



**Овчинников М.Ю.,
Трофимов С.П., Ширококов М.Г.**

Проектирование
межпланетных полетов с
пассивными
гравитационными
маневрами с помощью
метода виртуальных
траекторий

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Проектирование межпланетных полетов с пассивными гравитационными маневрами с помощью метода виртуальных траекторий // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 22. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-22>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Ю. Овчинников, С.П. Трофимов, М.Г. Широбоков

**Проектирование межпланетных полетов
с пассивными гравитационными
маневрами с помощью метода
виртуальных траекторий**

Москва — 2013

Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Ширококов М.Г.

Проектирование межпланетных полетов с пассивными гравитационными маневрами с помощью метода виртуальных траекторий

Предлагается адаптация разработанного ранее авторами метода виртуальных траекторий к важному классу задач проектирования межпланетных перелетов с пассивными гравитационными маневрами и, если необходимо, импульсными маневрами в глубоком космосе. Как и прежде, главной особенностью метода является возможность выполнения наиболее ресурсоемкого этапа расчетов – построения базы виртуальных траекторий – для каждого планетного маршрута один раз, после чего полученная база табулируется и может быть использована в последующих вычислениях. Наложение требований по продолжительности миссии и дате старта осуществляется в процессе итерационного просеивания и уточнения базы виртуальных траекторий. Приводятся результаты применения метода виртуальных траекторий к задаче проектирования миссий к Юпитеру и Урану.

Ключевые слова: проектирование траекторий, гравитационный маневр, импульсная тяга, маневр в глубоком космосе

M.Yu. Ovchinnikov, S.P. Trofimov, M.G. Shirobokov

Design of Interplanetary Transfers with Unpowered Gravity Assists Using the Method of Virtual Trajectories

An adaptation of the previously developed method of virtual trajectories for the design of trajectories with unpowered gravity assists and deep-space maneuvers is proposed. As before, the database of virtual trajectories can be tabulated for any planetary sequence. Requirements on the mission duration and the start date are taken into account during the iterative procedure of database screening and refinement. The results of applying the virtual trajectories method to the design of mission to Jupiter and Uranus are given.

Key words: trajectory design, gravity assist, impulsive thrust, deep-space maneuver

Работа выполнена в рамках Программы 22 Президиума РАН «Фундаментальные проблемы исследований и освоения Солнечной системы» (направление 9 «Методы исследований Солнечной системы»), а также поддержана грантом Министерства образования и науки РФ (соглашение № 8182).

Введение

В работе [1] предложен оригинальный подход к решению задачи проектирования межпланетных перелетов, включающих несколько гравитационных маневров. В основе этого подхода лежит разработанный авторами метод виртуальных траекторий. Его характерная особенность состоит в том, что наиболее ресурсоемкий этап расчетов – построение базы виртуальных траекторий – может быть выполнен для каждого планетного маршрута один раз, после чего полученная база табулируется и используется в дальнейших вычислениях. Наложение требований по продолжительности миссии и дате старта осуществляется в процессе просеивания и итерационного уточнения базы виртуальных траекторий. При этом траектории считались состоящими из пассивных гелиоцентрических участков, соединяющихся в точках с активными гравитационными маневрами.

Надо отметить, что на практике активные гравитационные маневры используются довольно редко из-за большой точности, предъявляемой к траекторным измерениям на припланетном участке полета, однако в такой постановке задачи метод легко алгоритмируется.

В настоящей работе предлагается адаптация метода виртуальных траекторий на практически значимый класс задач: с пассивными гравитационными маневрами и, если надо, импульсами в глубоком космосе.

Постановка задачи

В работе решается задача проектирования оптимальных межпланетных траекторий с большим числом гравитационных маневров в следующей постановке:

- космический аппарат (КА) оснащен двигателем большой тяги (химическим двигателем большой мощности);
- траектория формируется из участков пассивного полета, соединяющихся между собой в точках приложения управляющих импульсов при выполнении маневров в глубоком космосе.

Как и прежде [1], орбиты планет считаются некомпланарными кеплеровыми эллипсами, элементы которых берутся на некоторую эпоху. К примеру, авторами использовались орбитальные элементы планет по отношению к средней эклиптике и среднему равноденствию на эпоху J2000.0 [2].

Как это делается в большинстве методов проектирования межпланетных траекторий, будем пользоваться моделью сопряженных конических сечений: внутри сфер действия планет (на планетоцентрических участках траектории) учитывается только притяжение соответствующей планеты, вне сфер действия планет – на гелиоцентрических участках – только притяжение Солнца (сферы действия на этом этапе считаются точечными).

Проектирование межпланетных миссий с пассивными гравитационными маневрами

Метод виртуальных траекторий состоит из двух этапов. На первом этапе для построения базы виртуальных траекторий необходимо провести дискретизацию: на орбите каждой из планет, входящих в выбранный планетный маршрут, отметим, идя с небольшим по истинной аномалии шагом (постоянным или переменным), набор узловых точек (рис. 1). Виртуальной траекторией в данной работе будем называть траекторию, проходящую через планетные узлы, с активными гелиоцентрическими участками (в некоторой точке на этом участке происходит мгновенное изменение скорости) и пассивными гравитационными маневрами. Угловая дальность полета на каждом из таких участков полагается не превосходящей 2π ¹.

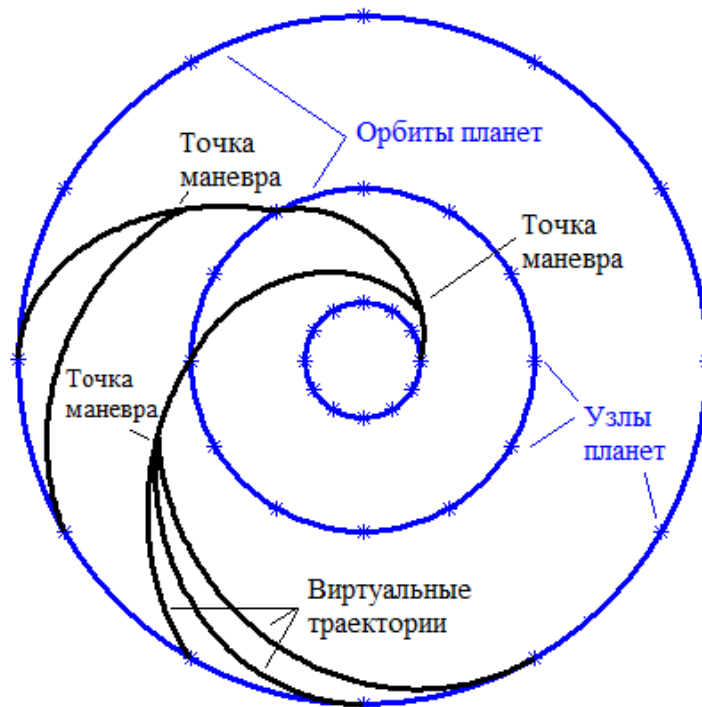


Рис. 1. Дискретизация орбит планет

Расчет гелиоцентрического участка траектории

Приступим теперь к детальному описанию расчетов на участках траекторий. Рассмотрим один из гелиоцентрических участков. Пусть \mathbf{r}_1 – радиус-вектор начальной точки участка – узла планеты 1, а \mathbf{r}_2 – радиус-вектор конечной точки участка – узла планеты 2, \mathbf{u}_1 – вектор скорости планеты 1 в

¹ Допускаются так называемые резонансные траектории, когда КА совершает несколько последовательных гравитационных маневров у одной и той же планеты. Гелиоцентрические участки таких траекторий могут иметь угловую дальность вплоть до 2π включительно.

точке \mathbf{r}_1 (далее, ссылаясь на точки/узлы, будем просто указывать их радиус-вектор). Местная параболическая скорость равна $v_{par} = \sqrt{2\mu_S/r_1}$, $r_1 = |\mathbf{r}_1|$. Здесь μ_S – гравитационный параметр Солнца. Орбитальный угловой момент планеты l определяется вектором $\mathbf{c}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1$.

Задаваясь углами наклона θ в точке \mathbf{r}_1 можно определить параметры орбиты перелета из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 [1].

Опишем теперь вариант выбора точек для маневров в глубоком космосе. После того как определены все параметры движения вдоль траектории, соединяющей узлы \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , вычисляются значения эксцентрисических аномалий E_1 и E_2 , соответствующих узлам \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Затем выбираются значения эксцентрисических аномалий из множества

$$E^{(i)} = E_1 + \frac{E_2 - E_1}{1 + N}(i - 1), \quad i = 2, \dots, N + 1,$$

которые и будут соответствовать точкам для маневров в глубоком космосе.

Далее, пусть на участке орбиты между точками \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 выбрана точка \mathbf{r}_0 , в которой требуется совершить маневр в глубоком космосе (см. рис. 2).

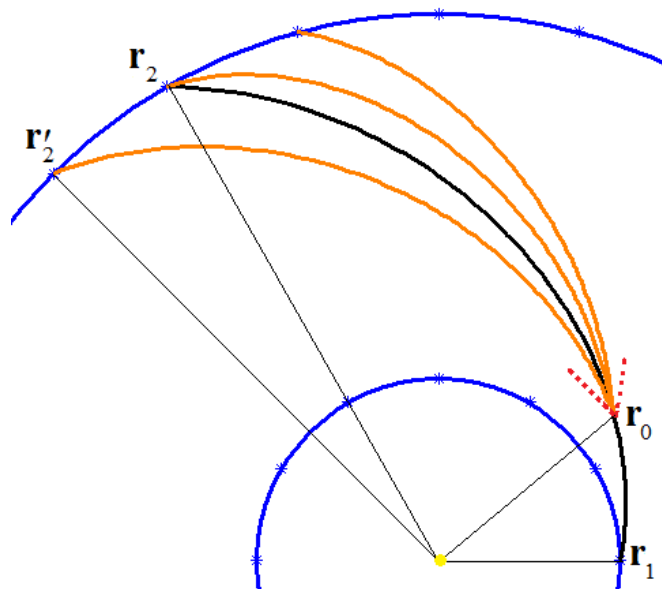


Рис. 2. Пучок траекторий из точки маневра

На орбите планеты 2 выбирается точка \mathbf{r}'_2 , в которую требуется построить траекторию из точки \mathbf{r}_0 . Обозначим за Δv_{lim} максимально допустимую величину приращения характеристической скорости на данном участке траектории (под приращением характеристической скорости понимается $\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|$, где \mathbf{v}_0 – скорость КА в \mathbf{r}_0 до маневра, \mathbf{v}'_0 – скорость после

маневра). Угол наклона траектории до маневра в точке \mathbf{r}_0 определяется скоростью \mathbf{v}_0 и вычисляется по формуле

$$\theta_{v_0} = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{v}_0}{|\mathbf{r}_0| \cdot |\mathbf{v}_0|}.$$

Угол наклона траектории после маневра полностью определяет траекторию из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 и величину маневра. С практической точки зрения, удобно рассматривать углы наклона траектории после маневра из интервала $[\theta_{v_0} - \Delta\theta, \theta_{v_0} + \Delta\theta]$, где $\Delta\theta = \Delta v_{lim} / |\mathbf{v}_0|$. Отметим, что здесь нас интересуют только те углы наклона траектории $\theta_{v'_0}$, при которых возможно движение из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , т.е. для которых выполнено

$$\left(\frac{v'_0}{v_{0,par}} \right)^2 = \frac{1}{2 \cos \theta_{v'_0}} \frac{1 - \cos \varphi}{r_0 \cos \theta_{v'_0} / r'_2 - \cos(\theta_{v'_0} + \varphi)} > 0,$$

где $v'_0 = |\mathbf{v}'_0|$ – модуль скорости после маневра, $v_{0,par}$ – параболическая скорость в точке \mathbf{r}_0 , φ – угловая дальность между \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 .

После того, как угол наклона траектории после маневра выбран, можно найти вектор скорости \mathbf{v}'_0 в точке \mathbf{r}_0 после маневра [1]. Тогда величину приращения характеристической скорости $\Delta v = |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}'_0|$ следует сравнить с предельно допустимым значением Δv_{lim} и случае $\Delta v \leq \Delta v_{lim}$ сохранить данные о полученной траектории, проходящей через точки \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_0 и \mathbf{r}'_2 . В противном случае, такая траектория отклоняется и в базу данных не попадает. По известным параметрам двух соответствующих кеплеровых дуг можно найти времена полета из \mathbf{r}_1 в \mathbf{r}_0 и из \mathbf{r}_0 в \mathbf{r}'_2 , а также скорость прибытия \mathbf{v}'_2 в точку \mathbf{r}'_2 . Так рассчитываются все параметры траектории между узлами планеты 1 и планеты 2. Аналогичные вычисления можно выполнить для любых двух узлов на орбитах планет, «соседствующих» в выбранном планетном маршруте. Для резонансных виртуальных траекторий перелет может совершаться между двумя узлами на орбите одной и той же планеты.

Расчет планетоцентрического участка траектории

Перейдем теперь к рассмотрению движения КА на планетоцентрических участках траектории. Пусть рассматривается узел некоторой планеты с радиус-вектором \mathbf{r} . Планетоцентрическую скорость на входе в сферу действия будем считать известной, обозначим ее v_{in}^{rel} . Если это первая планета маршрута, то величина v_{in}^{rel} просто равна требуемому гиперболическому избытку на выходе из сферы действия планеты; в остальных случаях она вычисляется по формуле

$v_{in}^{rel} = |\mathbf{v}_{in}^{gelio} - \mathbf{u}|$, где \mathbf{v}_{in}^{gelio} – гелиоцентрическая скорость на входе в сферу действия в точке \mathbf{r} , найденная из рассмотрения соответствующего гелиоцентрического участка, \mathbf{u} – скорость планеты в точке \mathbf{r} . Элементарные формулы для определения положений и скоростей планет по заданным значениям орбитальных элементов приведены в Приложении А.

Пусть выбран \mathbf{r}' – радиус-вектор узла следующей планеты в маршруте. Вычислим гелиоцентрическую скорость на выходе из сферы действия планеты \mathbf{v}_{out}^{gelio} , которая бы определяла траекторию из узла \mathbf{r} в узел \mathbf{r}' , при условии, что вход в сферу действия планеты осуществляется со скоростью \mathbf{v}_{out}^{gelio} , гравитационный маневр пассивный, а минимальное расстояние до планеты будет отвечать некоторым требованиям-ограничениям. Именно, будем считать, что для каждой планеты определены радиус сферы действия $r_{\pi, \max}$ (ограничение «сверху») и некоторое безопасное расстояние $r_{\pi, \min}$ (ограничение «снизу»). Величина $r_{\pi, \max}$ может быть выбрана равной радиусу сферы действия, а $r_{\pi, \min}$ может определяться радиусом планеты и толщиной ее атмосферы. Обозначим $v_p = \sqrt{2\mu_S/r}$ за параболическую скорость в точке \mathbf{r} .

Искомый вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты можно представить как направленный отрезок с центром в точке \mathbf{r} и концом на сфере S радиуса $R = v_{out}^{rel} = v_{in}^{rel}$ с центром на конце направленного отрезка \mathbf{u} , исходящего из точки \mathbf{r} , $v_{out}^{rel} = |\mathbf{v}_{out}^{rel}|$ (см. рис. 3). Так как траектория должна лежать в плоскости, образованной векторами \mathbf{r} и \mathbf{r}' (для краткости, будем обозначать эту плоскость буквой Π), то и вектор искомой скорости \mathbf{v}_{out}^{gelio} необходимо лежит в этой плоскости, которая отсекает от сферы S окружность O радиуса $\rho = \sqrt{R^2 - d^2}$, где d – расстояние от центра сферы S до плоскости Π .

Пусть $\mathbf{c} = \mathbf{r} \times \mathbf{u}$ – орбитальный угловой момент планеты. Вектор нормали к плоскости Π определим равенством

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \operatorname{sgn} \left(\mathbf{c} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} \times \mathbf{r}'|} \right)$$

(случаи коллинеарных векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}' не рассматриваются). Пусть φ – угловая дальность между \mathbf{r} и \mathbf{r}' . Введем следующий базис: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{n}$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1$. Матрица перехода из эллиптической системы координат в систему координат, образованную векторами этого базиса, представляется в виде

$$M = \|\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{e}_3\|^T.$$

Отсюда следует, что компоненты центра окружности O в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 есть первые две компоненты вектора $M\mathbf{u}$, а величина d равна третьей компоненте этого вектора.

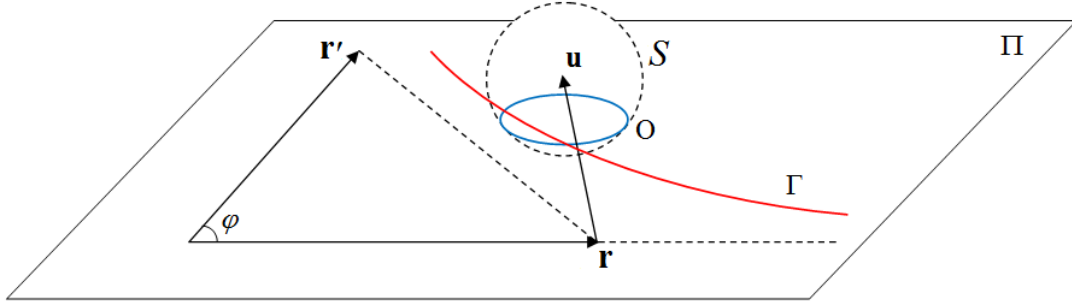


Рис. 3. К определению параметров пассивного гравитационного маневра

Известно, что множеству векторов скорости, которые определяют траектории между двумя неколлинеарными точками (в нашем случае \mathbf{r} и \mathbf{r}'), можно однозначно сопоставить некоторую гиперболу Γ с асимптотами, направленными вдоль векторов \mathbf{r} и $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Таким образом, конец вектора \mathbf{v}_{out}^{gelio} лежит в точках пересечения гиперболы Γ и окружности O , которых в общем случае может быть не более четырех, так как гипербола и окружность представляют собой кривые второго порядка. С практической точки зрения нас интересуют решения, отвечающие орбитальным угловым моментам КА, которые составляют острые углы с направлением на северный полюс эклиптики. Таким образом, остаются не более двух точек пересечения гиперболы и окружности.

Получим уравнение гиперболы. Для этого обратимся к равенству

$$\left(v_{out}^{gelio}\right)^2 = \frac{v_p^2}{2 \cos \theta} \frac{1 - \cos \varphi}{a \cos \theta - \cos(\theta + \varphi)},$$

где $a = r_0/r_2'$, θ – угол наклона траектории в точке \mathbf{r} на выходе из сферы действия, φ – угловая дальность. Сделаем замену переменных: $u = \pi/2 - \theta$, $x = v_{out}^{gelio} \cos u$, $y = v_{out}^{gelio} \sin u$. Здесь (x, y) – декартовы координаты в плоскости Π в базисе векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , u – полярный угол, измеряемый от направления \mathbf{e}_1 . Таким образом, уравнение гиперболы Γ запишется в виде

$$y = \frac{A}{By + Cx}, \quad A = v_p^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad B = a - \cos \varphi, \quad C = \sin \varphi.$$

Уравнение же окружности записывается в виде

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2, \quad M\mathbf{u} \equiv (x_0, y_0, d)^T.$$

Задача о поиске пересечений гиперболы Γ и окружности O сводится к решению алгебраического уравнения 4-ой степени и отбору таких решений, которые определяют движение КА с орбитальным угловым моментом, составляющим острый угол с орбитальным угловым моментом планеты \mathbf{c} . Рассмотрим два случая.

В случае $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) > 0$ имеем $C > 0$. Тогда удобно выполнить преобразование координат $x = X - BY$, $y = CY$ и искать решения с $y > 0$. В этом случае система

$$\begin{cases} x = X - BY \\ y = CY \\ By^2 + Cxy = A \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2 \end{cases}$$

приводит к уравнению

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0,$$

где коэффициенты уравнения $p_1 = 1$, $p_2 = -2x_0$, $p_3 = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 - 2BD$, $p_4 = 2D(Bx_0 - Cy_0)$, $p_5 = D^2(B^2 + C^2)$, $D = A/C^2$.

Если же $\text{sgn}(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{r}')) < 0$, то $C < 0$. В этом случае удобно рассматривать преобразование $x = BX - Y$, $y = -CX$ и искать решения с $y > 0$. Это приводит к уравнению

$$p_1 X^4 + p_2 X^3 + p_3 X^2 + p_4 X + p_5 = 0,$$

где коэффициенты $p_1 = B^2 + C^2$, $p_2 = 2(Cy_0 - Bx_0)$, $p_3 = x_0^2 + y_0^2 - \rho^2 - 2BD$, $p_4 = 2Dx_0$, $p_5 = D^2$, $D = A/C^2$.

Заметим, что в обоих случаях $Y = D/X$ и, более того, выражение $y > 0$ равносильно $X > 0$. По значениям найденных пар (не более двух) (X, Y) с помощью линейного преобразования легко восстанавливаются соответствующие пары (x, y) , а, следовательно, величины $v_{out}^{gelio} = |\mathbf{v}_{out}^{gelio}|$ и углы наклона траектории θ . Этих данных достаточно для определения векторов скорости \mathbf{v}_{out}^{gelio} , определяющих траектории из \mathbf{r} в \mathbf{r}' .

Пусть теперь даны гелиоцентрические векторы входа и выхода из сферы действия планеты \mathbf{v}_{in}^{gelio} и \mathbf{v}_{out}^{gelio} соответственно, а также скорость планеты \mathbf{u} . Тогда легко определить периферическое расстояние до планеты.

Относительные скорости КА равны соответственно $\mathbf{v}_{in}^{rel} = \mathbf{v}_{in}^{gelio} - \mathbf{u}$ и $\mathbf{v}_{out}^{rel} = \mathbf{v}_{out}^{gelio} - \mathbf{u}$. Угол поворота вычисляется по формуле

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{v}_{in}^{rel} \cdot \mathbf{v}_{out}^{rel}}{v_{in}^{rel} \cdot v_{out}^{rel}}.$$

Эксцентриситет гиперболической орбиты $e = 1/\sin(\alpha/2)$.

Перицентральный радиус

$$r_{\pi} = \mu_P \frac{e-1}{(v_{out}^{rel})^2},$$

где μ_P – гравитационный параметр планеты. Если перицентральный радиус удовлетворяет условию $r_{\pi, \min} \leq r_{\pi} \leq r_{\pi, \max}$, то данные о полученной траектории сохраняются, иначе траектория отклоняется и в базу данных не попадает.

Построение базы виртуальных траекторий

Теперь, задав формулы для расчета параметров произвольных гелиоцентрического и планетоцентрического участков полета, можно перейти к описанию процесса построения базы виртуальных траекторий.

Будем считать, что изначально имеется база данных **PLANETS**, в которой для всех узлов на орбите каждой из планет Солнечной системы хранятся сведения о координатах узла в гелиоцентрической эклиптической системе координат, скорости планеты в узле и временах прохождения узла планетой. Элементарные формулы, используемые при создании базы **PLANETS**, приведены в Приложениях А и Б.

На первом гелиоцентрическом участке любой виртуальной траектории начальная точка является одним из узлов на орбите Земли. Формируется таблица, столбцы которой содержат данные в следующем порядке:

1. n_1 – порядковый номер начального узла первого участка;
2. \mathbf{r}_1 – радиус-вектор этого узла;
3. \mathbf{v}_1^{rel} – вектор планетоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
4. \mathbf{v}_1^{gelio} – вектор гелиоцентрической скорости КА на выходе из сферы действия планеты старта;
5. \mathbf{r}_{12} – радиус-вектор точки маневра в глубоком космосе на первом гелиоцентрическом участке;
6. \mathbf{v}_{12}^{in} – вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} до маневра;
7. $T_{1,1}$ – время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_{12} ;
8. n_2 – порядковый номер узла «второй» планеты в маршруте;

9. \mathbf{r}_2 – радиус-вектор этого узла;
10. φ – угловая дальность между \mathbf{r}_{12} и \mathbf{r}_2 ;
11. θ – угол наклона траектории в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;
12. \mathbf{v}_{12}^{out} – вектор скорости КА в точке \mathbf{r}_{12} после маневра;
13. Δv_1 – величина маневра в точке \mathbf{r}_{12} ;
14. $T_{1,2}$ – время полета от \mathbf{r}_{12} до \mathbf{r}_2 ;
15. T_1 – время полета от \mathbf{r}_1 до \mathbf{r}_2 ;
16. \mathbf{v}_2^{in} – гелиоцентрическая скорость входа в сферу действия «второй» планеты маршрута;
17. r_π – перицентральное расстояние до планеты во время гравитационного маневра;
18. \mathbf{v}_2^{out} – гелиоцентрическая скорость выхода из сферы действия планеты.

Особенностью первого гелиоцентрического участка является выбор гиперболического избытка скорости из некоторого допустимого множества скоростей, которое определяется характеристиками маршевых двигателей ракеты-носителя и разгонного блока, а также массой M_p полезной нагрузки и массой M_{ef} дополнительной двигательной установки вместе с запасом топлива для нее. Так, при $M_p + M_{ef} \approx 1000$ кг для ракеты-носителя «Союз-ФГ» и разгонного блока «Фрегат» значение v_{max} не превышает 4 км/с.

Перебираются все допустимые значения \mathbf{r}_1 , $|\mathbf{v}_1^{rel}|$, \mathbf{r}_2 и θ , в результате чего формируется массив **VTB** виртуальных траекторий от Земли до второй планеты в выбранном планетном маршруте. Размерность этого массива равна $32 \times N$, где N – число таких траекторий. Первые 10 строк соответствуют данным с 1 по 4 пункты – данным о старте, оставшиеся 22 строки соответствуют данным с 5 по 16 пункты о первом гелиоцентрическом участке. Далее следует расчет планетоцентрического участка траектории около второй по счету планеты маршрута, в результате чего к этому массиву добавляется еще 4 строки, которые соответствуют пунктам 17-18. Далее начинается расчет гелиоцентрического участка траектории между второй и третьей планетами маршрута, это дает 22 строки аналогичных данных пунктов 5-16. Затем следует расчет планетоцентрического участка около третьей планеты маршрута и так далее. Число строк массива **VTB** в общем случае равно

$$\underbrace{10}_{\text{данные о старте}} + 4 \cdot \underbrace{(N_p - 2)}_{\text{кол-во грав. маневров}} + 22 \cdot \underbrace{(N_p - 1)}_{\text{кол-во гелиоц. участков}} = 26 \cdot N_p - 20,$$

где N_p – число планет в маршруте. В результате перебора параметров, а также проверок отдельных величин на принадлежность допустимым значениям, число виртуальных траекторий массива **VTB** может как расти, так и уменьшаться.

В итоге, после расчета параметров всех $N_p - 1$ гелиоцентрических участков и $N_p - 2$ гравитационных маневров, получаем базу **VTB** виртуальных траекторий. Для каждой виртуальной траектории можно определить общее время полета

$$T = \sum_{n=1}^{N_p-1} T_n$$

и суммарные затраты характеристической скорости

$$\Delta V = \sum_{n=1}^{N_p-1} \Delta v_n .$$

Отметим, что для сложных планетных маршрутов целесообразно задать изначально некоторые разумные ограничения на максимальные значения T и ΔV . В случае их превышения по ходу процедуры построения базы виртуальных траекторий необходимо такие траектории сразу отсеивать. Это позволяет сгладить экспоненциальный рост числа виртуальных траекторий с увеличением числа промежуточных планет в маршруте.

Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени, позволяет табулировать базу виртуальных траекторий для каждого планетного маршрута. Таким образом, при проектировании конкретной миссии расчет начинается со второго этапа метода виртуальных траекторий – наложения реального движения планет.

Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет

Аналогично [1], процесс наложения реального движения планет в свою очередь также можно разбить на два этапа. Вначале из базы **VTB** виртуальных траекторий отбираются траектории, близкие в некотором смысле к реально реализуемым. Пусть некоторая виртуальная траектория проходит последовательно через N_p узлов на орбитах планет, входящих в выбранный планетный маршрут. Времена перелета на каждом гелиоцентрическом участке обозначим, как и прежде, через T_{n+1} , $n = 1, \dots, N_p - 1$. Если существуют такие времена t_i , $i = 1, \dots, N_p$ прохождения планетами соответствующих узлов, что

$$|t_{i+1} - t_i - T_i| < \Delta t_i, \quad i = 1, \dots, N_p - 1, \quad t_1 \in W,$$

где Δt_i – заранее заданная допустимая величина «временного промаха», W – допустимый интервал дат старта, то данную виртуальную траекторию будем называть приближенной (рис. 4). При движении по двум нижним

(зачеркнутым) дугам планета успевает выйти за границы, определяемые временным промахом Δt_i для данной планеты, и поэтому все виртуальные траектории, содержащие эти дуги, отсеиваются.

Взяв любую виртуальную траекторию из базы **VTB**, можно проверить выполнение указанного выше критерия последовательно для каждой пары смежных узлов, лежащих на этой траектории. При этом используются векторы времен прохождения узлов планетами, содержащиеся в базе данных **PLANETS**. Если хотя бы для одной пары смежных узлов критерий не может быть выполнен, то такая виртуальная траектория отсеивается. В результате имеем массив приближенных виртуальных траекторий.

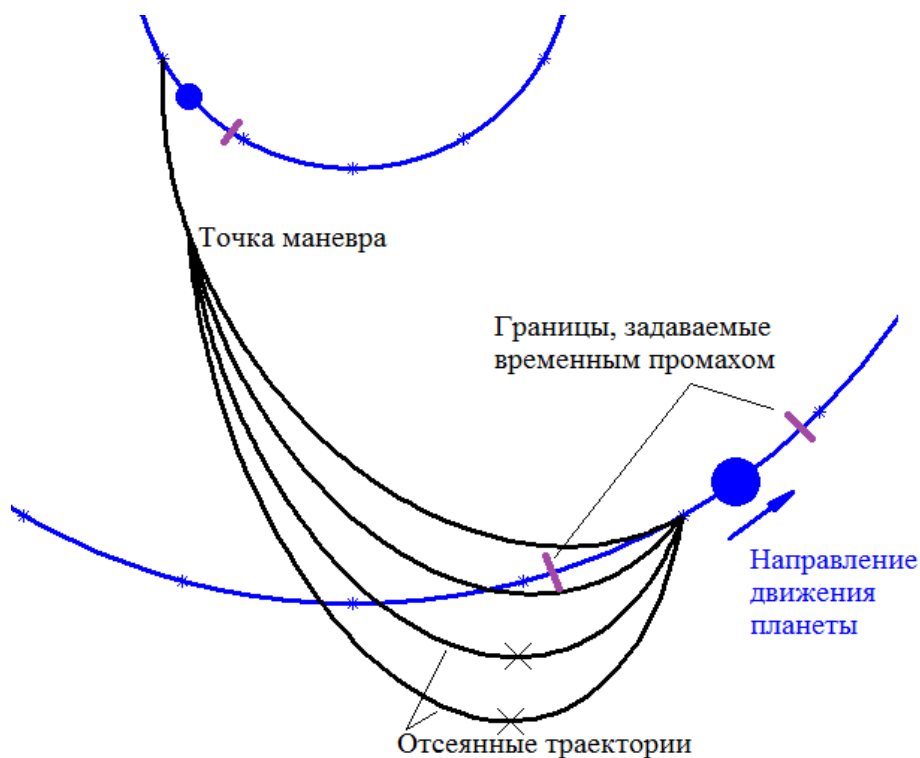


Рис. 4. Отбор приближенных траекторий

Второй этап наложения реального движения планет состоит в уточнении полученных приближенных виртуальных траекторий. Рассмотрим пучок приближенных траекторий, проходящих через один и тот же набор узлов. Проведем более подробную дискретизацию орбит планет вблизи узлов из данного набора (рис. 5).

Добавим возникшие таким образом новые узлы к уже имеющимся узлам, через которые проходит пучок приближенных траекторий. Для получившейся совокупности узлов осуществляется построение массива виртуальных траекторий, как это описано выше. Далее полученные траектории корректируются при помощи решения задачи Ламберта на дуге «точка маневра-планета» на каждом межпланетном участке (рис. 6).

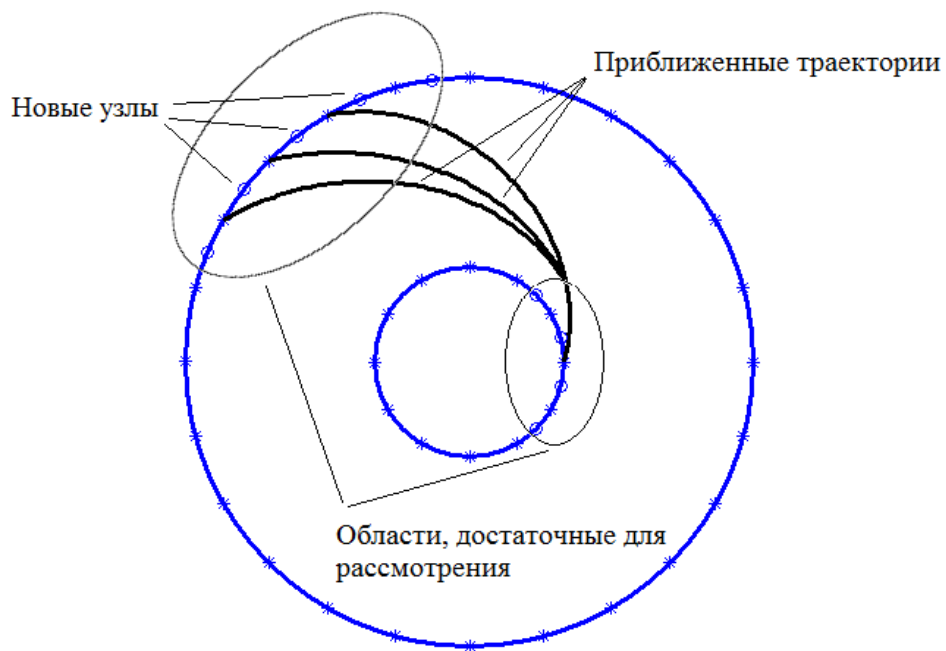


Рис. 5. Дискретизация орбит планет вблизи узлов приближенных траекторий

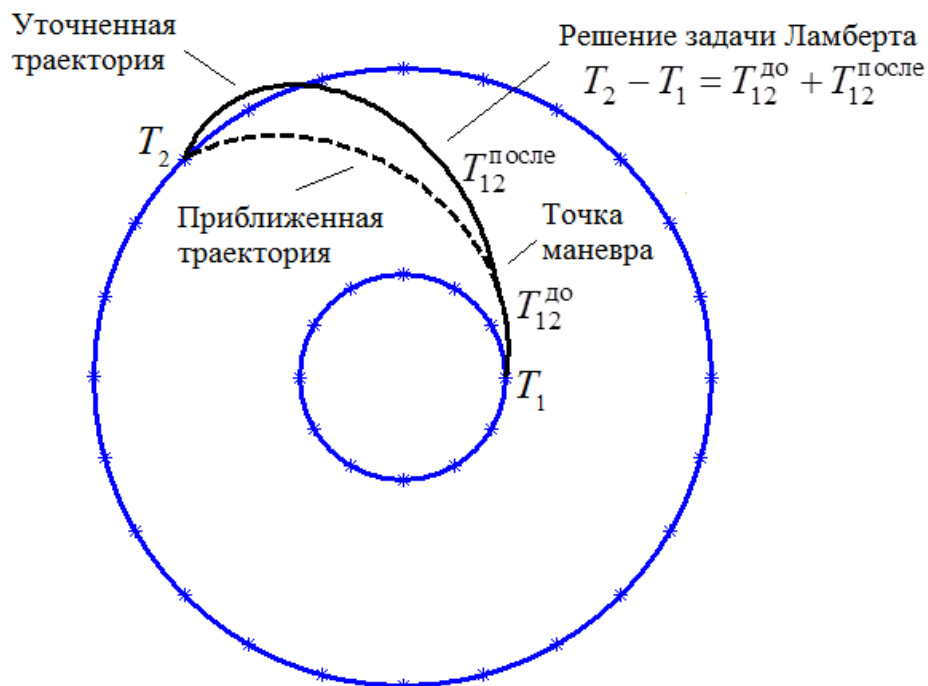


Рис. 6. Уточнение траекторий с помощью решения задачи Ламберта

Наиболее перспективные в смысле оптимизируемого функционала реальные траектории уточняются итерационно до нужной степени точности: проводится более мелкая дискретизация орбит планет вблизи соответствующих узлов, на каждом из участков «точка маневра-планета» каждого гелиоцентрического участка между всеми парами из новой совокупности узлов находится решение задачи Ламберта и т.д.

Время работы метода

Поскольку первый этап предлагаемого алгоритма проектирования траекторий – построение базы виртуальных траекторий – табулируется, логично сделать так, чтобы время, затрачиваемое на вычисления на этом этапе, составляло большую часть от общего времени расчета. Тогда, имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести приближенное баллистическое проектирование траектории или, другими словами, анализ принципиальной осуществимости этой миссии (mission feasibility study).

Как показали численные эксперименты, достаточно мелкая дискретизация орбит планет и выбор подходящего шага по углу наклона траектории на гелиоцентрических участках гарантируют, что доля времени на первоначальное построение базы виртуальных траекторий будет не меньше 80-90%. На наложение реального движения планет – отсев и уточнение базы виртуальных траекторий – уходит 10-20% от общего времени расчета (в абсолютных величинах – см. Табл. 1). Именно это время нужно брать в качестве оценки быстродействия алгоритма.

Таблица 1

Характерное время работы второго этапа алгоритма (уточнение и отсев)^{2,3}

Число гравитационных маневров	Время на отсев и уточнение базы виртуальных траекторий, минут
1	0.5-2
2	10-15
3	25-50
4	100-200

Постановка модельной задачи о полете к Юпитеру

Для демонстрации работы метода рассмотрим задачу проектирования полета к Юпитеру. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения импульсов в глубоком космосе. При этом потребуем, чтобы

² Абсолютные значения потраченного на расчеты времени получены для процессора Intel® Core™ i3-330M с тактовой частотой 2.13 ГГц. Все вычисления проводились последовательно на одном ядре. Объем оперативной памяти 2 Гб (в процессе расчетов загрузка, как правило, не превышала 500 Мб).

³ Время, затрачиваемое на отсев и уточнение базы виртуальных траекторий, может быть различным для одного и того же планетного маршрута в зависимости от требуемой точности финальной траектории и значений параметров дискретизации, используемых при первоначальном построении базы виртуальных траекторий.

время полета не превосходило 10 лет, а дата старта лежала в промежутке от 2020 до 2025 года. Ограничений на скорость подлета КА к Юпитеру не налагается. Для примера рассмотрим следующие маршруты:

1. Земля–Венера–Юпитер (EVJ);
2. Земля–Венера–Земля–Юпитер (EVEJ);
3. Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер (EVEEJ).

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения:

Венера – 250 км (верхняя граница атмосферы);

Земля – 600 км.

При построении базы виртуальных траекторий расстояние между соседними узлами Венеры и соседними узлами Земли варьировалось для разных планетных маршрутов от 44.8 млн км (0.3 а.е.) до 89.7 млн км (0.6 а.е.). Расстояние между узлами Юпитера в маршруте EVJ было выбрано 89.7 млн км (0.6 а.е.), в маршруте EVEJ – 179.3 млн км (1.19 а.е.), в маршруте EVEEJ – 714.5 млн км (4.8 а.е.).

Маршрут EVJ

Для маршрута Земля–Венера–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 9.53$ км/с получаются для траектории с датой старта 11 октября 2021 года и временем перелета $T = 2.30$ лет (рис. 7). При этом маневр у Венеры выполняется 13 апреля 2022 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Земля–Венера порядка 8.97 км/с, а на участке Венера–Юпитер – 557 м/с. Космический аппарат достигает Юпитера 29 января 2024 года.

Маршрут EVEJ

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 2.25$ км/с получаются для траектории с датой старта 22 февраля 2020 года и временем перелета $T = 5.05$ лет (рис. 8). При этом маневр у Венеры 20 июня 2020 года, далее у Земли – 16 апреля 2022 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Земля–Венера порядка 265 м/с, а на участке Венера–Земля – 2.71 км/с, Земля–Юпитер – 5 м/с. Космический аппарат достигает Юпитера 13 марта 2025 года.

Маршрут EVEEJ

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Юпитер наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 89$ м/с получаются для траектории с датой старта 13 марта 2020 года и временем перелета $T = 6.03$ лет (рис. 9). При этом маневр у Венеры выполняется 30 июня 2020 года, далее у Земли – 27 апреля

2021 года, затем 28 июля 2023 года. Затраты на маневры в глубоком космосе приходятся только на участок Земля–Земля. Космический аппарат достигает Юпитера 25 марта 2026 года. Траектория изображена на рис. 10 и рис. 11.

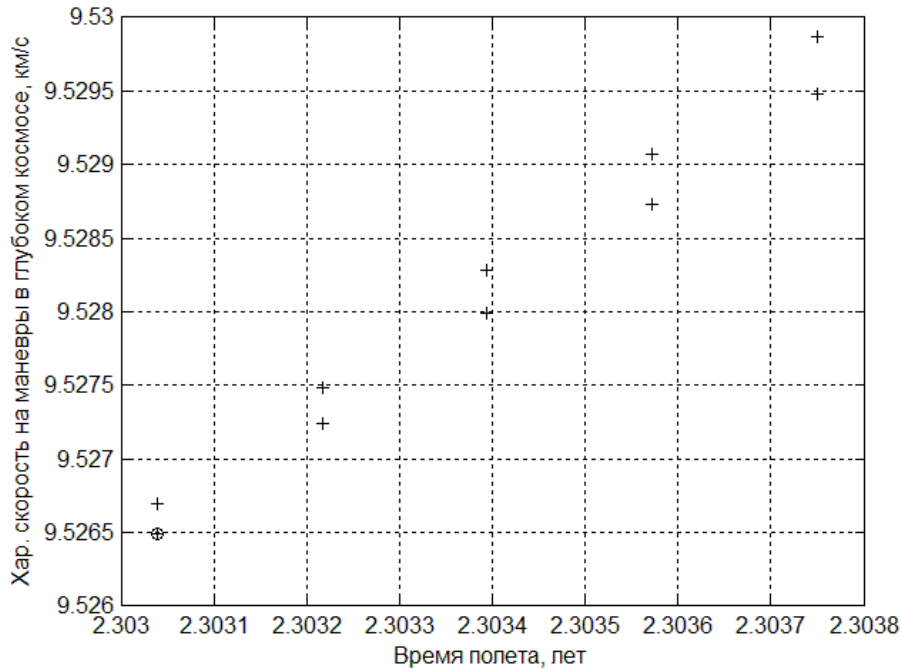


Рис. 7. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVJ

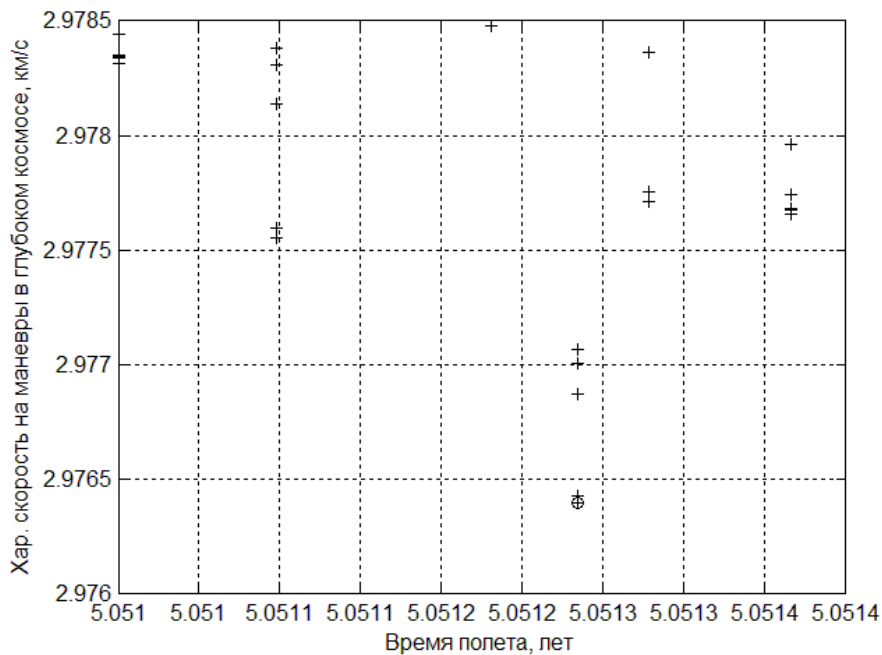


Рис. 8. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEJ

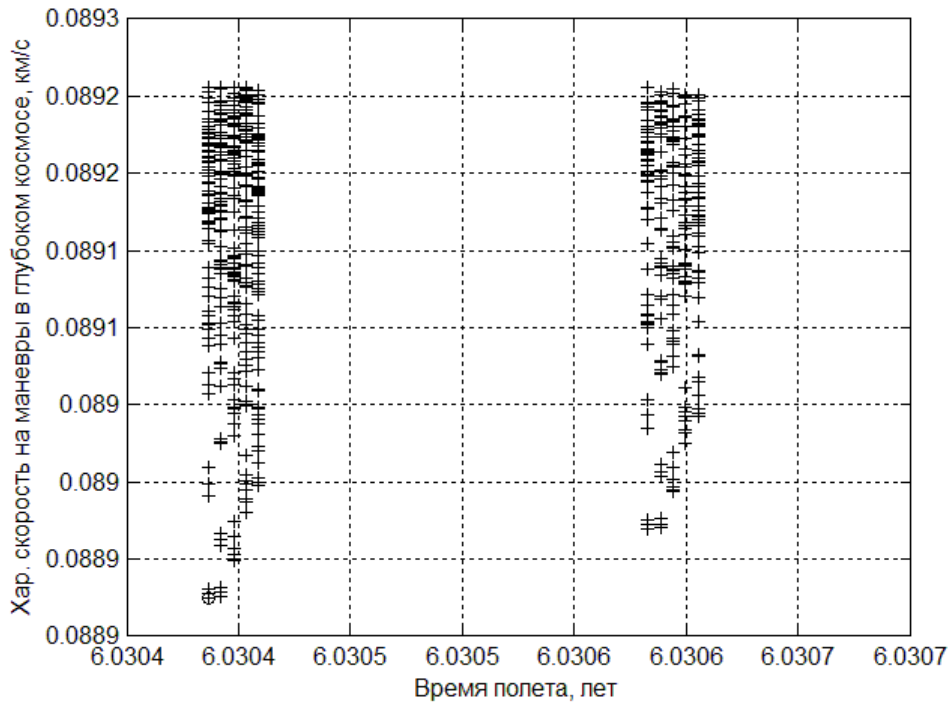


Рис. 9. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEEJ

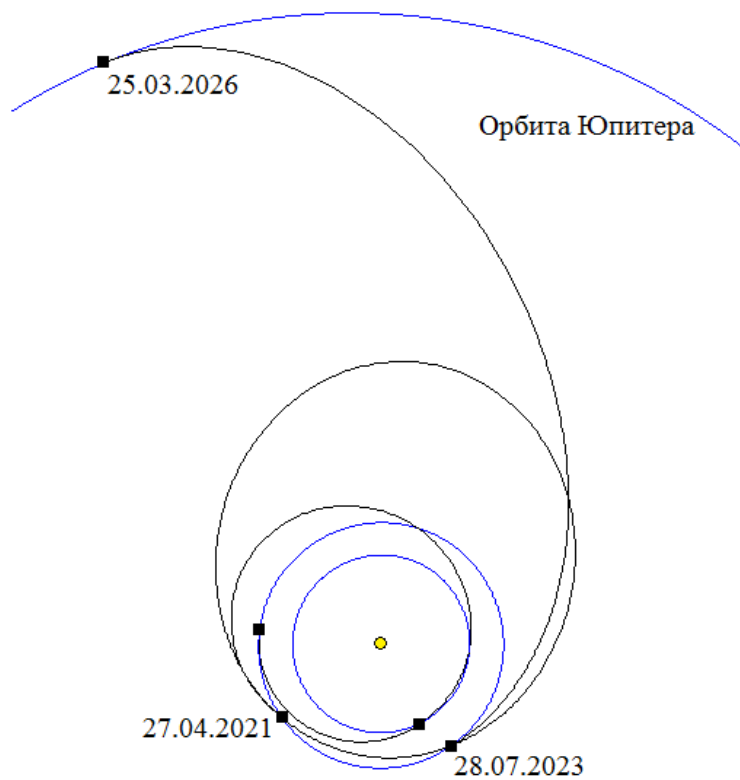


Рис. 10. Оптимальная траектория на маршруте EVEEJ

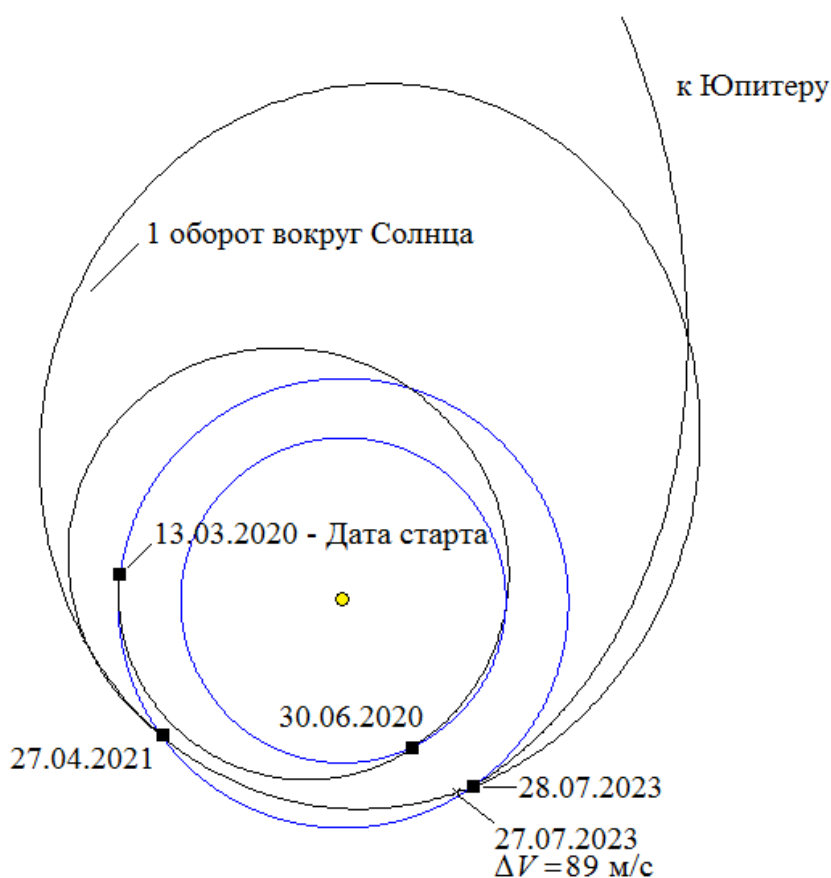


Рис. 11. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEEJ

Постановка модельной задачи о полете к Урану

Перейдем теперь к постановке задачи о полете к Урану и результатам расчетов.

Максимальное значение гиперболического избытка скорости при выходе из сферы действия Земли после отделения от ракеты-носителя и работы разгонного блока, как и раньше, примем равным 4 км/с. В качестве целевого функционала, подлежащего минимизации, возьмем величину характеристической скорости, необходимую для выполнения импульсов в глубоком космосе. При этом потребуем, чтобы время полета не превосходило 20 лет, а дата старта лежала в промежутке от 2020 до 2030 года. Ограничений на скорость подлета КА к Урану не налагается.

Что касается набора планетных маршрутов-кандидатов, то, забегаая вперед, скажем, что для указанного окна старта взаимное расположение Урана и Юпитера не благоприятствует выполнению гравитационного маневра у последнего. Поэтому для примера рассмотрим следующие маршруты:

1. Земля–Венера–Сатурн–Уран (EVSU);
2. Земля–Венера–Земля–Сатурн–Уран (EVESU);
3. Земля–Венера–Земля–Земля–Сатурн–Уран (EVEESU).

В качестве минимально допустимого с точки зрения безопасности расстояния до поверхности планеты при выполнении гравитационного маневра были для определенности взяты следующие значения:

Венера – 250 км (верхняя граница атмосферы);

Земля – 600 км;

Сатурн – 57000 км (средний радиус планеты).

При построении базы виртуальных траекторий расстояние между соседними узлами Венеры варьировалось для разных планетных маршрутов от 22.4 млн. км. (0.15 а.е.) до 60 млн. км (0.4 а.е.), для Земли – от 22.4 млн. км. (0.15 а.е.) до 90 млн. км (0.6 а.е.). Расстояние между узлами Сатурна во всех маршрутах составляло 224 млн. км (1.5 а.е.), Урана – 360 млн. км (2.4 а.е.).

Маршрут EVSU

Для маршрута Земля–Венера–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 9.042$ км/с получаются для траектории с датой старта 15 декабря 2029 года и временем перелета $T = 18.79$ лет (рис. 12). При этом маневр у Венеры выполняется 20 мая 2030 года, у Сатурна – 2 января 2034 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Венера–Сатурн порядка 33 м/с, а на участке Сатурн–Уран – менее 1 м/с. Космический аппарат достигает Урана 30 сентября 2048 года.

Маршрут EVESU

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 6.678$ км/с получаются для траектории с датой старта 2 декабря 2024 года и временем перелета $T = 19.74$ лет (рис. 13). При этом маневр у Венеры выполняется 8 июня 2025 года, затем у Земли – 4 мая 2028, у Сатурна – 25 июня 2032 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на участке Венера–Земля порядка 1 м/с, а на участках Земля–Сатурн и Сатурн–Уран – в сумме менее 1 м/с. Космический аппарат достигает Урана 31 августа 2044 года.

Маршрут EVEESU

Для маршрута Земля–Венера–Земля–Земля–Сатурн–Уран наименьшие затраты характеристической скорости $\Delta V = 1.538$ км/с получаются для траектории с датой старта 1 февраля 2025 года и временем перелета $T = 17.91$ лет (рис. 14). При этом маневр у Венеры выполняется 17 июля 2025 года, у Земли – 25 мая 2026 года и после облета Солнца 11 августа 2030 года, у Сатурна – 22 сентября 2033 года. Затраты на маневры в глубоком космосе на каждом из участков, кроме Земля–Земля, не превышают 1 м/с. На участке Земля–Земля $\Delta V = 1.536$ км/с. КА достигает Урана 29 декабря 2042 года. Траектория полета изображена на рис. 15 и рис. 16.

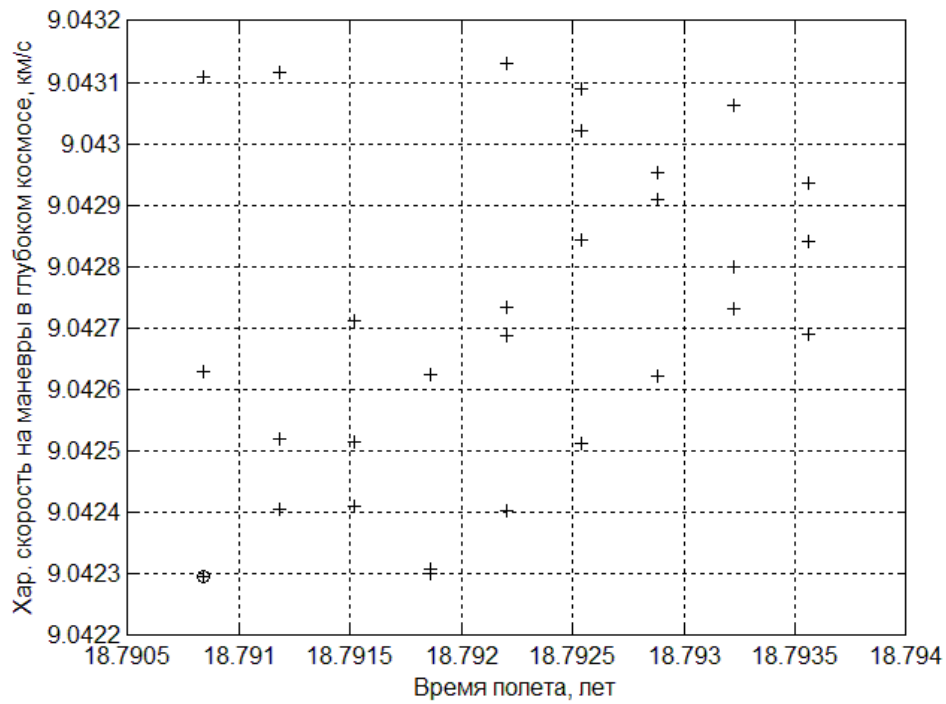


Рис. 12. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVSU

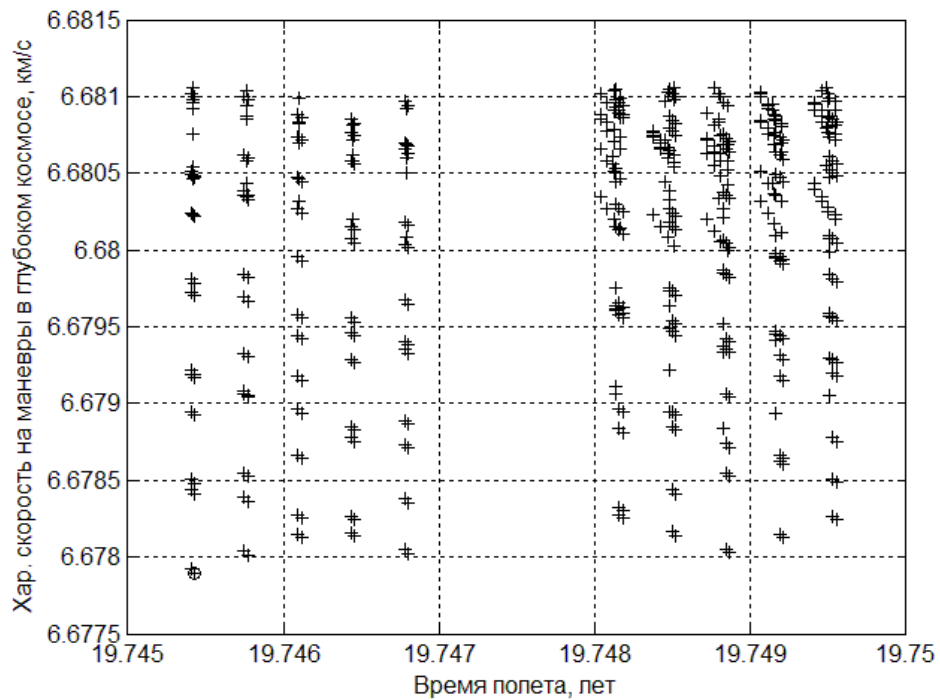


Рис. 13. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVESU

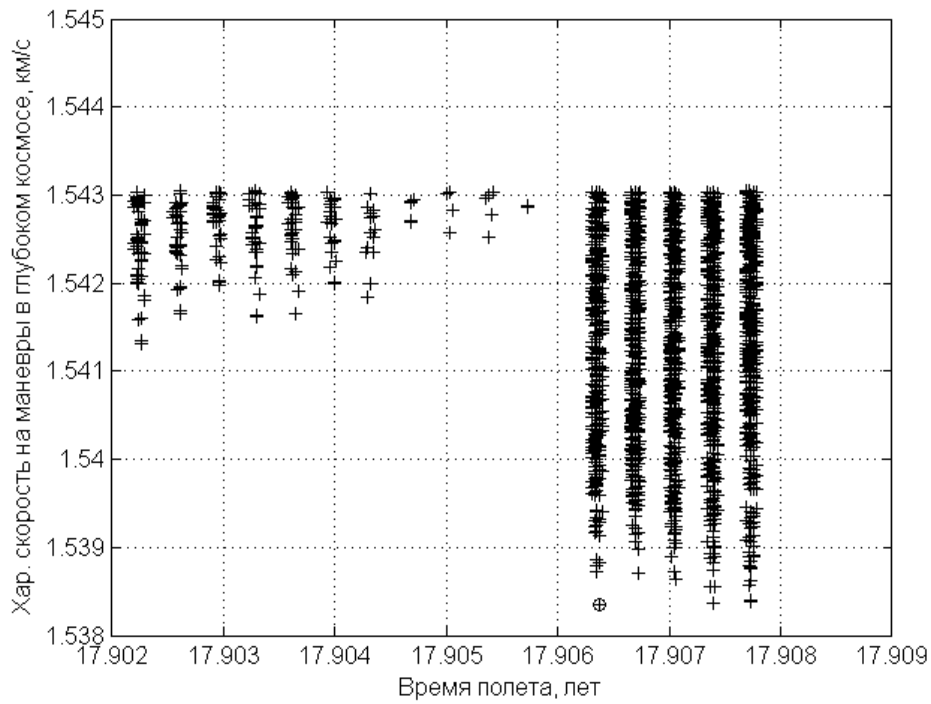


Рис. 14. Характеристическая скорость и время перелета для траекторий маршрута EVEESU

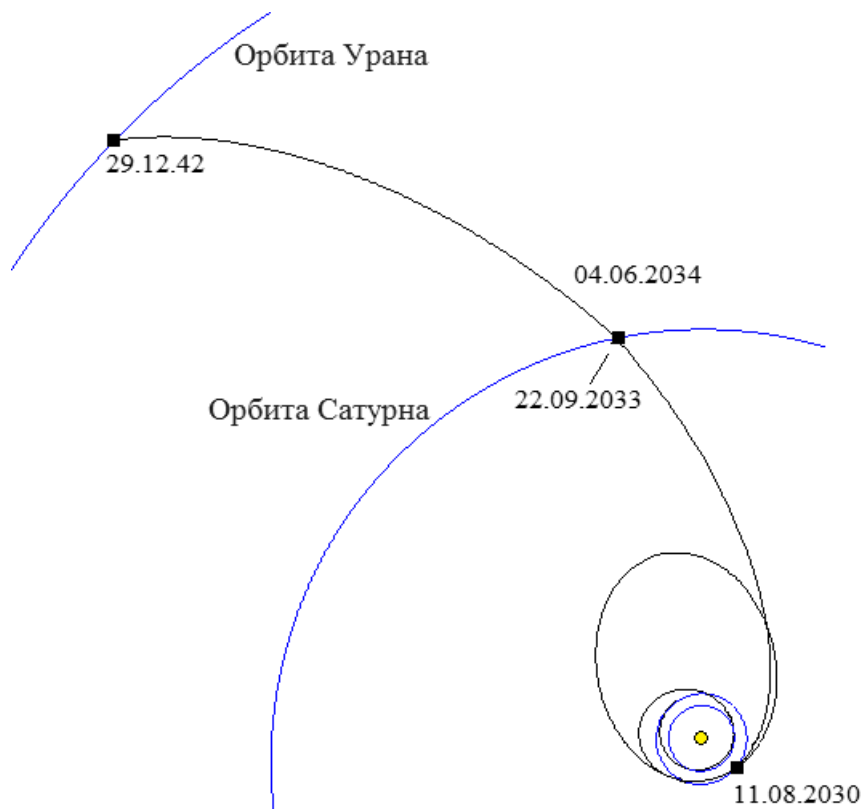


Рис. 15. Оптимальная траектория на маршруте EVEESU

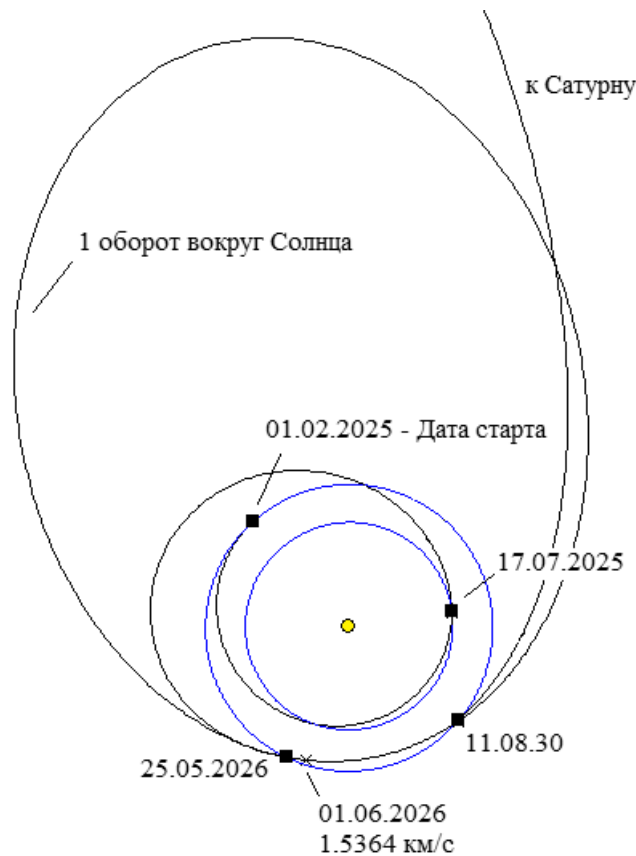


Рис. 16. Участок EVEE оптимальной траектории маршрута EVEESU

Заключение

Выполнена адаптация метода виртуальных траекторий, которая может быть с успехом использована при проектировании сложных межпланетных траекторий, включающих несколько пассивных гравитационных маневров и импульсов в глубоком космосе. Являясь, по сути, разновидностью классического метода полного перебора, метод виртуальных траекторий отличается от него пространственной, а не временной привязкой к движению планет. Тот факт, что орбиты планет могут считаться с хорошей точностью неизменными в течение достаточно длительного срока времени (для целей проектирования траекторий – десятки лет), позволяет табулировать для каждого планетного маршрута наиболее ресурсоемкую часть расчетов – построение базы виртуальных траекторий – и тем самым существенно сократить время работы алгоритма оптимизации. Имея набор баз виртуальных траекторий для основных 10-15 планетных маршрутов полета к планете-цели миссии, можно за сравнительно небольшое время провести анализ принципиальной осуществимости этой миссии.

Применение предлагаемой адаптации метода виртуальных траекторий продемонстрировано на примере задач полета к Юпитеру и Урану. Как результат, были обнаружены резонансные траектории, позволяющие существенно сократить затраты топлива на гравитационные маневры.

Библиографический список

1. Овчинников М.Ю., Трофимов С.П., Ширококов М.Г. Метод виртуальных траекторий для проектирования межпланетных миссий с гравитационными маневрами // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 9. 26 с. URL: http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_09.pdf
2. Сайт Государственного астрономического института им. П.К. Штернберга (ГАИШ): <http://www.sai.msu.ru/neb/rw/natsat/plaorbw.htm>. Дата получения информации 24 марта 2011 года

Приложение А. Определение положений и скоростей планет в пространстве

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, ω – аргумент перигея, Ω – аргумент восходящего узла, i – наклонение. Возьмем гелиоцентрическую эклиптическую систему координат, где орт \mathbf{e}_x направлен в точку весеннего равноденствия, орт \mathbf{e}_z направлен по нормали к плоскости эклиптики в сторону ее северного полюса и орт \mathbf{e}_y дополняет систему до правой тройки. Тогда линия узлов орбиты планеты проходит вдоль вектора

$$\mathbf{n}_1 = \cos \Omega \cdot \mathbf{e}_x + \sin \Omega \cdot \mathbf{e}_y.$$

Движение планеты происходит в плоскости векторов \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 , где

$$\mathbf{n}_2 = \sin i \cdot \mathbf{e}_z + \cos i \cdot (\cos \Omega \cdot \mathbf{e}_y - \sin \Omega \cdot \mathbf{e}_x).$$

Радиус-вектор планеты может быть выражен через истинную аномалию \mathcal{G} следующим образом:

$$\mathbf{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\mathcal{G}} \cos(\omega+\mathcal{G})\mathbf{n}_1 + \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\mathcal{G}} \sin(\omega+\mathcal{G})\mathbf{n}_2.$$

Пусть $\mu_s = 1.3276 \cdot 10^{11} \text{ км}^3/\text{с}^2$ – гравитационный параметр Солнца. Тогда радиальная v_r и трансверсальная v_n составляющие скорости планеты

$$v_r = \sqrt{\frac{\mu_s}{a(1-e^2)}} e \sin \mathcal{G}, \quad v_n = \sqrt{\frac{\mu_s}{a(1-e^2)}} (1 + e \cos \mathcal{G}).$$

Таким образом, для гелиоцентрической скорости планеты имеем:

$$\mathbf{v} = v_r \cdot \mathbf{r}/|\mathbf{r}| + v_n \cdot (\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2) \times \mathbf{r}/|\mathbf{r}|.$$

Приложение Б. Определение соответствия между положением планеты и временем

Пусть для некоторой планеты даны следующие элементы ее неизменной во времени кеплеровой орбиты: a – большая полуось, e – эксцентриситет, ω – аргумент перицентра, Ω – аргумент восходящего узла. Если λ_0 – средняя долгота на некоторую начальную эпоху, то средняя аномалия на начальную эпоху равна

$$M_0 = \lambda_0 - \omega - \Omega.$$

Методом Ньютона-Рафсона

$$\begin{cases} E_0^{(0)} = 0 \\ E_0^{(n+1)} = E_0^{(n)} - \frac{E_0^{(n)} - e \sin E_0^{(n)} - M_0}{1 - e \cos E_0^{(n)}}, \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

решается уравнение Кеплера

$$M_0 = E_0 - e \sin E_0$$

относительно E_0 – эксцентрической аномалии, которая соответствует начальному положению планеты. Вычисления продолжаются до тех пор, когда $|E_0^{(n+1)} - E_0^{(n)}| < TOL$. Здесь TOL – требуемая точность определения решения E_0 .

Пусть $\mathcal{G} \in [0; 2\pi)$ – истинная аномалия планеты в некоторый момент времени. Тогда соответствующее значение эксцентрической аномалии вычисляется по следующим формулам:

$$E = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \right), \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \geq 0,$$

$$E = 2\pi + 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} \right), \text{ если } \operatorname{tg} \frac{\mathcal{G}}{2} < 0.$$

Времена t_k прохождения планетой положения, которому соответствует истинная аномалия \mathcal{G} , определяются из соотношения

$$t_k = \frac{a^{3/2}}{\mu_S^{1/2}} (2\pi k + E - E_0 - e(\sin E - \sin E_0)), \quad k \in Z.$$

Оглавление

Введение	3
Постановка задачи	3
Проектирование межпланетных миссий с пассивными гравитационными маневрами	4
Расчет гелиоцентрического участка траектории	4
Расчет планетоцентрического участка траектории	6
Построение базы виртуальных траекторий	10
Поиск и уточнение виртуальных траекторий в соответствии с реальным движением планет	12
Время работы метода	15
Постановка модельной задачи о полете к Юпитеру	15
Маршрут EVJ	16
Маршрут EVEJ	16
Маршрут EVEEJ	16
Постановка модельной задачи о полете к Урану	19
Маршрут EVSU	20
Маршрут EVESU	20
Маршрут EVEESU	20
Заключение	23
Библиографический список	24
Приложение А. Определение положений и скоростей планет в пространстве ..	24
Приложение Б. Определение соответствия между положением планеты и временем	25