



Ильин И.С.

Выбор номинальной орбиты  
КА «Миллиметрон» из  
семейства периодических  
орбит в окрестности точки  
либрации  $L_2$  системы  
Солнце-Земля

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Ильин И.С. Выбор номинальной орбиты КА «Миллиметрон» из семейства периодических орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 46. 21 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-46>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
им. М.В. Келдыша

**И.С. Ильин**

**Выбор номинальной орбиты  
КА «Миллиметрон»  
из семейства периодических орбит  
в окрестности точки либрации  $L_2$   
системы Солнце-Земля**

Москва — 2013

## АННОТАЦИЯ

В работе рассмотрен вопрос выбора орбиты КА «Миллиметрон» – периодической траектории в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля. Приведена классификация периодических движений в окрестности коллинеарных точек либрации. Рассмотрена практическая реализация некоторых типов квазипериодических орбит на примерах состоявшихся миссий к точкам либрации.

Приведены периодические решения ограниченной круговой задачи трёх тел, предложенные в качестве прототипов рабочей орбиты КА «Миллиметрон», показана их реализация в полной модели действующих на КА сил. Предложено в качестве рабочей орбиты КА «Миллиметрон» использовать гало-орбиту с выходом из плоскости эклиптики на 1 млн км. Представлены рассчитанные автором гало-орбиты с большим выходом из плоскости эклиптики, удовлетворяющие баллистическим требованиям к траектории аппарата. Данные орбиты в полной модели действующих на КА сил являются квазипериодическими и требуют исполнения маневров удержания с периодом 70-90 суток. Метод построения подобных гало-орбит подробно изложен в предыдущих работах.

**Ключевые слова:** гало-орбиты, точка  $L_2$ , Миллиметрон.

## ABSTRACT

This work concerns the orbit choice problem in case of the Millimetron mission – the deployment of a space telescope on some quasi-periodic trajectory in the vicinity of the Sun-Earth system  $L_2$  point. The classification of the periodic motions in the vicinity of the collinear libration points is presented along with the pioneer libration point missions' overview.

The periodic solutions of the restricted three body problem, which have been suggested by other authors as the prototypes of the Millimetron orbit are presented. These periodic solutions have been simulated with the help of dynamical model which takes into account all major forces affecting spacecraft.

The final part of this preprint contains appropriate halo orbits with given geometrical dimensions such as 1 million km z-component amplitude. These orbits are regarded by the author as the most convenient ones for the Millimetron spacecraft deployment. One of these halo-orbits has been chosen as the nominal trajectory for the Millimetron mission. These orbits are quasi periodic and require station-keeping impulses once every 70-90 days. The calculation algorithms providing such halo orbits with the low-energy transfer trajectories have been described in previous publications.

**Key words:** halo orbits,  $L_2$  point, Millimetron.

В данной работе рассмотрен вопрос выбора рабочей орбиты космической обсерватории «Миллиметр» в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля. Препринт опирается на работы Б.Б. Крейсмана, исследующие динамику движения космического аппарата в рамках задачи трёх тел [1,2,3] и, в частности, периодические орбиты в окрестности коллинеарных точек либрации [4,5,6], а также возможности их использования в качестве рабочей орбиты космической обсерватории субмиллиметрового диапазона «Миллиметр».

Космическая обсерватория «Миллиметр» должна быть выведена на квазипериодическую орбиту в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля, обеспечивающую выход из эклиптики (амплитуда по оси  $Z$  вращающейся системы координат) более чем на 1 млн км [7]. Также необходимо соблюсти условия по освещенности аппарата – продолжительность пребывания в конусе Земной тени не должна превышать один час.

Данный препринт является продолжением цикла работ [8,9,10], исследующих ограниченные орбиты в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля. Рассмотрение вопроса выбора орбиты начинается с классификации периодических движений и соответствующих им многообразий, порождаемых отображением Пуанкаре, в окрестности коллинеарных точек либрации. Приведён обзор пионерских миссий к точкам либрации, использовавших в качестве рабочих орбит некоторые из описанных многообразий. Во втором разделе приведены периодические решения ограниченной круговой задачи трёх тел, предложенные другими авторами в качестве прототипов рабочей орбиты КА «Миллиметр», показана их реализация в полной модели действующих на КА сил.

В третьем разделе рассматриваются гало-орбиты с большим выходом из плоскости эклиптики, подходящие для использования в качестве рабочей орбиты КА «Миллиметр». Алгоритм баллистического проектирования подобных гало-орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце-Земля, а также траекторий перелёта на них подробно рассмотрен в [10]. Переход с геоцентрической отлётной траектории на гало-орбиту не требует импульса торможения, однако для поддержания орбиты необходимо периодическое проведение коррекций. При проектировании траекторий перелёта гравитационный маневр у Луны не использовался.

Пример траектории перелёта и полёта по гало-орбите показан на рис. 1. На этом рисунке показана проекция траектории на плоскость  $OXY$  вращающейся СК с началом в точке  $L_2$ . Ось  $OX$  направлена от точки  $L_2$  к Земле. Ось  $OZ$  ортогональна плоскости эклиптики. Ось  $OY$  дополняет систему до правой. Цифры, указанные вдоль кривой, означают сутки полёта. Примерно через 20 суток после старта КА выходит из сферы действия Земли, а через 100 суток полёта КА начинает движение по гало-орбите. Траектория полёта по гало-орбите показана с учётом выполнения коррекций удержания на ней. При движении по гало-орбите КА облетает точку  $L_2$  за 180 суток.

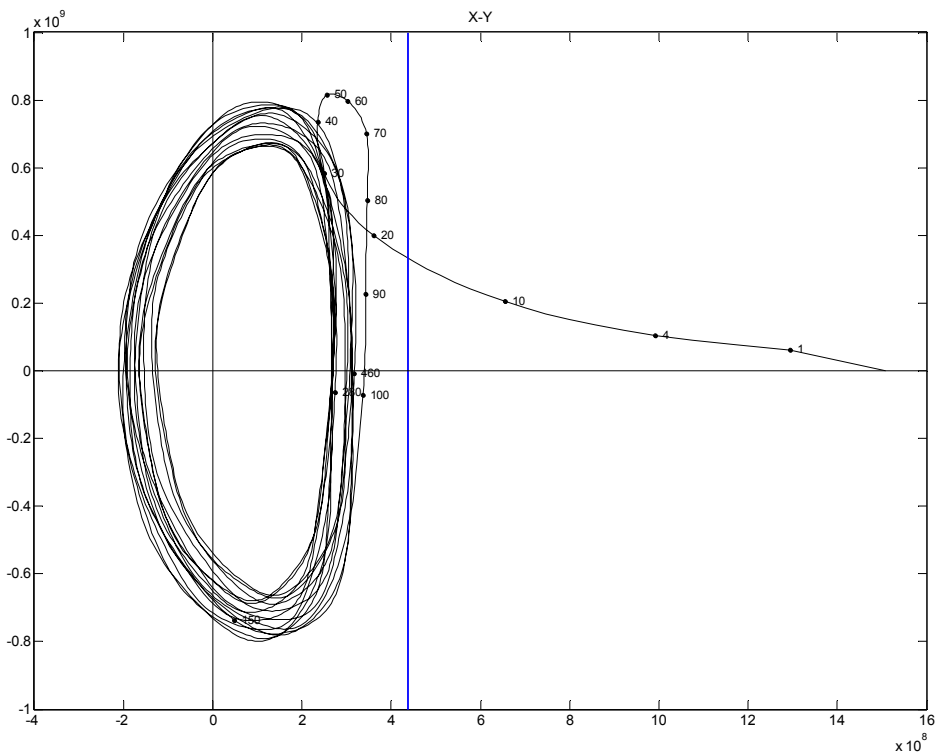


Рис. 1. Перелёт без использования гравитационного манёвра у Луны: траектория перелёта и проекция гало-орбиты вокруг точки  $L_2$  на плоскость  $OXY$  вращающейся СК

## 1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В ОКРЕСТНОСТИ КОЛЛИНЕАРНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ

### *Классификация орбит в окрестности коллинеарных точек либрации*

Движение в окрестности коллинеарных точек либрации, являющихся решениями ограниченной круговой задачи трёх тел, можно рассматривать как совокупность двух колебаний – в плоскости орбиты меньшего тела вокруг центрального, и в плоскости, ей ортогональной, а также некоего «гиперболического» поведения. Последнее означает, что колебания неустойчивы и даже малые отклонения со временем приведут к уходу от периодической орбиты. Орбиты, описываемые колебаниями в плоскости орбиты меньшего тела или же в плоскости, ей ортогональной, принято классифицировать как плоские или же вертикальные орбиты Ляпунова. Частоты этих колебаний изменяются в зависимости от амплитуды (поскольку задача нелинейна), и при некоторых амплитудах становятся соизмеримыми – в этом случае говорят о гало-орбите. Если частоты колебаний в различных плоскостях существенно отличаются, движение является непериодическим, траектория движения называется орбитой Лиссажу. Орбиты Лиссажу являются

квазипериодическими. Подобные орбиты могут существовать как в окрестности вертикальных периодических орбит, так и в окрестности гало-орбит [11]. Примеры орбит, относящихся к вышеописанным классам, представлены на рис. 2.

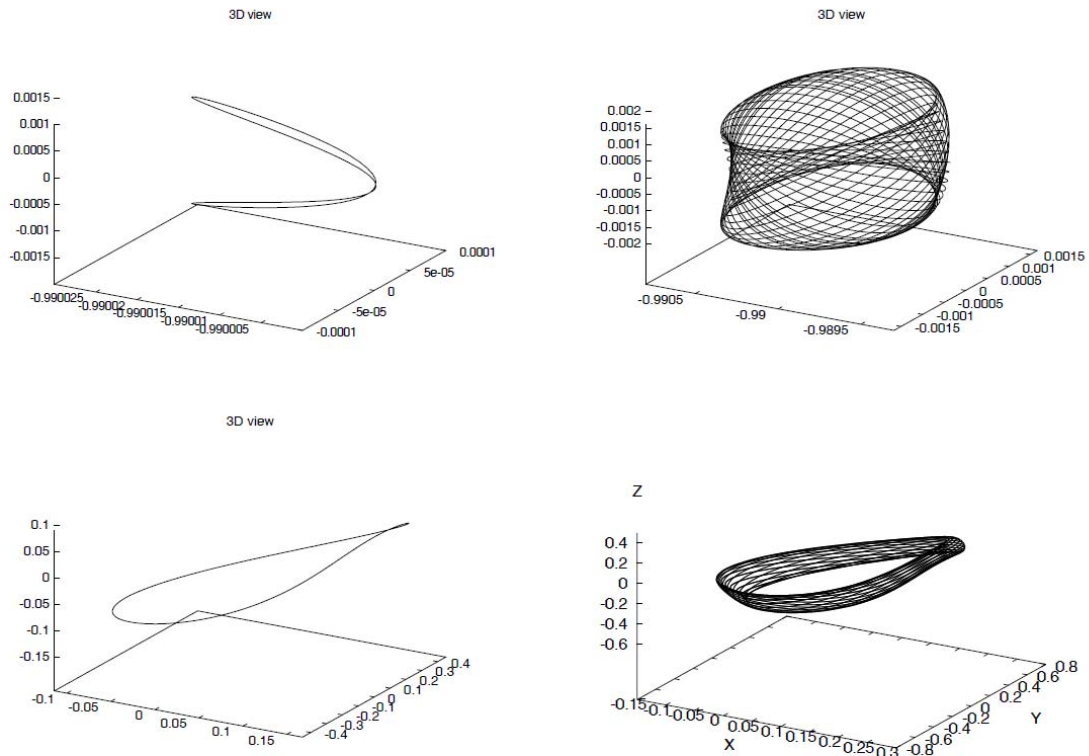


Рис. 2. Примеры орбит в окрестности точки либрации  $L_1$ .  
 Вверху слева: вертикальная периодическая орбита Ляпунова.  
 Вверху справа: квазипериодическая орбита в окрестности вертикальной периодической орбиты – орбита Лиссажу.  
 Внизу слева: периодическая гало-орбита.  
 Внизу справа: квазипериодическая гало-орбита в окрестности гало-орбиты [12]

Визуализировать вышеописанное многообразие орбит также можно с помощью применяемого в теории динамических систем отображения Пуанкаре – в нашей задаче им является пересечение исследуемого семейства орбит с плоскостью  $XY$  ( $Z = 0$ , рис. 3).

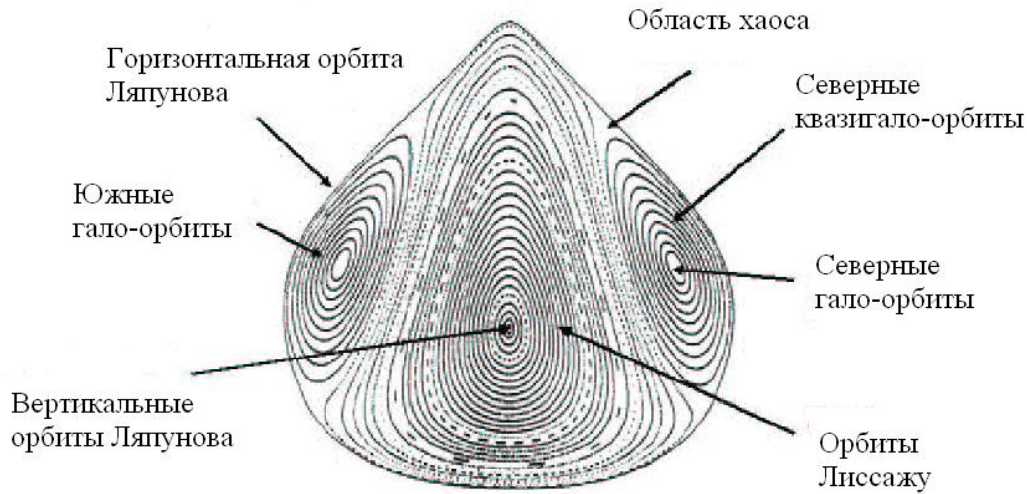


Рис. 3. Сечение плоскостью  $XU$  периодических траекторий в окрестности коллинеарной точки либрации (отображение Пуанкаре) [12]

Орбита, лежащая в плоскости  $XU$ , будет отображаться как замкнутая кривая, квазипериодическая орбита – как множество точек, лежащих в окрестности одной кривой. Рис. 3 показывает одно из этих отображений. В центре изображения находится неподвижная точка, соответствующая отображению вертикальной периодической орбиты Ляпунова, пересекающей плоскость  $Z = 0$  только в этой точке. Она окружена квазипериодическими траекториями, принадлежащими инвариантным торам. Внешняя огибающая этой фигуры – принадлежащая плоскости  $XU$  орбита Ляпунова (соответствующая заданному значению константы Якоби). Две другие фиксированные точки относятся к гало-орбитам, симметричным относительно  $Z = 0$ . Они, в свою очередь, окружены инвариантными двумерными торами. Между двумерными торами вокруг вертикальной орбиты и двумерными торами вокруг гало-орбит существуют устойчивые и неустойчивые семейства плоских орбит Ляпунова.

Поскольку нас интересует движение в окрестности заданной точки либрации, следуя Ричардсону [13], поместим начало координат в точку либрации и отмасштабируем переменные таким образом, чтобы расстояние от малого притягивающего тела до выбранной точки равновесия равнялось единице. Приведем гамильтониан ограниченной круговой задачи трех тел:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + up_x - xp_y - \frac{1-\mu}{((x-\mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{\mu}{((x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}$$

где  $\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ ;  $m_1 > m_2$ . Представим  $r_1 = ((x-\mu)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  и

$r_2 = ((x - \mu + 1)^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$  в виде разложения в ряд по полиномам Лежандра и получим выражение для гамильтониана системы в виде:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + yp_x - xp_y - \sum_{n \geq 2} c_n(\mu) \rho^n P_n\left(\frac{x}{\rho}\right)$$

где  $c_n$  – константы, зависящие от точки равновесия и отношения масс притягивающих тел  $\mu$ ,  $P_n$  – полином Лежандра степени  $n$ ,  $\rho = x^2 + y^2 + z^2$ . С помощью линейного симплектического преобразования координат [13], члены гамильтониана второго порядка преобразуются в нормальную форму:

$$H_2 = \lambda xp_x + \frac{\omega_p}{2}(y^2 + p_y^2) + \frac{\omega_v}{2}(z^2 + p_z^2)$$

где для простоты мы сохранили те же обозначения переменных. Здесь  $\lambda, \omega_p$  и  $\omega_v$  – положительные вещественные числа. Из выражения для  $H_2$  очевидно, что в линейном приближении движение материальной точки в окрестности коллинеарных точек либрации описывается фазовыми траекториями типа «седло» по оси  $x$  и фазовыми траекториями типа «центр» по осям  $y$  и  $z$  [14]. Отсюда следует, что в окрестности точек либрации должны существовать семейства периодических орбит, имеющие в предельном случае частоты, соответствующие двум центрам –  $\omega_p$  и  $\omega_v$  (называемые плоской и вертикальной частотой, соответственно). В окрестности точек либрации также могут существовать двумерные торы с двумя основными частотами, стремящимися к  $\omega_p$  и  $\omega_v$  при стремлении амплитуд колебаний к нулю. Однако фазовые траектории такого типа неустойчивы. Во-первых, основные частоты колебаний у коллинеарной точки либрации могут быть слишком близки к резонансным. Кроме того, амплитуда колебаний изменяется вместе с частотой, вследствие чего и резонанс наблюдается при отличных от нуля значениях амплитуд.

В окрестности точек либрации  $L_1$  и  $L_2$  динамика системы характеризуется равновесием, неустойчивым по Ляпунову, вызванным седловой компонентой линейного приближения. По этой причине невозможно провести численное моделирование отображения Пуанкаре, с тем, чтобы получить представление о фазовом пространстве. Вследствие существования конфигурации из двух центров в общем случае вокруг данных точек существуют четырёхмерные многообразия, в западной литературе известные как «многообразия с нейтральной устойчивостью» [12]. Для заданного энергетического уровня это трёхмерное многообразие с нейтральной динамикой. На этом многообразии существуют периодические орбиты и двумерные торы. В точке  $L_3$  также наблюдается линейное поведение, однако неустойчивость выражена слабее. Тем не менее, долгосрочные эффекты, связанные с устойчивыми или неустойчивыми многообразиями в окрестности точки  $L_3$  крайне важны.



### Обзор миссий к коллинеарным точкам либрации системы Солнце-Земля

Первой миссией, отправленной в окрестности точки либрации, стал запуск аппарата “ISEE-3” к точке  $L_1$  системы Солнце-Земля в 1978 г. Траектория движения этого КА такова, что гравитационные воздействия Земли и Солнца на аппарат имеют одинаковый порядок, и описание движения в рамках задачи двух тел с учетом возмущений от третьего тела невозможно. В этом случае ограниченная задача трёх тел является приемлемой моделью для баллистического проектирования миссии. В рамках данной модели была показана роль точек либрации, позволяющих получать достаточно сложную и эволюционирующую траекторию движения аппарата в системе Солнце-Земля-Луна с минимальными затратами топлива. Во многом благодаря этой миссии использование динамики коллинеарных точек либрации стало рассматриваться как реальная инженерная методика.

Аппарат для исследования комет и солнечного ветра “ISEE-3” был первым КА, выведенным на квазипериодическую гало-орбиту. Он вышел на траекторию прямого перелёта к точке  $L_1$  системы Солнце-Земля, совершил несколько оборотов на гало-орбите в её окрестности, затем был переведён в окрестность точки  $L_2$ . После выполнения нескольких гравитационных маневров у Луны, аппарат был направлен на сближение с кометой Якобини-Циннер. Гало-орбита в окрестности точки  $L_2$  имела небольшой выход из плоскости эклиптики, составлявший 1.2 тыс. км.

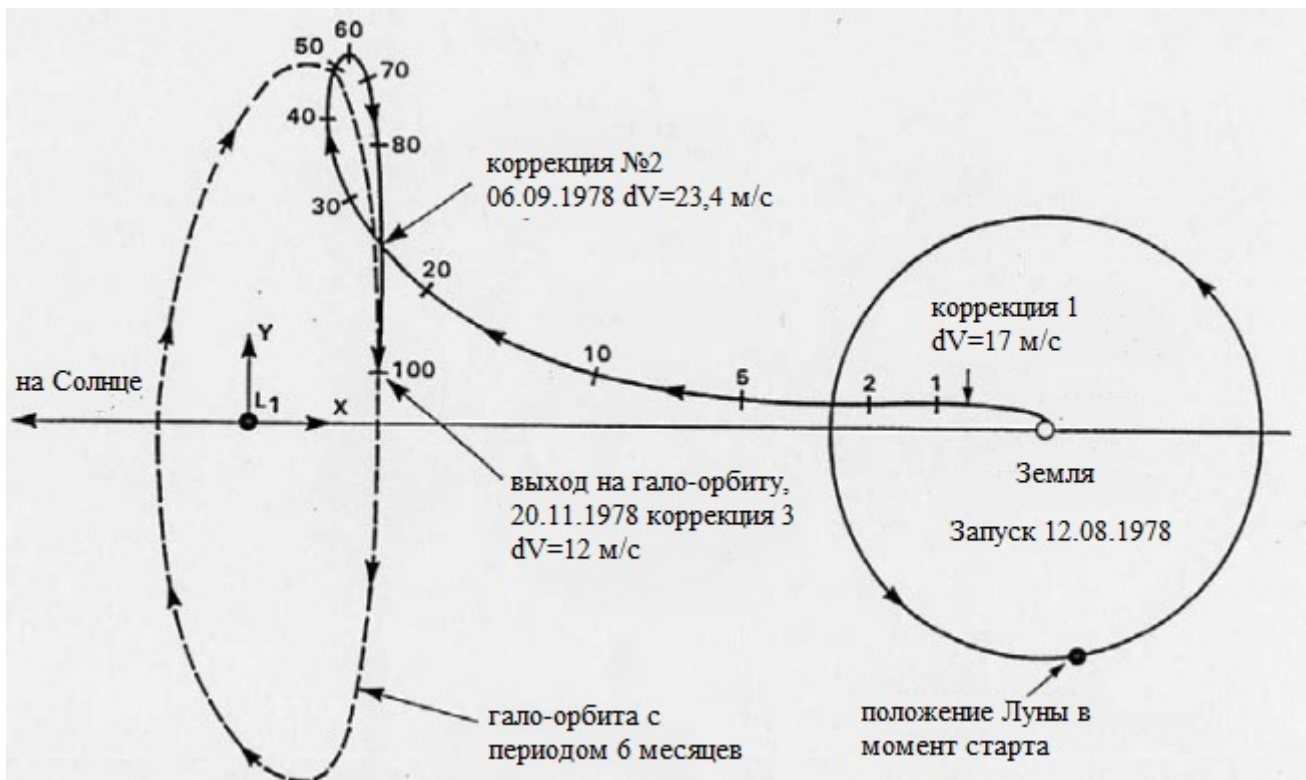


Рис. 4. Траектория перелёта космического аппарата “ISEE-3” на гало-орбиту в окрестности точки либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля

Следующая миссия, использовавшая гало-орбиту – космическая обсерватория SOHO, совместный проект ЕКА и НАСА, направленный на изучение Солнца. Аппарат был выведен на гало-орбиту в окрестности точки либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля, схожую с орбитой аппарата “ISEE-3”. Период орбиты составил 178 суток. Точное выведение на гало-орбиту привело к минимальным расходам топлива на коррекции, что позволило в несколько раз (с 2 до 8 лет) продлить научную программу.

Большой интерес для анализа представляет траектория космического аппарата “WIND”, запущенного к точке  $L_1$  системы Солнце-Земля 1 ноября 1994 г. для изучения солнечного ветра и функционирующего по настоящее время. Первые три года аппарат находился на высокоэллиптической геоцентрической орбите и совершал гравитационные маневры у Луны таким образом, что линия апсид его орбиты оставалась параллельной направлению от Земли на Солнце. Кроме того, в этот период был сделан один виток вокруг точки  $L_1$  системы Солнце-Земля. Далее, в рамках расширенной миссии, КА “WIND” вышел на так называемые «лепестковые орбиты» – орбиты с большим (более 1,5 млн. км) удалением от Земли в направлении оси  $Z$  и эволюционирующим наклоном относительно плоскости эклиптики. Также аппарат совершил облёт точки  $L_2$ . Данная орбита уникальна, она обеспечила проведение запланированных научной программой измерений в широкой окрестности околоземного пространства.

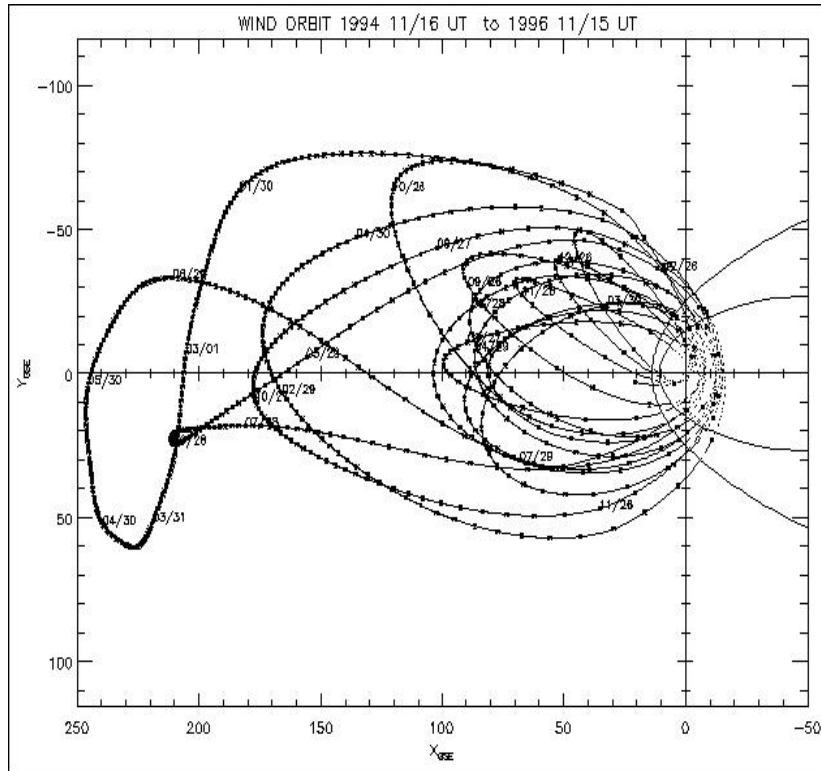


Рис. 5. Траектория движения КА “WIND” с 16.11.1994 по 15.11.1996 с облётом точки либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля

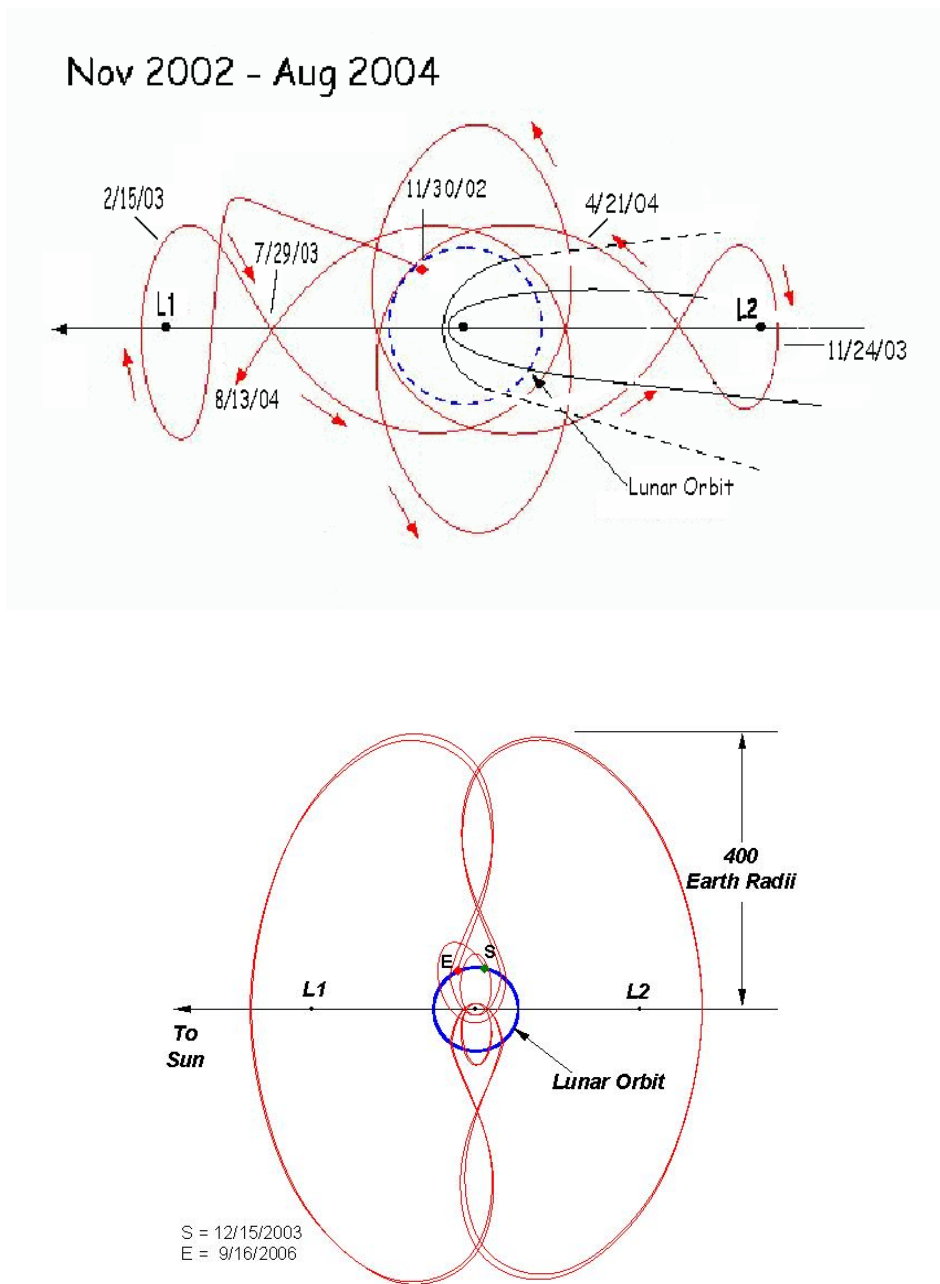


Рис. 6. Траектория движения КА “WIND”, вверху – с 11.2002 по 08.2004;  
Внизу – с 12.15.2003 по 9.16.2006.

Первым аппаратом, использовавшим орбиту Лиссажу, стал КА НАСА “ACE”, запущенный к точке либрации  $L_1$  системы Солнце-Земля в 1997 г. Выведение на орбиту и её поддержание потребовали коррекций, коррекции удержания необходимо было производить с периодичностью 8 недель, коррекции, изменяющие геометрию орбиты для поддержания угла КА-Солнце-Земля – раз в 3-6 месяцев. Период орбиты составил 178 суток, аппарат функционирует по настоящее время.

В 2001 г. на орбиту Лиссажу в окрестности точки  $L_2$  системы Солнце-Земля была выведена космическая обсерватория НАСА – КА “WMAP”. Перелёт был осуществлен с использованием гравитационного манёвра у Луны. В том же году к точке  $L_1$  системы Солнце-Земля был запущен КА “Genesis”, также использовавший орбиту Лиссажу.

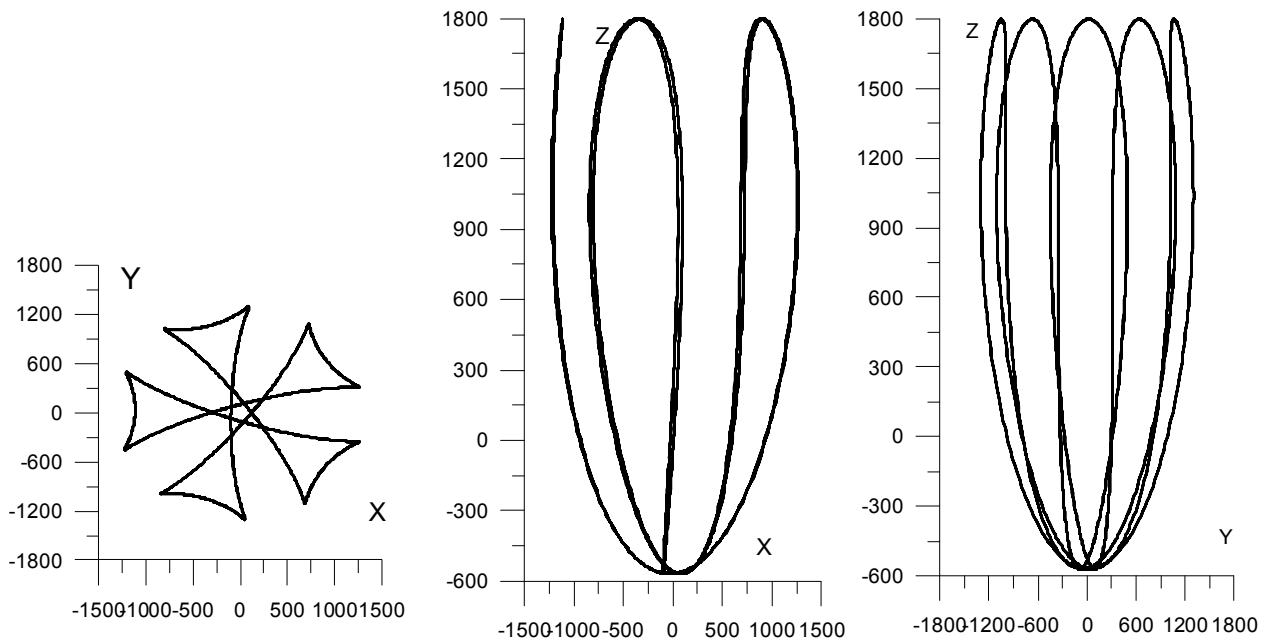
В 2009 г на высокоамплитудную орбиту Лиссажу в окрестности точки  $L_2$  системы Солнце-Земля были выведены КА “Herschel” и “Planck” Европейского Космического Агентства. После перехода на орбиту с траектории перелёта КА “Planck” исполнил манёвр перехода на орбиту Лиссажу с меньшей амплитудой, в то время как “Herschel” остался на высокоамплитудной орбите.

Удобство использования гало-орбит для размещения на них космических телескопов и других аппаратов для астрофизических исследований обусловлено следующим фактором: эти орбиты сохраняют свою пространственную ориентацию относительно Солнца и Земли. Исследуемые в данной работе гало-орбиты располагаются в окрестности коллинеарной точки либрации  $L_2$ , удалённой от Земли на расстояние порядка 1.5 млн. км. В этом случае пространственная конфигурация орбиты позволяет экранировать антенну от солнечного и отражённого от Земли излучения при условии поддержания постоянной ориентации аппарата. В то же время, вращаясь вместе с Землей вокруг Солнца, аппарат за год совершает оборот на 360 градусов, что позволяет наблюдать любые объекты Вселенной, расположенные вблизи плоскости эклиптики.

Кроме того, как будет показано далее, гало-орбиты являются энергетически выгодными: возможен безымпulsive переход на подобную орбиту с геоцентрической отлётной траектории, а суммарные коррекции для поддержания орбиты также невелики.

## 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ОРБИТЫ В РАМКАХ ЗАДАЧИ ТРЁХ ТЕЛ

Б.Б. Крейсманом был выполнен поиск образцов периодических орбит, удовлетворяющих требованиям проекта, среди периодических решений пространственной ограниченной задачи трёх тел системы Солнце – (Земля + Луна) [4]. Были предложены два варианта орбит, представленные на рис 4.



$T=146.105$  суток  $=0.4$  года

Рис. 7. Вариант 1, орбита за период 7 лет в проекциях на координатные плоскости в инерциальной (невращающейся) эклиптической системе в рамках модели круговой ограниченной задачи трёх тел. Размерность – тыс. км

В.В. Сазонов предложил алгоритм переноса решений, полученных в ограниченной круговой задаче трёх тел, в задачу, учитывающую все основные силы, действующие на космический аппарат, находящийся в Солнечной системе [8]. Алгоритм основан на методе Левенберга-Марквардта. В результате реализации данного алгоритма орбиты Б.Б. Крейсмана были построены в полной модели действующих сил, учитывающей эллиптичность орбит, нецентральность гравитационных полей Земли и Луны, а также гравитационные возмущения от других планет Солнечной системы и давление солнечной радиации [10]. Анализ предложенных орбит показал, что решения, являющиеся периодическими в ограниченной круговой задаче трёх тел, при интегрировании в полной модели действующих сил таковыми не являются. Ниже приведены результаты расчётов траекторий космического аппарата, движущегося внутри трубок радиуса 30 000 км, построенных вокруг периодических траекторий, полученных Б.Б. Крейсманом.

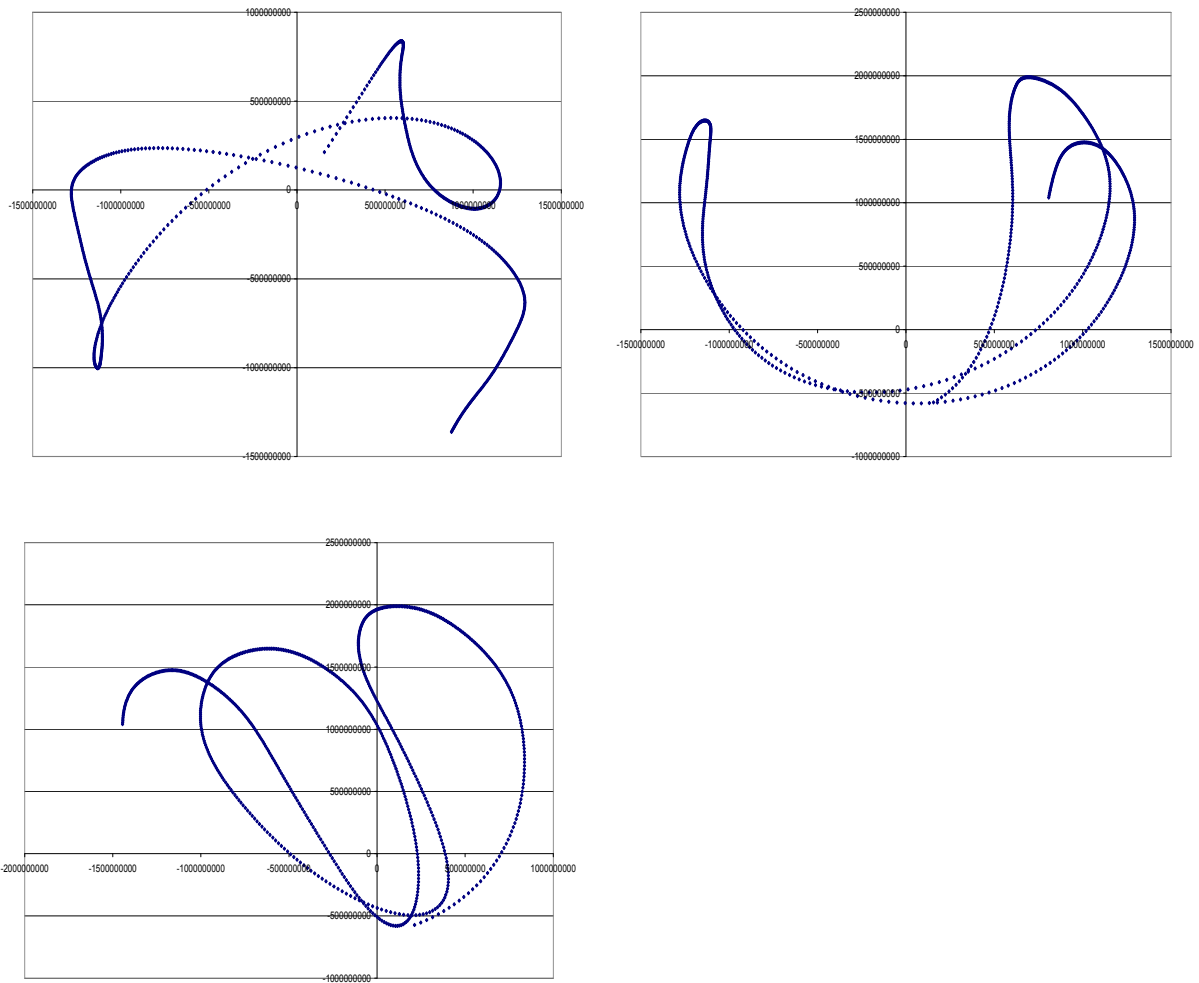


Рис. 8. Проекция орбиты  $z_{11}$  в СК J2000 на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  за период 1 год в рамках полной модели действующих сил. Размерность – тыс. км

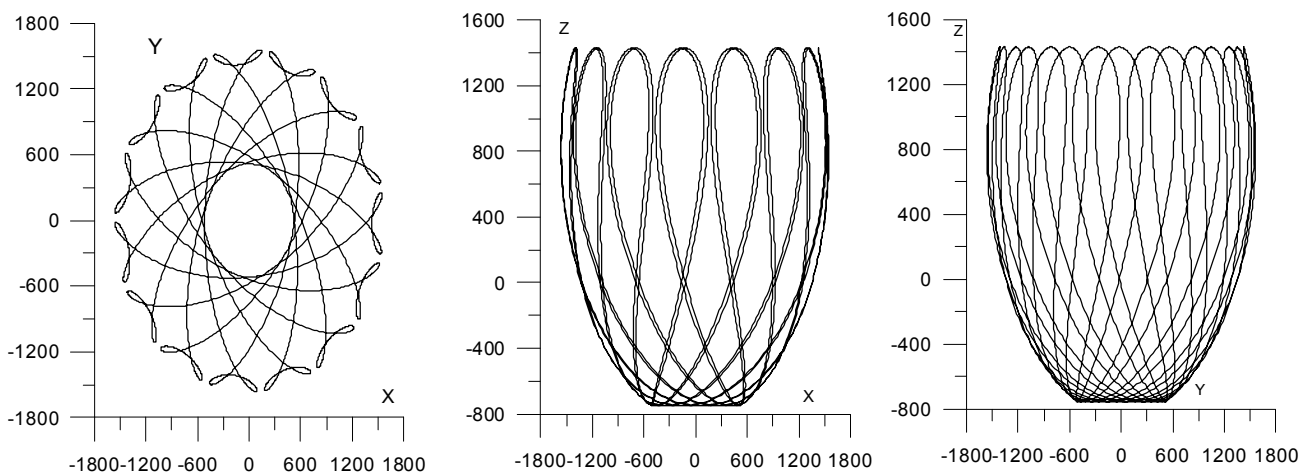


Рис. 9. Вариант  $z_{13}$ , орбита за 15 периодов (7 лет) в проекциях на координатные плоскости в инерциальной (невращающейся) эклиптической системе в рамках модели круговой ограниченной задачи трёх тел. Размерность – тыс. км

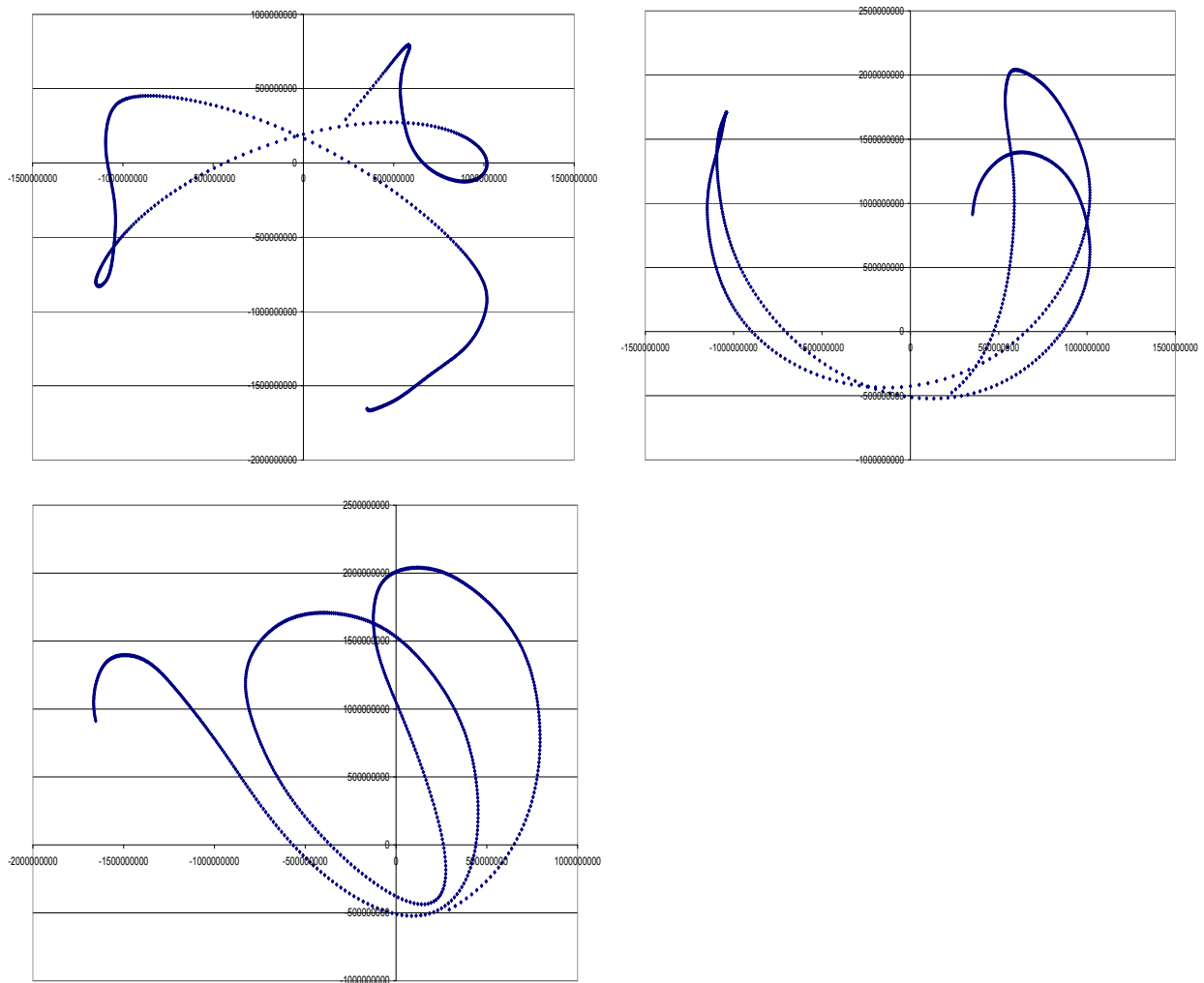


Рис. 10. Проекция орбиты z11 в СК J2000 на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  за период 1 год в рамках полной модели воздействующих сил. Размерность – тыс. км

Также была произведена оценка энергетических затрат на перелёт с околоземной круговой орбиты на предложенные орбиты. Затраты составили 3210 м/с и 3211 м/с соответственно, из них 266 м/с и 276 м/с на торможение при переходе на рабочую орбиту КА «Миллиметрон». Расчёт зон видимости КА со станций слежения, расположенных на территории России, при реализации данных орбит был произведен на период 1 год и существенных ограничений не выявил – продолжительность нахождения КА вне зон видимости составляет менее суток на данном интервале существования аппарата.

В.В. Сазонов предложил другой вариант орбиты в окрестности точки либрации  $L_2$ . Анализ данного варианта удалось выполнить в рамках алгоритма построения гало-орбит. Длительность существования аппарата в окрестности радиуса 700 км вокруг точки  $L_2$  при реализации данной орбиты составляет 5 лет, суммарные затраты на коррекции – 18.5 м/с. Ниже приведены проекции данной орбиты на плоскости  $XY$ ,  $ZX$  и  $YZ$  системы координат J2000.

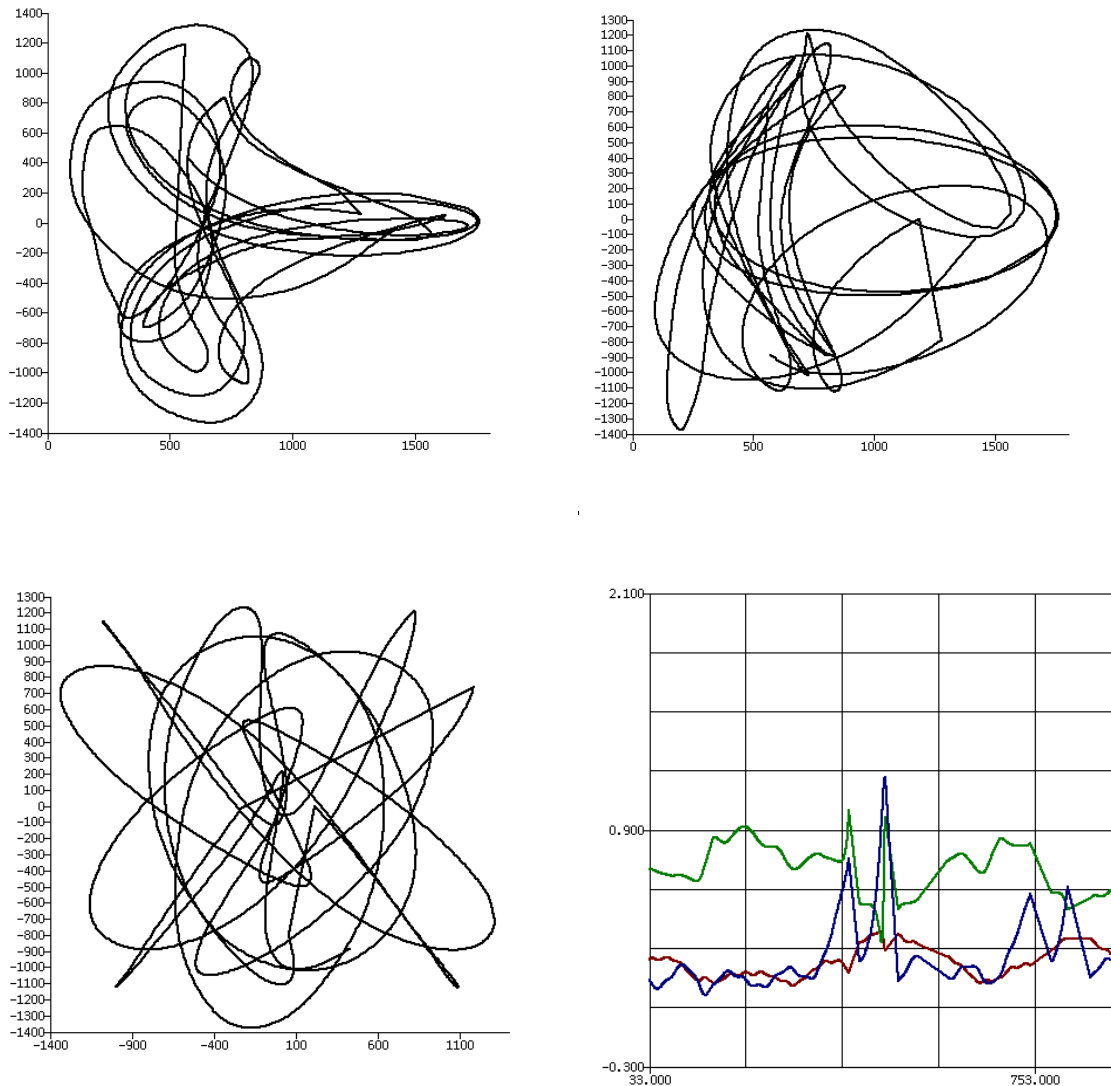


Рис. 11. Проекция орбиты на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  вращающейся СК за период 1 год в рамках полной модели воздействующих сил, внизу справа – график эволюции параметров орбиты  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$ . Размерность – тыс. км

### 3. ГАЛО-ОРБИТЫ

Алгоритм баллистического проектирования траекторий перелёта на заданную гало-орбиту, а также алгоритм расчёта коррекций удержания аппарата на орбите подробно рассмотрен в работах [8,9,10]. Пространственная геометрия гало-орбиты задаётся четырьмя параметрами:  $A$  – удаление КА от точки  $L_2$  в плоскости эклиптики,  $B$  – удаление КА от точки  $L_2$  в плоскости, ортогональной эклиптике,  $\varphi_1$  – фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость эклиптики,  $\varphi_2$  – фаза колебательного движения КА в проекции на плоскость, ортогональную эклиптике. Это следует из общего решения линеаризованных



уравнений, описывающих колебания КА в малой окрестности точки либрации, записанного в  $L_2$ -центрической вращающейся системе координат.

$$\xi_1 = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C e^{\lambda t} + D e^{-\lambda t},$$

$$\xi_2 = -k_2 A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + k_1 (C e^{\lambda t} - D e^{-\lambda t}),$$

$$\xi_3 = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

где  $\omega_1 = n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} - B_L + 2)} \approx 0.035384 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$

$$\omega_2 = n_1 \cdot \sqrt{B_L} \approx 0.034148 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$$

$$\lambda = n_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{9B_L^2 - 8B_L} + B_L - 2)} \approx 0.042734 \frac{\text{рад}}{\text{сутки}}$$

$$B_L = \left( \frac{1 - \mu'}{r_{L1}^3} + \frac{\mu'}{r_L^3} \right) a_1^3$$

$$\mu' = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu}$$

$\mu_1, \mu$  – массы Солнца и Земли,

$a_1$  – астрономическая единица,

$r_{L1}, r_L$  – расстояния от точки  $L_2$  до Солнца и Земли,

$n_1$  – средняя угловая скорость орбитального движения Земли,

$A, B, C, D, \varphi_1, \varphi_2$  – постоянные интегрирования.

Необходимое для получения гало-орбиты условие близости частот колебаний в плоскости  $XY$  –  $\omega_1$  и в плоскости, ей ортогональной ( $YZ$ ) –  $\omega_2$ , выполняется. Однако наличие отличного от нуля параметра  $\lambda$  в экспонентах (седловая компонента линейного приближения) приводит к неустойчивому характеру движения по гало-орбите, что обуславливает необходимость проведения коррекций удержания с периодичность 70-90 суток. В то же время седловая компонента линейного приближения обеспечивает возможность перехода с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту без импульса торможения. Значение параметра  $D$  выбирается таким образом, что при  $t = t_0$  траектория движения аппарата пересекает границу сферы действия Земли.

Выбором достаточно большого значения параметра  $B$  обеспечивается требуемый выход КА из плоскости эклиптики. Эмпирически установленный диапазон значений параметра  $A$ , для которого существуют гало-орбиты, составляет 800-1200 тыс. км, параметра  $B$  – 200-1200 тыс. км.

Ниже представлена гало-орбита, полученная вышеописанным методом, принятая (на момент выхода препринта) АКЦ в качестве номинальной для проекта «Миллиметрон». Суммарные затраты характеристической скорости на поддержание подобной орбиты составляют 24 м/с за период 7,5 лет.

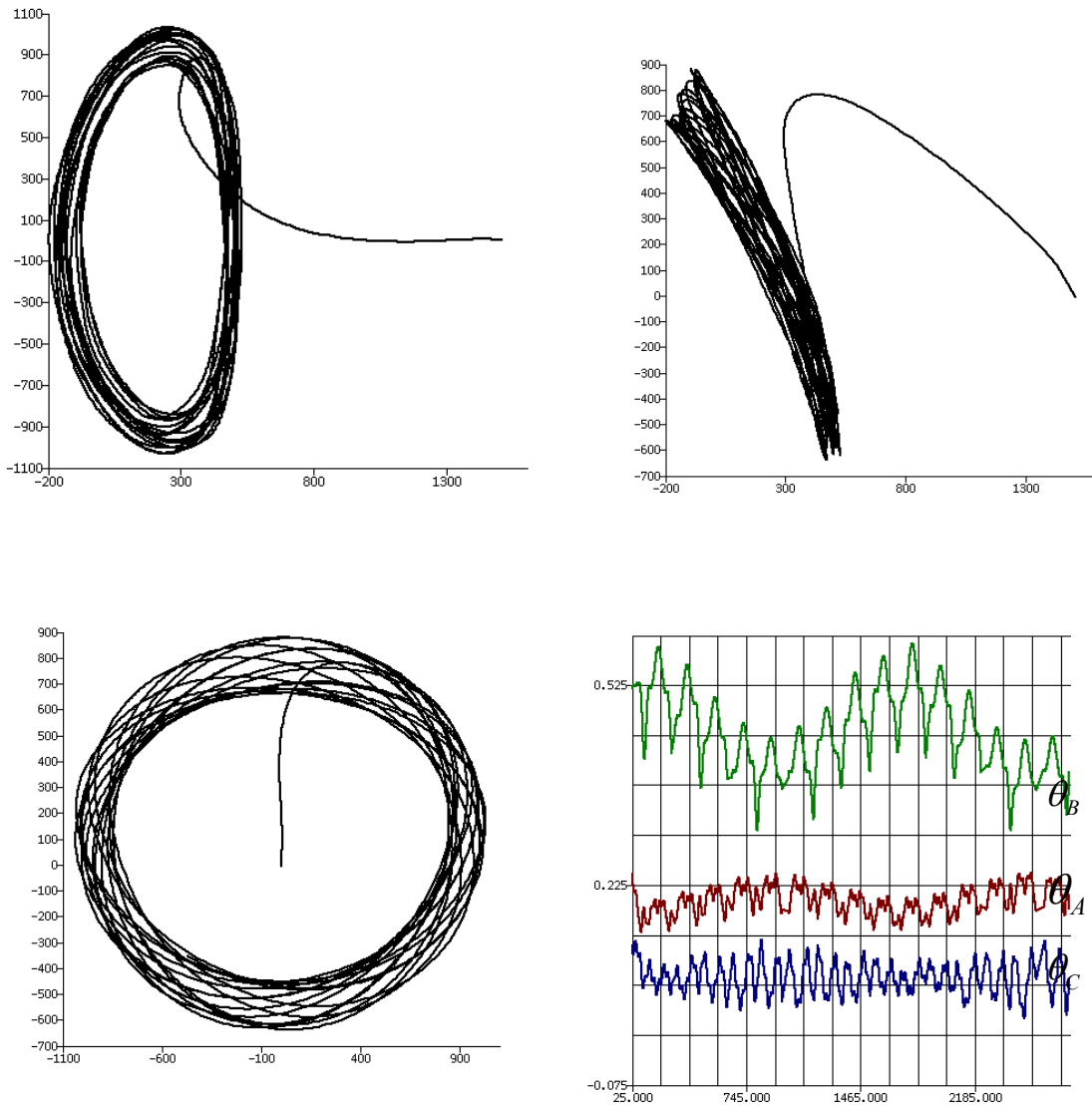


Рис. 12. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ .

Размерность – тыс. км. Эволюция параметров орбиты  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  представленной гало-орбиты (справа внизу).

Приведём ещё один пример орбиты КА «Миллиметрон». В данном случае суммарные затраты характеристической скорости на поддержание орбиты составляют 21 м/с за период существования аппарата, величина максимальной амплитуды по оси  $Z$  превышает 1100 тыс. км, однако средние значения выхода из плоскости эклиптики меньше.

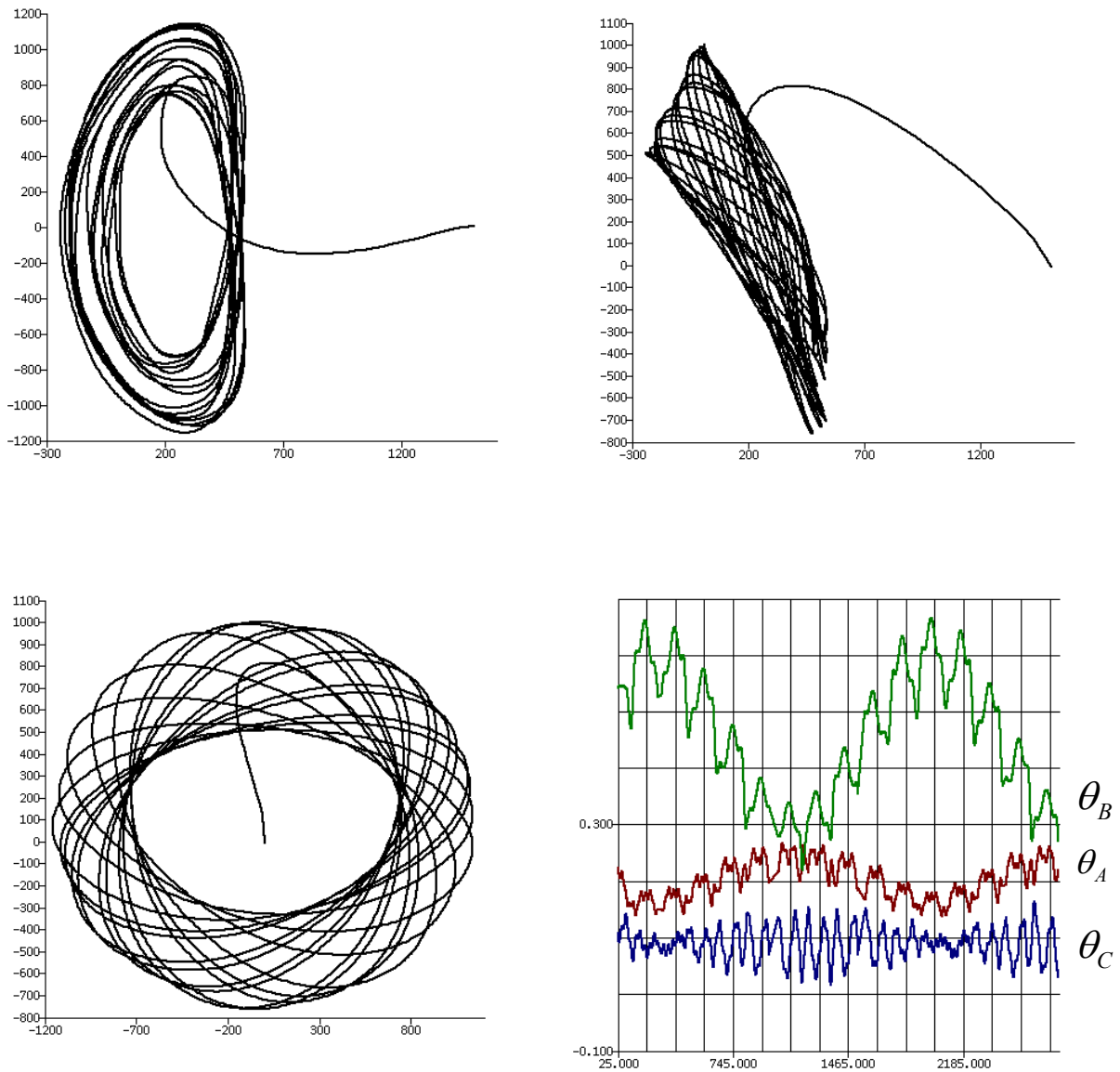


Рис. 13. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность – тыс. км. Эволюция параметров орбиты  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  и  $\theta_C$  представленной гало-орбиты (справа внизу).

Наконец, приведём ещё один вариант траектории движения по гало-орбите, отличающийся высокой стабильностью, однако требующий больших затрат характеристической скорости – см. рис 13.

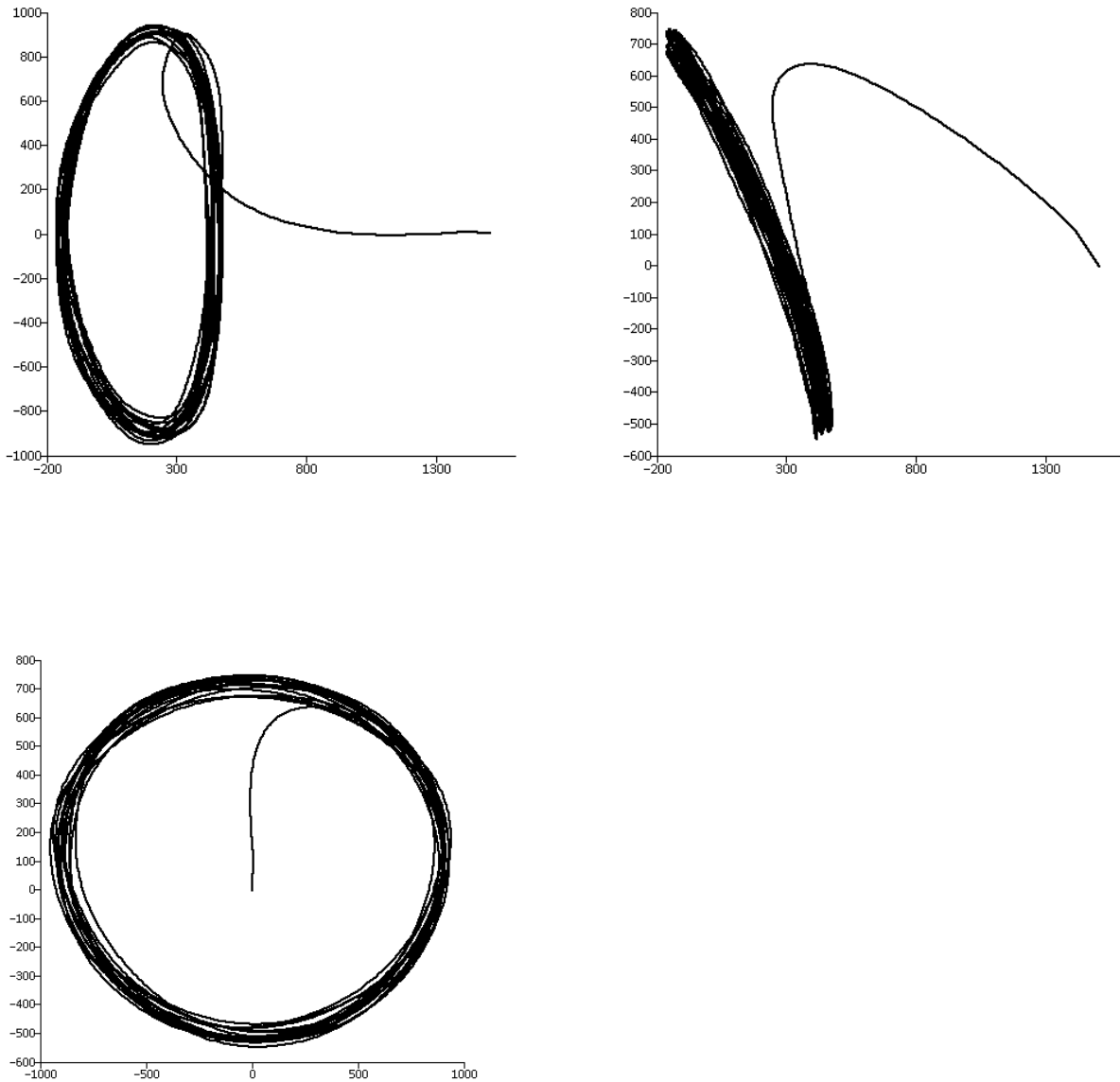


Рис. 14. Проекция траектории перелёта и полёта по гало-орбите на плоскости  $XY$ ,  $XZ$  и  $YZ$  вращающейся СК. Начало координат в точке  $L_2$ . Размерность – тыс. км

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейсман Б.Б. Семейства периодических решений гамильтоновых систем. Несимметричные периодические решения плоской ограниченной задачи трех тел. // Космические исследования. 2005. Т. 43. № 2 С. 88-110.
2. Крейсман Б.Б. Семейства периодических решений пространственной ограниченной задачи трех тел. // Космические исследования. 2009. Т. 47. № 1 С. 64-78.

3. Крейсман Б.Б. Применение периодических решений пространственной задачи трех тел для проектирования орбиты космического телескопа. // Космические исследования. 2009. Т. 47. № 5 С. 444-451.
4. Крейсман Б.Б. Устойчивые пространственные орбиты “вокруг” коллинеарных точек либрации. // Космические исследования. 2010. Т. 48. № 3. С. 271-278
5. Крейсман Б.Б. Одноимпульсные перелеты с орбит искусственных спутников на орбиты вокруг точки либрации  $L_1$  или  $L_2$ . // Космические исследования. 2011. Т. 49. № 4. С. 335-344.
6. Крейсман Б.Б. Периодические решения пространственной ограниченной задачи трех тел. 2. Потеря симметрии при резонансе 1/1. // Космические исследования. 2012. Т. 50. № 1. С.68-78.
7. Сайт Астрокосмического центра Физического института им П.Н. Лебедева РАН. URL: <http://www.asc.rssi.ru/millimetron/millim.htm>
8. Ильин И.С., Заславский Г.С., Лавренов С.М., Сазонов В.В., Степаньянц В.А., Тучин А.Г., Тучин Д.А., Ярошевский В.С. Баллистическое проектирование траекторий перелета с орбиты искусственного спутника Земли на гало-орбиту в окрестности точки  $L_2$  системы Солнце-Земля. // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2013, № 6. URL: [http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013\\_6.pdf](http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_6.pdf)
9. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Траектории перелета с низкой околоземной орбиты на многообразие ограниченных орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце – Земля // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 66. URL: [http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_66.pdf](http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_66.pdf)
10. Ильин И.С., Сазонов В.В., Тучин А.Г. Построение ограниченных орбит в окрестности точки либрации  $L_2$  системы Солнце – Земля // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2012, № 65. URL: [http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012\\_65.pdf](http://keldysh.ru/papers/2012/prep2012_65.pdf)
11. Farquhar R.W. The Control and Use of Libration-Point Satellites // Ph.D. Dissertation, Dept. of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, Stanford, CA, 1968
12. Canalias E., Gomez G., Marcote M., Masdemont J.J. Assessment of Mission Design Including Utilization of Libration Points and Weak Stability Boundaries. – Department de Matematica Aplicada, Universitat Politecnica de Catalunya and Department de Matematica Aplicada, Universitat de Barcelona.
13. Richardson D.L. A note on the Lagrangian Formulation for Motion about the Collinear Points. // Celestial Mechanics, 22(3):231–235, 1980.
14. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966 г., 568 с.
15. Jorba À., Villanueva J. On the Persistence of Lower Dimensional Invariant Tori Under Quasiperiodic Perturbations. // J. Nonlinear Science, 7:427–473, 1997.
16. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978.

17. Маршал К. Задача трех тел. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
18. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Траектории полета Земля – Луна – гало-орбита в окрестности точки  $L_2$  системы Земля – Солнце // Космические исследования, 1992. Т. 30. № 4. С.435–454.
19. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Одноимпульсный перелет на условно-периодическую орбиту в окрестности точки  $L_2$  системы Земля – Солнце и смежные задачи // Космические исследования, 1987. Т. 25. № 2. С. 163–185.
20. Eismont N., Dunham D., Jen S.-C., Farquhar R. Lunar Swingby as a Tool for Halo-Orbit Optimization in Relict-2 Project // Proceeding of the ESA Symposium on Spacecraft Flight Dynamic, Germany, 30-4 October, 1991 (ESA SP-326, December 1991), pp.435-439.
21. Лидов М.Л., Ляхова В.А., Тесленко Н.М. Характеристики управления при выведении КА в окрестность точки  $L_2$  системы Солнце – Земля с использованием гравитации Луны (Проект “Реликт-2”) // Космические исследования, 1993. Т. 31. № 5. С.3–20.
22. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. – М.: Наука, 1978.
23. Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. – М: Наука, 1982.
24. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. – М.: Мир, 1985.
25. Gómez G., Jorba À, Masdemont J.J., Simó C. Dynamics and Mission Design Near Libration Point Orbits. // Advanced Methods for Collinear Points. Volume 3. World Scientific, 2000.