



Елизарова Т.Г., Широков И.А.

Тестирование КГД–
алгоритма на примере
задачи о распаде
однородной изотропной
турбулентности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Широков И.А. Тестирование КГД–алгоритма на примере задачи о распаде однородной изотропной турбулентности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 35. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-35>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Тестирование КГД–алгоритма
на примере задачи о распаде
однородной изотропной
турбулентности**

Москва — 2013

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Тестирование КГД–алгоритма на примере задачи
о распаде однородной изотропной турбулентности**

Аннотация

Рассматривается течение газа в кубической области, где в начальный момент времени задается одночастотное распределение скорости. При большом числе Рейнольдса это распределение распадается с образованием все более мелких структур, которые формируют однородное по пространству изотропное турбулентное течение, затухающее со временем. Для численного моделирования этой задачи используется квазигазодинамическая (КГД) система уравнений. Анализ спектральных и других характеристик решения позволяет оценить свойства алгоритма и настроить его параметры для адекватного моделирования турбулентных течений.

Ключевые слова: квазигазодинамические (КГД) уравнения, центрально-разностная аппроксимация, турбулентные течения

T. G. Elizarova, I. A. Shirokov

**Testing of the QGD-algorithm by a homogeneous isotropic gas-dynamic
turbulence decay**

Abstract

We consider a gas-dynamic flow in a cubic domain with a single-frequency distribution of the gas velocity as the initial condition. For large Reynolds numbers the initial distribution decomposes into a number of small-scale eddies that give rise to the uniform isotropic turbulent time-decaying flow. We use the quasi-gasdynamic (QGD) system of equations as the numerical model for this flow. The study of the spectral characteristics of the solution allows to evaluate the algorithm features and to adjust the tuning parameters of the numerical algorithm for turbulent flow modeling.

Keywords: quasi-gas dynamic (QGD) system, central difference approximations, turbulent flow modeling

Оглавление

Введение	- 3 -
Постановка задачи.....	- 4 -
Математическая модель и метод численного решения.....	- 5 -
Построение энергетического спектра	- 8 -
Результаты расчетов.....	- 12 -
Выводы	- 17 -
Литература	- 18 -

Введение

Компьютерное моделирование формирования и последующего распада однородной изотропной турбулентности является удобным тестом для верификации численных алгоритмов, претендующих на адекватное описание турбулентных течений. В этом тесте рассматривается течение газа в кубической области, где в начальный момент времени задается одиночный вихрь. При достаточно большом числе Рейнольдса вихрь распадается с образованием все более мелких структур, которые формируют турбулентное течение, затухающее со временем. В качестве граничных условий используются условия периодичности, что позволяет, начиная с некоторого момента времени, рассматривать течение как процесс вырождения или распада однородной по пространству изотропной турбулентности. Анализ спектральных и других характеристик этого процесса позволяет оценить свойства численного алгоритма и настроить его параметры для адекватного моделирования турбулентных течений.

В данной работе излагаются результаты численного моделирования этой задачи с помощью квазигазодинамической (КГД) системы уравнений. Способы построения этих уравнений, их теоретическое исследование и опыт практического применения изложен в монографиях [1–3], цитированных в них работах и последующих публикациях.

Связывая в КГД–уравнениях значение параметра регуляризации τ с шагом пространственной сетки h в виде $\tau \sim h/c$, где c – локальная скорость распространения малых возмущений в газе, можно рассматривать τ -вязкость как новый вариант подсеточной диссипации, которая сглаживает или осредняет пульсации газодинамических величин на пространственно-временных масштабах порядка шага сетки. Подсеточная диссипация в КГД–модели принципиально отличается от известных вариантов турбулентной вязкости в LES моделях (моделирование крупных вихрей), e.g. [4]. А именно: τ -слагаемые имеют специфическую математическую структуру и входят не только в уравнения для импульса и энергии, но и в уравнение неразрывности. Последнее моделирует турбулентную диффузию массы, которая является неотделимой составной частью турбулентного перемешивания. На твердой стенке τ -слагаемые обращаются в ноль, что не требует введение демпфирующих факторов, присущих модели Смагоринского. Некоторые результаты использования КГД–уравнений для численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода приведены в [5–8].

В данной работе исследуется влияние величины подсеточной КГД–диссипации на спектральные характеристики турбулентного течения. Здесь же детально изложен алгоритм построения трехмерного пространственного спектра кинетической энергии. Расчеты проведены на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [9].

Постановка задачи

Рассмотрим пространственную область в виде прямоугольного параллелепипеда: $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq z \leq L_z$, в декартовых координатах. Область заполнена газом (в нашем случае азотом N_2). После задания начального распределения скорости газа развивается процесс турбулентных колебаний, которые постепенно затухают.

Состояние газа описывается следующими параметрами: $\rho(x, y, z, t)$ – плотностью, $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ – макроскопической скоростью газа, $p(x, y, z, t)$ – давлением. Совокупность компонент вектора скорости будем также обозначать u^i (аналогично для прочих векторов и тензоров).

В качестве начального распределения скорости возьмем одночастотное распределение, сходное с начальными условиями в таких задачах, как вихрь Орсага-Танга и вихрь Тейлора-Грина [10–12]:

$$u_x = U_0 \cos(2\pi y / L_y), \quad u_y = -U_0 \cos(2\pi z / L_z), \quad u_z = U_0 \cos(2\pi x / L_x). \quad (1)$$

Отметим, что начальное поле скорости при этом является соленоидальным: $\nabla_i u^i = 0$. Начальными условиями для плотности, давления и температуры является однородное по пространству распределение

$$\rho = \rho_0, \quad p = p_0, \quad T = T_0, \quad (2)$$

при этом $T_0 = 273$ К – температура нормальных условий. Значения U_0 , ρ_0 и p_0 определим через числа Маха и Рейнольдса следующим образом. Введем начальное число Маха как

$$Ma = \sqrt{3}U_0 / c_{s0}, \quad (3)$$

где $c_{s0} = \sqrt{\gamma RT_0}$ – скорость звука в азоте при начальных условиях. Скорость $\sqrt{3}U_0$ является максимальной по абсолютной величине в начальном распределении (1). Газовая постоянная азота $R = 297$ Дж/(кг·К), тогда $c_{s0} = 337$ м/с.

Введем число Рейнольдса

$$Re = \rho_0 U_0 L / (\sqrt{2} \mu_0), \quad (4)$$

где $\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) – вязкость азота при температуре $T_0 = 273$ [13]. Характерный размер равняется стороне кубической расчетной области L . Отметим, что в расчетах $L_x = L_y = L_z = L = 0.032$ м. Множитель $\sqrt{2}$ введен для учета эффективного значения начального распределения скорости $U_0 / \sqrt{2}$.

Согласно (3) вычислим $U_0 = Ma\sqrt{\gamma RT_0}/\sqrt{3}$. Начальная плотность определяется через заданное число Рейнольдса (4): $\rho_0 = \sqrt{2} \operatorname{Re} \mu_0 / (U_0 L_0)$. Начальное значение давления определим из уравнения состояния: $p_0 = \rho_0 RT_0$.

В данной работе будем рассматривать дозвуковое течение, и возьмем начальное число Маха одним и тем же во всех расчетах: $Ma = 0.2$ (течение является слабо сжимаемым).

Граничные условия являются периодическими, что физически означает неограниченную область снаружи рассматриваемой расчетной области.

Математическая модель и метод численного решения

Турбулентное течение газа будем описывать макроскопической системой квазигазодинамических (КГД) уравнений [1–3]. Эта система определяет эволюцию во времени плотности, скорости и давления газа, зависящих от эйлеровых координат и от времени. Температура определяется из уравнения состояния идеального газа:

$$p = \rho RT, \quad (5)$$

где $R = \mathfrak{R}/M$ – газовая постоянная, \mathfrak{R} – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа. Полная энергия единицы объема E и полная удельная энтальпия H вычисляются по формулам: $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$, $H = (E + p) / \rho$, γ – показатель адиабаты.

Выпишем КГД систему в декартовых координатах [3, с. 94]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (8)$$

Вектор потока массы j_m^i выражается следующим образом [3, с. 97]:

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p). \quad (9)$$

Выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i определяются так [3, с. 83, 96].

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (10)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (11)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T. \quad (12)$$

Здесь $\delta^{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta^{ij} = 0$ при $i \neq j$ – символ Кронекера, $\varepsilon = p / (\rho(\gamma - 1))$ – внутренняя энергия на единицу массы газа. Коэффициент теплопроводности выражается соотношением [3, с. 71]

$$\kappa = \frac{\mu \gamma R}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (13)$$

где Pr – число Прандтля.

Коэффициент динамической вязкости μ в газе, входящий в выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i (10)–(13), будем определять через температурную зависимость [3, с. 25]:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (14)$$

где ω – показатель, описывающий межмолекулярное взаимодействие в газе, μ_0 – известная вязкость газа при температуре T_0 . В настоящей работе $T_0 = 273$ К – температура начальных условий, $\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) – вязкость азота при этой температуре. Коэффициент второй (объемной) вязкости определим через простое соотношение [3, с. 71]

$$\zeta = \mu (5/3 - \gamma). \quad (15)$$

Определим значение релаксационного параметра τ , входящего в (9)–(12):

$$\tau = \beta h / c_s, \quad (16)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma R T}$ – локальная скорость звука, h – величина шага пространственной сетки. Таким образом, τ -вязкость является подсеточной диссипацией, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент β можно рассматривать как настроечный параметр, определяющий величину подсеточной диссипации.

Значения постоянных параметров азота, входящих в (13)–(15), следующие: $\omega = 0.75$, $\gamma = 7/5$, $Pr = 14/19$ [14].

Для численного решения начально-краевой задачи (5)–(16) с начальными условиями (1)–(2) методом конечных разностей введем в области $0 \leq x \leq L_x$, $0 \leq y \leq L_y$, $0 \leq z \leq L_z$ равномерную по пространству и по времени сетку $\Omega_{xyzt} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$, $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N_x - 1}, y_j = h_y j\}$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N_y - 1}, y_j = h_y j\}$, $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N_z - 1}, z_k = h_z k\}$, $\omega_t = \{t_p, p = \overline{0, N_t}, t_p = h_t p\}$. Отметим, что число шагов по времени N_t заранее не определено. Для всех газодинамических величин, зависящих от пространственных координат, введем

сеточные функции: для плотности $\rho_{ijk} = \rho(x_i, y_j, z_k, t_p)$, аналогично для других величин. Размерности сеточных функций такие же, как и размерности соответствующих физических величин.

Используем явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями со вторым порядком, а производных по времени с первым порядком. Алгоритм построения разностной схемы такой же, как в работах [5–8]. Расчет по явной схеме соответствует эволюции газодинамического течения по времени.

Выпишем периодические граничные условия в разностном виде.

$$\begin{aligned}
 \rho_{ij0} &= \rho_{ij(N_z-2)}, & \rho_{ij(N_z-1)} &= \rho_{ij1}, & i &= \overline{1, N_x-2}, \quad j = \overline{1, N_y-2}, \\
 \rho_{i0k} &= \rho_{i(N_y-2)k}, & \rho_{i(N_y-1)k} &= \rho_{i1k}, & i &= \overline{1, N_x-2}, \quad k = \overline{1, N_z-2}, \\
 \rho_{0jk} &= \rho_{(N_x-2)jk}, & \rho_{(N_x-1)jk} &= \rho_{1jk}, & j &= \overline{1, N_y-2}, \quad k = \overline{1, N_z-2}, \\
 \rho_{i00} &= \rho_{i(N_y-2)(N_z-2)}, \quad \rho_{i(N_y-1)0} = \rho_{i1(N_z-2)}, \quad \rho_{i0(N_z-1)} = \rho_{i(N_y-2)1}, \quad \rho_{i(N_y-1)(N_z-1)} = \rho_{i11}, & i &= \overline{1, N_x-2}, \\
 \rho_{0j0} &= \rho_{(N_x-2)j(N_z-2)}, & \rho_{(N_x-1)j0} &= \rho_{1j(N_z-2)}, & & \\
 \rho_{0j(N_z-1)} &= \rho_{(N_x-2)j1}, & \rho_{(N_x-1)j(N_z-1)} &= \rho_{1j1}, & j &= \overline{1, N_y-2}, \quad (17) \\
 \rho_{00k} &= \rho_{(N_x-2)(N_y-2)k}, \quad \rho_{(N_x-1)0k} = \rho_{1(N_y-2)k}, \quad \rho_{0(N_y-1)k} = \rho_{(N_x-2)1k}, \quad \rho_{(N_x-1)(N_y-1)k} = \rho_{11k}, & k &= \overline{1, N_z-2}, \\
 \rho_{000} &= \rho_{(N_x-2)(N_y-2)(N_z-2)}, \quad \rho_{0(N_y-1)0} = \rho_{(N_x-2)1(N_z-2)}, \quad \rho_{00(N_z-1)} = \rho_{(N_x-2)(N_y-2)1}, \quad \rho_{0(N_y-1)(N_z-1)} = \rho_{(N_x-2)11}, \\
 \rho_{(N_x-1)00} &= \rho_{1(N_y-2)(N_z-2)}, \quad \rho_{(N_x-1)(N_y-1)0} = \rho_{11(N_z-2)}, \quad \rho_{(N_x-1)0(N_z-1)} = \rho_{1(N_y-2)1}, \quad \rho_{(N_x-1)(N_y-1)(N_z-1)} = \rho_{111}.
 \end{aligned}$$

Длину свободного пробега молекул газа для начальных условий определим так: $\lambda_0 = \mu_0 / (\rho_0 \sqrt{2\pi RT_0} \cdot \Omega / 4)$, где $\Omega = 30 / ((7 - 2\omega)(5 - 2\omega))$ [14]. Используемая математическая модель требует выполнения условия $\lambda_0 \ll h$. Это условие справедливо для всех расчетов настоящей работы. Шаг по времени определим из условия Куранта [3, с. 140]: $h_t = \alpha h / c_{s0}$, где $\alpha = 0.1$ – число Куранта. Отметим, что в приведенных расчетах $h_x = h_y = h_z = h$, и эта величина входит в выражение релаксационного параметра τ (16). Для сравнения результатов расчетов с данными из литературы введем безразмерное значение времени:

$$t_{dl} = t / t_0, \text{ где } t_0 = L / c_{s0} \approx 10^{-4} \text{ с.} \quad (18)$$

Расчет по явной схеме проводится на многопроцессорном комплексе К-100, при этом авторы используют технологию распараллеливания вычислений, основанную на декомпозиции расчетной области плоскостями $x = const$. Такая технология использует стандарт передачи сообщений MPI и с успехом применялась в работах [7–8]. Отметим, что программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI.

Построение энергетического спектра

Вычислим спектр кинетической энергии газа для заданного распределения плотности и скорости в фиксированный момент времени. Аналогично [15, с. 55], введем коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned}
 a_x^{lmn} &= 8 \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} C \sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{xijk} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right), \\
 a_y^{lmn} &= 8 \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} C \sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{yijk} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right) \quad (19) \\
 a_z^{lmn} &= 8 \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} C \sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{zijk} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right)
 \end{aligned}$$

Величина $C=1$, если никакой из индексов i, j, k не равен своему граничному значению: $i \neq 0, i \neq N_x - 1, j \neq 0, j \neq N_y - 1, k \neq 0, k \neq N_z - 1$ (точка i, j, k не лежит на границе расчетной области). Величина $C=1/2$, если один из индексов i, j, k равняется своему граничному значению, а два других нет: $i=0$ или $i=N_x - 1, j \neq 0, j \neq N_y - 1, k \neq 0, k \neq N_z - 1$, аналогично для j, k (точка i, j, k лежит на грани расчетной области, но не на ребре и не является угловой). Величина $C=1/4$, если два из индексов i, j, k равняется своему граничному значению, а третий нет: $i=0$ или $i=N_x - 1, j=0$ или $j=N_y - 1, k \neq 0, k \neq N_z - 1$, аналогично для пар j, k и i, k (точка i, j, k лежит на ребре расчетной области, но не является угловой). Наконец, величина $C=1/8$, если каждый из индексов i, j, k равен своему граничному значению: $i=0$ или $i=N_x - 1, j=0$ или $j=N_y - 1, k=0$ или $k=N_z - 1$, (точка i, j, k является угловой).

Формулы (19) можно получить, исходя из выражения для коэффициентов Фурье функции одной переменной [16, с. 472]

$$a^l = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \cos\left(\frac{l\pi\xi}{L}\right) d\xi \quad (20)$$

В (20) предполагается, что индекс $l=0, 1, \dots, \infty$. При выводе формул (19) полагаем $f = \sqrt{\frac{\rho}{2}} u_x$, применяем (20) сначала для $\xi \equiv x$, при этом $L = h_x(N_x - 1)$. Вычисляем интеграл методом трапеций. К полученным коэффициентам разложения по x применяем аналогичную, основанную на формуле (20) процедуру разложения по y и z . В результате получаем первую из формул (19). Две другие формулы соответствуют разложению $\sqrt{\frac{\rho}{2}} u_y$ и $\sqrt{\frac{\rho}{2}} u_z$. Выбор

именно этих функций требуется для построения энергетического спектра турбулентных колебаний в газе и обусловлен равенством Парсеваля.

Так как разлагаемые функции заданы на сетке, максимальные значения индексов l, m, n ограничены согласно теореме Котельникова: $l = \overline{0, N_x - 2}$, $m = \overline{0, N_y - 2}$, $n = \overline{0, N_z - 2}$.

Одномерное преобразование Фурье, обратное (20), выглядит так [16, с. 472]

$$f(x) \approx \frac{a^0}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} a^l \cos\left(\frac{l\pi x}{L}\right) \quad (21)$$

Здесь учтено, что коэффициенты при синусах равны нулю, поскольку функция $f(\xi)$ задана на интервале $0 \leq \xi \leq L$ и может быть продолжена для $-L \leq \xi < 0$ четным образом. Отметим, что прямое (20) и обратное (21) преобразования справедливы для любой кусочно-гладкой $f(\xi)$. Используя (19), (20) и (21), можно выписать формулы обратного Фурье-преобразования для трехмерного дискретного случая:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{xijk} \approx (1/NNN) & \left[\frac{1}{8} a_x^{000} + \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{N_x-2} a_x^{l00} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{N_y-2} a_x^{0m0} \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) + \right. \\ & + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{N_z-2} a_x^{00n} \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N_y-2} \sum_{n=1}^{N_z-2} a_x^{0mn} \cos\left(\frac{m\pi i}{N_y-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N_x-2} \sum_{n=1}^{N_z-2} a_x^{l0n} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N_x-2} \sum_{m=1}^{N_y-2} a_x^{lm0} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) + \\ & \left. + \sum_{l=1}^{N_x-2} \sum_{m=1}^{N_y-2} \sum_{n=1}^{N_z-2} a_x^{lmn} \cos\left(\frac{l\pi i}{N_x-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi j}{N_y-1}\right) \cos\left(\frac{n\pi k}{N_z-1}\right) \right] \quad (22) \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение $NNN = (N_x - 1)(N_y - 1)(N_z - 1)$. Заменяя в (22)

u_{xijk} на u_{yijk} и a_x^{lmn} на a_y^{lmn} , получим обратное преобразование для $\sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{yijk}$,

аналогично получим преобразование для $\sqrt{\frac{\rho_{ijk}}{2}} u_{zijk}$.

Используя (19), построим одномерный энергетический спектр турбулентных колебаний. Введем сеточную функцию a_2^{lmn} :

$$a_2^{lmn} = C_2 ((a_x^{lmn})^2 + (a_y^{lmn})^2 + (a_z^{lmn})^2), \quad (23)$$

где $C_2 = 1/8$ при $l > 0, m > 0, n > 0$; $C_2 = 1/16$ при $l = 0, m > 0, n > 0$ или $l > 0, m = 0, n > 0$ или $l > 0, m > 0, n = 0$; $C_2 = 1/32$ при $l = 0, m = 0, n > 0$ или $l = 0, m > 0, n = 0$ или $l > 0, m = 0, n = 0$; $C_2 = 1/64$ при $l = 0, m = 0, n = 0$.

Выпишем равенство Парсеваля в одномерном случае [16, с. 479, 497]:

$$\frac{(a^0)^2}{2} + \sum_{l=1}^{\infty} (a^l)^2 = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi)^2 d\xi \quad (24)$$

Здесь учтено, что коэффициенты при синусах равны нулю, и функция $f(\xi)$ задана на интервале $0 \leq \xi \leq L$. Используя (23), (24) и (19), выпишем трехмерный аналог равенства Парсевала для нашего случая:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_2^{lmn} = NNN^2 \frac{1}{V_0} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} \frac{1}{2} (\rho u_x^2 + \rho u_y^2 + \rho u_z^2) dx dy dz \quad (25)$$

Заметим, что $\frac{1}{2}(\rho u_x^2 + \rho u_y^2 + \rho u_z^2) = E_{kin}$ – кинетическая энергия единицы объема газа. Объем расчетной области определяется как $V_0 = L_x L_y L_z$. Учтем, что значения индексов l, m, n ограничены сверху, тогда можно записать (25) так:

$$\sum_{n=0}^{N_z-2} \sum_{m=0}^{N_y-2} \sum_{l=1}^{N_x-2} a_2^{lmn} \approx NNN^2 \frac{1}{V_0} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} E_{kin} dx dy dz \quad (26)$$

Введем энергетический спектр следующим образом:

$$EK(K) = (1/NNN^2) \sum_{l,m,n} a_2^{lmn}, \quad K - 1/2 \leq (l^2 + m^2 + n^2)^{1/2} < K + 1/2. \quad (27)$$

Здесь K – целое волновое число, $0 \leq K \leq K_{max}$, a_2^{lmn} определяется равенствами (23) и (19). Для каждого значения K суммирование проводится по всем значениям l, m, n , удовлетворяющим приведенным в (27) неравенствам. Отметим, что каждый набор l, m, n учитывается в (27) лишь один раз. Максимальное волновое число K_{max} положим равным $K_{max} = \min(N_x, N_y, N_z) - 2$. Используя определение (27), запишем равенство Парсевала (26) так:

$$\sum_{K=0}^{K_{max}} EK(K) \approx \frac{1}{V_0} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} E_{kin} dx dy dz \quad (28)$$

В правой части (28) записана средняя кинетическая энергия газа в расчетной области. Из (28) видно, что величину $EK(K)$ можно рассматривать как среднюю по объему кинетическую энергию турбулентных колебаний, которая соответствует волновому числу K .

Равенству (28) можно придать интегральный вид, если рассмотреть его левую часть как интегральную сумму:

$$\int_0^{K_{\max}+1} EK(K)dK \approx \frac{1}{V_0} \int_0^{L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_x} E_{kin} dx dy dz \quad (29)$$

Также равенство (28) можно записать в дискретном виде, вычисляя интегралы в его правой части методом трапеций:

$$\sum_{K=0}^{K_{\max}} EK(K) \approx \frac{1}{NNN} \sum_{k=0}^{N_z-1} \sum_{j=0}^{N_y-1} \sum_{i=0}^{N_x-1} C \frac{1}{2} (\rho_{ijk} u_{xijk}^2 + \rho_{ijk} u_{yijk}^2 + \rho_{ijk} u_{zijk}^2) \quad (30)$$

Коэффициент C определяется так же, как в (19). Равенство (30) может служить средством проверки корректности вычисления спектра $EK(K)$ при компьютерном моделировании.

Таким образом, для заданного распределения плотности и скорости в фиксированный момент времени можно вычислить энергетический спектр $EK(K)$ (27), при этом справедливы равенства (28)–(30). Также возможно построить начальное распределение скорости (1) путем задания начальных коэффициентов Фурье (19).

Ниже будем считать, что расчетная область представляет собой куб, при этом ребро куба $L_x = L_y = L_z = L = 0.032$ м, число узлов сетки на ребре расчетной области $N_x = N_y = N_z = N$, $NNN = (N-1)^3$, шаг пространственной сетки $h_x = h_y = h_z = h$, $L = h(N-1)$. Начальное распределение скорости (1) зададим через начальные коэффициенты Фурье (19):

$$a_x^{020} = A_0, \quad a_y^{002} = -A_0, \quad a_z^{200} = A_0. \quad (31)$$

Остальные значения a_x^{lmn} , a_y^{lmn} , a_z^{lmn} при $l = \overline{0, N-2}$, $m = \overline{0, N-2}$, $n = \overline{0, N-2}$ положим равными нулю. При этом, согласно обратному преобразованию Фурье (22), начальные скорости будут определяться равенствами

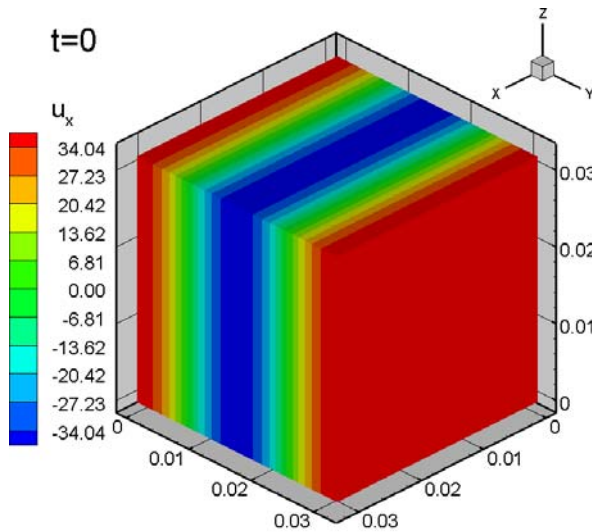
$$\begin{aligned} u_{xijk} &= A_0 \sqrt{\frac{1}{8\rho_0}} \cos\left(\frac{2\pi j}{N-1}\right) / NNN, & u_{yijk} &= -A_0 \sqrt{\frac{1}{8\rho_0}} \cos\left(\frac{2\pi k}{N-1}\right) / NNN, \\ u_{zijk} &= A_0 \sqrt{\frac{1}{8\rho_0}} \cos\left(\frac{2\pi i}{N-1}\right) / NNN, & i &= \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, N-1}, \quad k = \overline{0, N-1}, \end{aligned} \quad (32)$$

Видно, что выражения (32) совпадают с (1) с учетом $L = h(N-1)$ и выбора начального параметра $A_0 = U_0 \sqrt{8\rho_0} \cdot NNN$.

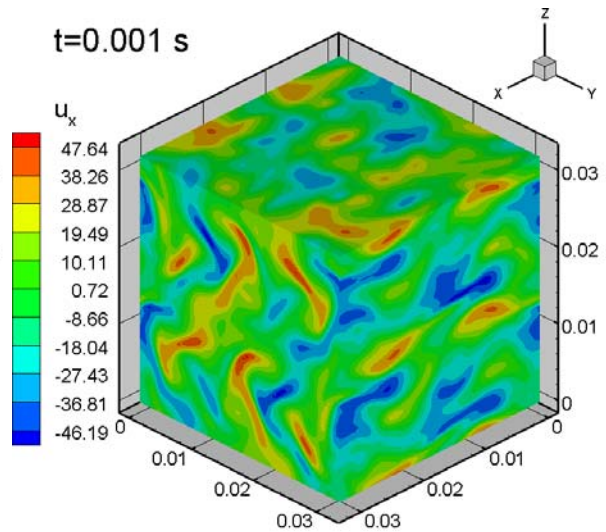
Результаты расчетов

Общая структура течения представлена на рис. 1, на котором показаны линии уровня скорости u_x на гранях расчетной области в различные моменты времени до $t=0.015$ с, в безразмерном виде до $t_{dl}=15$, t_{dl} определяется выражением (18).

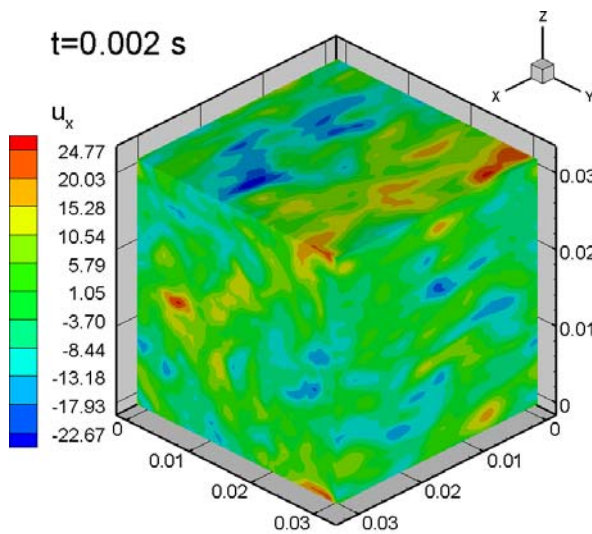
Параметры расчета, представленного на рис. 1, следующие: размер сетки 65^3 (т. е. $N=65$), шаг сетки $h=5\cdot 10^{-4}$ м, $\beta=0.8$, $Re=5\cdot 10^4$. В нашей постановке значение $Re=5\cdot 10^4$ определяет начальные условия, которые приблизительно соответствуют нормальным условиям для азота: $\rho_0=0.949$ кг/м³, $p_0=0.769\cdot 10^5$ Па. Длина свободного пробега в этом случае $\lambda_0=6.33\cdot 10^{-8}$ м, и условие $\lambda_0 \ll h$ выполняется.



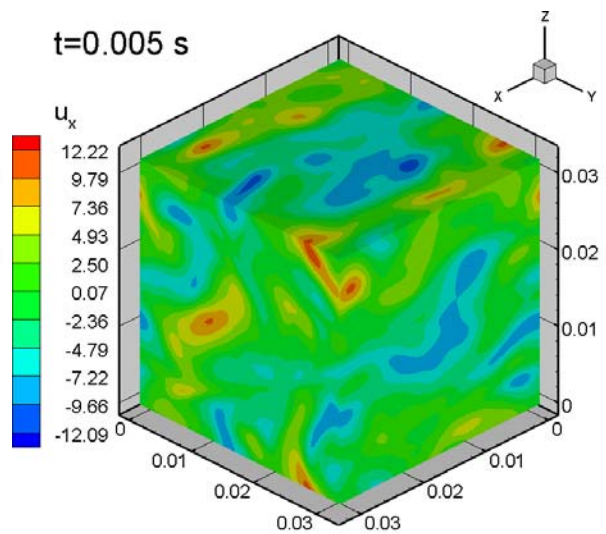
(а)



(б)



(в)



(г)

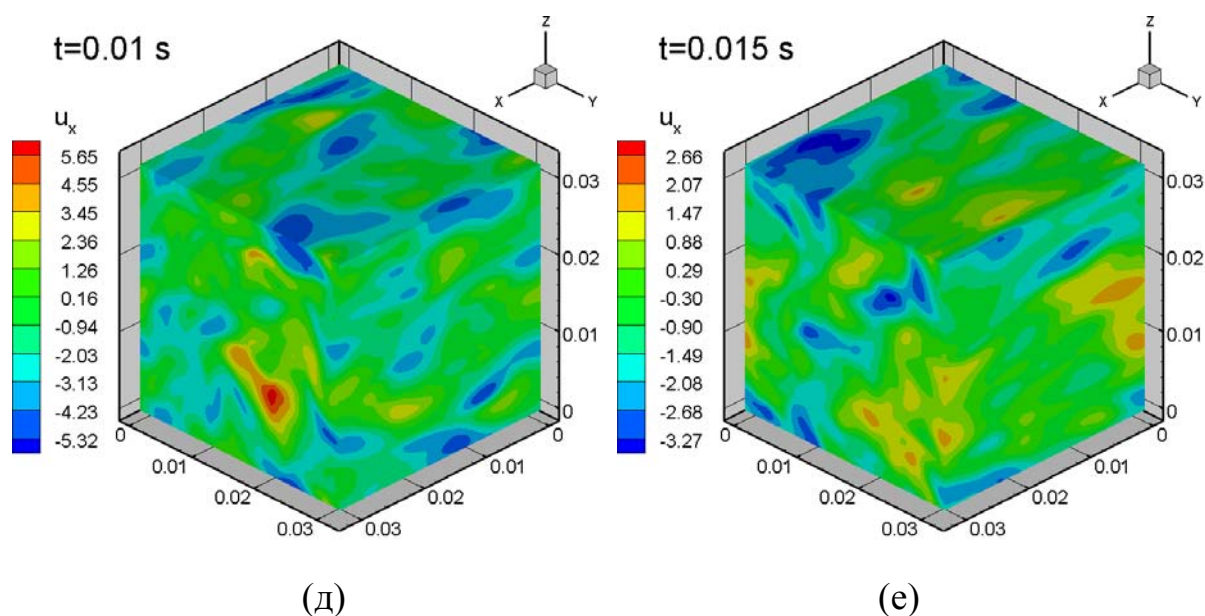


Рис. 1

Видно, что регулярное распределение скорости (1) в начальный момент (рис. 1а) превращается в хаотическое распределение, характерное для турбулентного течения. При этом максимальное значение модуля скорости u_x убывает, за исключением перехода от $t=0$ (рис. 1а) к $t=0.001$ с (рис. 1б).

Влияние параметра регуляризации. Коэффициент β , входящий в выражение для параметра регуляризации τ (16), является настроечным параметром подсеточной диссипации. Расчеты при различных значениях этого коэффициента позволяют определить его оптимальное значение для расчета различных задач моделирования турбулентных течений.

На рис. 2 представлены энергетические спектры (27) для $\beta=0.1$ (а), $\beta=0.5$ (б), $\beta=0.8$ (в) и $\beta=1$ (г). При этом размер сетки 65^3 , шаг сетки $h=5 \cdot 10^{-4}$ м, а число Рейнольдса $Re=5 \cdot 10^4$. Спектры изображены для одних и тех же моментов времени (соответствующих рис. 1) до $t=0.02$ с, в безразмерном виде до $t_{dl}=20$, t_{dl} определяется выражением (18).

Величина $EK(K)$ измеряется в $\text{кг}/(\text{мс}^2)$ и ее можно рассматривать как среднюю по объему удельную кинетическую энергию турбулентных пульсаций, которая соответствует безразмерному волновому числу K .

Также на рис. 2 приведены параллельные прямые с угловым коэффициентом $-5/3$, соответствующим колмогоровскому закону убывания энергии турбулентных пульсаций с увеличением их частоты [17, с. 192].

Полученные энергетические спектры хорошо соответствует результатам расчета распада однородной турбулентности, полученной другими численными методами высоких порядков точности в рамках LES моделей (моделирование крупных вихрей), см., например [4, 10–12].

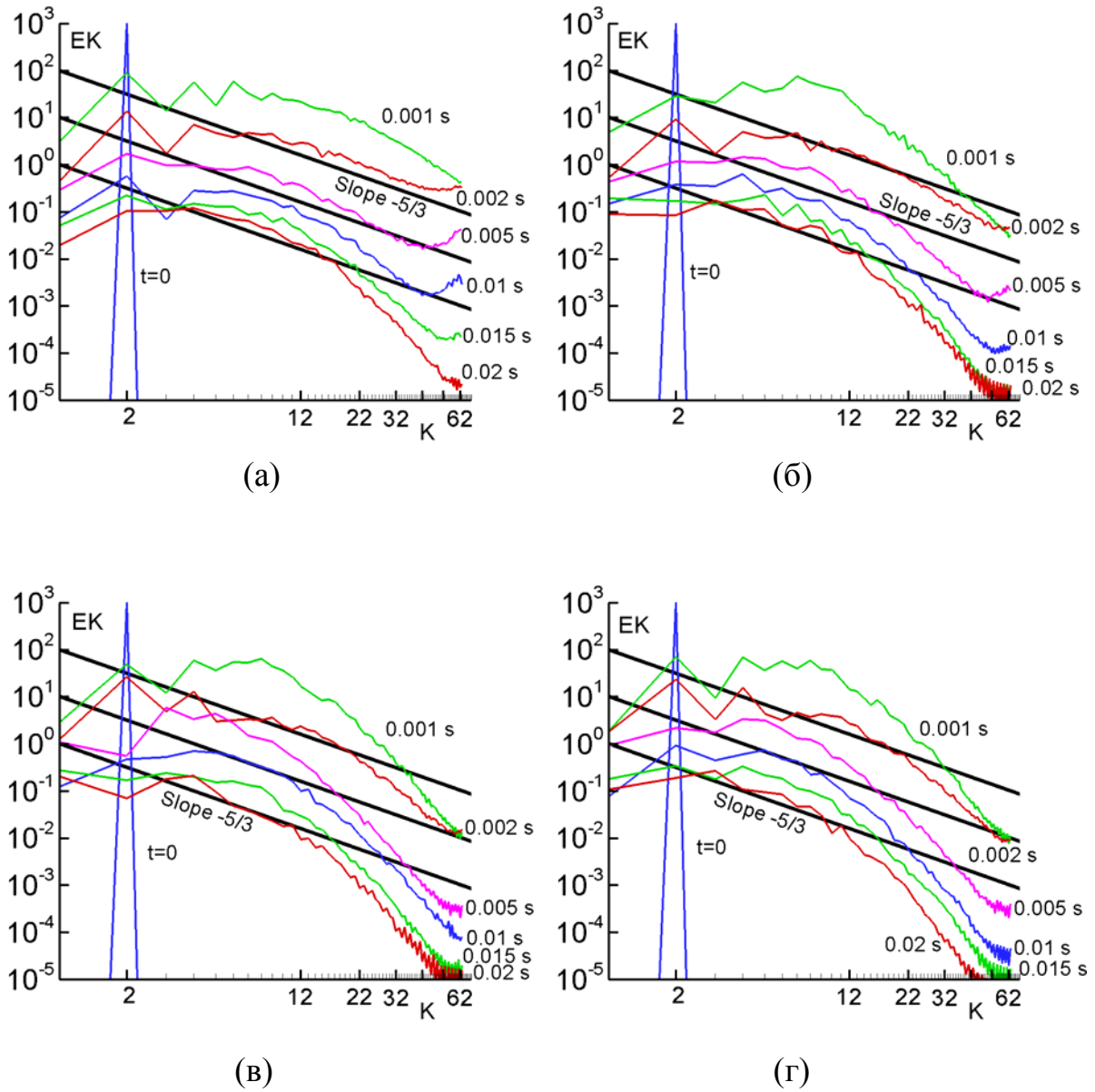


Рис. 2

Видно, что вычисленные спектры в целом хорошо согласуются с указанным законом в инерционном диапазоне волновых чисел. Однако для малых значений настроечного параметра $\beta = 0.1$ (рис. 2а) и $\beta = 0.5$ (рис. 2б) спектральные кривые имеют участок возрастания при больших волновых числах, что физически некорректно. С увеличением значения настроечного параметра, а именно при $\beta = 0.8$ (рис. 2в) и $\beta = 1$ (рис. 2г) участок возрастания практически исчезает. Подходящими значениями параметра регуляризации β являются величины из интервала 0.5–1. Как показала практика численного моделирования, именно такие значения используются в расчетах по КГД-алгоритмам.

Отметим, что моделирование вырождения однородной изотропной турбулентности является общепринятым методом калибровки многообразных численных параметров, входящих в модели турбулентной вязкости в LES и DES подходах и их вариациях [4, с. 59].

Влияние сетки. На рис. 3 и рис. 2в приведены результаты расчетов на различных пространственных сетках: 17^3 , шаг сетки $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м (рис. 3а); 33^3 , шаг сетки $h = 10^{-3}$ м (рис. 3б); 65^3 , шаг сетки $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м (рис. 2в). Остальные параметры одинаковы: $Re = 5 \cdot 10^4$, $\beta = 0.8$. Кривые спектра изображены для одних и тех же моментов времени.

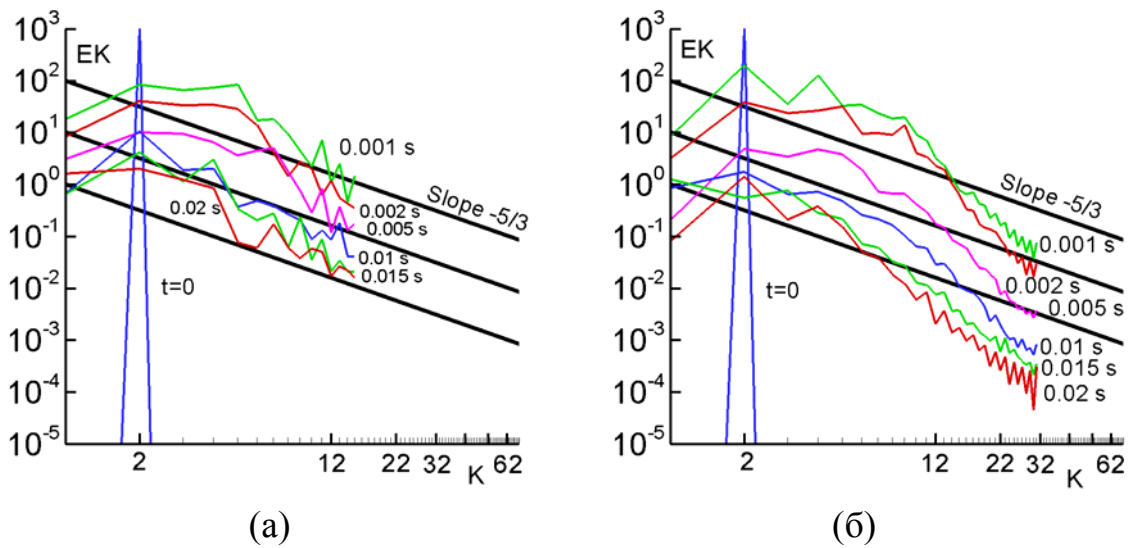


Рис. 3

Видно, что результаты на различных сетках качественно одинаковы, что говорит о физически адекватном поведении турбулентного сглаживания даже на очень грубых пространственных сетках. Последнее весьма существенно для расчетов практических задач. При увеличении размера пространственной сетки кривые спектральной плотности становятся более гладкими и все более точно отражают основные особенности диссипации кинетической энергии [4].

Диссипация кинетической энергии. Убывание максимального значения модуля скорости (рис. 1) соответствует убыванию средней по объему удельной кинетической энергии газа со временем, что иллюстрирует рис. 4. Отметим, что из (29) следует, что значение кинетической энергии на оси ординат рис. 4 равно площади под кривой спектра на рис. 2–3. Для расчетов, соответствующих рис. 4, размер сетки 65^3 , шаг сетки $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м.

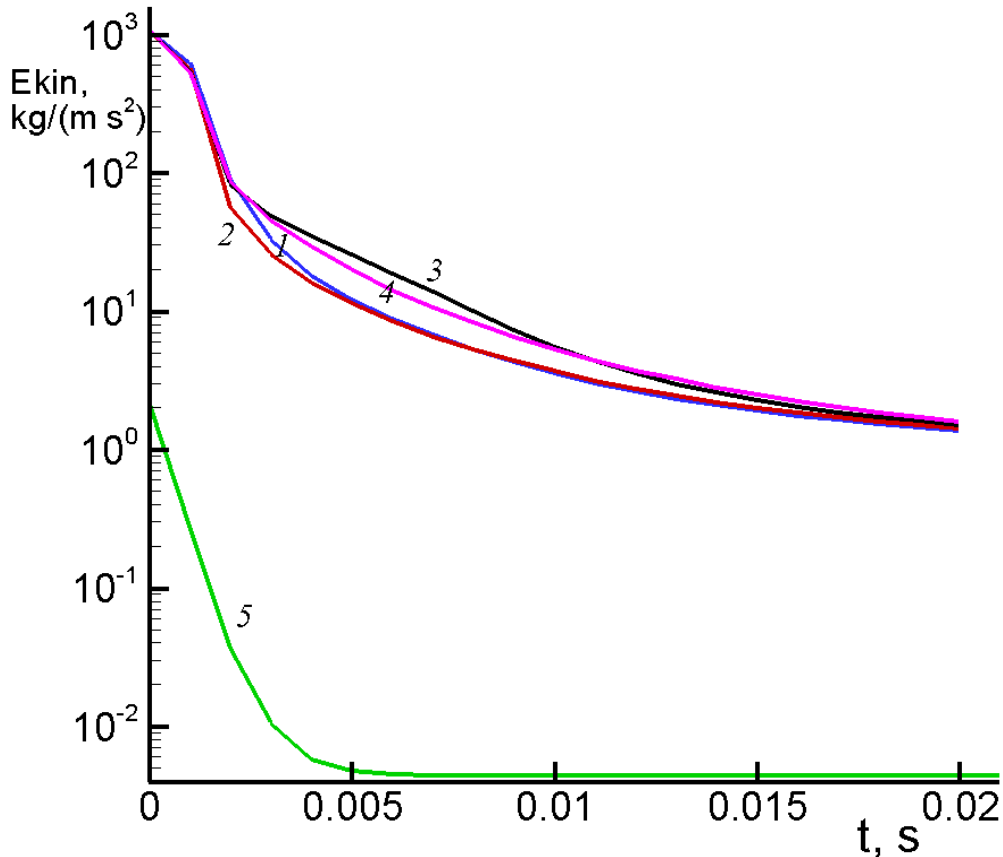


Рис. 4

Кривые 1–4 показывают результаты расчетов для $\beta = 0.1, 0.5, 0.8$ и 1 соответственно, $Re = 5 \cdot 10^4$. Убывание кинетической энергии объясняется вязкой диссипацией, присущей данной системе. Из представленных кривых видно, что скорость диссипации суммарной кинетической энергии системы практически не зависит от величины коэффициента β .

Ламинарное течение. Достоинством КГД–модели является возможность ее применения как для ламинарного, так и для турбулентного случая без какой-либо подстройки подсеточной модели вязкости.

Кривая 5 на рис. 4 показывает результат расчета для $Re = 100$, что отвечает ламинарному режиму течения. При этом газ является разреженным по сравнению с нормальными условиями: $\rho_0 = 1.90 \cdot 10^{-3}$ кг/м³, $p_0 = 1.54 \cdot 10^2$ Па. Размер сетки 33^3 , шаг сетки $h = 10^{-3}$ м. Этот расчет соответствует длине свободного пробега $\lambda_0 = 3.17 \cdot 10^{-5}$ м и условие $\lambda_0 \ll h$ выполняется. В ламинарном случае форма кривой затухания кинетической энергии отличается от турбулентного случая при $Re = 5 \cdot 10^4$.

На рис. 5а приведено распределение скорости u_x и линии тока при расчете указанного ламинарного течения ($Re = 100$) для момента времени $t = 0.02$ с в среднем сечении $z = 0.016$ м.

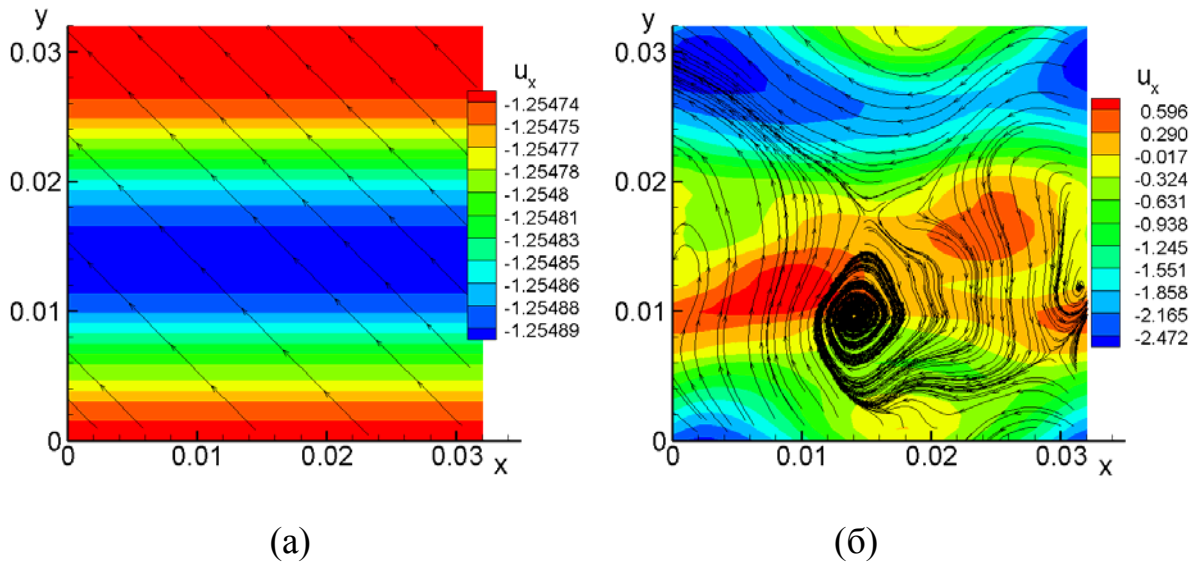


Рис. 5

К рассматриваемому моменту времени течение становится практически постоянным изотропным потоком, в котором распределение скорости u_x почти однородно (минимальное значение $u_x = -1.25489$, а максимальное $u_x = -1.25474$). При этом кинетическая энергия постоянного потока мала по сравнению с энергией начального распределения и практически не убывает вследствие малости градиента скорости. Для сравнения на рис. 5б приведено аналогичное распределение для $Re = 5 \cdot 10^4$ в тот же момент времени $t = 0.02$ с, которое соответствует турбулентному потоку.

Выводы

Приведенные расчеты показывают перспективность применения КГД-алгоритма для расчета турбулентных газодинамических течений.

Помимо тестирования алгоритма, данные расчеты могут представлять интерес для задач физики атмосферы, когда требуется оценить времена диссипации одиночных вихревых образований с последующим формированием областей турбулентности. Другой областью применения может быть задача о генерации шума при разрушении вихрей, формирующихся в следе самолетов и других быстро движущихся объектов.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект РФФИ 13-01-00703-а.

Литература

- [1] Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. Москва: Макс Пресс. 2004.
- [2] Ю.В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2009.
- [3] Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва: Научный мир. 2007. – 352 с.
- [4] А.В. Гарбарук, М.Х. Стрелец, М.Л. Шур. Моделирование турбулентности в расчетах сложных течений. СПб: Изд-во Политехн. университета, 2012. – 88 с.
- [5] Т.Г. Елизарова, П.Н. Никольский. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 4, с. 14–17.
- [6] T.G. Elizarova, V.V. Seregin. Filtered simulation method for turbulent heat and mass transfer in gas dynamic flows. Proceedings of the 6th International Symposium on turbulence, heat and mass transfer, Rome, Italy, 14–18, September 2009. Edited by K. Hanjalic, Y. Nagano, S. Jakirilic. Begell House Inc., p. 383–386.
- [7] I. A. Shirokov, T.G. Elizarova, I. Fedioun, J.-C. Lengrand. Numerical simulation of the laminar-turbulent boundary-layer transition on a hypersonic forebody using the quasi-gas dynamic equations. 4th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS) 4–10 July 2011, St-Petersburg.
- [8] И.А. Широков, Т.Г. Елизарова. Численное моделирование колебательного течения в окрестности гиперзвукового летательного аппарата. Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 1, с. 21–32.
- [9] <http://www.kiam.ru>
- [10] G. Compte-Bellot, S. Corrsin. Simple Eulerian time correlation of full and narrow-band velocity signals in grid-generated, ‘isotropic’ turbulence. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, part 2, pp. 273–337.

- [11] M. Brachet, D. Meiron, S. Orszag, B. Nickel, R. Morf, U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 130, pp. 411–452.
- [12] E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation. *J. of Computational Physics*, 1999, vol. 153, pp. 273–311.
- [13] Таблица физических величин. Справочник под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.
- [14] Bird G.A. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon press, Oxford, 1998.
- [15] М.Е. Ладонкина. Численное моделирование турбулентного перемешивания с использованием высокопроизводительных систем. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, 2005.
- [16] Б.М. Будак, С. В. Фомин. *Кратные интегралы и ряды*. Москва: Наука. 1967. – 608 с.
- [17] Л.Д. Ландау, В.М. Лившиц. *Гидродинамика*. Москва: Наука. 1988. – 736 с.