



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Колесниченко А. В.**

Самоорганизация  
синхронизированных  
транспортных потоков под  
влиянием индуцированных  
шумом переходов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Колесниченко А. В. Самоорганизация синхронизированных транспортных потоков под влиянием индуцированных шумом переходов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 57. 19 с.  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-57>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**А.В. Колесниченко**

**Самоорганизация синхронизированных  
транспортных потоков  
под влиянием индуцированных  
шумом переходов**

**Москва — 2013**

## **Колесниченко А.В.**

Самоорганизация синхронизированных транспортных потоков под влиянием индуцированных шумом переходов.

В работе исследовано коллективное поведение нелинейной стохастической транспортной системы города или его крупного района, проявляющееся в самоорганизации синхронизированного движения активных частиц (автомобилей), имеющих собственные мотивы движения. При этом спонтанный процесс самоорганизации хаотических транспортных потоков, обеспечивающий отклонение от оптимального режима движения, происходит под воздействием различного рода коррелированных шумов, обусловленных влиянием на условия движения автомобилей различных случайных факторов. Проанализированы стационарные состояния пространственно однородного транспортного потока в присутствии шума управляющего параметра.

**Ключевые слова:** транспортные потоки, стохастические процессы, самоорганизация, мультипликативный шум, уравнение Фоккера-Планка, индуцированные шумом переходы.

## **Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko**

Self-organising of synchronised traffic flows under influence of noise-induced transitions.

The collective behaviour of non-linear stochastic traffic system of a city or its large region is investigated. It is shown in self-organising of the synchronised motion of the active particles (cars) having natural motives of a motion. Thus spontaneous process of self-organising of chaotic traffic flows (providing a diversion from an optimum mode of a motion) occurs under the influence of any the correlated noise which are caused by influence on traffic conditions of cars of various random factors. Stationary states of a spatially homogeneous traffic flows in the presence of noise of the driving parameter are analysed.

**Key words:** traffic flows, stochastic processes, self-organising, multiplicative noise, Fokker-Plank equation, noise-induced transitions.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-12046 офи-м.

## 1. Введение

Исследование выполнено в рамках программы развития городской транспортной инфраструктуры, выработки новых методических и теоретических подходов к её моделированию, поиска новых инструментариев прогнозирования транспортной системы в целом с целью создания эффективных мер по управлению дорожными средствами.

Разумеется, в общем случае необходим комплексный подход к анализу сложной транспортной системы, возможность которого проявляется в комбинации различных способов её описания [1]. Существующие модели, предназначенные для анализа транспортных сетей, весьма разнообразны по кругу решаемых задач, применяемому математическому аппарату, используемым данным и степени детализации описания движения. В частности, в настоящее время разработаны и широко используются статистические модели равновесного распределения корреспонденций и распределения потоков по сети [1-3], кинетические [4-7], гидродинамические [1,8-13] и микроскопические модели транспортных сетей (в которых явно выписывается уравнение движения каждого автомобиля) [1,14-15]. Все они носят, как правило, детерминированный характер и предназначены для определения текущих значений и прогноза различных характеристик функционирования транспортной сети, таких как интенсивность движения на всех элементах сети, объёмы перевозок, средние скорости движения, задержки и потери времени и т.д.

Вместе с тем, в общем случае транспортная система города относится к числу открытых (общее число автомобилей не фиксировано) неравновесных стохастических динамических систем [16-17], подверженных влиянию различного рода шумов. Подобные системы с ростом интенсивности внешнего воздействия, удаляющего их от оптимального равновесного состояния, могут испытывать самоорганизацию<sup>1)</sup> [18]. При этом эволюция хаотической транспортной системы связана с характерными для неё периодами неустойчивости, сме-

---

<sup>1)</sup> Под понятием самоорганизации обычно подразумеваются: процесс образования пространственно-временных структур и их эволюция в более организованные формы в открытой динамической нелинейной системе за счёт согласованного взаимодействия множества элементов, её составляющих.

няемыми метастабильными состояниями пространственно-временного распределения автомобилей (структурами), которые качественно отличаются от неупорядоченного их распределения на дорогах. В свою очередь эти новые коллективные образования (пространственно-временные структуры) активных частиц (автомобилей) вновь могут изменяться непредсказуемым образом в зависимости от текущего состояния составляющих транспортную систему элементов и изменения внешних условий движения. Такого рода переходы от одной фазы (структуры) к другой по своим свойствам аналогичны равновесным фазовым переходам в термодинамике и переходам, встречающимся в неравновесных физических системах при детерминированных внешних воздействиях, таким, как, например, неустойчивость Бенара или лазерный переход. В результате в подобных самоорганизующихся сложных системах, находящихся в неравновесном состоянии, происходят процессы, приводящие к выделению из множества описывающих систему переменных небольшого числа параметров, к которым подстраиваются все прочие степени свободы. Согласно известной теореме Рюэля-Такенса [19], нетривиальная картина самоорганизации, включающая в себя наличие странных аттракторов, наблюдается, если число выделенных степеней свободы не менее трех.

В работе качественное исследование коллективного поведения пространственно однородных транспортных потоков проведено в рамках популярной в теории самоорганизации системы уравнений Лоренца, три переменные которой имеют равноправный характер и описывают самосогласованное поведение трёх параметров, которые согласно устоявшейся терминологии называются параметром порядка, сопряжённым полем и управляющим параметром соответственно. Как известно, впервые синергетическая модель Лоренца возникла из упрощения гидродинамических уравнений, описывающих тепловую конвекцию Рэлея-Бенара в атмосфере, и в настоящее время является классической моделью хаотической динамики. Дальнейшее исследование системы Лоренца, проведенное в целом ряде публикаций, показало, что она даёт вполне правдоподобную кинетическую картину коллективного поведения частиц в любой макроскопической динамической системе, в которой возможна актуализация потенциального порядка.

Важно ясно себе представлять, что при спонтанном процессе самоорганизации хаотических транспортных потоков, обеспечивающем переходы в новые стабильные и метастабильные состояния, особая роль принадлежит действию внешних шумов (стохастических источников), обусловленных влиянием на условия движения автомобилей различных случайных факторов (например, ви-

димостью трассы, состоянием дорожного покрытия, ремонтными работами метеорологическими условиями и т.п.). Наиболее естественным образом учёт этих факторов в рамках схемы Лоренца может быть достигнут путём использования стохастического дифференциального уравнения (СДУ) Ланжевена<sup>2)</sup> для управляющего параметра транспортного потока, наличие шумового источника в котором как раз и определяют вариации структурных параметров транспортной сети (см., например, [17]). В работе мы исходим из того, что допустима замена реального шума, флуктуации которого обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов определяющих состояние транспортной системы, гауссовским белым шумом. Аргументом в пользу такого выбора случайной силы в СДУ является то обстоятельство, что только для модели белого шума результирующий стохастический процесс будет марковским и только лишь такой выбор приводит к полной эквивалентности метода СДУ мощному методу уравнения Фоккера-Планка (УФП) для плотности вероятности перехода. Таким образом, дополненное сингулярным источником шумов уравнение для управляющего параметра (в классической модели Лоренца) учитывает стохастическую природу синхронизированного транспортного потока; при этом флуктуации управляющего параметра играют не только роль триггера, включающего возможный фазовый переход, но и являются причиной самосогласованного формирования новых стационарных состояний. Заметим, что эти новые состояния, порождаемые индуцированными шумом переходами, несут на себе «несмываемые пятна» своего хаотического происхождения: в зависимости от интенсивности шума управляющего параметра происходит нетривиальная перестройка синергетического поведения транспортной системы в целом, при которой точка перехода в устойчивое состояние сдвигается, уходя в режим, запрещённый при детерминированном способе моделирования [20].

В работе когерентное поведение хаотического транспортного потока моделируется в стохастическом пространстве параметра порядка марковским диффузионным процессом, являющимся решением УФП с мультипликативным шумом (зависящим по определению от самого случайного процесса). Показано, что если интенсивность мультипликативного шума достаточно велика, то экстремумы функции распределения девиаций интервалов движения автомобилей, описывающей стационарное поведение синхронизированного транспортного

---

<sup>2)</sup> Заметим, что в рамках термодинамического подхода аналогичное детерминированное уравнение описывает переход неустойчивого транспортного потока (приводящего к дорожным пробкам) в устойчивый поток, отвечающий оптимальному режиму движения. Этот переход представляется как неравновесный переход первого рода, отражающий детерминистическую сторону явления.

потока, и по числу и по положению существенно отличаются от стационарных состояний, отвечающих соответствующему детерминированному случаю. Мультипликативный шум приводит к возникновению новых метастабильных стационарных состояний и тем самым изменяет и сами свойства (в частности, бифуркационные диаграммы) локальной устойчивости детерминированного случая (описываемого классической системой Лоренца). Это качественное изменение наиболее отчётливо отражается в экстремумах стационарной плотности вероятности, которые, согласно Хорстхемке и Лефевру [20], являются наиболее подходящими индикаторами перехода: экстремумы стационарной плотности вероятности соответствуют новым «фазам» системы. Таким образом, мультипликативный шум может как стабилизировать неустойчивые макроскопические состояния в пространстве параметра порядка, так и вызывать неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного подхода.

Поскольку в современных условиях задача прогноза эволюции транспортной инфраструктуры города приобретает первостепенное значение, то моделирование коллективного движения управляемых транспортных средств (активных частиц), выполненное с целью принятия эффективных мер по управлению движением транспортного потока, представляет значительный интерес. Основная цель работы как раз и состоит в исследовании влияния шума на поведение синергетической системы городского автотранспорта, представленной обобщённой схемой Лоренца. В работе найдены стационарные решения соответствующего уравнения Фоккера-Планка и положения максимумов плотности вероятности девиации интервалов движения в зависимости от интенсивности шума. При написании работы автор опирался на обзор [21] по теории стохастических систем.

## 2. Уравнения самоорганизации

Далее для описания транспортных потоков мы будем использовать гидродинамический подход, уподобляя (до известной степени) АТС взаимодействующим частицам жидкости, точнее активным жидким частицам, поскольку в транспортных системах неизбежно присутствует человеческий фактор. При слабой загруженности автомагистрали водители движутся по дороге как им удобно. Когда дорога становится загруженной, автомобили вынуждены ехать только по своей полосе, следуя друг за другом со средней скоростью  $u_{cp}(t)$  и соблюдая интервал движения  $s(t)$ . Причем в общем случае величины  $u_{cp}$  и  $s$

отличаются от возможных оптимальных значений: скорости  $U$  и интервала  $S = UT$  движения (здесь  $T$  – время пробега оптимального интервала). Именно подобный режим движения автомобилей, называемый «синхронизированным» потоком, более всего схож с движением жидкости. Вместе с тем, движение автомобилей на этой стадии происходит, как правило, с частыми пробками (переходами к режиму «stop-and-go»), причем такое инертное состояние распространяется вверх и вниз по дороге, сохраняясь длительное время. Важно иметь в виду, что главной причиной перехода от режима свободного движения автомобилей к неустойчивому, а затем к затору в определенные моменты времени, когда трасса становится переполненной, могут явиться весьма незначительные помехи, препятствовавшие формированию оптимального транспортного потока. При этом переход от свободного потока к синхронизированному может произойти почти спонтанно, например, около наклонных выездов на автомагистраль, когда происходит внезапное увеличение числа автомобилей на дороге.

Сама физическая постановка задачи о самосогласованной картине формирования синхронизированных транспортных потоков подсказывает [17], что в качестве параметра порядка следует взять величину отклонения реального интервала движения от оптимального значения (девиацию интервала)

$$q(t) \equiv s(t) - S, \quad (1)$$

в качестве сопряжённого поля – величину скорости изменения реального интервала движения  $ds(t)/dt$ , отсчитываемой от рассогласования  $U - u_{cp}(t)$  оптимальной и текущей скоростей:

$$u(t) \equiv ds(t)/dt - [U - u_{cp}(t)], \quad (2)$$

а под управляющим (внутренним) параметром транспортного потока  $\mathcal{G}$  следует понимать величину, определяемую условиями движения. Далее для простоты будем предполагать, что транспортный поток пространственно однороден. Задача сводится к определению временных зависимостей величин  $q(t)$ ,  $u(t)$ ,  $\mathcal{G}(t)$ . В простейшем случае скорости изменения этих величин задаются синергетической системой Лоренца

$$dq(t)/dt = -q(t)/\tau_q + u(t), \quad (3)$$



$$du(t)/dt = -u(t)/\tau_u + g_u q(t) \mathcal{G}(t), \quad (4)$$

$$d\mathcal{G}(t)/dt = [\mathcal{G}_0 - \mathcal{G}(t)]/\tau_g - g_g q(t) u(t) + \sqrt{2} \sigma_g \xi(t), \quad (5)$$

где  $\tau_q$ ,  $\tau_u$  и  $\tau_g$  – характерные времена автономной релаксации соответствующих величин к стационарным значениям  $q = u = 0$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ ;  $g_u$ ,  $g_g$  – положительные константы, являющиеся мерой обратной связи системы;  $\sigma_g^2$  – интенсивность флуктуаций управляющего параметра. При написании этих уравнений учтено, что в автономном режиме изменение указанных параметров транспортного потока имеет диссипативный характер. Кроме этого, важное значение имеет принцип Ле-Шателье: так как причиной самоорганизации является рост управляющего параметра  $\mathcal{G}(t)$ , то величины  $q(t)$  и  $u(t)$  должны изменяться таким образом, чтобы препятствовать росту  $\mathcal{G}(t)$ . С формальной точки зрения этот факт можно отразить как наличие обратной связи между параметром порядка  $q(t)$  и сопряжённого поля  $u(t)$ . И, наконец, принципиально важное значение имеет положительная обратная связь между параметром порядка  $q(t)$  и управляющим параметром  $\mathcal{G}(t)$ , приводящая к росту сопряжённого поля – именно наличие этой связи является причиной самоорганизации. Помимо этого, особенностью стохастического кинетического уравнения для управляющего параметра является то, что релаксация величины  $\mathcal{G}(t)$  происходит не до нуля, а до конечного значения  $\mathcal{G}_0$  – параметра помех, препятствующих формированию оптимального транспортного потока. Другая особенность уравнения (5) состоит в наличии стохастического источника  $\xi(t)$  (нормальный белый шум), носящего  $\delta$ -коррелированный характер:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t) \xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (6)$$

В движущемся потоке автомобилей ситуация, как правило, столь сложна, что флуктуации управляющего параметра не могут быть приписаны какой-нибудь вполне определённой причине. Эти флуктуации обусловлены кумулятивным действием многочисленных факторов, определяющих состояния транспортной системы. Центральная предельная теорема теории вероятностей утверждает, что при любом распределении вероятностей этих факторов (если они не слишком отличаются друг от друга и не слишком сильно коррелированы) эти флуктуации имеют нормальное распределение корреляционной функ-

цией, в частности, дельтообразное (в случае, когда физическое время  $t$  намного превышает время корреляции шума), именуемое белым шумом<sup>3)</sup> [22].

Задача состоит в исследовании влияния стохастического источника в уравнении для управляющего параметра на эволюцию девиации интервала движения автомобилей  $q(t)$ . С целью упрощения этой задачи ограничимся далее так называемым адиабатическим приближением  $\tau_q \gg \tau_u, \tau_g$ , в котором изменения управляющего параметра  $\mathcal{G}(t)$  и скорости изменения девиации интервала  $u(t)$  следуют за отклонениями интервала  $q(t)$ . В этом случае принцип соподчинения даёт возможность положить в уравнениях (4) и (5)  $\tau_u du/dt = \tau_g d\mathcal{G}/dt = 0$ , что позволяет выразить сопряжённое поле и управляющий параметр через параметр порядка:

$$u(t) = \left(1 + \frac{q(t)^2}{q_m^2}\right)^{-1} A_u q(t) [\mathcal{G}_0 + \tau_g \sqrt{2} \sigma_g \xi(t)], \quad (7)$$

$$\mathcal{G}(t) = \mathcal{G}_0 - A_\varphi q(t) u(t) + \tau_g \sqrt{2} \sigma_g \xi(t). \quad (8)$$

Подставляя теперь (7) в (3), получаем стохастическое дифференциальное уравнение для параметра порядка в форме Ито [23]

$$\tau_q \frac{dq(t)}{dt} = -q(t) \left[1 - \frac{\mathcal{G}_0}{\mathcal{G}_c (1 + q^2(t)/q_m^2)}\right] + \frac{q(t) \tau_g}{\mathcal{G}_c (1 + q^2(t)/q_m^2)} \sqrt{2} \sigma_g \xi(t). \quad (9)$$

В уравнениях (7)-(9) были введены следующие обозначения:

$$A_u \equiv g_u \tau_u, \quad A_g \equiv g_g \tau_g, \quad q_m^{-2} \equiv A_u A_g, \quad \mathcal{G}_c^{-1} \equiv \tau_u g_u \tau_g.$$

Для анализа стохастического уравнения (9) удобно использовать безразмерные величины, измеряя время  $t$ , девиацию интервала  $q(t)$  и интенсивность шума  $\sigma_g$  в единицах  $\tau_q$ ,  $q_m$  и  $\mathcal{G}_c \tau_\varphi^{-1}$  соответственно. В результате уравнение (9) принимает вид

---

<sup>3)</sup> Введение идеализированного белого шума существенно упрощает все вычисления и во многих случаях позволяет получить правильный окончательный результат.

$$\frac{dq(t)}{dt} = -q(t) \left[ 1 - \frac{1}{1+q^2(t)} \Theta \right] + \sigma_g g(q) \xi(t) = f(q) + \sigma_g g(q) \xi(t), \quad (10)$$

где первое слагаемое описывает дрейф в пространстве стохастической переменной  $q(t)$ , а второе – диффузию. В уравнении (10) сила  $f(q)$ , обеспечивающая скорость дрейфа, и синергетический (детерминированный) потенциал  $V(q)$  имеют вид:

$$f(q) \equiv -\frac{\partial V(q)}{\partial q}, \quad V(q) \equiv \frac{1}{2} [q^2 - \Theta \ln(1+q^2)], \quad \Theta \equiv \frac{g_0}{g_c}, \quad (11)$$

а для мультипликативной функции  $g(q)$  справедливо выражение

$$g(q) \equiv \sqrt{2} q (1+q^2)^{-1}. \quad (12)$$

Прежде чем приступить к анализу уравнения (10), рассмотрим простейший случай  $\sigma_g = 0$ , когда уравнения (3)-(5) сводятся к классической системе Лоренца, а уравнение (10) принимает детерминистическую форму уравнения Ландау-Халатникова

$$dq/dt = -q [1 - \Theta(1+q^2)^{-1}] \equiv -\partial V / \partial q, \quad (13)$$

из которого следует  $[q^2 - (\Theta - 1)]^\Theta / q^2 \propto \exp[2(\Theta - 1)t]$ ; синергетический потенциал (11) приобретает минимум в точке

$$q^{st} = \pm \sqrt{\Theta - 1}, \quad (14)$$

которая возможна только при больших значениях безразмерного параметра помех  $\Theta$ . Таким образом, в предкритической области  $\Theta < 1$  система релаксирует в неупорядоченное состояние  $q = 0$ , а в закритической  $\Theta > 1$  – в упорядоченные состояния (14).

Итак, в рамках принятого адиабатического приближения синергетическая система Лоренца с аддитивным шумом в стохастическом уравнении для управляющего параметра  $\mathcal{G}$  сводится к однопараметрическому стохастическому уравнению (10) с мультипликативным шумом<sup>4)</sup> для обладающего максимальным временем релаксации параметра порядка  $q(t)$ . Это обстоятельство обу-

---

<sup>4)</sup> Мультипликативный шум зависит от состояния стохастической среды.

словливает, в конечном счёте, нетривиальную перестройку синергетического поведения синхронизированной транспортной системы в целом в зависимости от интенсивности шума управляющего параметра.

В заключение этого раздела заметим, что вполне удовлетворительное качественное описание сложных стохастических систем возможно при использовании только одного стохастического уравнения (типа (10)). Это связано с тем, что точные аналитические решения УФП удаётся получить, как известно, в основном для одномерных систем (см., например, [5]). Кроме этого, при исследовании индуцированных шумом переходов нежелательно использование приближенных методов решения системы стохастических уравнений, поскольку даже малые погрешности численного метода могут приводить к ложной качественной перестройке поведения хаотической среды.

### 3. Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка

Набор случайных решений стохастического уравнения (10) определяется уравнением Фоккера-Планка. Эквивалентное уравнению (10) УФП, определяющее эволюцию одноточечной функции распределения  $P(q, t)$  девиации интервала движения автомобилей  $q(t)$ , может быть записано в виде уравнения непрерывности в пространстве стохастической переменной  $q(t)$  [21-23]

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = -\nabla J(q, t), \quad \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial q}, \quad (15)$$

где поток

$$J(q, t) \equiv f(q)P(q, t) + (\sigma_g^2/2)\nabla(g^2(q)P(q, t)) \quad (16)$$

интерпретируется как поток вероятности, содержащий дрейфовую (первое слагаемое) и диффузионную (второе слагаемое) части. Величина  $D(q) \equiv (\sigma_g^2/2)g^2(q)$  представляет собой обобщённый коэффициент диффузии. Напомним, что для аддитивного шума мультипликативная функция  $g^2(q) \equiv \sqrt{2}$  и коэффициент  $D$  сводится к интенсивности флуктуаций управляющего параметра  $\sigma_g^2$  (интенсивности шума).

Очевидно, что любая транспортная система, испытывающая воздействие шума, по истечении достаточно большого интервала времени  $t \rightarrow \infty$  выходит на некоторый стационарный режим. Стационарное поведение в данном случае

означает: в системе устанавливается плотность вероятности  $P^{st}(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(q, t)$ , форма которой не изменяется со временем. Тогда обобщённый поток принимает постоянное значение:

$$J(q) \equiv f(q)P^{st}(q) + \frac{\sigma_g^2}{2} \nabla(g^2(q)P^{st}(q)) = const. \quad (17)$$

Для равновесных систем  $J = 0$  и решение уравнения (17) записывается следующим образом [1]

$$P^{st}(q) = Z^{-1} g^{-2}(q) \exp\left(\frac{2}{\sigma_g^2} \int^q \frac{f(q')}{g^2(q')} dq'\right), \quad (18)$$

где постоянная  $Z$  задаётся условием нормировки  $\int P(q') dq'$ . Для дальнейших целей равновесное распределение (18) удобно записать в квазигиббсовском виде с эффективным (так называемым вероятностным) потенциалом  $U_{ef}(q)$

$$P^{st}(q) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{U_{ef}(q)}{\sigma_g^2}\right), \quad U_{ef}(q) = \sigma_g^2 \ln g^2(q) + 2 \int \frac{\partial V / \partial q'}{g^2(q')} dq'. \quad (19)$$

Комбинируя формулы (11), (12) и (19), можно найти явный вид вероятностного потенциала  $U_{ef}(\varepsilon)$  для рассматриваемой здесь системы, который с точностью до константы имеет вид:

$$U_{ef}(q) = \frac{q^4}{4} + \left(1 - \frac{\Theta}{2}\right) q^2 + (1 - \Theta + 2\sigma_g^2) \ln q - 2\sigma_g^2 \ln(1 + q^2). \quad (20)$$

Экстремумы функции  $P^{st}(q)$  определяются из условия [6]

$$h(q_{ext}, \sigma_g) \equiv f(q_{ext}) - \frac{\sigma_g^2}{2} g(q_{ext}) \frac{\partial g(q)}{\partial q} \Big|_{q=q_{ext}} = 0, \quad (21)$$

являющегося основным уравнением при анализе влияния мультипликативного шума на стационарное поведение стохастической системы. Стационарная плотность вероятности имеет максимум при  $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{ext}} < 0$  и минимум при

$\partial h(\varepsilon)/\partial q|_{q=q_{ext}} > 0$ . Множество точек в пространстве конфигураций, для которых  $\partial h(q)/\partial q|_{q=q_{ext}} = 0$ , соответствует структурно-неустойчивым ситуациям (которые называют  $P$ -бифуркациями). Благодаря  $P$ -бифуркациям нарушается соответствие между аттракторами детерминированной системы и максимумами стационарной плотности вероятности. Если величина  $\sigma_g^2$  мала, то корни уравнения (21) ни по числу, ни по положению не отличаются от детерминированных стационарных состояний. Но если интенсивность  $\sigma_g^2$  шума достаточно велика, то экстремумы плотности вероятности  $P^{st}(q)$  и по числу и по положению могут существенно отличаться от детерминированного стационарного состояния. А это означает, что (в отличие от аддитивного шума) мультипликативный шум не только оказывает дезорганизующее воздействие на систему, но может стабилизировать новые макроскопические состояния и вызывать новые неравновесные фазовые переходы, не прогнозируемые в рамках детерминированного случая.

Заметим, что стационарными состояниями принято считать не зависящие от времени решения  $q^{st}$  детерминированного уравнения (13). Вместе с тем слова «стационарное состояние» можно употреблять и по отношению к распределению по возможным состояниям. Так, распределение (19) можно назвать стационарным распределением состояний. В случае аддитивного шума хаоса не существует различия между детерминированным стационарным состоянием  $q^{st}$  и экстремумами  $q_{ext}$  стационарного распределения  $P^{st}$ , хотя и надо иметь в виду, что система в стационарном состоянии на самом деле флуктуирует около некоторого среднего состояния. В случае мультипликативного шума случайная величина, определяющая стационарное состояние системы, качественно весьма отличается от вырожденной случайной величины, соответствующей детерминированному случаю.

#### 4. Самосогласованная картина формирования транспортных потоков

Используя условие (21), легко получить уравнение

$$h(q_{ext}, \sigma_g) = (1 + q_{ext}^2)^3 - \Theta(1 + q_{ext}^2)^2 - 2\sigma_g^2(1 + q_{ext}^2) + 4\sigma_g^2 = 0, \quad (22)$$

определяющее положения экстремальных точек стационарного распределения (20). Они определяются величиной параметра помех  $\Theta$  и интенсивностью флуктуаций управляющего параметра  $\sigma_g^2$ .

Проанализируем решения этого уравнения в зависимости от значений параметров  $\Theta$  и  $\sigma_g^2$ . Так, максимум в точке  $q_{ext} = 0$ , отвечающий состоянию покоя, реализуется, если параметр помех  $\Theta$  не превышает критическое значение

$$\Theta_c = 1 + 2\sigma_g^2, \quad (23)$$

которое, возрастая с увеличением интенсивности флуктуаций  $\sigma_g^2$  управляющего параметра, ограничивает сверху область существования нулевого корня уравнения (22). Кроме него, существуют решения  $q_{ext\pm}$ , отвечающие несимметричной фазе. Исключая корень  $q_{ext}^2 = 0$ , для них получаем биквадратное уравнение

$$q^4 + (3 - \Theta)q^2 - (2\Theta + 2\sigma_g^2 - 3) = 0, \quad (24)$$

имеющее решение

$$q_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(\Theta - 3)^2 + 4(2\Theta + 2\sigma_g^2 - 3)} \right]. \quad (25)$$

Минимальная величина

$$q_e^2 = \frac{1}{2} \left[ \Theta - 3 + \sqrt{(\Theta + 7)(\Theta - 1)} \right] \quad (26)$$

этого решения достигается на прямой (23). При значениях параметра помех, удовлетворяющих неравенству  $\Theta < 4/3$ , корни  $\pm q_{ext}$  комплексны, в точке  $\Theta = 4/3$  они обращаются в нуль, а с ростом до значений  $\Theta > 4/3$  становятся действительными, причём  $q_{ext+} = -q_{ext-}$ . Таким образом, трикритическая точка

$$\Theta = 4/3, \quad \sigma_g^2 = 1/6 \quad (27)$$

определяет границу появления корней  $q_{ext\pm} \neq 0$  уравнения (22), соответствующих несимметричной фазе. При выполнении условия (23) корень  $q_{ext} = 0$  отве-

чает минимуму потенциала (20) при  $\Theta < 4/3$ , тогда как при  $\Theta > 4/3$  он отвечает максимуму, а корни  $q_{ext\pm}$  – симметричным минимумам.

Найдём теперь условие существования корней  $q_{ext\pm}$ . Приравнивая к нулю дискриминант уравнения (22), приходим к равенствам.

$$\sigma_g^2 = 0, \quad \sigma_g^4 - \sigma_g^2 \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right] + \Theta^3/2 = 0, \quad (28)$$

второе из которых приводит к зависимости

$$2\sigma_g^2 = \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right] \pm \left\{ \left[ 13.5(1 - \Theta/3) - \Theta^2/8 \right]^2 - 2\Theta^3 \right\}^{1/2}. \quad (29)$$

Она отвечает куполообразной кривой  $\Theta(\sigma_g)$ , пересекающей ось абсцисс в точках  $\sigma_g = 0$  и  $\sigma_g = \sqrt{13.5}$ , и имеет максимум в точке

$$\Theta = 2, \quad \sigma_g = \sqrt{2}. \quad (30)$$

Нетрудно видеть, что данная кривая касается прямой  $\Theta_c = 1 + 2\sigma_g^2$  (23) в точке  $\Theta = 4/3, \sigma_g^2 = 1/6$ .

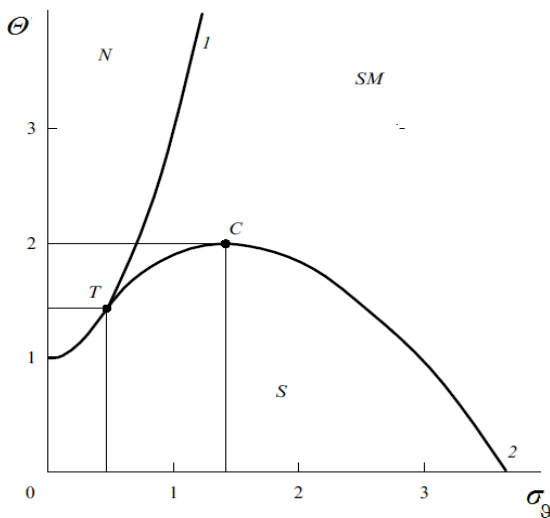


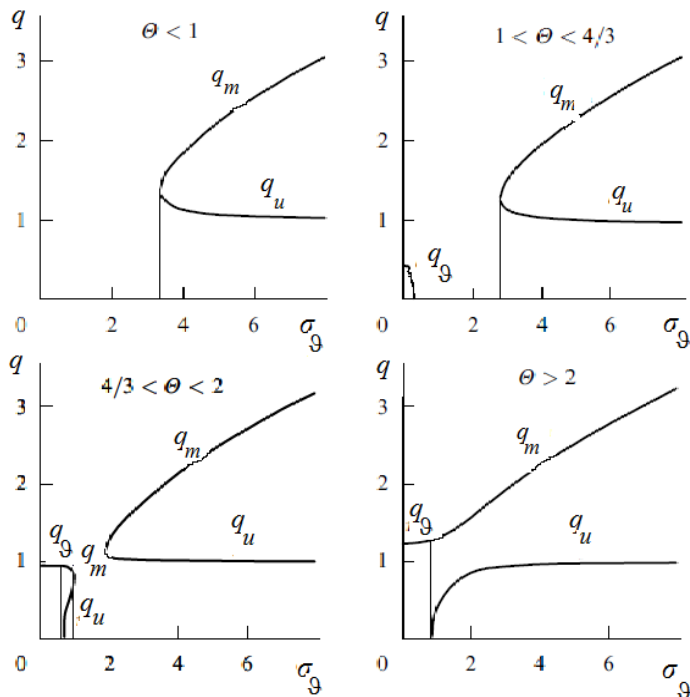
Рис.1. Фазовая диаграмма возможных режимов стационарного поведения транспортной системы с шумом  $\sigma_g$  управляющего параметра. Кривые 1,2 отвечают равенствам (23), (29),  $S$  – область устойчивой симметричной фазы,  $N$  – несимметричной,  $SM$  – устойчивой симметричной и метастабильной несимметричной фаз,  $T$  – трикритическая точка,  $C$  – критическая.

Проведённый анализ позволяет построить фазовую диаграмму возможных режимов поведения транспортной системы в условиях шума управляющего параметра (рис.1). Здесь область  $S$  ниже кривой 2, задаваемой равенством (29), отвечает стабильной симметричной фазе, а область ( $q = 0$ )  $N$  выше кривой 1, отвечающей (23), – несимметричной фазе ( $q_{\pm} \neq 0$ ). Область  $SM$ , заключённая



между кривыми 1,2, соответствует сосуществованию устойчивой симметричной фазы и метастабильной несимметричной. Точка  $T$  пересечения кривых 1,2, положение которой определяется равенствами (27), является трикритической, а точка  $C$  с координатами (30) – критической.

Бифуркационные диаграммы на *рис.2* показывают поведение стационарных состояний системы в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_g$  при фиксированных значениях параметра помех  $\Theta$ . Видно, что на границе области  $S$  при  $\sigma_g^2 > 1/6$  происходит скачкообразное появление двух экстремальных точек потенциала (20), одна из которых отвечает неустойчивому состоянию  $q_u$ , а вторая – метастабильному  $q_m$ .



*Рис.2.* Бифуркационные диаграммы для стационарных значений параметра порядка  $q$  в зависимости от интенсивности шума  $\sigma_g$  управляющего параметра и параметра помех, препятствующих формированию оптимального транспортного потока (здесь  $q_g$  – устойчивое,  $q_m$  – метастабильное,  $q_u$  – неустойчивое решение).

## Заключение

Транспортная динамика большого города связана с результатом тысяч индивидуальных решений, принимаемых водителями, при движении автомобилей между пунктами назначения. Разумеется, любое административное предписание, принимаемое с целью принятия эффективных мер по оптимальному управлению дорожным движением, будет основано на неполной информации о состоянии транспортной инфраструктуры в целом. Следует заметить, что в настоящее время нет общепринятого подхода, описывающего

поведение АТС в области «синхронизированного потока», т.е. проблема образования предзаторных и заторных ситуаций все ещё до конца не изучена. По этой причине при выработке стратегии управления АТС на основе математических моделей дорожного движения необходимо принимать во внимание и прогностические модели эволюции синхронизированных транспортных потоков, которые моделируются стохастической динамической системой активных частиц (автомобилей).

Моделирование эволюции пространственно однородных транспортных потоков, подверженных влиянию различных шумов, в работе проведено в рамках синергетического подхода на основе популярной в теории самоорганизации стохастической схемы Лоренца. Показано, что включение аддитивного шума в уравнение для управляющего параметра приводит в адиабатическом приближении к трансформации этих шумов в мультипликативные для параметра порядка. Это обстоятельство обуславливает нетривиальную перестройку коллективного поведения активных частиц рассматриваемой системы, испытывающей индуцированные шумом «фазовые переходы». Подобные переходы, обусловленные нарастанием интенсивности флуктуаций управляющего параметра, приводят к качественным изменениям самого вида стационарных значений функции распределения девиации интервалов движения автотранспорта. Учёт множества стационарных состояний этого распределения, в которых имеет место отклонение от оптимального режима движения, немаловажен при принятии стратегических решений по управлению движением транспортным потоком.

## **Библиографический список**

1. Введение в математическое моделирование транспортных потоков: Учебное пособие / А.В. Гасников и др. / Под ред. А.В. Гасникова. – М.: МЦНМО. – 2012. – 376 с.
2. Wilson A.J. Entropy maximizing models in the theory of trip distributions, mode split and route split// J. Transp. Econ. Policy. – 1969. – V.3. – P. 108-126.
3. Wilson A.J. A statistical theory of spatial distribution models// Transp. Res. – 1967. – V.1. – P. 253-269.
4. Prigogine I. and Andrews F.C. Boltzman-like approach for traffic flow//Operations Research. 1960. V. 8. № 6. P. 789-797.

5. Prigogine I., Resibois P. On a Generalized Boltzmann-like Approach for Traffic Flow // *Bull. Cl. Sci., Acad. Roy. Belg.* – 1962. – V. 48, – №. 9. – P. 805–814.
6. Prigogine I., Herman R. Kinetic theory of vehicular traffic. American Elsevier, New York. – 1971. – 95 p.
7. Paveri-Fontana S.L. On Boltzmann-like treatments for traffic flow: A critical review of the basic model and an alternative proposal for dilute traffic analysis // *Transportation Research.* – 1975. – V. 9. – № 4. – P. 225–235.
8. Lighthill M.G., Whitham G. B. On kinetic waves II. A theory of traffic flow on ling crowded roads // *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A.* – 1955. – V. 229, – № 1178. – P. 317-345.
9. Helbing D. Improved fluid–dynamic model for vehicular traffic // *Phys. Rev. E.* – 1995. – V. 51. – P. 3163–3169.
10. Карамзин Ю.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Двумерная модель автомобильных потоков // *Математическое моделирование.* – 2006. – Т. 18. – № 6. – С. 85-95.
11. Сухинова А.Б., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Двумерная макроскопическая модель транспортных потоков // *Математическое Моделирование.* – 2009. – Т. 21. – № 2. – С. 118-126.
12. Четверушкин Б. Н., Трапезникова М.А., Фурманов И.Р., Чурбанова Н.Г. Макро- и микроскопические модели для описания движения автотранспорта на многополосных магистралях // *Труды МФТИ.* – 2010. – Т. 2. – № 4. – С. 163.
13. Richards P. L. Shock waves on the highway // *Operations Research.* – 1956. – V. 4/ – № 1. – P. 42-51.
14. Payne H.J. Models of Freeway Traffic and Control: Berkey G.A. *Matemati-cal Models of Public Systems.* – 1971. – V. 1. – P. 51-61
15. Treiber M., Hennecke A., Helbing D. Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulation // *Phys. Rev. E.* – 2000. – V. 62. – P. 1805-1824.
16. Анищенко В.С., Астахов В.В., Вадивасова Т.Е., Нейман А.Б., Стрелкова Г.И., Шиманский-Гайер Л. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. – 2003. – 544 с.
17. Олемской А.И. Синергетика сложных систем: Феноменология и статистическая теория. – М.: КРАСАНД. – 2009. – 384 с.
18. Helbing D. Traffic and related self-driven many particle systems // *Reviews of modern physics.* – 2001. – V. 73. – № 4. – P. 1067-1141.

19. Ruelle D, Takken F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. — 1971. — V. 20. — P. 167-192.

20. Horsthemke W., Lefever R. Noise Induced Transitions. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo. — 1984. — 395 p.

21. Олемской А.И. Теория стохастических систем с сингулярным мультипликативным шумом // УФН. — 1998. — Т.168. — С.287-321.

22. Гардинер К.В. Стохастические задачи в естественных науках. — М.: Мир. — 1986. — 526 с.

23. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. — М.: Советское радио. — 1977. — 488 с.

## Оглавление

1. Введение.....	3
2. Уравнения самоорганизации.....	6
3. Стационарное решение уравнения Фоккера-Планка .....	11
4. Самосогласованная картина формирования транспортных потоков .....	13
Заключение.....	16
Библиографический список.....	17