



**Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н.,
Емельянов Н.В.**

Разложение вековой части
возмущающей функции для
орбит с большими
полуосями, сравнимыми по
величине

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Разложение вековой части возмущающей функции для орбит с большими полуосями, сравнимыми по величине // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 43. 27 с.
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-43>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.А. Вашковьяк, С.Н. Вашковьяк, Н.В. Емельянов

**РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ
ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ
ДЛЯ ОРБИТ С БОЛЬШИМИ ПОЛУОСЯМИ,
СРАВНИМЫМИ ПО ВЕЛИЧИНЕ**

Москва – 2013

М.А. Вашковьяк¹, С.Н. Вашковьяк², Н.В. Емельянов^{2,3}

¹ *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, vashkov@keldysh.ru.* ² *Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга, vashkov@sai.msu.ru, emelia@sai.msu.ru.* ³ *Парижская обсерватория, Институт небесной механики и вычисления эфемерид.*

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ ОРБИТ С БОЛЬШИМИ ПОЛУОСЯМИ, СРАВНИМЫМИ ПО ВЕЛИЧИНЕ

В работе предложено специальное представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения планет (спутников). В отличие от известных разложений оно использует ее асимптотику при близких значениях больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего тел, а также имеет единую аналитическую форму для внешнего и внутреннего вариантов задачи. Полученное выражение представляет собой частичную сумму степенного ряда по малым эксцентриситетам и синусам углов наклона орбит.

Ключевые слова: взаимное притяжение планет (спутников), вековые возмущения, осредненная возмущающая функция, близкие орбиты.

Mikhail Alexandrovich Vashkov'yak¹, Sophia Nikolaevna Vashkov'yak², Nikolai Vladimirovich Emelyanov^{2,3}

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, vashkov@keldysh.ru.*

² *Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute, vashkov@sai.msu.ru, emelia@sai.msu.ru.* ³ *L'observatoire de Paris, Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides.*

THE DEVELOPMENT OF SECULAR PART OF PERTURBING FUNCTION FOR THE ORBITS WITH COMPARABLE SEMI-MAJOR AXIS

The special representation for secular part of perturbing function of mutual planet (satellite) attraction is proposed. Unlike from known developments it uses her asymptotic with comparable values of semi-major axis and has united analytical form for external and internal variants of problem. The formula received is a partial sum of power row relative of small eccentricities and sin of orbital inclinations.

Key words: mutual planet (satellite) attraction, secular perturbations, averaged perturbing function, close orbits.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект 12-02-00294-а.

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Возмущающая функции взаимного притяжения в планетной или спутниковой задачах обычно находится с помощью разложения в ряды по степеням малых параметров. Такими параметрами являются эксцентриситеты и взаимные наклонения орбит гравитационно-взаимодействующих тел. Кроме того, «условно малым» параметром можно считать и отношение больших полуосей этих орбит $\alpha < 1$. Естественно, что простота выкладок и успех в достижении цели зависят от малости этого отношения. Однако, его численное значение (в отличие от эксцентриситетов и наклонений) обычно не слишком мало. Более того, в некоторых случаях указанное отношение оказывается достаточно близким к единице, и тогда возникают вычислительные трудности, связанные с необходимостью учета большого числа членов в соответствующих рядах, а иногда решение задачи может оказаться невозможным.

В данной работе предложен новый метод представления вековой части возмущающей функции, обусловленной взаимным притяжением J планет (или спутников), как функции больших полуосей орбит, использующий ее асимптотику именно при $\alpha \rightarrow 1$. Это и является целью настоящей разработки. Новизна заключается в том, что вместо традиционно применяемых разложений в ряды по степеням отношений больших полуосей орбит (или коэффициентов Лапласа) построены ряды по степеням специального параметра – квадрата отношения разности квадратов больших полуосей к их сумме, который стремится к нулю при отношении больших полуосей, стремящемся к единице. С использованием нового метода самые неблагоприятные для вычислений случаи становятся самыми благоприятными.

В наших исследованиях мы ограничимся вековой частью возмущающей функции. Именно эта часть представляет наибольший интерес, поскольку она вносит наибольший вклад в эволюцию движения. Для построения разложения мы используем гипергеометрические функции Гаусса с особенностями, обусловленными возможностью относительной близости орбит обоих тел.

Укажем на некоторые приложения, в которых преимущества нового подхода будут очевидными. Относительно недавно, в 2012 году около одной из звезд, похожей на Солнце и удаленной от него на расстояние примерно 1.2 тыс. световых лет, была обнаружена уникальная планетарная система, получившая название Кеплер-36 (Картер и др., 2012). В этой системе относительно центральной звезды (Кеплер-36А) обращаются две сильно различающиеся по своим физическим характеристикам планеты. Планета (Кеплер-36В) с массой примерно $4.5M_{\oplus}$ движется по орбите с большой полуосью около 18 млн. км. Планета (Кеплер-36С) с массой примерно $8.1M_{\oplus}$ движется на расстоянии немногим более 19 млн. км. Периоды обращений планет составляют примерно 14 и 16 дней, а в моменты соединений их взаимное расстояние составляет менее 2 млн. км. Если предположить, что орбиты обеих планет системы примерно

компланарны и близки к круговым (по предварительным оценкам эксцентриситеты орбит экзопланет не превосходят 0.04), то орбитальная конфигурация системы Кеплер-36(А, В, С) может быть отражена рис. 1.

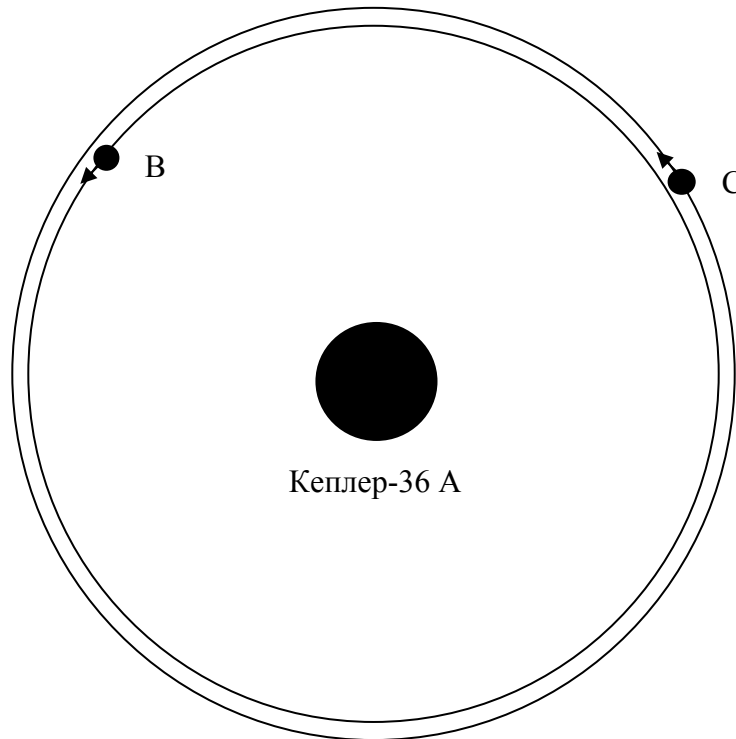


Рис. 1. Примерная орбитальная конфигурация системы Кеплер-36.

По-видимому, необходимость в аналитическом вычислении вековых взаимных возмущений этих экзотранссолнечных планет может возникнуть лишь в достаточно отдаленном будущем, но нам, тем не менее, было интересно убедиться в реальном существовании планетной системы с близкими орбитами.

Другим примером эффективного приложения нового подхода является задача о движениях главных спутников Урана. В этой спутниковой системе орбиты ближайших пар ее главных спутников имеют большие полуоси, сравнимые по величине.

Наличие возможных приложений обеспечивает полезность предлагаемого метода.

Построенные нами ряды расположены по степеням параметра

$$\eta_{ij} = \left(\frac{a_i^2 - a_j^2}{a_i^2 + a_j^2} \right)^2 < 1.$$

Здесь a_i и a_j – не равные друг другу большие полуоси орбит возмущаемого и возмущающего тел, соответственно ($j = 1, 2, 3, \dots, J; i \neq j$). Для получения вековой части возмущающей функции мы используем гипергеометрические функции Гаусса. Однако, помимо аналитической части (степенных рядов) она содержит и неаналитические функции η_{ij}^{-1} , η_{ij}^{-2} , $\ln \eta_{ij}$. Эти особенности обусловлены возможностью относительной близости орбит обоих тел. В процессе выполнения данной работы мы встретили упоминание о преобразовании коэффициентов Лапласа при близких значениях больших полуосей соседних пар планет (спутников) к гипергеометрической функции, содержащей слагаемые, аналогичные по структуре вышеуказанным (Мюррей К., Дермотт С., 2009, с. 282 (задача от Маркуса Анзорга)).

Мы будем использовать предположение о достаточной компланарности орбит планетной или спутниковой системы, т.е. предположение о *малости взаимных наклонов и эксцентриситетов орбит всех тел*. Наклоны орбит отсчитываются относительно основной координатной плоскости, которую удобно связать с плоскостью Лапласа системы тел или с плоскостью экватора планеты. Наклоны обозначим через I_i , I_j ($i, j = 1, 2, 3, \dots, J; i \neq j$). В наших выкладках будут фигурировать параметры $s_i = \sin I_i$, $s_j = \sin I_j$ и эксцентриситеты орбит e_i , e_j . В силу принятых предположений имеем

$$s_i \ll 1, \quad s_j \ll 1, \quad e_i \ll 1, \quad e_j \ll 1.$$

Кроме того, мы предполагаем *отсутствие взаимных пересечений орбит* даже в проекции на основную координатную плоскость

$$r_{\alpha}^{\text{внутр.}} = a_i(1 + e_i) < a_j(1 - e_j) = r_{\pi}^{\text{внешн.}}.$$

Здесь для определенности приняли, что индекс i означает номер внутреннего (возмущаемого) тела, а индекс j – номер внешнего (возмущающего). Естественно, в силу симметрии параметра η_{ij} относительно больших полуосей, индексы i, j взаимозаменяемы. В дальнейшем индексом i мы будем обозначать номер возмущаемого спутника, а индексом j – номер возмущающего спутника независимо от того, который из них внешний, а который – внутренний.

Вышеприведенное неравенство *исключает главную соизмеримость (1:1) средних движений* возмущаемого и возмущающего тел, поскольку из него следует, что $a_i / a_j = (1 - e_j) / (1 + e_i) \approx 1 - e_i - e_j < 1$. С учетом этого неравенства параметр η_{ij} должен быть не слишком малым и удовлетворять неравенствам

$$\left(\frac{-2(e_i + e_j) + e_i^2 - e_j^2}{2 - 2(e_i - e_j) + e_i^2 + e_j^2} \right)^2 < \eta_{ij} < 1,$$

а если пренебречь квадратичными слагаемыми, то $(e_i + e_j)^2 < \eta_{ij} < 1$.

Особенностью параметра η_{ij} (кроме стремления к нулю при $\alpha \rightarrow 1$) является также и его симметрия относительно a_i и a_j , что позволяет получить единую форму разложения независимо от соотношения между ними.

Ранее в нашей работе (Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., 2013а) использован другой «единый» параметр

$$\zeta_j^{(i)} = \left(\frac{2a_i a_j}{a_i^2 + a_j^2} \right)^2 = 1 - \eta_{ij},$$

обладающий аналогичным свойством симметрии, но который при α , стремящемся к единице, также стремится к единице. Для связности изложения мы позволим себе повторить основные исходные соотношения, введенные в указанной работе. В дальнейшем для определенности мы будем говорить о системе спутников планет, хотя все результаты в равной степени можно относить и к любой планетной системе.

Рассмотрим систему, состоящую из произвольного числа спутников J с массами m_j ($j = 1, 2, 3, \dots, J$), обращающихся вокруг центральной планеты массы $m_0 \gg m_j$ вблизи ее экваториальной плоскости по почти круговым орбитам. Их невозмущенные большие полуоси мы уже обозначили через a_j . Введем прямоугольную планетоцентрическую систему координат $Oxyz$, в которой плоскость xOy совпадает с экваториальной плоскостью планеты, причем ось Ox пусть направлена в её точку весеннего равноденствия, ось Oy – направлена в сторону её орбитального движения, а ось Oz – дополняет систему координат до правой. Мы будем использовать уже сделанные предположения (естественные, в частности, для системы главных спутников Урана): эксцентриситеты спутниковых орбит и синусы их экваториальных наклонений малы, а средние движения спутников $n_j = \sqrt{f(m_0 + m_j)} a_j^{-3/2}$, где f – гравитационная постоянная, несоизмеримы.

В системе J спутников выделим спутник с номером i , возмущаемый притяжением $J - 1$ возмущающих тел. Тогда возмущающая функция для i -го спутника определяется формулой

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J R_{ij}, \quad R_{ij} = \mu_j \left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right),$$

где \mathbf{r}_i , \mathbf{r}_j – планетоцентрические радиус – векторы i -го и j -го спутников, соответственно, $r_j = |\mathbf{r}_j|$, $\Delta_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, $\mu_j = f m_j$.

Обозначим через W_i вековую часть возмущающей функции R_i , т.е. результат её независимого двукратного осреднения по схеме Гаусса. Тогда

$$W_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_i dM_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V_i[x_i(M_i), y_i(M_i), z_i(M_i)] dM_i,$$

$$V_i(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J \mu_j \int_0^{2\pi} \frac{dM_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}, \quad (1)$$

где M_i, M_j – средние аномалии возмущаемого и возмущающего спутников, соответственно.

При сделанных предположениях аналитическое выражение для силовой функции системы материальных гауссовых колец $V_i(x_i, y_i, z_i)$ с точностью до третьей степени включительно относительно элементов e_j, s_j получено в нашей работе (Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., 2013а) с использованием гипергеометрической функции Гаусса, которая может быть представлена различными функциональными рядами

$$F(a, b; c = a + b; z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(a+b)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad (2)$$

$$F(a, b; c = a + b; z) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(n!)^2} \left[\frac{2\psi(n+1) - \psi(n+a) - \psi(n+b) - \ln(1-z)}{2} \right] (1-z)^n, \quad (3)$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2)\dots(a+n-1), \quad \psi(z) = \frac{d[\ln\Gamma(z)]}{dz},$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt,$$

В отличие от вышеуказанной работы, в которой для функции V_i использована формула (2), данная работа основана на применении формулы (3), дающей асимптотику этой функции при $z = \zeta_j^{(i)} \rightarrow 1$ или $\eta_{ij} \rightarrow 0$. С помощью несложных преобразований можно получить следующее разложение

$$V_i = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{j=1}^J \mu_j \sum_{\nu=0}^3 R_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(i,j)} h_j^{\nu_1} k_j^{\nu_2} u_j^{\nu_3} v_j^{\nu_4},$$

$$(j \neq i)$$

$$\text{где } R_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(i,j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_j^2 + a_i^2)^{2n} B_n \eta_{ij}^n}{(a_j^2 + r_i^2)^{2n+1/2}} w_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(i,j,n)},$$

$$B_n = \frac{(4n)!}{2^{6n} (n!)^2 (2n)!}; \quad B_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{16n^2}\right) B_{n-1}, \quad n > 0, \quad B_0 = 1,$$

В качестве элементов орбит мы используем одну из известных систем элементов Лагранжа, связанных с кеплеровскими элементами формулами

$$h_j = e_j \cos \pi_j, \quad k_j = e_j \sin \pi_j, \quad u_j = s_j \cos \Omega_j, \quad v_j = s_j \sin \Omega_j,$$

где $\pi_j = \Omega_j + \omega_j$, Ω_j – долгота восходящего узла, ω_j – аргумент перицентра орбиты j – го спутника, $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$ – степень разложения по элементам Лагранжа орбиты j – го тела. Функции $w_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}^{(i,j,n)}$ являются рациональными функциями x_i, y_i, z_i , однако их достаточно громоздкие выражения здесь не приводятся в силу промежуточной роли в дальнейших вычислениях.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО (e_j, s_j) И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО (e_i, s_i, e_j, s_j) ВКЛЮЧИТЕЛЬНО

Основным и наиболее трудоемким этапом получения аналитического выражения вековой части возмущающей функции W_i является нахождение первого из определенных интегралов формулы (1). Так же, как это сделано в работе (Мюррей К., Дермотт С., 2009), мы будем получать только ту часть возмущающей функции, которая содержит члены второй и четвертой степеней относительно элементов Лагранжа возмущаемого и возмущающего спутников.

Окончательное представление этой функции дается формулой

$$W_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J W_{ji} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J \frac{\mu_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \sum_{v=0}^3 \sum_{l=1}^{L_v} P_{v,l}^{(ij)}(a_i, a_j) Q_{v,l}^{(ij)}(e_i, e_j, \pi_i, \pi_j, s_i, s_j, \Omega_i, \Omega_j),$$

в которой под суммой по l разделены сомножители, зависящие лишь от больших полуосей спутниковых орбит (P), и лишь от их кеплеровских (или лагранжевых) элементов (Q). Число L_v , являющееся верхним пределом суммирования по l , зависит от степени элементов (e_j, s_j) и для $0 \leq v \leq 3$ не превышает 15. В функциях Q , вообще говоря, являющихся бесконечными рядами относительно элементов e_i, s_i, e_j, s_j , сохранены лишь слагаемые до четвертой степени включительно.

В настоящее время получены лишь слагаемые функции W_i , соответствующие значениям $v = 0, 1$. Для $v = 0$ они содержат члены второй и четвертой степени относительно e_i, s_i , а для $v = 1$ – члены третьей степени относительно e_i, s_i и первой степени относительно e_j, s_j . В дальнейшем мы надеемся получить соответствующие слагаемые и для $v=2,3$.

В силу достаточной громоздкости выполняемых выкладок, на различных этапах работы мы прибегали к использованию специализированной программы аналитических вычислений MAPLE.

В качестве вспомогательных функций больших полуосей a_i, a_j мы введем функции

$$C_{ij}^{(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)^q} B_n \eta_{ij}^n; \quad D_{ij}^{(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)^q} G_n \eta_{ij}^n; \\ E_{ij}^{(p,q,r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)^q (n+2)^r} B_n \eta_{ij}^n; \quad F_{ij}^{(p,q,r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^p}{(n+1)^q (n+2)^r} G_n \eta_{ij}^n; \quad (4)$$

(n, p, q, r) – целые числа.

Числовые коэффициенты степенных рядов B_n были определены выше, а G_n определяются рекуррентной формулой

$$G_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{16n^2}\right) G_{n-1} + \left(\frac{3}{8n^3} - \frac{1}{n^2}\right) B_{n-1}, \quad n > 0, \quad G_0 = 6 \ln 2.$$

Укажем, что эти введенные функции играют роль коэффициентов Лапласа в классических разложениях.

Для того, чтобы не загромождать основной текст, основной формульный и табличный материал вынесен в приложения. В приложениях 1 и 2 приводятся формулы функций $P_{\nu,l}^{(ij)}(a_i, a_j)$, $Q_{\nu,l}^{(ij)}(e_i, e_j, \pi_i, \pi_j, s_i, s_j, \Omega_i, \Omega_j)$ для значений $\nu = 0, 1$, а также таблицы необходимых постоянных коэффициентов. Отметим, что слегка видоизмененные формулы (с вынесенным общим множителем $1/(4\pi\sqrt{2})$) для «лагранжевых» слагаемых приведены в нашей работе (Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., 2013б).

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСТРОЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

В отличие от известных разложений вековой части возмущающей, в том числе и построенных авторами, использование параметра η_{ij} позволяет получить экономное (по числу членов рядов) разложение для случая орбит с большими полуосями, близкими по величине. Особо эффективным является комбинированное применение того или другого ряда в зависимости от численных значений параметров разложений. Очевидно, что при использовании рядов по степеням $\eta_{ij}, \zeta_j^{(i)}$ и заданной точности вычислений максимально необходимое число членов обоих рядов N_{max} соответствует условию

$$\eta_{ij} = \zeta_j^{(i)} = 1/2.$$

Это условие дает для отношения больших полуосей $\alpha = a_i/a_j$ два значения

$$\alpha^{(1)} = \alpha^* = \sqrt{3 - \sqrt{2}} = 0.414213562\dots,$$

$$\alpha^{(2)} = \frac{1}{\alpha^*} = \sqrt{3 + \sqrt{2}} = 2.414213562\dots = \alpha^* + 2.$$

Численные эксперименты, проведенные для совокупности «лагранжевых» слагаемых вековой части возмущающей функции $\sim K_{01}(a_i, a_j)(e_i^2 - s_i^2)$, иллюстрированы тремя графиками на рис. 2, где для точности вычисления функции K_{01} порядка 10^{-13} показаны зависимости необходимого числа членов рядов N от отношения больших полуосей α .

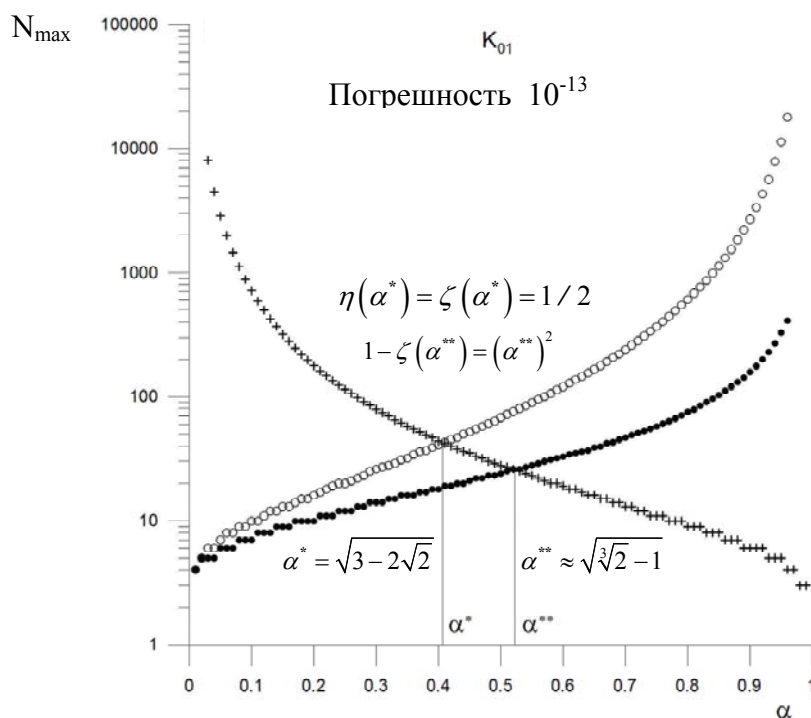


Рис. 2. Зависимость числа слагаемых в суммах для вычисления K_{01} .

Крестиками и светлыми кружками показаны зависимости для η -разложения и ζ -разложения, соответственно, а темные кружки дают аналогичную зависимость для коэффициентов Лапласа. На графиках отмечены абсциссы точек пересечения двух пар графиков α^* и $\alpha^{**} \approx \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}$. При вычислении функции K_{01} лишь одним из трех указанных способов во всем диапазоне изменения α число N неограниченно возрастает либо при $\alpha \rightarrow 1$, либо при $\alpha \rightarrow 0$. В то же время при комбинированном использовании ζ -разложения для $0 < \alpha < \alpha^*$ и η -разложения для $\alpha^* < \alpha < 1$ число N_{\max} примерно равно 45. Если использовать коэффициенты Лапласа для $0 < \alpha < \alpha^{**}$ и η -разложение для $\alpha^{**} < \alpha < 1$, то N_{\max} оказывается меньшим и примерно равно 25. Таким образом, применение η -разложения для $\alpha > \alpha^{**}$ дает заметную экономию, особенно ощутимую при $\alpha \rightarrow 1$ (несколько слагаемых, вместо сотен или тысяч!). Укажем, что для упомянутой во введении планетной системы Кеплер-36 $\alpha \approx 0.95$, что заметно превосходит максимальное отношение больших полуосей $\alpha \approx 0.75$ в системе главных спутников Урана.

СВЯЗЬ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ

В работе (Мюррей, Дермотт, 2009) получено разложение возмущающей функции, обусловленной взаимным притяжением спутников планеты, по степеням наклонов, эксцентриситетов и отношений больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего спутников. Суммарная степень эксцентриситетов и наклонов в разложениях не превышает 4. Разложения по степеням отношения больших полуосей выражены через коэффициенты Лапласа и фактически могут быть вычислены с точностью до любой заданной степени. Заметим, что по сравнению с нашими результатами эти формулы менее предпочтительны по той причине, что они различны для случаев, когда возмущающий спутник оказывается внутренним или внешним.

Интересно и, по-видимому, полезно привести соотношения, позволяющие связать наши результаты с формулами работы (Мюррей, Дермотт, 2009). При этом достаточно найти связь только для случая, когда возмущающий спутник внешний. Для случая внутреннего возмущающего спутника необходимая связь найдется с помощью формул вышеуказанной работы. Некоторую сложность вносит тот факт, что в этой работе вместо элементов u_j, v_j используются элементы

$$q_j = \sin(I_j/2)\cos\Omega_j, \quad p_j = \sin(I_j/2)\sin\Omega_j.$$

Аналогично формулам работы (Мюррей, Дермотт, 2009), выражения для W_{0i} и W_{1i} можно записать в следующем виде:

$$W_{0i} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J \frac{\mu_j}{a_j} \sum_{l=1}^5 K_{0,l}^{(ij)}(a_i, a_j) E_{0,l}^{(ij)}(h_i, k_i, q_i, p_i),$$

$$W_{1i} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^J \frac{\mu_j}{a_j} \sum_{l=1}^8 K_{1,l}^{(ij)}(a_i, a_j) E_{1,l}^{(ij)}(h_i, k_i, h_j, k_j, q_i, p_i, q_j, p_j),$$

где множители $E_{0,l}^{(ij)}(h_i, k_i, q_i, p_i), E_{1,l}^{(ij)}(h_i, k_i, h_j, k_j, q_i, p_i, q_j, p_j)$ являются полиномами второй или четвертой степени относительно своих аргументов, а μ_j, a_j относятся к внешнему возмущающему спутнику. Коэффициенты $K_{0,l}^{(ij)}(a_i, a_j), K_{1,l}^{(ij)}(a_i, a_j)$ зависят только от больших полуосей орбит спутников. Каждый из этих коэффициентов обозначен в работе (Мюррей, Дермотт, 2009) через f_m , где m – номер коэффициента, согласно некоторой сквозной нумерации. Следует учесть, что для вековой части возмущающей функции индекс кратности средних долгот спутников, от которого зависят все коэффициенты f_m , следует положить равным нулю.

Заметим, что функции $E_{0,l}^{(ij)}(h_i, k_i, q_i, p_i)$, $E_{1,l}^{(ij)}(h_i, k_i, h_j, k_j, q_i, p_i, q_j, p_j)$ могут быть легко получены из функций $Q_{0,l}^{(ij)}(h_i, k_i, u_i, v_i)$, $Q_{1,l}^{(ij)}(h_i, k_i, h_j, k_j, u_i, v_i, u_j, v_j)$ путем замены в них аргументов u_i, v_i, u_j, v_j на q_i, p_i, q_j, p_j , за исключением функции $E_{0,1}^{(ij)}(h_i, k_i, q_i, p_i)$, которая определяется соотношением

$$E_{0,1}^{(ij)}(h_i, k_i, q_i, p_i) = h_i^2 + k_i^2 - 4q_i^2 - 4p_i^2.$$

Для выражения искомой связи результатов необходимо ввести еще коэффициент

$$M_{ij} = \frac{a_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}}.$$

В итоге мы получили следующие соотношения для коэффициентов нашей работы и работы (Мюррей, Дермотт, 2009):

$$\begin{aligned} K_{0,1}^{(ij)} &= M_{ij} P_{0,1}^{(ij)} = f_2, & K_{0,2}^{(ij)} &= M_{ij} P_{0,2}^{(ij)} = f_4, \\ K_{0,3}^{(ij)} &= 16M_{ij} P_{0,3}^{(ij)} + 4M_{ij} P_{0,1}^{(ij)} = f_8, & K_{0,4}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{0,4}^{(ij)} = f_7, \\ K_{0,5}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{0,5}^{(ij)} = f_{18}, \\ \\ K_{1,1}^{(ij)} &= M_{ij} P_{1,1}^{(ij)} = f_{10}, & K_{1,2}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{1,2}^{(ij)} = f_{14}, \\ K_{1,3}^{(ij)} &= 16M_{ij} P_{1,3}^{(ij)} - 2M_{ij} P_{1,2}^{(ij)} = f_{16}, & K_{1,4}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{1,4}^{(ij)} = f_{15}, \\ K_{1,5}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{1,5}^{(ij)} = f_{21}, & K_{1,6}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{1,6}^{(ij)} = f_{13}, \\ K_{1,7}^{(ij)} &= 4M_{ij} P_{1,7}^{(ij)} = f_{19}, & K_{1,8}^{(ij)} &= M_{ij} P_{1,8}^{(ij)} = f_{11}. \end{aligned}$$

Для проверки полученных нами результатов и для их дальнейшего практического использования мы составили необходимые вычислительные программы. С помощью программы VVE-Z можно вычислить все фигурирующие в настоящей работе коэффициенты $P_{v,l}^{(ij)}$, $K_{v,l}^{(ij)}$ при заданном аргументе $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$ по формулам работы (Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., 2013а). Программа VVE-E вычисляет эти же коэффициенты при заданном аргументе η_{ij} по формулам настоящей работы. Программа VVE-F позволяет вычислять все фигурирующие в работе (Мюррей, Дермотт, 2009) коэффициенты f_m при заданном отношении больших полуосей спутников. Вычисления выполнялись с точностью до любой заданной степени указанных аргументов.

С помощью составленных вычислительных программ выполнена сверка наших результатов с результатами работы (Мюррей, Дермотт, 2009). Достигнуто совпадение с точностью представления чисел в компьютере при значениях аргументов от 0.02 до 0.98. При значениях аргументов 0.01 и 0.99 совпадают первые 9-10 значащих цифр.

При необходимости составленные программы могут быть переданы заинтересованным коллегам.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В данной работе представлено новое разложение вековой части возмущающей функции взаимного притяжения тел, образующих планетную или спутниковую систему. Достоинством предложенного разложения является его буквенный вид, а также экономный способ вычислений при близких значениях больших полуосей ($\alpha \rightarrow 1$) почти круговых и почти компланарных орбит независимо от их взаимного расположения. Недостатком же является большая громоздкость окончательных формул по сравнению с полученными нами ранее формулами, наиболее пригодными для случая $\alpha \rightarrow 0$ (Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В., 2013а).

Подобно тому, как это сделано в вышеуказанной работе, приведенные здесь соотношения были сопоставлены с известными результатами (Мюррей и Дермотт, 2009). Контрольные вычисления, проведенные для различных значений параметра разложения η_{ij} , позволили выявить и исправить ряд ошибок, неизбежных при выполненных достаточно громоздких выкладках.

Мы не затрагивали здесь вопрос о сходимости рядов, представляющих введенные нами функции больших полуосей орбит (4), однако выполненные вычисления свидетельствовали об их «практической» сходимости. Вместе с получением более точного разложения для $\nu = 2, 3$ строгий анализ сходимости может быть предметом наших последующих работ.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.

Составляющие нулевой степени: $\nu = 0, L_0 = 5$

$$Q_{0,1}^{(i,j)} = h_i^2 + k_i^2 - u_i^2 - v_i^2 = e_i^2 - s_i^2; \quad Q_{0,2}^{(i,j)} = (h_i^2 + k_i^2)^2 = e_i^4;$$

$$Q_{0,3}^{(i,j)} = (u_i^2 + v_i^2)^2 = s_i^4; \quad Q_{0,4}^{(i,j)} = (h_i^2 + k_i^2)(u_i^2 + v_i^2) = e_i^2 s_i^2;$$

$$Q_{0,5}^{(i,j)} = (h_i u_i + k_i v_i)^2 - (k_i u_i - h_i v_i)^2 = e_i^2 s_i^2 \cos 2(\pi_i - \Omega_i);$$

$$P_{0,1}^{(ij)} = \frac{\zeta_{ij}}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2\eta_{ij}} + \frac{1}{2} C_{ij}^{(2,2)} + C_{ij}^{(1,2)} + \frac{13}{32} C_{ij}^{(0,2)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (C_{ij}^{(2,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(2,1)}) + \frac{1}{2} (C_{ij}^{(1,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(1,1)}) + \frac{3}{32} (C_{ij}^{(0,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(0,1)}) \right];$$

$$P_{0,2}^{(ij)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \frac{3\alpha_{ij}\zeta_{ij}}{16\eta_{ij}} (52\alpha_{ij}^5 - 148\alpha_{ij}^4 + 182\alpha_{ij}^3 - 124\alpha_{ij}^2 + 45\alpha_{ij} - 5) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha_{ij}^2 \zeta_{ij}}{2\eta_{ij}^2} (40\alpha_{ij}^4 - 80\alpha_{ij}^3 + 60\alpha_{ij}^2 - 22\alpha_{ij} + 5) - \alpha_{ij}^2 \sum_{m=0}^7 d_m^{(0,2)} p_m^{(0,2)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,2,2)} + \right. \\ \left. + \alpha_{ij}^2 \sum_{m=0}^6 g_m^{(0,2)} q_m^{(0,2)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,1,1)} \ln \eta - F_{ij}^{(m,1,1)}] \right\};$$

$$p_m^{(0,2)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^6 p_{ms}^{(0,2)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(0,2)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^3 q_{ms}^{(0,2)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 1.1

Значения $d_m^{(0,2)}, g_m^{(0,2)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_m^{(0,2)}$	1/128	1/128	1/128	1/128	1/128	1/128	16	256
$g_m^{(0,2)}$	1/256	1/256	1/256	1/256	1/256	16	64	-

Таблица 1.2

Значения $p_{ms}^{(0,2)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0	6840	- 83370	288348	- 397602	241500	- 91560	17640
1	36360	- 508125	1919797	- 2863970	1877080	- 673528	124992
2	69630	- 1168820	4843516	- 7568360	4992944	- 1609824	276224
3	61140	- 1331480	6194064	- 10010944	6412672	- 1742080	26009
4	24960	- 805600	4421440	- 7384320	4492800	- 936960	108544
5	3840	- 248320	178329	- 3103232	1771520	- 243712	16384
6	0	- 15	185	- 341	182	- 12	0
7	0	0	1	- 2	1	0	0

Таблица 1.3

Значения $q_{ms}^{(0,2)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3
0	-1440	12675	-32655	26460
1	-9840	93640	-249184	204288
2	-19920	224000	-637408	533696
3	-15360	236160	-759808	655360
4	-3840	113920	-462592	414720
5	0	5	-34	32
6	0	0	-1	1

$$P_{0,3}^{(ij)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3\alpha_{ij}^2}{64} \left[10 + 3 \ln \left(\frac{\eta_{ij}}{64} \right) \right] - \frac{3\alpha_{ij}^2 \zeta_{ij}}{128\eta_{ij}} (12\alpha_{ij}^2 - 36\alpha_{ij} + 5) - \frac{3\alpha_{ij}}{8\eta_{ij}^2} (4\alpha_{ij}^3 - 4\alpha_{ij}^2 + 3\alpha_{ij} - 2) + \\ & + \alpha_{ij}^2 \sum_{m=0}^6 d_m^{(0,3)} p_m^{(0,3)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} + \alpha_{ij}^2 \sum_{m=0}^5 g_m^{(0,3)} q_m^{(0,3)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)}] \end{aligned} \right\}$$

$$p_m^{(0,3)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 p_{ms}^{(0,3)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(0,3)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^2 q_{ms}^{(0,3)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 1.4

Значения $d_m^{(0,3)}, g_m^{(0,3)}$

m	0	1	2	3	4	5	6
$d_m^{(0,3)}$	3/512	3/512	3/256	3/32	3/32	3/4	-6
$g_m^{(0,3)}$	9/512	3/1024	3/16	3/64	3/4	3	-

Таблица 1.5

Значения $p_{ms}^{(0,3)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4
0	-1692	-369	4619	-2520	420
1	-10639	-1327	30875	-20256	3236
2	-13142	-821	39470	-2819	4160
3	-2056	-59	6295	-4640	600
4	-1381	-14	4248	-3120	320
5	-59	0	180	-128	8
6	1	0	-3	2	0

Таблица 1.6

Значения $q_{ms}^{(0,3)}$

m \ s	0	1	2
0	- 51	0	70
1	- 2475	420	2816
2	- 107	44	86
3	- 533	344	256
4	- 19	16	4
5	- 3	3	0

$$P_{0,4}^{(ij)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_{ij}^2}{32} (10\alpha_{ij}^2 - 7) \left[10 + 3 \ln \left(\frac{\eta_{ij}}{64} \right) \right] - \\ & - \frac{\zeta_{ij}}{32\eta_{ij}} (120\alpha_{ij}^5 - 300\alpha_{ij}^4 + 202\alpha_{ij}^3 + 61\alpha_{ij}^2 - 28\alpha_{ij} + 24) - \\ & - \frac{\alpha_{ij}\zeta_{ij}}{2\eta_{ij}^2} (8\alpha_{ij}^4 - 36\alpha_{ij}^3 + 34\alpha_{ij}^2 - 17\alpha_{ij} + 7) + \\ & + \alpha_{ij} \sum_{m=0}^7 d_m^{(0,4)} p_m^{(0,4)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} + \alpha_{ij} \sum_{m=0}^6 g_m^{(0,4)} q_m^{(0,4)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)}] \end{aligned} \right\};$$

$$p_m^{(0,4)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^6 p_{ms}^{(0,4)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(0,4)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 q_{ms}^{(0,4)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 1.7

Значения $d_m^{(0,4)}, g_m^{(0,4)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_m^{(0,4)}$	1/256	1/128	1/128	1/32	1/8	1/2	8	32
$g_m^{(0,4)}$	3/512	1/256	1/16	1/16	1/2	4	32	-

Таблица 1.8

Значения $p_{ms}^{(0,4)}$

m \ s	0	1	2	3	4	5	6
0	- 2496	28865	- 66158	8598	90948	- 63000	15120
1	- 5568	86866	- 236203	67909	317746	- 262860	61608
2	- 9240	205933	- 672851	299700	841292	- 782688	175648
3	- 1806	62055	- 251553	15334	278812	- 286312	59840
4	- 168	10080	- 53905	4229	50032	- 56960	10560
5	- 6	839	-6659	6450	4824	- 6240	928
6	0	7	- 110	127	57	- 88	8
7	0	0	- 3	4	1	- 2	0

Таблица 1.9

Значения $q_{ms}^{(0,4)}$

m \ s	0	1	2	3	4
0	- 192	178	- 3470	420	2520
1	- 1968	20959	- 45424	11784	27024
2	- 249	3462	- 8883	3894	3800
3	- 192	4105	- 13196	7984	3680
4	- 6	279	- 1244	932	200
5	7	- 57	50	4	0
6	0	0	- 1	1	0

$$P_{0,5}^{(ij)} = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_{ij}^2}{64} (11 - 10\alpha_{ij}) \left[10 + 3 \ln \left(\frac{\eta_{ij}}{64} \right) \right] + \\ & + \frac{\zeta_{ij}}{64\eta_{ij}} (120\alpha_{ij}^5 - 348\alpha_{ij}^4 + 298\alpha_{ij}^3 + 89\alpha_{ij}^2 - 44\alpha_{ij} + 80) + \\ & + \frac{\alpha_{ij}\zeta_{ij}}{4\eta_{ij}^2} (8\alpha_{ij}^4 - 52\alpha_{ij}^3 + 50\alpha_{ij}^2 - 29\alpha_{ij} + 11) + \\ & + \alpha_{ij} \sum_{m=0}^7 d_m^{(0,5)} p_m^{(0,5)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} - \alpha_{ij} \sum_{m=0}^6 g_m^{(0,5)} q_m^{(0,5)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)}] \end{aligned} \right\};$$

$$p_m^{(0,5)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^6 p_{ms}^{(0,5)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(0,5)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 q_{ms}^{(0,5)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 1.10

Значения $d_m^{(0,5)}, g_m^{(0,5)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_m^{(0,5)}$	- 1/512	- 1/256	- 1/256	- 1/64	- 1/16	- 1/4	- 4	16
$g_m^{(0,5)}$	3/1024	1/512	1/32	1/32	1/4	2	16	-

Таблица 1.11

Значения $p_{ms}^{(0,5)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0	- 8320	49757	- 77406	- 8690	104388	- 66360	15120
1	- 18560	146314	- 273583	11433	371202	- 275804	61608
2	- 30800	339889	- 767991	159076	987356	- 815968	175648
3	- 6020	100697	- 281797	110034	325532	- 295912	59840
4	- 560	1613	- 59061	35352	57552	- 58240	10560
5	- 20	1329	- 7111	5906	5400	- 6304	928
6	0	11	- 114	123	61	- 88	8
7	0	0	3	- 4	- 1	2	0

Таблица 1.12

Значения $q_{ms}^{(0,5)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4
0	- 640	3137	- 4110	- 140	2520
1	- 6560	36403	- 53592	6152	27024
2	- 830	5879	- 10393	3206	3800
3	- 640	6789	- 15188	7472	3680
4	- 20	449	- 1392	916	200
5	0	11	- 61	50	4
6	0	0	- 1	1	0

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.

Составляющие первой степени: $\nu=1, L_1=8$.

$$\begin{aligned}
 Q_{1,1}^{(ij)} &= \mathbf{h}_i \mathbf{h}_j + \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j = e_i e_j \cos(\pi_i - \pi_j); \\
 Q_{1,2}^{(ij)} &= \mathbf{u}_i \mathbf{u}_j + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j = s_i s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j); \\
 Q_{1,3}^{(ij)} &= (\mathbf{u}_i^2 + \mathbf{v}_i^2)(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j) = s_i^3 s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j); \\
 Q_{1,4}^{(ij)} &= (\mathbf{h}_i^2 + \mathbf{k}_i^2)(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j + \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j) = e_i^2 s_i s_j \cos(\Omega_i - \Omega_j); \\
 Q_{1,5}^{(ij)} &= (\mathbf{h}_i^2 - \mathbf{k}_i^2)(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_j - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j) + 2\mathbf{h}_i \mathbf{k}_i (\mathbf{u}_i \mathbf{v}_j + \mathbf{v}_i \mathbf{u}_j) = e_i^2 s_i s_j \cos(2\pi_i - \Omega_i - \Omega_j); \\
 Q_{1,6}^{(ij)} &= (\mathbf{u}_i^2 + \mathbf{v}_i^2)(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j + \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j) = e_i e_j s_i^2 \cos(\pi_i - \pi_j); \\
 Q_{1,7}^{(ij)} &= (\mathbf{u}_i^2 - \mathbf{v}_i^2)(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j - \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j) + 2\mathbf{u}_i \mathbf{v}_i (\mathbf{h}_i \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_i \mathbf{h}_j) = e_i e_j s_i^2 \cos(\pi_i + \pi_j - 2\Omega_i); \\
 Q_{1,8}^{(ij)} &= (\mathbf{h}_i^2 + \mathbf{k}_i^2)(\mathbf{h}_i \mathbf{h}_j + \mathbf{k}_i \mathbf{k}_j) = e_i^3 e_j \cos(\pi_i - \pi_j).
 \end{aligned}$$

$$P_{1,1}^{(ij)} = -\frac{\sqrt{\zeta_{ij}}}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\eta_{ij}} + 4C_{ij}^{(2,2)} + 8C_{ij}^{(1,2)} + \frac{61}{16}C_{ij}^{(0,2)} + \right. \\
 \left. + 4(C_{ij}^{(2,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(2,1)}) + \frac{19}{4}(C_{ij}^{(1,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(1,1)}) + \frac{15}{16}(C_{ij}^{(0,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(0,1)}) \right];$$

$$P_{1,2}^{(ij)} = 2P_{0,1}^{(ij)};$$

$$P_{1,3}^{(ij)} = \frac{\zeta_{ij}}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{9\zeta_{ij} - 32}{64\eta_{ij}} - \frac{3\zeta_{ij}}{4\eta_{ij}^2} - \frac{1}{2}C_{ij}^{(2,2)} - C_{ij}^{(1,2)} - \frac{13}{32}C_{ij}^{(0,2)} - \right. \\
 \left. - \frac{1}{2}(C_{ij}^{(2,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(2,1)} + C_{ij}^{(1,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(1,1)}) - \frac{3}{32}(C_{ij}^{(0,1)} \ln \eta_{ij} - D_{ij}^{(0,1)}) + \right. \\
 \left. + \frac{3\zeta_{ij}}{1024} \left(\sum_{m=0}^5 d_m^{(1,3)} E_{ij}^{(m,2,2)} + \sum_{m=0}^4 g_m^{(1,3)} (E_{ij}^{(m,1,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,1,1)}) \right) \right];$$

Таблица 2.1

Значения $d_m^{(1,3)}$, $g_m^{(1,3)}$

m	0	1	2	3	4	5
$d_m^{(1,3)}$	1093	5294	9568	8192	3328	512
$g_m^{(1,3)}$	105	704	1376	1024	256	-

$$P_{1,4}^{(ij)} = \frac{\zeta}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{8\eta_{ij}} (72\alpha_{ij}^4 - 144\alpha_{ij}^3 + 99\alpha_{ij}^2 - 35\alpha_{ij} + 12) + \frac{\alpha_{ij}}{\eta_{ij}^2} (4\alpha_{ij}^2 - 10\alpha_{ij} + 7) + \right. \\
 \left. + \sum_{m=0}^6 d_m^{(1,4)} p_m^{(1,4)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,2,2)} + \sum_{m=0}^5 g_m^{(1,4)} q_m^{(1,4)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,1,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,1,1)}] \right\};$$

$$p_m^{(1,4)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 (-1)^s p_{ms}^{(1,4)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(1,4)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^3 (-1)^s q_{ms}^{(1,4)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 2.2

Значения $d_m^{(1,4)}$, $g_m^{(1,4)}$

m	0	1	2	3	4	5	6
$d_m^{(1,4)}$	3/256	1/256	1/64	1/16	1/4	4	16
$g_m^{(1,4)}$	9/256	3/64	1/16	1/4	2	16	-

Таблица 2.3

Значения $p_{ms}^{(1,4)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4
0	416	5467	19014	21796	5600
1	4320	78673	323276	405764	127760
2	1230	35007	173262	232580	81224
3	144	7357	45764	64904	24032
4	6	735	6342	9464	3632
5	0	7	110	173	68
6	0	0	3	5	2

Таблица 2.4

Значения $q_{ms}^{(1,4)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3
0	16	175	490	420
1	70	875	2604	2252
2	72	1267	4316	3800
3	6	231	1016	920
4	0	7	53	50
5	0	0	1	1

$$P_{1,5}^{(ij)} = \frac{\zeta}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{16\eta_{ij}} (72\alpha_{ij}^4 - 168\alpha_{ij}^3 + 135\alpha_{ij}^2 - 55\alpha_{ij} + 40) - \frac{\alpha_{ij}}{2\eta_{ij}^2} (4\alpha_{ij}^2 - 18\alpha_{ij} + 11) - \\ & - \sum_{m=0}^6 d_m^{(1,5)} p_m^{(1,5)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,2,2)} - \sum_{m=0}^5 g_m^{(1,5)} q_m^{(1,5)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,1,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,1,1)}] \end{aligned} \right\};$$

$$p_m^{(1,5)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 (-1)^s p_{ms}^{(1,5)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(1,5)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^3 (-1)^s q_{ms}^{(1,5)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 2.5

Значения $d_m^{(1,5)}$, $g_m^{(1,5)}$

m	0	1	2	3	4	5	6
$d_m^{(1,5)}$	1/512	1/512	1/128	1/32	1/8	2	8
$g_m^{(1,5)}$	15/512	1/128	1/32	1/8	1	8	-

Таблица 2.6

Значения $p_{ms}^{(1,5)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4
0	4160	25773	69146	68748	16800
1	14400	123629	389836	429972	127760
2	4100	55011	206222	246404	81224
3	480	11561	53284	68328	24032
4	20	1155	7142	9848	3632
5	0	11	118	177	68
6	0	0	3	5	2

Таблица 2.7

Значения $q_{ms}^{(1,5)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3
0	32	165	350	252
1	700	4125	9220	6756
2	240	1991	5004	3800
3	20	363	1144	920
4	0	11	57	50
5	0	0	1	1

$$P_{1,6}^{(ij)} = \frac{\sqrt{\zeta_{ij}}}{\pi\sqrt{2}} \left\{ -\frac{3\alpha_{ij}}{64} (28\alpha_{ij}^2 - 125\alpha_{ij} + 75) \ln\left(\frac{\eta_{ij}}{64}\right) - \frac{1}{32\eta_{ij}} \left(2520\alpha_{ij}^6 - 5728\alpha_{ij}^5 + 1602\alpha_{ij}^4 + 4302\alpha_{ij}^3 - 3727\alpha_{ij}^2 + 993\alpha_{ij} - 96 \right) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha_{ij}}{\eta_{ij}^2} (36\alpha_{ij}^5 - 120\alpha_{ij}^4 + 137\alpha_{ij}^3 - 61\alpha_{ij}^2 + 13\alpha_{ij} - 5) - \sum_{m=0}^7 d_m^{(1,6)} p_m^{(1,6)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} - \sum_{m=0}^6 g_m^{(1,6)} q_m^{(1,6)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)}] \right\};$$

$$p_m^{(1,6)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^6 p_{ms}^{(1,6)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(1,6)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^5 q_{ms}^{(1,6)} \alpha_{ij}^s.$$

Таблица 2.8

Значения $d_m^{(1,6)}$, $g_m^{(1,6)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_m^{(1,6)}$	1/512	1/256	1/64	1/32	1/8	1/2	8	32
$g_m^{(1,6)}$	3/1024	1/256	1/64	1/16	1/2	4	32	-

Таблица 2.9

Значения $p_{ms}^{(1,6)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0	- 4992	154365	- 772175	1299394	- 486946	- 480896	249480
1	- 11136	416052	- 2168684	3550679	- 780131	- 2171368	1061892
2	- 4620	224115	- 1258745	2051102	- 184932	- 1694328	816960
3	- 1806	124917	- 792967	1326850	- 21216	- 1286952	625416
4	- 168	19038	- 146953	261496	- 3888	- 265152	132000
5	- 6	1503	- 16042	31348	- 2598	- 30048	15576
6	0	12	- 239	525	- 104	- 436	240
7	0	0	- 6	15	- 5	- 10	6

Таблица 2.10

Значения $q_{ms}^{(1,6)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5
0	- 768	10929	- 53135	97972	- 64540	6160
1	- 2688	59412	- 301595	560800	- 366964	32656
2	- 1140	35106	- 189839	359128	- 232208	17952
3	- 201	9141	- 55185	107608	- 68472	4192
4	- 6	543	- 4050	8306	- 5186	216
5	0	12	- 145	322	- 197	4
6	0	0	- 2	5	- 3	0

$$P_{1,7}^{(ij)} = \frac{\sqrt{\zeta_{ij}}}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{3\alpha_{ij}}{128} (28\alpha_{ij}^2 - 125\alpha_{ij} + 75) \ln\left(\frac{\eta_{ij}}{64}\right) + \frac{1}{64\eta_{ij}} \left(2520\alpha_{ij}^6 - 5728\alpha_{ij}^5 + 1602\alpha_{ij}^4 + 4686\alpha_{ij}^3 - \right. \\ & \left. - 4463\alpha_{ij}^2 + 1441\alpha_{ij} - 192 \right) + \\ & \frac{\alpha_{ij}}{2\eta_{ij}^2} (36\alpha_{ij}^5 - 120\alpha_{ij}^4 + 137\alpha_{ij}^3 - 61\alpha_{ij}^2 + 13\alpha_{ij} - 5) + \\ & \left. + \sum_{m=0}^7 d_m^{(1,7)} p_m^{(1,7)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} + \sum_{m=0}^6 g_m^{(1,7)} q_m^{(1,7)}(\alpha_{ij}) [E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)}] \right\} \\ p_m^{(1,7)}(\alpha_{ij}) &= \sum_{s=0}^6 p_{ms}^{(1,7)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(1,7)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^5 q_{ms}^{(1,7)} \alpha_{ij}^s. \end{aligned} \right.$$

Таблица 2.11

Значения $d_m^{(1,7)}$, $g_m^{(1,7)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7
$d_m^{(1,7)}$	1/1024	1/512	1/128	1/64	1/16	1/4	8	16
$g_m^{(1,7)}$	3/2048	1/512	1/128	1/32	1/4	2	16	-

Таблица 2.12

Значения $p_{ms}^{(1,7)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0	-9984	193085	-847567	1340098	-486946	-480896	249480
1	-22272	515444	-2370028	3662039	-780131	-2171368	1061892
2	-9240	274325	-1364989	2111222	-184932	-1694328	816960
3	-3612	150874	-850433	1360030	-21216	-1286952	625416
4	-336	22696	-155417	266464	-3888	-265152	132000
5	-12	1771	-16688	31732	-2598	-30048	15576
6	0	7	-122	264	-52	-218	120
7	0	0	-6	15	-5	-10	6

Таблица 2.13

Значения $q_{ms}^{(1,7)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5
0	-1536	14033	-58255	100660	-64540	6160
1	-5376	75224	-329755	575728	-366964	32656
2	-2280	43857	-206399	368068	-232208	17952
3	-402	11222	-59405	109948	-68472	4192
4	-12	651	-4290	8444	-5186	216
5	0	14	-150	325	-197	4
6	0	0	-2	5	-3	0

$$P_{1,8}^{(ij)} = \frac{\sqrt{\zeta_{ij}}}{\pi\sqrt{2}} \left\{ \begin{aligned} & \frac{33\alpha_{ij}^2}{64} (21\alpha_{ij} - 10) \ln\left(\frac{\eta_{ij}}{64}\right) + \frac{\alpha_{ij}}{32\eta_{ij}} \left(9000\alpha_{ij}^6 - 37776\alpha_{ij}^5 + 71118\alpha_{ij}^4 - 68566\alpha_{ij}^3 + \right. \\ & \left. + 34831\alpha_{ij}^2 - 8710\alpha_{ij} + 840 \right) + \\ & \frac{\alpha_{ij}^2}{\eta_{ij}^2} (156\alpha_{ij}^5 - 432\alpha_{ij}^4 + 483\alpha_{ij}^3 - 289\alpha_{ij}^2 + 102\alpha_{ij} - 20) + \\ & \left. + \alpha_{ij} \sum_{m=0}^8 d_m^{(1,8)} p_m^{(1,8)}(\alpha_{ij}) E_{ij}^{(m,3,2)} + \alpha_{ij} \sum_{m=0}^7 g_m^{(1,8)} q_m^{(1,8)}(\alpha_{ij}) \left[E_{ij}^{(m,2,1)} \ln \eta_{ij} - F_{ij}^{(m,2,1)} \right] \right\} \\ p_m^{(1,8)}(\alpha_{ij}) &= \sum_{s=0}^6 (-1)^s p_{ms}^{(1,8)} \alpha_{ij}^s; \quad q_m^{(1,8)}(\alpha_{ij}) = \sum_{s=0}^4 (-1)^s q_{ms}^{(1,8)} \alpha_{ij}^s. \end{aligned} \right.$$

Таблица 2.14

Значения $d_m^{(1,8)}$, $g_m^{(1,8)}$

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$d_m^{(1,8)}$	1/512	1/256	1/128	1/64	1/8	1/4	2	16	128
$g_m^{(1,8)}$	3/1024	1/512	3/128	1/32	1/8	2	8	128	-

Таблица 2.15

Значения $p_{ms}^{(1,8)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4	5	6
0	159360	2262570	9941917	18673398	15450810	5053440	839160
1	453120	7170820	33750996	67267135	59991691	22200296	3555324
2	510600	9264800	47042411	98676493	92284304	36047188	5428704
3	294540	6386080	35452487	77995620	75224092	29903888	4111536
4	23025	637130	3960502	9146202	9000482	3555004	427680
5	3705	147640	1073969	2618844	2612728	1006976	99024
6	60	4610	43005	112137	113114	41932	2976
7	0	60	923	2633	2688	948	36
8	0	0	8	26	27	9	0

Таблица 2.16

Значения $q_{ms}^{(1,8)}$

$m \backslash s$	0	1	2	3	4
0	13200	141630	524167	815556	451836
1	133860	1640910	6367667	10062780	5587308
2	26325	369360	1515419	2448396	1365156
3	21135	356270	1584037	2644728	1484760
4	2610	59180	298773	523792	297072
5	30	1225	7708	14527	8355
6	0	40	402	845	495
7	0	0	2	5	3

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. О разложении вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // *Астрономический вестник*, 2013а, т. 47, № 1, с. 32-39. (Vashkov'yak M.A, Vashkov'yak S.N., Emel'yanov N.V. On the Expansion of the Secular Part of the Perturbing Function of Mutual Attraction in the Satellite Systems of Planets // *Solar System Research*, 2013а, Vol. 47, No 1, pp. 31-37).
2. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения в спутниковой системе планеты // *Астрономический вестник*, 2013б, т. 47, № 4 (в печати). (Vashkov'yak M.A, Vashkov'yak S.N., Emel'yanov N.V. United Representation for Secular Part of the Perturbing Function of Mutual Attraction in the Satellite Systems of Planets // *Solar System Research*, 2013b, Vol. 47, No 4 (in press).
3. Мюррей К., Дермотт С. Динамика Солнечной системы. М. Физматлит, 2009, 588 с. (Murray Carl D., Dermott Stanley F. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.)
4. Картер и др. (Carter, J. A.; Agol, E.; Chaplin, W. J.; Basu, S.; Bedding, T. R.; Buchhave, L. A.; Christensen-Dalsgaard, J.; Deck, K. M.; Elsworth, Y.; Fabrycky, D. C.; Ford, E. B.; Fortney, J. J.; Hale, S. J.; Handberg, R.; Hekker, S.; Holman, M. J.; Huber, D.; Karoff, C.; Kawaler, S. D.; Kjeldsen, H.; Lissauer, J. J.; Lopez, E. D.; Lund, M. N.; Lundkvist, M.; Metcalfe, T. S.; Miglio, A.; Rogers, L. A.; Stello, D.; Borucki, W. J.; Bryson, S.; Christiansen, J. L.; Cochran, W. D.; Geary, J. C.; Gilliland, R. L.; Haas, M. R.; Hall, J.; Howard, A. W.; Jenkins, J. M.; Klaus, T.; Koch, D. G.; Latham, D. W.; MacQueen, P. J.; Sasselov, D.; Steffen, J. H.; Twicken, J. D.; Winn, J. N.) Kepler-36: A Pair of Planets with Neighboring Orbits and Dissimilar Densities. *Science* 3 August 2012: Vol. 337 no. 6094 pp. 556-559 DOI: 10.1126/science.1223269
<http://www.allplanets.ru/star.php?star=Kepler-36>

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ	3
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО (e_j, s_j) И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО (e_i, s_i, e_j, s_j) ВКЛЮЧИТЕЛЬНО	8
ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОСТРОЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ.....	10
СВЯЗЬ ПОЛУЧЕННЫХ ФОРМУЛ С РЕЗУЛЬТАТАМИ ДРУГИХ АВТОРОВ	12
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ	14
ПРИЛОЖЕНИЕ 1	15
ПРИЛОЖЕНИЕ 2	20
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	26

CONTENTS

INTRODUCTION AND STATEMENT OF THE PROBLEM	3
REPRESENTATION FOR SECULAR PART OF PERTURBING FUNCTION WITH FIRST POWER RELATIVELY (e_j, s_j) AND FOURTH POWER RELATIVELY (e_i, s_i, e_j, s_j) INCLUSIVE.....	8
ABOUT THE EFFECTIVENESS OF THE DEVELOPMENTS	10
CONNECTION OF THE FORMULAS RECEIVED WITH THE RESULTS OF OTHER AUTHORS.....	12
CONCLUSIVE REMARKS	14
APPENDIX 1	15
APPENDIX 2	20
REFERENCES	26