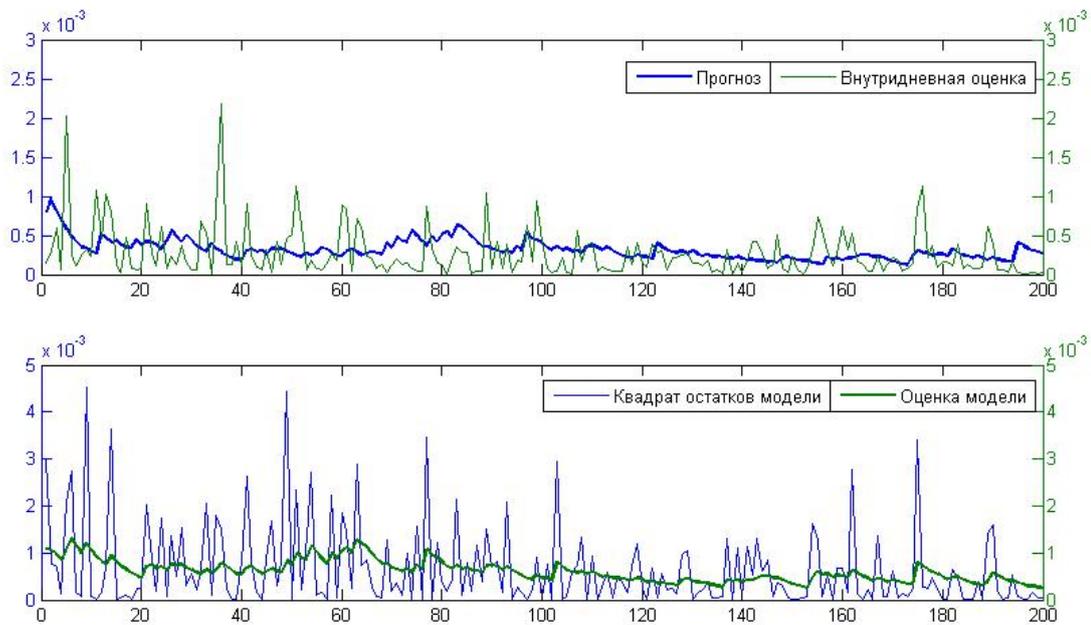


Рис. 13. Графики 200 последовательных 20-шаговых прогнозов для модели GJR-GARCH(1,1) и внутридневная оценка дисперсии. Для сравнения приведены квадраты остатков и in-sample оценка условной дисперсии

## 5.2. Сравнение моделей

Результаты сравнения прогнозных способностей, а именно, значения критериев сравнения, представлены в Таблице 2. В таблице для каждой исследуемой модели представлены значения критериев  $MSPE1$ ,  $MSPE2$ ,  $R2LOG$ ,  $QLIKE$ ,  $PSE$ ,  $MAD1$  и  $MAD2$  для 4 горизонтов (1 день, 5 дней, 10 дней и 20 дней), а также среднее по всем горизонтам значение критерия.

Как видно из результатов расчетов, абсолютным лидером является VS-GARCH(1,1) модель. Немного ей уступает GJR-GARCH(1,1), затем идет GARCH(1,1) модель, а IGARCH(1,1) показывает самые низкие результаты.

Плохая прогнозная сила IGARCH(1,1) модели объясняется тем, что для нее безусловная дисперсия не ограничена. Кроме того, прогнозом этой модели является «наивный прогноз», постоянная величина – оценка «сегодняшней» условной волатильности.

Полученный результат вполне согласуется с ожиданиями о прогнозных способностях «нелинейных» моделей, однако говорить о том, что нелинейные модели всегда дают лучший прогноз, нельзя. Максимальный горизонт прогнозирования составляет 20 дней, а, как видно из рисунков 8 – 11, на таком горизонте прогноз GARCH модели еще достаточно велик, по сравнению с GJR-GARCH и тем более с VS-GARCH.

Таблица 2

## Расчеты прогнозных способностей моделей \*

		<b>G(1,1)</b>	<b>IG(1,1)</b>	<b>GJR(1,1)</b>	<b>VS(1,1)</b>
<b>R2LOG</b>	<b>1</b>	3.3249	3.7911	3.1596	2.8952
	<b>5</b>	3.2129	3.7869	2.7288	2.5627
	<b>10</b>	3.0582	3.748	2.2848	2.0545
	<b>20</b>	3.3611	4.3275	1.9603	2.0154
	Среднее	3.239275	3.913375	2.533375	<b>2.38195</b>
<b>QLIKE</b>	<b>1</b>	-0.5933	0.7984	-1.0169	-1.724
	<b>5</b>	-0.9531	0.7368	-2.2432	-2.7064
	<b>10</b>	-1.3763	0.5993	-3.4296	-3.9958
	<b>20</b>	-0.4046	2.7545	-4.4658	-4.3399
	Среднее	-0.831825	1.22225	-2.788875	<b>-3.191525</b>
<b>PSE</b>	<b>1</b>	191.4172	270.1116	179.5153	137.8274
	<b>5</b>	164.5828	253.8414	119.5521	95.9694
	<b>10</b>	141.1623	233.4442	71.8521	52.1834
	<b>20</b>	213.7054	429.4242	60.4326	52.3141
	Среднее	177.716925	296.70535	107.838025	<b>84.573575</b>
<b>MAD1 *(1e-3)</b>	<b>1</b>	0.539	0.6524	0.5022	0.4326
	<b>5</b>	0.5014	0.6475	0.4116	0.3818
	<b>10</b>	0.4576	0.6228	0.3318	0.3053
	<b>20</b>	0.4307	0.6595	0.2471	0.2492
	Среднее	0.482175	0.64555	0.373175	<b>0.342225</b>
<b>MAD2</b>	<b>1</b>	0.0131	0.0149	0.0124	0.0112
	<b>5</b>	0.0125	0.0148	0.0108	0.0102
	<b>10</b>	0.0118	0.0145	0.0092	0.0086
	<b>20</b>	0.0117	0.0154	0.0076	0.0077
	Среднее	0.012275	0.0149	0.01	<b>0.009425</b>
<b>MSPE1 *(1e-6)</b>	<b>1</b>	0.4405	0.6414	0.3921	0.2836
	<b>5</b>	0.3762	0.6266	0.275	0.2287
	<b>10</b>	0.2921	0.5704	0.1735	0.156
	<b>20</b>	0.2434	0.6288	0.1105	0.1094
	Среднее	0.33805	0.6168	0.237775	<b>0.194425</b>
<b>MSPE2 *(1e-3)</b>	<b>1</b>	0.2314	0.297	0.2111	0.175
	<b>5</b>	0.2131	0.2952	0.1639	0.145
	<b>10</b>	0.1877	0.2841	0.1193	0.1034
	<b>20</b>	0.1794	0.3125	0.0822	0.0843
	Среднее	0.2029	0.2972	0.144125	<b>0.126925</b>

\* - для краткости введены обозначения: G(1,1) – GARCH(1,1); IG(1,1) – IGARCH(1,1); GJR(1,1) – GJR-GARCH(1,1) и VS(1,1) – VS-GARCH(1,1).

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты дополняют результаты, представленные ранее в работе Хансена и Лунде. Хотя в среднем  $GARCH(1,1)$  модель показывает неплохую прогнозную способность, нелинейные модели показывают лучшие результаты. В частности, по большинству критериев сравнения модель переключения волатильности  $VS-GARCH$  демонстрирует наилучшую прогнозную способность среди всех рассматриваемых в работе моделей.

Возможное объяснение успешности прогнозирования нелинейными моделями  $GJR-GARCH(1,1)$  и  $VS-GARCH(1,1)$  заключается в том, что горизонт прогнозирования невелик (максимальный горизонт прогноза – 20 рабочих дней, или 1 месяц), а при больших горизонтах линейные модели будут давать меньшую ошибку прогноза, чем более сложные нелинейные спецификации. Однако прогнозирование на таких больших горизонтах – открытый вопрос и требует отдельного рассмотрения.

Кроме этого, линейные модели имеют тенденцию к снижению прогнозных значений при увеличении горизонта, в то время как прогнозные значения, полученные с помощью нелинейных моделей, растут с увеличением горизонта прогнозирования.

Основным преимуществом нелинейных моделей является тот факт, что они позволяют улавливать стилизованные факты, демонстрируемые временными рядами, такие как асимметричное влияние шоков разных знаков, тяжелые хвосты распределений и отрицательную корреляцию волатильности и случайных шоков доходности, что имеет большое значение при анализе рынков и построении прогнозов.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1]. John C. Hull. Options, Futures, & Other Derivatives. Pearson Education International, 2003, 754 pages
- [2]. Robert F. Engle. Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Vol. 50, No. 4 (Jul., 1982), pp. 987-1007
- [3]. Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, Volume 31, Issue 3 (April 1986), pp. 307-327
- [4]. Peter R. Hansen and Asger Lunde. A comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)?, (March 22, 2004), Brown Univ. Economics Working Paper No. 01-04
- [5]. Philip Hans Franses, Dick van Dijk. Nonlinear time series models in empirical finance, Cambridge University Press, 2000, 280 pages
- [6]. Lawrence R. Glosten, Ravi Jagannathan and David E. Runkle. On the Relation between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks, *The Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5 (Dec., 1993), pp. 1779-1801
- [7]. Fabio Fornari and Antonio Mele, Modeling the changing asymmetry of conditional variances, *Economics Letters*, Vol. 50, Issue 2 (February 1996), pp. 197-203
- [8]. Robert F. Engle and Victor K. Ng. Measuring and Testing the Impact of News on Volatility, *The Journal of Finance*, Vol. 48, No. 5 (Dec., 1993), pp. 1749-1778
- [9]. Torben G. Andersen and Tim Bollerslev. Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models do Provide Accurate Forecasts, *International Economic Review*, Vol. 39, No. 4, Symposium on Forecasting and Empirical Methods in Macroeconomics and Finance (Nov., 1998), pp. 885-905
- [10]. John L. Knight, Stephen Satchell. Forecasting volatility in the financial markets, Butterworth-Heinemann, 2002, 407 pages
- [11] Stock, J. & M. Watson (2006). Forecasting with many predictors. Глава в G. Elliott, C. Granger, A. Timmermann, K. Arrow & M. Intriligator (eds.). *Handbook of economic forecasting*. Eslevier: North Holland.

## Содержание

1. Введение .....	3
2. Теоретическая модель .....	4
2.1. Условное среднее .....	6
2.2. Условная дисперсия .....	6
3. Данные .....	11
4. Прогноз .....	13
4.1. Критерии сравнения .....	14
5. Результаты .....	16
5.1. Прогноз .....	16
5.2. Сравнение моделей .....	20
6. Заключение .....	22
Литература .....	23