ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 61 за 2013 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Панкратов В.А., Сазонов В. В.

Реконструкция вращательного движения космического аппарата с помощью фильтра Калмана

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Панкратов В.А., Сазонов В. В. Реконструкция вращательного движения космического аппарата с помощью фильтра Калмана // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 61. 47 с.
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-61

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша

В.А.Панкратов, В.В.Сазонов

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ПОМОЩЬЮ ФИЛЬТРА КАЛМАНА

Москва - 2013

Аннотация

Мониторинг квазистатических микроускорений последних КА серии *Фотон* выполнялся следующим образом. Сначала по измерениям бортовых датчиков, полученным на некотором отрезке времени, строилась реконструкция вращательного движения КА на этом отрезке. Затем вдоль найденного движения микроускорение в заданной точке борта рассчитывалось по известной формуле в функции времени. Реконструкция движения строилась методом наименьших квадратов с использованием решений уравнений вращательного движения спутника. Отрезки времени, на которых эти уравнения позволяли адекватную реконструкцию, имели длину от одного до пяти орбитальных витков. Эта длина возрастала вместе с модулем угловой скорости спутника. Чтобы получить представление о микроускорениях и движении спутника в течение всего полета, движение реконструировалось на нескольких десятках таких отрезков. В данной работе предлагается методика реконструкции движения, пригодная для отрезка произвольной длины. Методика построена на основе фильтра Калмана. Предварительно описан новый вариант методики реконструкции неуправляемого вращательного движения спутника по магнитным измерениям методом наименьших квадратов, который существенно использован при построении фильтра Калмана. Приводятся результаты сравнения обеих методик на данных, полученных в полете *Фотона-М3*.

V.A.Pankratov, V.V.Sazonov. Reconstruction of spacecraft attitude motion by Kalman filtering. Monitoring of quasi-steady accelerations onboard last spacecraft of the *Foton* series was realized in the following way. First, we reconstructed a real spacecraft attitude motion in a time interval of interest by measurements of onboard sensors. Then we calculated an acceleration at a given point of the spacecraft body along the found motion by the well-known formula. The attitude motion was reconstructed by the least squares method and represented by a solution of spacecraft motion equations. The time intervals, on which the equations allowed an adequate reconstruction, had a length from 1 to 5 orbit revolutions. The length was increased together with the module of spacecraft angular rate. To obtain the acceleration picture during the whole flight, we carried out the reconstruction in several tens such overlapped intervals. In this paper we reconstruct the motion in intervals of an arbitrary length using Kalman filtering. This technique is based on the new variant of realization of the least squares method for reconstruction of the spacecraft attitude motion by onboard measurements of the Eatrh magnetic field. We compare the results obtained by these two techniques in processing the data of the *Foton M-3* flight.

1. Введение. Расчет квазистатических микроускорений на последних четырех спутниках серии *Фотон* (1997 — 2007 гг.) проводился по единой схеме, которая совершенствовалась от экспедиции к экспедиции и описана в [1 — 12]. Существенную часть этой схемы составляет методика реконструкции фактического вращательного движения спутника. В методике удачным образом сочетаются два обстоятельства. Во-первых, она основана на полных уравнениях движения спутника. Во-вторых, квазистатические микроускорения на борту неуправляемого низкоорбитального искусственного спутника Земли описываются простой формулой, расчеты по которой требуют знания только движения спутника. В каждый момент времени надо знать его радиус-вектор, ориентацию, скорость, угловую скорость и угловое ускорение. Полные уравнения движения позволяют находить все перечисленные величины. Кроме того, они позволяют реконструировать (восстановить) фактическое движение спутника по косвенным измерениям. Вращательное движение *Фотонов* было реконструировано по измерениям магнитометров [2, 5, 9], датчиков угловой скорости [1, 6, 10] и акселерометров [1, 4, 8, 10, 12].

При расчете микроускорений сначала по измерениям бортовых датчиков, полученным на представляющем интерес отрезке времени, строилась реконструкция реального вращательного движения спутника на этом отрезке. Затем вдоль найденного движения вычислялись 13 скалярных функций, позволявших найти микроускорение в любой точке борта в функции времени. Реконструкция движения строилась методом наименьших квадратов. Отрезки времени, на которых используемые уравнения движения позволяли адекватную реконструкцию, имели длину от одного до пяти орбитальных витков. Эта длина возрастала вместе с модулем угловой скорости спутника. Чтобы найти микроускорения в течение всего полета, движение спутника реконструировалось на нескольких десятках таких отрезков, причем соседние отрезки имели перекрытие 10 мин. Для *Фотон-М3* полученные результаты описаны в [11]. Реконструкция движения этого спутника в течение 11 суток неуправляемого полета была выполнена по измерениям магнитного поля Земли (МПЗ) и представлена 57 отрезками. На пересечениях отрезков результаты реконструкции достаточно точно совпали, и с помощью простых вычислительных приемов было обеспечено их гладкое сопряжение.

Несколько менее точная методика реконструкции движения, но пригодная для отрезка произвольной длины, может быть построена на основе фильтра Калмана [13, 14]. Применение этого фильтра для реконструкции вращательного движения спутника по измерениям МПЗ описано в большом числе работ, в основном, зарубежных авторов. В [15] такая реконструкция была использована для расчета квазистатических микроускорений в управляемом движении спутника. Ниже рассматривается применение фильтра Калмана для реконструкции неуправляемого вращательного движения спутников *Фотон* на продолжительных отрезках времени. Предварительно описан новый вариант методики реконструкции неуправляемого вращательного движения спутника по магнитным измерениям методом наименьших квадратов. Приводятся результаты сравнения обеих методик на данных, полученных в полете *Фотона-М3*.

2. Математическая модель вращательного движения спутника, используемая при обработке магнитных измерений. Для описания движения спутника введем четыре правые декартовы системы координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O — его центр масс. При отсутствии специальных указаний компоненты векторов и координаты точек указываются в этой системе.

$CY_1Y_2Y_3$ — гринвичская система координат. Точка C — центр Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена к Северному полюсу.

$\mathrm{C}Z_1Z_2Z_3$ — квазиинерциальная система координат. Ось $\mathrm{C}Z_2$ направлена вдоль вектора кинетического момента орбитального движения спутника, ось $\mathrm{C}Z_3$ лежит в плоскости CY_1Y_2 и направлена в восходящий узел орбиты. Плоскость CZ_1Z_3 совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости системы $CZ_1Z_2Z_3$ не превышает нескольких градусов в сутки.

Матрицы перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системам $CY_1Y_2Y_3$ и $CZ_1Z_2Z_3$ обозначим соответственно $\| g_{ij} \|_{i,j=1}^3$ и $\| b_{ij} \|_{i,j=1}^3$. Здесь g_{ij} и b_{ij} — косинусы углов, которые ось Ox_j образует с осями CY_i и CZ_i. Примем следующие способы параметризации этих матриц.

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно гринвичской системы координат будем задавать нормированным кватернионом $\mathbf{Q} = (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, $Q_0^2+Q_1^2+Q_2^2+Q_3^2 = 1$. Элементы матрицы $\| g_{ij} \|$ выражаются через компоненты $\mathbf{Q}$ с помощью формул

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= Q_0^2 + Q_1^2 - Q_2^2 - Q_3^2, & g_{21} &= 2(Q_2Q_1 + Q_0Q_3),\\
g_{12} &= 2(Q_1Q_2 - Q_0Q_3), & g_{22} &= Q_0^2 + Q_2^2 - Q_1^2 + Q_3^2,\\
g_{13} &= 2(Q_1Q_3 + Q_0Q_2), & g_{23} &= 2(Q_2Q_3 - Q_0Q_1),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g_{31} &= 2(Q_3Q_1 - Q_0Q_2),\\
g_{32} &= 2(Q_3Q_2 + Q_0Q_1),\\
g_{33} &= Q_0^2 + Q_3^2 - Q_1^2 + Q_2^2.
\end{aligned}
$$

Кватернионный вид формул перехода

$$(0, Y_1, Y_2, Y_3) = \mathbf{Q} \circ (0, x_1, x_2, x_3) \circ \mathbf{Q}^{-1}.$$

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $\mathrm{C}Z_1Z_2Z_3$ будем задавать углами γ, δ и β, которые введем следующим образом. Система $\mathrm{C}Z_1Z_2Z_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами: 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси OZ_2, 2) на угол β вокруг новой оси

OZ_3, 3) на угол γ вокруг новой оси OZ_1, совпадающей с осью Ox_1. Элементы матрицы $\| \, b_{ij} \, \|$ выражаются через эти углы с помощью формул

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\sin\delta\cos\beta, & b_{21} &= \sin\beta, \\ b_{12} &= \cos\delta\sin\gamma + \sin\delta\sin\beta\cos\gamma, & b_{22} &= \cos\beta\cos\gamma, \\ b_{13} &= \cos\delta\cos\gamma - \sin\delta\sin\beta\sin\gamma, & b_{23} &= -\cos\beta\sin\gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{31} &= -\cos\delta\cos\beta, \\ b_{32} &= -\sin\delta\sin\gamma + \cos\delta\sin\beta\cos\gamma, \\ b_{33} &= -\sin\delta\cos\gamma - \cos\delta\sin\beta\sin\gamma. \end{aligned}$$

Углы γ, δ и β используются для графического представления вращательного движения спутника — это движение удобно иллюстрировать графиками зависимости указанных углов от времени. Кватернион $\mathbf{Q}$ входит в фазовый вектор вращательного движения спутника.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая — его вращательное движение. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы [4, 5]. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Параметры атмосферы и баллистический коэффициент спутника считаются неизменными на всем интервале интегрирования уравнений движения.

Подсистема уравнений вращательного движения образована динамическими уравнениями Эйлера для компонент угловой скорости спутника и кинематическими уравнениями для компонент кватерниона $\mathbf{Q}$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также гиростатический момент внутренних устройств спутника (вентиляторов, роторов и т. п.). Подсистема уравнений вращательного движения имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{\omega}_1 = \mu(\omega_2\omega_3 - \nu x_2 x_3) + k_1\,, \\ \dot{\omega}_2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu}(\omega_1\omega_3 - \nu x_1 x_3) + \frac{\lambda k_2}{1+\lambda\mu}\,, \\ \dot{\omega}_3 = -(1-\lambda+\lambda\mu)(\omega_1\omega_2 - \nu x_1 x_2) + \lambda k_3\,, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\begin{gathered} 2\dot{Q}_0 = -Q_1\Omega_1 - Q_2\Omega_2 - Q_3\Omega_3\,, \\ 2\dot{Q}_1 = Q_0\Omega_1 + Q_2\Omega_3 - Q_3\Omega_2\,, \end{gathered}$$

$$2\dot{Q}_2 = Q_0\Omega_2 + Q_3\Omega_1 - Q_1\Omega_3\,,$$
$$2\dot{Q}_3 = Q_0\Omega_3 + Q_1\Omega_2 - Q_2\Omega_1\,,$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}\,,\;\; \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\,,\;\; \nu = \frac{3\mu_e}{|\mathbf{r}|^5}\,,\;\; \kappa = E\rho_a\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}\,,$$
$$k_1 = \kappa(v_2p_3 - v_3p_2) + q_2\omega_3 - q_3\omega_2,$$
$$k_2 = \kappa(v_3p_1 - v_1p_3) + q_3\omega_1 - q_1\omega_3,$$
$$k_3 = \kappa(v_1p_2 - v_2p_1) + q_1\omega_2 - q_2\omega_1,$$
$$\Omega_1 = \omega_1 - \omega_e g_{31}\,,\;\; \Omega_2 = \omega_2 - \omega_e g_{32}\,,\;\; \Omega_3 = \omega_3 - \omega_e g_{33}\,.$$

Здесь ω_i, x_i и v_i — компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника, геоцентрического радиуса-вектора точки O и скорости этой точки относительно гринвичской системы координат, I_i — моменты инерции спутника относительно осей Ox_i, p_i — параметры аэродинамического момента, q_i — отнесенные к I_1 компоненты гиростатического момента внутренних устройств спутника, ω_e — угловая скорость вращения Земли, E — масштабирующий множитель. При численном интегрировании уравнений (1) единицами измерения времени и длины служат 1000 с и 1000 км, единицы измерения других величин: $[v_i] =$ км/с, $[\omega_i] = [q_i] = 10^{-3}$с$^{-1}$, $[p_i] =$ см/кг, $[\rho_a] =$ кг/м^3, $E = 10^{10}$.

Ниже используется запись кинематических уравнений в виде

$$2\dot{Q}_0 = -\sum_{i=1}^{3} Q_i\Omega_i\,, \quad 2\dot{Q}_i = Q_0\Omega_i + \sum_{j,k=1}^{3} e_{ijk}Q_j\Omega_k \quad (i = 1, 2, 3), \qquad (2)$$

где e_{ijk} — символ Леви-Чивиты (равен 1, если i, j и k — четная перестановка чисел 1, 2 и 3, равен -1 для нечетной перестановки, равен 0 в остальных случаях). Переменные Q_i зависимы — связаны условием нормировки кватерниона $\mathbf{Q}$. Если это условие выполнено в начальный момент времени, то в силу свойств уравнений (2) оно выполняется тождественно. Следовательно, условие нормировки достаточно обеспечить только в начальный момент.

Параметры λ и μ в уравнениях (1) считаются известными. Для *Фотона-М3* $\lambda = 0.255$, $\mu = 0.1$. Параметры p_i и q_i считаются неизменными на каждом интервале обработки данных измерений (см. ниже), но их значения определяются в результате этой обработки наряду с неизвестными начальными условиями движения, т. е. p_i и q_i служат параметрами согласования.

3. Реконструкция неуправляемого движения методом наименьших квадратов. Методику реконструкции неуправляемого вращательного движения низкоорбитального спутника по магнитным измерениям опишем на примере *Фотона-М3*. На борту этого спутника находились четыре трехкомпонентных магнитометра, входящих в состав аппаратуры DIMAC [9]. Аппаратура предназначалась для измерения микроускорений на борту спутника. Основными ее датчиками были акселерометры. Магнитные измерения проводились для реконструкции вращательного движения спутника с целью проверки показаний акселерометров расчетным путем [7, 8].

Магнитные измерения выполнялись в течение всего полета. Измерения разных магнитометров оцифровывались на единые моменты времени, промежутки между которыми варьировались в пределах от 1 до 12 с, а в среднем составляли около 5 с. Для реконструкции движения брались сплошные ряды этих измерений, охватывающие интервалы времени длиной от 2 до 8 часов. Выбранные данные представляли собой совокупность чисел

$$t_n\,,\ h_1^{(n)},\ h_2^{(n)},\ h_3^{(n)}\quad (n=0,1,\ldots,N)\,, \tag{3}$$

где $h_i^{(n)}$ $(i=1,2,3)$ измеренные значения компонент вектора напряженности магнитного поля в момент t_n, $t_0<t_1<\ldots<t_N$. Полагаем, что эти компоненты с точностью до постоянных смещений, а также малых ошибок измерений и координатных преобразований совпадают с компонентами напряженности МПЗ в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Следуя методу наименьших квадратов, аппроксимацией фактического движения спутника на отрезке $t_0\le t\le t_N$ будем считать решение системы (1), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi=\sum_{i=1}^{3}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[h_i^{(n)}-\hat h_i(t_n)\right]^2-(N+1)\Delta_i^2\right\}, \tag{4}$$

$$\Delta_i=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left[h_i^{(n)}-\hat h_i(t_n)\right],\quad \hat h_i(t)=\sum_{j=1}^{3}H_j(t)g_{ji}(t).$$

Здесь Δ_i — оценки постоянных смещений в измерениях, $H_i(t)$ — расчетные значения компонент напряженности МПЗ в гринвичской системе координат в момент времени t. Функции $H_i(t)$ строятся вдоль известной орбиты спутника с использованием аналитической модели МПЗ IGRF2005.

Функционал (4) получен преобразованием функционала метода наименьших квадратов, возникающего при уравнивании соотношений $h_i^{(n)}\approx\hat h_i(t_n)+\Delta_i$ $(i=1,2,3;\ n=0,1,\ldots,N)$ [2, 5]. Минимизация Φ выполняется по начальным условиям решения $\omega_i(t_0)$, $Q_j(t_0)$ и параметрам математической модели p_i, q_i $(i=1,2,3;\ j=0,1,2,3)$ с учетом условия нормировки

$$Q_0^2(t_0)+Q_1^2(t_0)+Q_2^2(t_0)+Q_3^2(t_0)=1\,. \tag{5}$$

Для простоты письма все уточняемые величины объединим в один вектор $z \in R^{13}$. В принятых обозначениях $\Phi = \Phi(z)$, $z_* = \operatorname{argmin} \Phi(z)$ — искомая оценка вектора z. Поиск z_* проводится в несколько этапов разными методами. Его описание начнем с заключительного этапа, на котором применялся метод Гаусса — Ньютона [16].

На каждой итерации этого метода поправки $\Delta Q_j(t_0)$ к имеющимся значения $Q_j(t_0)$ ищутся в виде (ср. уравнения (2))

$$\Delta Q_0(t_0) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} Q_i(t_0)\theta_i\,, \tag{6}$$

$$\Delta Q_i(t_0) = \frac{1}{2}\Big[Q_0(t_0)\theta_i + \sum_{j,k=1}^{3} e_{ijk}Q_j(t_0)\theta_k\Big] \quad (i = 1, 2, 3).$$

Параметры θ_i суть компоненты вектора бесконечно малого поворота, задающего изменение ориентации спутника в окрестности положения $\mathbf{Q}(t_0)$. Эти параметры и поправки $\Delta\omega_i(t_0)$, Δp_i, Δq_i находятся из системы нормальных уравнений с матрицей $\| \, C_{ij} \, \|_{i,j=1}^{12}$ и правой частью $\| \, D_i \, \|_{i=1}^{12}$:

$$C_{ij} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{3} A_{ki}(t_n)A_{kj}(t_n) - \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{3} B_{ki}B_{kj}\,,$$

$$D_i = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=1}^{3}\big[h_k^{(n)} - \hat{h}_k(t_n)\big]A_{ki}(t_n) - \frac{1}{N+1}\sum_{k=1}^{3}\Delta_k B_{ki}\,,$$

$$A_{ki}(t) = \sum_{l,m=1}^{3} e_{klm}\hat{h}_l(t)\frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial P_i}\,, \quad B_{ki} = \sum_{n=0}^{N} A_{ki}(t_n)$$

$$(k = 1, 2, 3;\;\; i, j = 1, 2, \ldots 12).$$

Здесь $P_1, P_2, \ldots P_{12}$ — обозначения величин θ_1, θ_2, θ_3, $\omega_1(t_0)$, $\omega_2(t_0)$, $\omega_3(t_0)$, p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 в указанном порядке, $\partial\varphi_m(t)/\partial P_i$ — псевдопроизводные, служащие для представления истинных производных

$$\frac{\partial Q_0(t)}{\partial P_j} = -\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{3} Q_l(t)\frac{\partial\varphi_l(t)}{\partial P_j}\,,$$

$$\frac{\partial Q_i(t)}{\partial P_j} = \frac{1}{2}\left[Q_0(t)\frac{\partial\varphi_i(t)}{\partial P_j} + \sum_{l,m=1}^{3} e_{ilm}Q_l(t)\frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial P_j}\right],$$

$$\frac{\partial g_{ik}(t)}{\partial P_j} = \sum_{l,m=1}^{3} e_{klm}g_{il}(t)\frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial P_j} \quad (i, k = 1, 2, 3;\;\; j = 1, \ldots 12)\,.$$

Псевдопроизводная — это не частная производная некоторой функции по какому-то параметру. Запись ее в виде частной производной используется лишь для удобства. Такую запись следует воспринимать как единый символ с двумя индексами. Псевдопроизводная — это вектор, являющийся аналогом угловой скорости. В кинематике твердого тела угловая скорость служит для расчета производных по времени, а псевдопроизводная — для расчета производных по параметру (ср. выписанные выражения для $\partial Q_i/\partial P_j$ с уравнениями (2) и формулами (6)). В обозначении $\partial\varphi_m/\partial P_j$ индекс m указывает векторную компоненту, индекс j — номер параметра, по которому выполняется дифференцирование. Значения псевдопроизводных определяются в процессе интегрирования уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi_i}{\partial P_j} = \sum_{k,l=1}^{3} e_{ikl}\frac{\partial\varphi_k}{\partial P_j}\omega_l + \frac{\partial\omega_i}{\partial P_j} \quad (i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, \dots 12)$$

совместно с уравнениями (1) и уравнениями в вариациях для $\partial\omega_i/\partial P_j$. Последние получаются дифференцированием по P_j первых трех уравнений (1), причем производные $\partial g_{ik}/\partial P_j$ выражаются через $\partial\varphi_i/\partial P_j$ с помощью приведенных выше формул. Ненулевые начальные условия для $\partial\varphi_i/\partial P_j$ и $\partial\omega_i/\partial P_j$ имеют вид

$$\left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial\theta_i}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\partial\omega_i}{\partial\omega_i(t_0)}\right|_{t=t_0} = 1 \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Прибавление найденных поправок $\Delta Q_j(t_0)$ к имеющимся значениям $Q_j(t_0)$ нарушает условие (5), поэтому новый кватернион ориентации нормируется. Внесенные нормировкой изменения уточненных компонент кватерниона являются величинами второго порядка относительно $\Delta Q_j(t_0)$.

Интегрирование уравнений (1) и указанных выше уравнений в вариациях выполняется одним из методов Дормана-Принса 8-го порядка. Это — метод типа Рунге — Кутты, реализованный в стандартной процедуре DOP853 [17]. Метод и программа позволяют строить полином, интерполирующий вычисляемое решение внутри шага интегрирования. Этот полином используется для вычисления функционала (4), матрицы $\| C_{ij} \|$ и правой части $\| D_i \|$ системы нормальных уравнений. При этом интегрирование уравнений движения и уравнений в вариациях выполняется с оптимальным достаточно большим шагом, величина которого выбирается по критерию локальной точности интегрирования. Наличие интерполяционного полинома и возросшее быстродействие персональных компьютеров позволили осуществлять совместную обработку всех собранных данных измерений, не проводя их предварительную обработку. Это — одно из отличий описываемой методики от методик, использованных в [2, 5, 9]. Другое отличие заключается в использовании компонент кватерниона $\mathbf{Q}$ в качестве кинематических переменных уравнений движения спутника и в способе уточнения начальных условий этих переменных при реализации метода Гаусса — Ньютона. В [2, 5, 9] кинематическими переменными служили величины g_{1i}, g_{2i} ($i = 1, 2, 3$), начальные условия которых параметризовались тремя углами точно так же, как величины a_{1i}, a_{2i} параметризуются углами γ, δ и β.

Вернемся к описанию методики. Точность аппроксимации измерений (3) и оценки z_* будем характеризовать, следуя методу наименьших квадратов, соответствующими стандартными отклонениями. Последние вычисляются в предположении, что ошибки в измерениях некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в измерениях одной и той же векторной компоненты напряженности МПЗ равны. Такой подход выбран из соображений удобства и вида функционала (4). При сделанных допущениях z_* — случайный вектор, который имеет приблизительно нормальное распределение со средним значением, равным истинному значению z. Вследствие условия (5) это распределение — несобственное, т. е. имеет вырожденную ковариационную матрицу. Чтобы избежать вырождения и сделать характеризацию ошибок более наглядной, ошибки $\Delta Q_j(t_0)$ в задании компонент $Q_j(t_0)$ вектора z_* представим в виде (6), где теперь θ_i образуют случайный вектор бесконечно малого поворота. Величины θ_i имеют нулевые математические ожидания и вместе с ошибками остальных компонент z_* описываются ковариационной матрицей

$$K_z = \sigma^2 C^{-1} = \| \, K_{ij} \, \|_{i,j=1}^{12} \,, \quad \sigma^2 = \frac{\Phi(z_*)}{3N - 12} \,.$$

Здесь σ^2 — оценка дисперсии ошибок в измерениях (3), C — матрица $\| \, C_{ij} \, \|$, вычисленная в точке z_*. Точность аппроксимации измерений будем характеризовать стандартным отклонением σ, точность оценки z_* — стандартными отклонениями $\sqrt{K_{ii}}$ ($i = 1, 2, \ldots 12$). Стандартные отклонения величин θ_i, $\omega_i(t_0)$, p_i и q_i будем обозначать $\sigma_{\theta i}$, $\sigma_{\omega i}$, σ_{pi}, σ_{qi} .

Чтобы обеспечить надежную сходимость описанного процесса, надо предусмотреть возможность его регуляризации и иметь достаточно точное начальное приближение точки z_*. Регуляризация сводилась к предварительному использованию метода Левенберга — Марквардта [16] перед переходом к методу Гаусса — Ньютона. В большинстве случаев метод Левенберга — Марквардта плавно трансформировался в метод Гаусса — Ньютона, но иногда по окончании его работы метод Гаусса — Ньютона расходился. В таком случае в качестве z_* принимался результат, полученный методом Левенберга — Марквардта; он вполне обеспечивал требуемую точность реконструкции.

Поиск начального приближения точки z_* выполнялся так. Перед минимизацией функционала (4) по 12 параметрам, выполнялась его минимизация по 9 параметрам при $q_1 = q_2 = q_3 = 0$. Она выполнялась сначала методом случайного поиска, затем методом Левенберга — Марквардта и, наконец, методом Гаусса — Ньютона. В ряде случаев даже применение такой редуцированной модели движения — системы (1) при $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ — обеспечивало достаточно высокую точность реконструкции движения спутника.

Начальная точка для минимизации функционала (4) по 9 параметрам находилась посредством минимизации укороченного функционала, который задавался теми же формулами (4), но при уменьшенном в несколько раз значении N и специальном выборе начальных условий движения и параметров уравнений (1). Сокращенный отрезок данных имел длину 15 — 30 мин. В уравнениях движения принималось $p_i = q_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$. Начальные условия для кватерниона задавались в виде

$$Q_0(t_0) = \sqrt{\frac{S}{2}}\cos\phi\,,\;\; Q_i(t_0) = \frac{1}{\sqrt{2S}}\Big[(a_i + b_i)\sin\phi + \Big(\sum_{k,j=1}^{3} e_{ijk}a_k b_j\Big)\cos\phi\Big]\,,$$

$$a_i = h_i^{(0)}\left(\sum_{j=1}^{3}\Big[h_j^{(0)}\Big]^2\right)^{-1/2}, \quad b_i = H_i(t_0)\left(\sum_{j=1}^{3} H_j^2(t_0)\right)^{-1/2} \;(i = 1, 2, 3),$$

$$S = 1 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3\,.$$

Здесь ϕ — параметр. Выписанные соотношения получены при следующих предположениях. Орт $\mathbf{e}$, имеющий в системах координат $Ox_1x_2x_3$ и $CY_1Y_2Y_3$ компоненты a_i и b_i соответственно, в этих системах фиксирован. В системе $CY_1Y_2Y_3$ он направлен по расчетному вектору напряженности МПЗ, а в системе $Ox_1x_2x_3$ — по измеренному вектору. Поворот спутника вокруг этого орта может быть произвольным и задается углом ϕ. Укороченный функционал рассматривался в функции четырех переменных: ϕ и $\omega_i(t_0)$ $(i = 1, 2, 3)$. Для его минимизации последовательно применяются случайный перебор в параллелепипеде $\{0 \le \phi \le \pi, \omega_i' \le \omega_i(t_0) \le \omega_i''\}$ (ω_i' и ω_i'' заданы), случайный поиск и метод Левенберга — Марквардта.

4. Примеры реконструкции неуправляемого движения *Фотона-М3* методом наименьших квадратов приведены на рис. 1, 2 (более подробные результаты, полученные с помощью той же математической модели, но другим программным обеспечением, представлены в [9, 11]). Реконструкция выполнена на двух интервалах времени. Интервал на рис. 1 приходится на середину полета, интервал на рис. 2 — на его конец. Рис. 1а и 2а иллюстрируют движение спутника относительно квазиинерциальной системы координат $CZ_1Z_2Z_3$, рис. 1б и 2б характеризуют точность аппроксимации данных измерений. Графики на рисунках построены на отрезках $t_0 \le t \le t_N$, в подписях к рисункам указаны начальные точки интервалов t_0, значения N и оценки стандартного отклонения σ ошибок в измерениях.

Каждая страница рисунков естественным образом разбивается на две части — левую и правую. На рис. 1а и 2а в левых частях приведены графики зависимости от времени углов γ, δ и β, а также график разности $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0)$, где $c_0 + c_1(t - t_0)$ — линейная аппроксимация функции $\gamma(t)$, построенная методом наименьших квадратов. В правых частях этих рисунков помещены графики компонент угловой скорости $\omega_i(t)$ в найденных решениях уравнений (1).

В левых частях рис. 1б и 2б приведены графики функций $\hat{h}_i(t)$ (см. (4)) и ломаные, проходящие через точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, \dots, N$. Каждая ломаная и график аппроксимирующей ее функции $\hat{h}_i(t)$ изображены в единой системе координат. Ломаные и аппроксимирующие их графики практически совпадают, поэтому в правых частях рис. 1б и 2б приведены ломаные, проходящие через точки $(t_n, h_i^{(n)} - \hat{h}_i(t_n) - \Delta_i)$, $n = 0, 1, \dots, N$.

Приведем некоторые числовые характеристики найденных реконструкций. В решении на рис. 1

$$\begin{array}{lll} p_1 = -0.046, & p_2 = 0.010, & p_3 = 0.0016, \\ q_1 = 0.704, & q_2 = 0.240 & q_3 = -0.126. \end{array}$$

Стандартные отклонения оценок начальных условий и уточняемых параметров составляют

$$\begin{array}{llll} \sigma_{\theta 1} = 0.0041, & \sigma_{\theta 2} = 0.0069, & \sigma_{\theta 3} = 0.0059, & \sigma_{\omega 1} = 0.0023, \\ \sigma_{\omega 2} = 0.0014, & \sigma_{\omega 3} = 0.0016, & \sigma_{p1} = 0.0019, & \sigma_{p2} = 0.00052, \\ \sigma_{p3} = 0.00018, & \sigma_{q1} = 0.0050, & \sigma_{q2} = 0.0016, & \sigma_{q3} = 0.0017. \end{array}$$

В решении на рис. 2

$$\begin{array}{lll} p_1 = -0.014, & p_2 = -0.030, & p_3 = -0.021, \\ q_1 = 0.152, & q_2 = 0.309 & q_3 = -0.241, \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \sigma_{\theta 1} = 0.0028, & \sigma_{\theta 2} = 0.0020, & \sigma_{\theta 3} = 0.0056, & \sigma_{\omega 1} = 0.0016, \\ \sigma_{\omega 2} = 0.0011, & \sigma_{\omega 3} = 0.0006, & \sigma_{p1} = 0.00034, & \sigma_{p2} = 0.00013, \\ \sigma_{p3} = 0.00013, & \sigma_{q1} = 0.0034, & \sigma_{q2} = 0.0047, & \sigma_{q3} = 0.0045. \end{array}$$

Стандартные отклонения $\sigma_{\theta i}$ здесь выражены в радианах, стандартные отклонения остальных величин — в единицах, в которых интегрируюся уравнения (1), в частности, $[\sigma_{\omega i}] = 10^{-3}\text{с}^{-1}$.

Оценки параметров q_i в решении на рис. 2 выглядят неправдоподобно большими. Это связано с тем, что рассматриваемое решение построено для продолжительного отрезка времени, на котором начинает сказываться неадекватность модели. Если длину $t_N - t_0$ отрезка уменьшить, то оценки параметров q_i уменьшатся.

Чтобы получить более содержательную оценку точности определения движения спутника с помощью описанной методики, была проведена обработка измерений на 11 пересекающихся интервалах времени, охватывающих 16.7 ч. Каждый интервал имел длину примерно 6200 с. Смежные интервалы имели пересечение около 800 с. Начальные точки интервалов приведены в таблице. Реконструкция движения спутника на всех этих интервалах (11 решений уравнений (1)) представлена на рис. 3. В левой части рисунка приведены графики зависимости от времени углов γ, δ и β, в средней и правой частях рисунка приведены графики зависимости от времени компонент угловой скорости и кватерниона ориентации. Как видно из рисунка, на стыках интервалов разные решения несколько отличаются, но в целом реконструкция выглядит плавной. Оценки параметров модели на этих интервалах приведены в таблице.

В [11] приведена аналогичная реконструкция всего неуправляемого полета *Фотона М-3*. Там использовались более сложные уравнения движения: дополнительно учитывался действующий на спутник магнитный момент, параметры которого уточнялись, поэтому стыковка смежных решений получилась более точной. Следует отметить, что и интервалы времени, на которых выполнялась реконструкция в [11], были длиннее — в основном $2 \div 3$ орбитальных витка. Использование более простой модели в данной работе обусловлено тем, что ниже эта модель применяется в фильтре Калмана. В этом случае целесообразно уменьшить число уточняемых параметров за счет некоторого огрубления модели.

5. Фильтр Калмана. Дискретный фильтр Калмана в достаточно общем виде можно описать следующим образом [13, 14, 17]. Рассмотрим механическую систему, некоторые параметры движения которой измеряются в дискретные моменты времени. Математическую модель движения системы и процесса измерений примем линейной и представим в виде

$$x_n = A_n x_{n-1} + \eta_n, \quad y_n = B_n x_n + \xi_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Здесь x_n — фазовый вектор системы, y_n — вектор измерений, ξ_n — вектор случайных ошибок измерений, η_n — вектор случайных возмущений системы. Размерность векторов x_n, η_n и порядок квадратных матриц A_n считаем не зависящими от n, размерности и размеры остальных векторов матриц полагаем согласованными должным образом. Полагаем также, что все матрицы имеют полный ранг. В частности, все матрицы A_n — невырожденные. Полагаем далее, что векторы ξ_m и η_n некоррелированы при любых значениях m и n, векторы ξ_m и ξ_n, а также η_m и η_n, некоррелированы при любых $m \neq n$. Математические ожидания и ковариационные матрицы этих векторов определяются соотношениями

$$\mathrm{M}\xi_n = 0, \quad \mathrm{M}\eta_n = 0, \quad \mathrm{M}\xi_n\xi_n^T = K_n, \quad \mathrm{M}\eta_n\eta_n^T = L_n,$$

где K_n и L_n — симметричные, положительно определенные матрицы. Задача состоит в том, чтобы по данным измерений y_1, y_2, …, y_n найти оценку $\hat{x}_n$ вектора x_n и ковариационную матрицу P_n ошибки $x_n - \hat{x}_n$.

Предположим сначала, что введенные выше случайные величины ξ_n и η_n имеют нормальное распределение. Тогда фазовый вектор x_n и его оценка $\hat{x}_n$ также будут нормальными случайными величинами, и решение поставленной задачи об оценивании движения системы можно свести к задаче нахождения условной плотности распределения $p(x_n|Y_n)$. Здесь $Y_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. В этом случае $\hat{x}_n = \mathrm{M}(x_n|Y_n)$, $P_n = \mathrm{M}\big[(x_n - \hat{x}_n)(x_n - \hat{x}_n)^T\big|Y_n\big]$.

Вывод рекуррентных соотношений для расчета величин x_n и P_n можно осуществить посредством формальных преобразований условных плотностей вероятностей [18]. С учетом равенства $p(x_n, Y_n) \equiv p(x_n, Y_{n-1}, y_n)$ имеем

$$p(x_n|Y_n) = \frac{p(x_n, Y_n)}{p(Y_n)} = \frac{p(x_n, Y_{n-1}, y_n)}{p(x_n, Y_{n-1})} \cdot \frac{p(x_n, Y_{n-1})}{p(Y_{n-1})} \cdot \frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)} =$$

$$= p(y_n|x_n, Y_{n-1}) p(x_n|Y_{n-1}) \frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)} = p(y_n|x_n) p(x_n|Y_{n-1}) \frac{p(Y_{n-1})}{p(Y_n)}\,.$$

Последнее равенство в этой цепочке следует из соотношения $p(y_n|x_n, Y_{n-1}) = p(y_n|x_n)$, справедливого в силу второго соотношения (7).

В силу первого соотношения (7) $p(x_n|x_{n-1}, Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1})$, поэтому

$$p(x_n, x_{n-1}|Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1}, Y_{n-1}) p(x_{n-1}|Y_{n-1}) = p(x_n|x_{n-1}) p(x_{n-1}|Y_{n-1})\,,$$

и, следовательно,

$$p(x_n|Y_{n-1}) = \int p(x_n, x_{n-1}|Y_{n-1})\, dx_{n-1} = \int p(x_n|x_{n-1}) p(x_{n-1}|Y_{n-1})\, dx_{n-1}\,.$$

Здесь интегрирование выполняется по всему фазовому пространству системы.

В силу нормальности рассматриваемых случайных величин (здесь и ниже несущественные множители опускаем)

$$p(x_n|x_{n-1}) \sim \exp\Big[-\frac{1}{2}\,(x_n - A_n x_{n-1})^T L_n^{-1} (x_n - A_n x_{n-1})\Big]\,,$$

$$p(x_{n-1}|Y_{n-1}) \sim \exp\Big[-\frac{1}{2}\,(x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})^T P_{n-1}^{-1} (x_{n-1} - \hat{x}_{n-1})\Big]\,.$$

Посредством несложных, но довольно громоздких преобразований подынтегральное выражение в последнем интеграле можно преобразовать к виду

$$p(x_n|x_{n-1}) p(x_{n-1}|Y_{n-1}) \sim \exp\Big[-\frac{1}{2}\,(x_n - A_n \hat{x}_{n-1})^T P_n'^{-1} (x_n - A_n \hat{x}_{n-1}) -$$

$$-\frac{1}{2}\,(x_{n-1}-x^\circ_{n-1})^T(P^{-1}_{n-1}+A^T_nL^{-1}_nA_n)(x_{n-1}-x^\circ_{n-1})\Big]\,,$$

$$P'_n=A_nP_{n-1}A^T_n+L_n\,,\quad x^\circ_{n-1}=(P^{-1}_{n-1}+A^T_nL^{-1}_nA_n)^{-1}(P^{-1}_{n-1}\hat x_{n-1}+A^T_nL^{-1}_nx_n)\,.$$

Вычислив выписанный интеграл, получим

$$p(x_n|Y_{n-1})\sim\exp\Big[-\frac{1}{2}\,(x_n-A_n\hat x_{n-1})^TP'^{-1}_n(x_n-A_n\hat x_{n-1})\Big]\,.$$

Согласно второму соотношению (7) и принятым допущениям

$$p(y_n|x_n)\sim\exp\Big[-\frac{1}{2}\,(y_n-B_nx_n)^TK^{-1}_n(y_n-B_nx_n)\Big]\,.$$

Перемножив правые части двух последних формул, получим после преобразований

$$p(x_n|Y_n)\sim\exp\Big[-\frac{1}{2}\,(x_n-\hat x_n)^TP^{-1}_n(x_n-\hat x_n)\Big]\,.$$

Здесь

$$\hat x_n=A_n\hat x_{n-1}+P'_nB^T_nS^{-1}_n(y_n-B_nA_n\hat x_{n-1})\,, \qquad (8)$$
$$P_n=P'_n-P'_nB^T_nS^{-1}_nB_nP'_n\,,\quad S_n=K_n+B_nP'_nB^T_n\,.$$

Соотношения (8) задают рекуррентные формулы для расчета величин $\hat x_n$ и P_n. Отыскание величин $\hat x_0$ и P_0 — отдельная задача. Полагаем, что она решена. В ряде случаев величины $\hat x_0$ и P_0 можно выбирать достаточно произвольно; с увеличением n рекуррентные формулы (8) начинают давать правильные значения $\hat x_n$ и P_n.

Как следует из вывода формул (8), вектор $x'_n=A_n\hat x_{n-1}$ — несмещенная оценка вектора x_n по измерениям Y_{n-1}, P'_n — ковариационная матрица этой оценки.

Соотношения (8) позволяют находить оценку фазового вектора системы по мере поступления измерений. Обычно их применяют в случае, когда $\dim y_n<\dim x_n$. Если выполнено обратное неравенство и $\dim y_n$ зависит от n, то вследствие необходимости обращать матрицу S_n порядка $\dim y_n$ формулы (8) следует преобразовать к более удобному виду. На промежуточном этапе вывода формул (8) возникают соотношения

$$\hat x_n=x'_n+P_nB^T_nK^{-1}_n(y_n-B_nx'_n),\quad P^{-1}_n=P'^{\,-1}_n+B^T_nK^{-1}_nB_n\,, \qquad (9)$$

$$P'^{\,-1}_n=Z_n-Z_nQ^{-1}_nZ_n\,,\quad Z_n=(A^{-1}_n)^TP^{-1}_{n-1}A^{-1}_n\,,\quad Q_n=L^{-1}_n+Z_n\,.$$

Фильтр на их основе оперирует с матрицами P^{-1}_n, $P'^{\,-1}_n$, A^{-1}_n, K^{-1}_n, L^{-1}_n. Обращаются только матрицы A_n, Q_n и P^{-1}_n (если надо найти P_n) порядка $\dim x_n$. Матрицы K^{-1}_n, L^{-1}_n можно считать исходными вместо K_n, L_n.

В задачах обработки магнитных измерений на спутниках Земли матрица A_n близка к единичной, а L_n существенно меньше P_{n-1}. С учетом последнего условия $Q_n^{-1} \approx L_n$ и $P_n'^{-1} = Z_n - Z_n L_n Z_n$. Рассмотрим последнюю формулу в случае, когда $L_n = \sigma_\eta^2 E$, σ_η — положительный скаляр, E — единичная матрица (такое предположение означает, в частности, что единицы измерения компонент фазового вектора выбраны подходящим образом). Тогда $P_n'^{-1} = Z_n - \sigma_\eta^2 Z_n^2$. Если a и α — собственные вектор и число матрицы Z_n ($\alpha \neq 0$), то a и $\alpha - \alpha^2\sigma_\eta^2$ — собственные вектор и число матрицы $P_n'^{-1}$. Матрицы $P_n'^{-1}$ и Z_n имеют одинаковые собственные векторы, а их собственные числа в случае $\alpha\sigma_\eta^2 \ll 1$ близки. В такой ситуации можно взять $P_n'^{-1} = \chi Z_n$ при подходящем $\chi \in (0,1)$, $\chi \approx 1$.

Выписанные выше соотношения относятся к линейному случаю. Перейдем теперь к нелинейной системе. Математическую модель ее движения и процесса измерений примем в виде

$$x_n = F_n(x_{n-1}) + \eta_n, \quad y_n = G_n(x_n) + \xi_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

В выписанных соотношениях $F_n(x)$ и $G_n(x)$ — гладкие функции, матрицы Якоби которых имеют полный ранг; векторы x_n, y_n, ξ_n и η_n имеют прежний смысл, причем ошибки ξ_n и η_n имеют указанные выше первые и вторые моменты.

Рассмотрим получение оценки вектора x_n по измерениям y_1, y_2, …, y_n. Эту оценку и ее ковариационную матрицу по-прежнему будем обозначать $\hat{x}_n$ и P_n. Рекуррентные соотношения, позволяющие находить искомые величины получаются эвристической модификацией соотношений (9). А именно, оценка $\hat{x}_n$ в (9) минимизирует по x_n выражение

$$(x_n - x_n')^T P_n'^{-1}(x_n - x_n') + (y_n - B_n x_n)^T K_n^{-1}(y_n - B_n x_n)\,.$$

Иными словами, эта оценка является оценкой метода наименьших квадратов. Второе слагаемое в выписанном выражении отвечает за ошибки измерений, первое слагаемое учитывает априорную информацию о значении x_n. По аналогии и с учетом малости случайных величин в модели (10) оценку вектора x_n в рамках этой модели будем искать из условия минимума функции

$$f_1(x_n) = (x_n - x_n')^T P_n'^{-1}(x_n - x_n') + [y_n - G_n(x_n)]^T K_n^{-1}[y_n - G_n(x_n)]\,,$$

где теперь

$$x_n' = F_n(\hat{x}_{n-1})\,, \quad P_n' = A_n P_{n-1} A_n^T + L_n\,, \quad A_n = \frac{\partial F_n(\hat{x}_{n-1})}{\partial x}\,.$$

Описанный переход от линейного фильтра к нелинейному не единствен. Приведем пример другого перехода. Минимизация по x_n функции $f_1(x_n)$ эквивалентна минимизации по x_{n-1} функции

$$f_1[F_n(x_{n-1})] = [F_n(x_{n-1}) - x_n']^T P_n'^{-1}[F_n(x_{n-1}) - x_n'] +$$

$$+[y_n - \tilde G_n(x_{n-1})]^T K_n^{-1}[y_n - \tilde G_n(x_{n-1})]\,, \quad \tilde G_n(x) = G_n[F_n(x)]\,.$$

Первое слагаемое в правой части формулы для $f_1[F_n(x_{n-1})]$, отвечающее за априорную информацию, с высокой точностью можно представить в виде

$$[F_n(x_{n-1}) - x_n']^T P_n'^{-1}[F_n(x_{n-1}) - x_n'] = (x_{n-1} - \hat x_{n-1})^T C_n (x_{n-1} - \hat x_{n-1})\,,$$

$$C_n = A_n^T P_n'^{-1} A_n = P_{n-1}^{-1} - P_{n-1}^{-1} D_n^{-1} P_{n-1}^{-1}\,, \quad D_n = P_{n-1}^{-1} + A_n^T L_n^{-1} A_n\,.$$

Здесь матрица A_n имеет тот же вид, что и в формуле для $f_1(x_n)$. Положим

$$f_2(x_{n-1}) = (x_{n-1} - \hat x_{n-1})^T C_n (x_{n-1} - \hat x_{n-1}) + [y_n - \tilde G_n(x_{n-1})]^T K_n^{-1}[y_n - \tilde G_n(x_{n-1})]$$

и примем в качестве оценки x_n величину $\hat x_n = F_n[\operatorname{argmin} f_2(x_{n-1})]$. В общем случае эта оценка отличается от предыдущей оценки $\hat x_n = \operatorname{argmin} f_1(x_n)$, но при определенных условиях они будут близки.

Минимизацию функций $f_1(x_n)$ и $f_2(x_{n-1})$ можно выполнять методом Гаусса — Ньютона, в качестве начальных приближений использовать точки x_n' и $\hat x_{n-1}$ соответственно. При минимизации функции $f_1(x_n)$ нормальные уравнения имеют вид

$$\left(P_n'^{-1} + B_n^T K_n^{-1} B_n\right)\Delta x_n = B_n^T K_n^{-1}[\,y_n - G_n(x_n^*)] - P_n'^{-1}(x_n^* - x_n')\,, \qquad (11)$$

$$\Delta x_n = x_n - x_n^*\,, \quad B_n = \frac{\partial G_n(x_n^*)}{\partial x}\,.$$

Здесь x_n^* — имеющееся приближенное значение величины $\hat x_n$, которму после решения системы (11) присваивается значение $x_n^* + \Delta x_n$. Итерационное уточнение x_n^* прекращается, когда норма поправки $\|\Delta x_n\|$ станет приемлемо малой. Тогда принимается $\hat x_n = x_n^*$.

При минимизации функции $f_2(x_{n-1})$ нормальные уравнения имеют вид

$$\left(\mathrm{C}_n + U_n^T K_n^{-1} U_n\right)\Delta x_{n-1} = U_n^T K_n^{-1}[\,y_n - \tilde G_n(x_{n-1}^*)] - \mathrm{C}_n(x_{n-1}^* - \hat x_{n-1})\,, \quad (12)$$

$$\Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^*\,, \quad U_n = \frac{\partial \tilde G_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}\,.$$

Здесь x_{n-1}^* — имеющееся приближенное значение величины $F_n^{-1}(\hat x_n)$, $F_n^{-1}(x)$ — функция, обратная функции $F_n(x)$. Итерационное уточнение x_{n-1}^* выполняется аналогично только что описанному уточнению оценки $\hat x_n$. По окончании итераций принимается $\hat x_n = F_n(x_{n-1}^*)$.

Нелинейные фильтры, основанные на минимизации функций $f_1(x_n)$ и $f_2(x_{n-1})$, были использованы для обработки магнитных измерений, выполненных на *Фотоне М-3*. В программных реализациях этих фильтров под уравнениями движения спутника понимается совокупность уравнений (1) и уравнений

$$\dot p_i = 0\,, \quad \dot q_i = 0\,, \quad \dot\Delta_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Для ссылок такую систему обозначим $(1')$. Компонентами ее фазового вектора $x \in R^{16}$ являются величины ω_i, p_i, q_i, Δ_i $(i = 1, 2, 3)$ и Q_j $(j = 0, 1, 2, 3)$. Значения фазового вектора x_n суть значения переменных уравнений движения спутника в узлах временной сетки $\{t_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$. В реализации, использующей минимизацию функции $f_2(x_{n-1})$, эта сетка равномерная: $t_n = t_0 + nh$, $h = 200 \div 500$с. Выбираемое значение h в несколько раз превышает длину оптимального шага интегрирования уравнений (1) с помощью процедуры DOP853. В реализации, основанной на минимизации функции $f_1(x_n)$, узлы t_n являются концевыми точками этих оптимальных шагов. Здесь $t_{n+1} - t_n = 50 \div 100$с.

В обеих реализациях формирование векторов измерений y_n и вычисление функций $F_n(x)$, $G_n(x)$ выполняется следующим образом. Решение системы $(1')$ с начальным условием $x(\tau) = a$ обозначим $x = \varphi(t, \tau, a)$. Тогда $F_n(x) = \varphi(t_n, t_{n-1}, x)$. Измерения напряженности магнитного поля (ср. (3)),

$$t'_k\,,\ h_1^{(k)},\ h_2^{(k)},\ h_3^{(k)},$$

попавшие в интервал $t_{n-1} < t \le t_n$, — величины $h_i^{(k)}$ $(i = 1, 2, 3)$ при $t'_k \in (t_{n-1}, t_n]$ — объединим в вектор y_n. Соответствующие расчетные аналоги этих измерений $\Delta_i + \hat{h}_i(t'_k)$, вычисленные вдоль решения $\varphi(t, t_{n-1}, x)$ с использованием интерполяционного полинома, обозначим $\tilde{G}_n(x)$. Имеют место формулы $F_n^{-1}(x) = \varphi(t_{n-1}, t_n, x)$, $G_n(x) = \tilde{G}\big[F_n^{-1}(x)\big]$.

В вычислительных программах векторы $\Delta x_n = x_n - x_n^*$, $x_n^* - x'_n$ в (11) и векторы $\Delta x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-1}^*$, $x_{n-1}^* - \hat{x}_{n-1}$ в (12) представляются векторами из R^{15} — четыре кватернионные компоненты этих векторов (они малы) заменены тремя компонентами векторов бесконечно малых поворотов. Такая замена была использована в п. 3 при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов. По этой причине матрицы A_n, P_n и т. п. имеют порядок 15. Вместо ковариаций компонент кватернионов используются ковариации компонент векторов бесконечно малых поворотов.

Приведем некоторые детали формирования и решения системы (11). Пусть для точки t_{n-1} известны оценка $\hat{x}_{n-1}$ и матрица P_{n-1}^{-1}. Сначала посредством интегрирования уравнений $(1')$ от точки t_{n-1} к точке t_n (фактически здесь и ниже интегрируются уравнения (1) и описанная в п. 3 система уравнений в вариациях) находятся прогноз x'_n и матрица $P_n'^{-1}$. Матрица рассчитывается по третьей и последующим формулам (9), в которых теперь $A_n = \partial F_n(\hat{x}_{n-1})/\partial x$. Затем реализуется итерационный процесс получения оценки $\hat{x}_n$. Матрица и правая часть системы (11) вычисляются посредством интегрирования уравнений $(1')$ от точки t_n к точке t_{n-1}. При этом часть элементов матрицы $B_n^T K_n^{-1} B_n$ и компонент вектора $B_n^T K_n^{-1}[y_n - G_n(x_n^*)]$ рассчитываются по формулам, используемым при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов. Матрица $P_n'^{-1}$ на всех итерациях остается неизменной. Ковариационная матрица P_n найденной оценки равна обратной матрице системы (11) на последней итерации уточнения x_n^* (ср. вторую формулу (9), в которой B_n вычисляется при $x_n = \hat{x}_n$). Фактически в фильтре используется только эта матрица системы (11), т. е. матрица P_n^{-1}, а матрица P_n служит только для расчета стандартных отклонений оцениваемых величин.

Процесс решения системы (12) организован несколько иначе. На каждой итерации уравнения (1′) интегрируются от точки t_{n-1} к точке t_n. На первой итерации вычисляется матрица C_n, которая при последующих итерациях остается неизменной. Часть элементов матрицы $U_n^T K_n^{-1} U_n$ и компонент вектора $U_n^T K_n^{-1}[y_n - \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)]$ рассчитываются так же, как при формировании системы нормальных уравнений метода наименьших квадратов в п. 3. Ковариационная матрица оценки $\hat{x}_n = F_n(x_{n-1}^*)$, $x_{n-1}^* = \operatorname{argmin} f_2(x_{n-1})$ определяется формулой

$$P_n = A_n \left(\mathrm{C}_n + U_n^T K_n^{-1} U_n\right)^{-1} A_n^T, \quad A_n = \frac{\partial F_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}, \quad U_n = \frac{\partial \tilde{G}_n(x_{n-1}^*)}{\partial x}.$$

Фактически в фильтре используется матрица

$$P_n^{-1} = (A_n^{-1})^T \left(\mathrm{C}_n + U_n^T K_n^{-1} U_n\right) A_n^{-1}.$$

Оценка $\hat{x}_0$ и матрица P_0^{-1}, относящиеся к начальной точке t_0, находились методом наименьших квадратов посредством минимизации функционала (4) при $t_0 > t_1 > \ldots > t_N$, $t_0 - t_N = 30 \div 60$ мин. В обозначениях п. 3 $x_0 = z_*$, $P_0^{-1} = \sigma^{-2}\mathrm{C}$. Однако соотношения, связывающие все рассматриваемые ковариационные матрицы, являются однородными первой степени. Кроме того, реконструируемое движение спутника на довольно продолжительных отрезках сетки $\{t_n\}$ можно считать установившимся. В такой ситуации удобно в качестве K_n принять единичную матрицу, положить $P_0^{-1} = \mathrm{C}$, L_n взять диагональной матрицей, не зависящей от n, а ковариационную матрицу оценки $\hat{x}_n$ вычислять как $\sigma_0^2 P_n$, где σ_0 — характерное значение стандартного отклонения ошибок в измерениях отдельных компонент МПЗ в строительной системе координат. В расчетах следующего пункта диагональные компоненты L_n, отвечающие фазовым переменным, составляют $2 \cdot 10^4$, отвечающие параметрам — $2 \cdot 10^2$ (в единицах измерения переменных и параметров системы (1)), в качестве σ_0 берется среднеквадратичная ошибка аппроксимации данных измерений. Эта ошибка и матрицы $\sigma_0^2 P_n$ рассчитываются после реконструкции движения на всем выбранном отрезке времени. Матрицы P_n, оценки $\hat{x}_n$ и еще ряд величин, относящихся к интервалам $(t_{n-1}, t_n]$ хранятся в памяти компьютера.

6. Примеры реконструкции движения с помощью фильтра Калмана. Приведем результаты реконструкции движения *Фотона М-3* на отрезке времени, пересекающемся с объединением 11 интервалов из п. 4 (см.

таблицу). Реконструкция, полученная посредством решения системы (12), приведена на рис. 4. Этот рисунок получен при $t_{n+1} - t_n = 200$с. Левая часть рисунка содержит графики зависимости от времени углов (ср. рис. 1а, 2а) γ, δ и β, а также график разности $\Delta\gamma(t) = \gamma(t) - c_0 - c_1(t - t_0)$, где $c_0 + c_1(t - t_0)$ — линейная аппроксимация функции $\gamma(t)$, построенная методом наименьших квадратов. В средней части рисунка помещены графики компонент угловой скорости $\omega_i(t)$, в левых частях — ломаные, характеризующие ошибки аппроксимации данных измерений (ср. правые графики на рис. 1б, 2б). На рис. 4б изображены графики величин p_i, q_i, Δ_i и σ_n. Эти величины — кусочно постоянные функции, на интервалах $(t_{n-1}, t_n]$ они сохраняют свои значения. На рис. 4в и 4г приведены графики стандартных отклонений оценок $\hat{x}_n$. Каждая компонента оценки представлена соответствующим стандартным отклонением, за исключением компонент кватерниона. Последние представлены стандартными отклонениями $\sigma_{\theta i}$ компонент вектора бесконечно малого поворота θ_i $(i = 1, 2, 3)$. Это также кусочно постоянные функции с интервалами постоянства $(t_{n-1}, t_n]$. В данном примере $\sigma = \sigma_0 = 482\,\gamma$.

Реконструкция движения на том же отрезке времени посредством решения системы (11) приведена на рис. 5. Эта серия рисунков организована аналогично рис. 4. В данном случае $\sigma_0 = 1009\gamma$. Точность аппроксимации измерений получилась несколько хуже, чем при использовании системы (12). Это видно и из сравнения сравнения рис. 5в,г с рис. 4в,г. Указанный эффект обусловлен уменьшением числа измерений на интервале $(t_{n-1}, t_n]$ при переходе от варианта с системой (12) к варианту с системой (11) — длина этого интервала стала в $2 \div 3$ раза короче. Вариант с системой (11) оказался чувствителен к этому числу. Даже кратковременный сбой в поступлении измерений может привести к некоторому нарушению работы фильтра. На рис. 4в заметен выброс при $t \approx 830$ мин. Он обусловлен именно малым числом измерений на соответствующем интервале $(t_{n-1}, t_n]$.

Варьируя элементы матрицы L_n, можно заметно повысить точность аппроксимации измерений даже при использовании варианта с системой (11). В частности, в данном примере можно достичь значения $\sigma_0 < 300\gamma$. Но такое уменьшение сопровождается увеличением диапазона изменения параметров p_i, q_i в (1). Аналогичный результат получается, если вместо использования L_n принять $P_n'^{-1} = \chi Z_n$, $\chi \approx 1$, $\chi < 1$ (см. выше). Здесь получается высокая точность аппроксимации и неоправданно большие (по сравнению с оценками метода наименьших квадратов) значения оцениваемых параметров уравнений (1).

7. Сглаживающий фильтр Калмана. Описанные выше процессы фильтрации позволяют реконструировать вращательное движение спутника по мере поступления данных измерений. Их можно использовать для реконструкции в реальном времени. Апостериорная реконструкция движения по всей полученной совокупности данных обычно выполняется другими алгоритмами. Задача апостериорной реконструкции формулируется следующим образом. Пусть на некотором отрезке времени были получены измерения y_n при $n = 1, 2, \ldots, N$, и по мере поступления этих измерений по формулам (8) рассчитаны величины x'_n, P'_n, $\hat{x}_n$ и P_n. После того как процесс получения измерений завершен, возникает задача уточнения оценок $\hat{x}_n$ и P_n с использованием всей имеющейся измерительной информации. Уточненную оценку вектора x_n обозначим $\tilde{x}_n$, ковариационную матрицу новой оценки обозначим Q_n. Ниже эта задача решается с помощью алгоритма, основанного на результатах [19]. Приведем, следуя [18], вывод основных соотношений этого алгоритма в терминах модели (7) и предположений п. 5. Будем основываться на формальных преобразованиях условных плотностей вероятностей.

Найдем $p(x_n|Y_N)$. По определению плотности условной вероятности имеем

$$p(x_n, x_{n+1}|Y_N) = p(x_n|x_{n+1}, Y_N)p(x_{n+1}|Y_N) = p(x_n|x_{n+1}, Y_n)p(x_{n+1}|Y_N)\,,$$

$$p(x_n|x_{n+1}, Y_n) = \frac{p(x_n, x_{n+1}, Y_n)}{p(x_{n+1}, Y_n)} = \frac{p(x_n, x_{n+1}, Y_n)}{p(x_n, Y_n)} \cdot \frac{p(x_n, Y_n)}{p(Y_n)} \cdot \frac{p(Y_n)}{p(x_{n+1}, Y_n)} =$$
$$= \frac{p(x_{n+1}|x_n, Y_n)p(x_n|Y_n)}{p(x_{n+1}|Y_n)} = \frac{p(x_{n+1}|x_n)p(x_n|Y_n)}{p(x_{n+1}|Y_n)}\,.$$

Отсюда

$$p(x_n, x_{n+1}|Y_N) = \frac{p(x_{n+1}|x_n)p(x_n|Y_n)p(x_{n+1}|Y_N)}{p(x_{n+1}|Y_n)}\,.$$

Далее

$$\ln p(x_n, x_{n+1}|Y_N) = \ln p(x_{n+1}|x_n) + \ln p(x_n|Y_n) + \ln p(x_{n+1}|Y_N) -$$
$$- \ln p(x_{n+1}|Y_n) = -\frac{1}{2}\,(x_{n+1} - A_{n+1}x_n)^T L_{n+1}^{-1}(x_{n+1} - A_{n+1}x_n) -$$
$$-\frac{1}{2}\,(x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1}(x_n - \hat{x}_n) - \frac{1}{2}\,(x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1})^T Q_{n+1}^{-1}(x_{n+1} - \tilde{x}_{n+1}) +$$
$$+\frac{1}{2}\,(x_{n+1} - x'_{n+1})^T P'^{-1}_{n+1}(x_{n+1} - x'_{n+1}) =$$
$$= -\frac{1}{2}\,x_{n+1}^T(L_{n+1}^{-1} + Q_{n+1}^{-1} - P'^{-1}_{n+1})x_{n+1} + x_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} x_n -$$
$$-\frac{1}{2}\,x_n^T(A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} + P_n^{-1})x_n + x_n^T P_n^{-1}\hat{x}_n \ldots$$

Здесь в последнем выражении выписаны только члены второй степени по компонентам векторов x_n, x_{n+1} и члены первой степени по компонентам вектора x_n. Их знания достаточно, чтобы вычислить интеграл в формуле

$$p(x_n|Y_N) = \int p(x_n, x_{n+1}|Y_N)\, dx_{n+1}\,,$$

где интегрирование выполняется по всему фазовому пространству системы.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I(z_2) = \int \exp\Big[-\frac{1}{2}\,\Phi(z_1, z_2)\Big]\, dz_1\,,$$

$$\Phi(z_1, z_2) = (z_1 - \mu_1)^T S_{11}(z_1 - \mu_1) + (z_2 - \mu_2)^T S_{22}(z_2 - \mu_2) +$$
$$+ 2(z_1 - \mu_1)^T S_{12}(z_2 - \mu_2)\,,$$

где S_{ij} и μ_i постоянные матрицы и векторы. Квадратичную форму $\Phi(z_1, z_2)$ представим в виде

$$\Phi(z_1, z_2) = \big[z_1 - \mu_1 + S_{11}^{-1} S_{12}(z_2 - \mu_2)\big]^T S_{11}\big[z_1 - \mu_1 + S_{11}^{-1} S_{12}(z_2 - \mu_2)\big] +$$

$$+ (z_2 - \mu_2)^T \big(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}\big)(z_2 - \mu_2)\,.$$

С использованием последней формулы получим

$$I(z_2) \sim \exp\Big[-\frac{1}{2}\,(z_2 - \mu_2)^T \big(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}\big)(z_2 - \mu_2)\Big]\,.$$

Приняв $z_1 = x_{n+1}$, $z_2 = x_n$ и сравнив $\ln p(x_{n+1}, x_n | Y)$ с $\Phi(z_1, z_2)$, найдем

$$S_{11} = L_{n+1}^{-1} + Q_{n+1}^{-1} - P_{n+1}^{\prime -1}\,,\ S_{22} = A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1} + P_n^{-1}\,,$$

$$S_{12} = -L_{n+1}^{-1} A_{n+1}\,,\ S_{12}^T \mu_1 + S_{22}\mu_2 = P_n^{-1}\hat{x}_n\,,\ \mu_1 = \tilde{x}_{n+1}\,,\ \mu_2 = \tilde{x}_n\,.$$

Согласно установленному соответствию

$$\tilde{x}_n = S_{22}^{-1} P_n^{-1} \hat{x}_n - S_{22}^{-1} S_{12}^T \tilde{x}_{n+1}\,,$$

$$Q_n = \big(S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12}\big)^{-1} = S_{22}^{-1} + S_{22}^{-1} S_{12}^T G^{-1} S_{12} S_{22}^{-1}\,,$$

где $G = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T$. Прямые вычисления дают

$$S_{22}^{-1} = P_n - P_n A_{n+1}^T P_{n+1}^{\prime -1} A_{n+1} P_n\,, \quad S_{22}^{-1} S_{12}^T = -P_n A_{n+1}^T P_{n+1}^{\prime -1}\,, \quad G = Q_n^{-1}\,.$$

Отсюда

$$\tilde{x}_n = \hat{x}_n + P_n A_{n+1}^T P_{n+1}^{\prime -1}(\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1}\hat{x}_n)\,, \tag{13}$$
$$Q_n = P_n + P_n A_{n+1}^T P_{n+1}^{\prime -1}(Q_{n+1} - P_{n+1}^{\prime}) P_{n+1}^{\prime -1} A_{n+1} P_n\,.$$

При использовании формул (13) принимается $\tilde{x}_N = \hat{x}_N$, $Q_N = P_N$.

Перейдем к нелинейной модели (10). Рекуррентные соотношения, позволяющие осуществлять сглаживание, получаются эвристической модификацией соотношений (13). Оценка $\tilde{x}_n$, выражаемая первой формулой (13), минимизирует по x_n выражение

$$(x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1}(x_n - \hat{x}_n) + (\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1}x_n)^T L_{n+1}^{-1}(\tilde{x}_{n+1} - A_{n+1}x_n)\,,$$

т.е. является оценкой метода наименьших квадратов. По аналогии и с учетом малости случайных величин в модели (7) оценку вектора x_n в рамках этой модели будем искать из условия минимума функции

$$g(x_n) = (x_n - \hat{x}_n)^T P_n^{-1}(x_n - \hat{x}_n) + [\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n)]^T L_{n+1}^{-1}[\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n)] \,.$$

Минимизация функции $g(x_n)$ выполняется методом Гаусса — Ньютона, начальным приближением служит точка $\hat{x}_n$. Нормальные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\left(P_n^{-1} + A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1} A_{n+1}\right) \Delta x_n = \\ = A_{n+1}^T L_{n+1}^{-1}[\tilde{x}_{n+1} - F_{n+1}(x_n^*)] - P_n^{-1}(x_n^* - \hat{x}_n) \,, \qquad (14) \\ \Delta x_n = x_n - x_n^* \,, \quad A_{n+1} = \frac{\partial F_{n+1}(x_n^*)}{\partial x} \,.\end{gathered}$$

Здесь x_n^* — имеющееся приближенное значение величины $\tilde{x}_n$, которому после решения системы (14) присваивается значение $x_n^* + \Delta x_n$. Итерационное уточнение x_n^* прекращается, когда норма поправки $\|\Delta x_n\|$ станет приемлемо малой. Тогда принимается $\tilde{x}_n = x_n^*$.

Процесс вычисления оценок $\tilde{x}_n$, Q_n идет в направлении от точки t_N к точке t_1. При переходе от точки t_{n+1} к точке t_n матрица и правая часть системы (14) находятся интегрированием уравнений ($1'$) в обратном направлении — от точки t_n к точке t_{n+1}. Расчет матрицы Q_n^{-1} выполняется по второй формуле (13), где A_{n+1} имеет вид (14). В начале процесса $\tilde{x}_N = \hat{x}_N$, $Q_N = P_N$.

Чтобы реализовать этот процесс, приходится хранить в памяти компьютера все вычисленные в процессе фильтрации "вперед" величины $\hat{x}_n$, P_n' и P_n. В [18] приведены рекуррентные формулы, которые позволяют вычислять матрицы P_n' и P_n в процессе фильтрации "назад". Однако применение этих формул часто дает отрицательно определенные матрицы Q_n (возможно, сказывается нелинейность задачи), поэтому их использование непрактично.

8. Примеры сглаживания приведены на рис. 6, 7. Серия рис. 6 получена для варианта, в котором фильтрация "вперед"выполнена с использованием системы (12), серия рис. 7 относится к варианту, в котором фильтрация "вперед"выполнена с использованием системы (11). Как показывает сравнение этих серий рисунков, один и тот же метод сглаживания при использовании разной (хотя очень похожей) исходной информации дает заметно различающиеся результаты. Однако микроускорения для обеих реконструкций оказываются практически одинаковыми.

Данная работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00262).

Литература

[1] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Анализ низкочастотных микроускорений на борту ИСЗ *Фотон-11*. Космические исследования, 2001, т. 39. № 4, с. 419-435.

[2] Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроруcкорения на его борту. Космические исследования, 2003, т. 41, № 1, с. 45-56.

[3] Абрашкин В.И., Волков М.В., Егоров А.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях угловой скорости и микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон-12*. Космические исследования, 2003, т. 41, № 6, с. 632-651.

[4] Сазонов В.В., Чебуков С.Ю., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Зайцев А.С. Низкочастотные микроускорения на борту ИСЗ *Фотон-11*. Космические исследования, 2004, т. 42, № 2, с. 185-200.

[5] Абрашкин В.И., Богоявленский Н.Л., Воронов К.Е., Казакова А.Е., Пузин Ю.Я., Сазонов В.В., Семкин Н.Д., Чебуков С.Ю. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон М-2*, и квазистатические микроускорения на его борту. Космические исследования, 2007, т. 45, № 5, с. 450-470.

[6] Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2*, по данным бортовых измерений угловой скорости. Космические исследования, 2008, т. 46, № 2, с. 148-167.

[7] Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Анализ низкочастотной составляющей в измерениях микроускорения, выполненных на спутнике *Фотон М-2*. Космические исследования, 2008, т. 46, № 5, с. 463-483.

[8] Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений микроускорения. Космические исследования, 2009, т. 47, № 6, с. 537-549.

[9] Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Абрашкин В.И., Казакова А.Е., Сазонов В.В. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-3* по данным бортовых измерений магнитного поля Земли. Космические исследования, 2010, т. 48, № 3, с. 252-265.

[10] Сазонов В.В. Обработка данных измерений угловой скорости и микроускорения, полученных на спутнике *Фотон-12*. Препринт ИПМ им. М.В. келдыша РАН, № 62, 2008.

[11] Beuselinck T., Van Bavinchove C., Sazonov V.V. Quasi-steady accelerations onboard *Foton M-3* spacecraft. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 8, 2010.

[12] Beuselinck T., Van Bavinchove C., Sazonov V.V. Some tests of acceleration measurement data obtained onboard *Foton M-3*. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 16, 2010.

[13] Брайсон А., Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимаольного управления. М., "Мир", 1972

[14] Эльясберг П.Е. Определение движения по результатам измерений. М., Наука, 1976.

[15] Глотов Ю.Н., Сазонов В.В. Мониторинг микроускорений на борту ориентированного космического аппарата. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 63, 2010.

[16] Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М., Мир, 1985.

[17] Hairer E., Norset S.P., Wanner G. Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. 1993, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg.

[18] Yu B.M., Shenoy K.V., Sahani M. Derivation of Kalman filtering and smoothing equations.
www-npl.stanford.edu/~byronyu/papers/derive_ks.pdf

[19] Rauch H.E., Tung F., Striebel C.T. Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 8, p. 1445-1450.

Таблица. Параметры математической модели

№	t_0(ч : м : с)	$s\,(g)$	$\Delta_1(g)$	$\Delta_2(g)$	$\Delta_3(g)$	p_1	s_{p1}	p_2	s_{p2}	p_3	s_{p3}
1	22:46:35	618	−2118	1010	965	−0.0382	0.0019	−0.0066	0.00055	−0.0106	0.00057
2	00:16:29	851	−2157	981	798	0.0054	0.0026	0.0265	0.00078	−0.0254	0.00076
3	01:46:23	863	−2063	1820	−1955	0.0140	0.0026	0.0235	0.00097	0.0254	0.00064
4	03:16:17	696	−2130	678	109	−0.0605	0.0021	0.0278	0.00090	0.0312	0.00041
5	04:46:11	1009	−2110	2072	318	0.0431	0.0029	0.0380	0.0011	−0.0438	0.00093
6	06:16:05	725	−1947	1713	156	−0.0792	0.0029	0.0015	0.0012	−0.0108	0.0011
7	07:45:59	644	−1888	1445	94	−0.0196	0.0023	0.0785	0.0016	−0.0114	0.00024
8	09:15:53	721	−2009	843	166	−0.0287	0.0029	0.0097	0.0011	0.0208	0.00035
9	10:45:47	619	−2102	1612	−141	−0.0382	0.0026	−0.0177	0.00055	−0.0442	0.00065
10	12:15:41	798	−2466	844	−27	−0.1056	0.0028	0.0107	0.0013	0.0342	0.00095
11	13:45:34	1002	−2512	944	−144	−0.1340	0.0034	−0.0546	0.00089	0.0098	0.0012

№	q_1	s_{q1}	q_2	s_{q2}	q_3	s_{q3}
1	0.7604	0.0042	0.1878	0.0016	−0.1118	0.0015
2	0.7984	0.0060	0.1512	0.0021	−0.1805	0.0021
3	0.7243	0.0062	0.2647	0.0021	−0.1481	0.0018
4	0.8381	0.0053	0.2483	0.0016	−0.1176	0.0015
5	0.8196	0.0075	0.2537	0.0027	−0.1901	0.0025
6	0.8289	0.0059	0.2445	0.0012	−0.1295	0.0011
7	0.6900	0.0056	0.2002	0.0012	−0.1702	0.0010
8	0.6693	0.0065	0.2220	0.0014	−0.1285	0.0015
9	0.6556	0.0056	0.1812	0.0017	−0.1290	0.0010
10	0.7334	0.0067	0.2697	0.0030	−0.1118	0.0020
11	0.8436	0.0070	0.2702	0.0041	−0.0910	0.0034

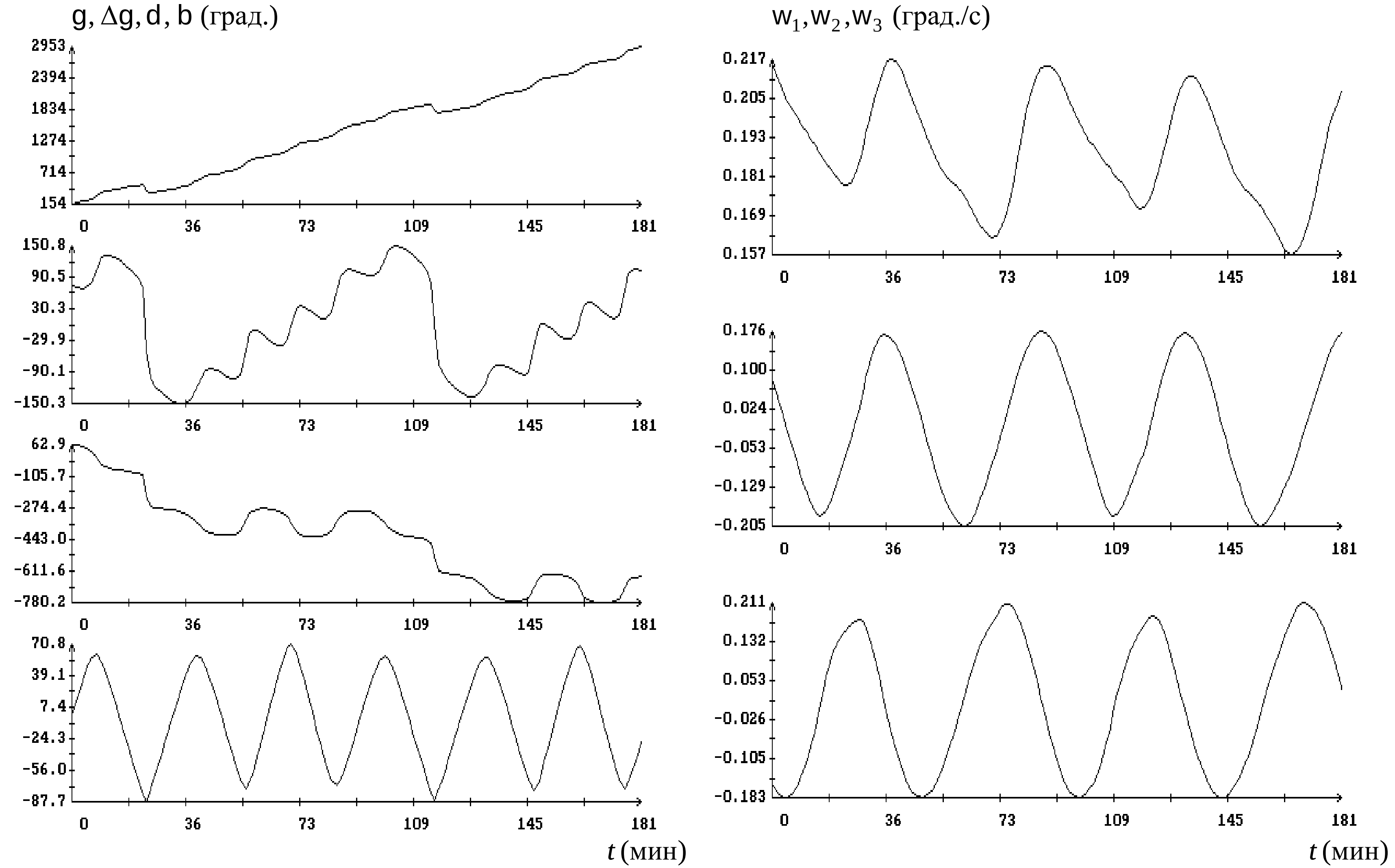

Рис. 1а. Движение Фотона М-3, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 22:46:42.00 ДМВ 17.09.2007.

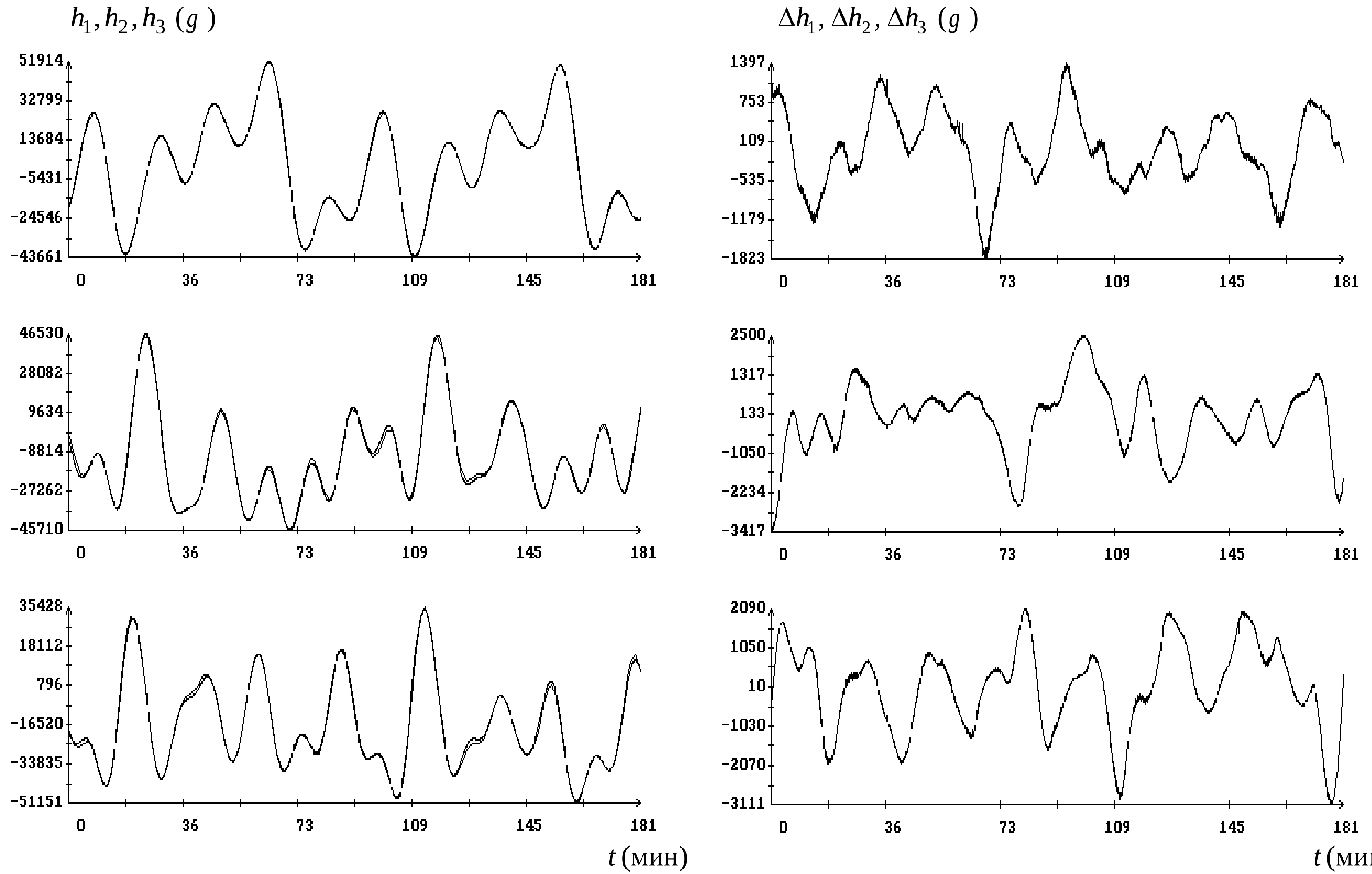

Рис. 1б. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов, $N = 2340$, $s = 958g$.
Момент $t = 0$ на графиках соответствует 22:46:42.00 ДМВ 17.09.2007.

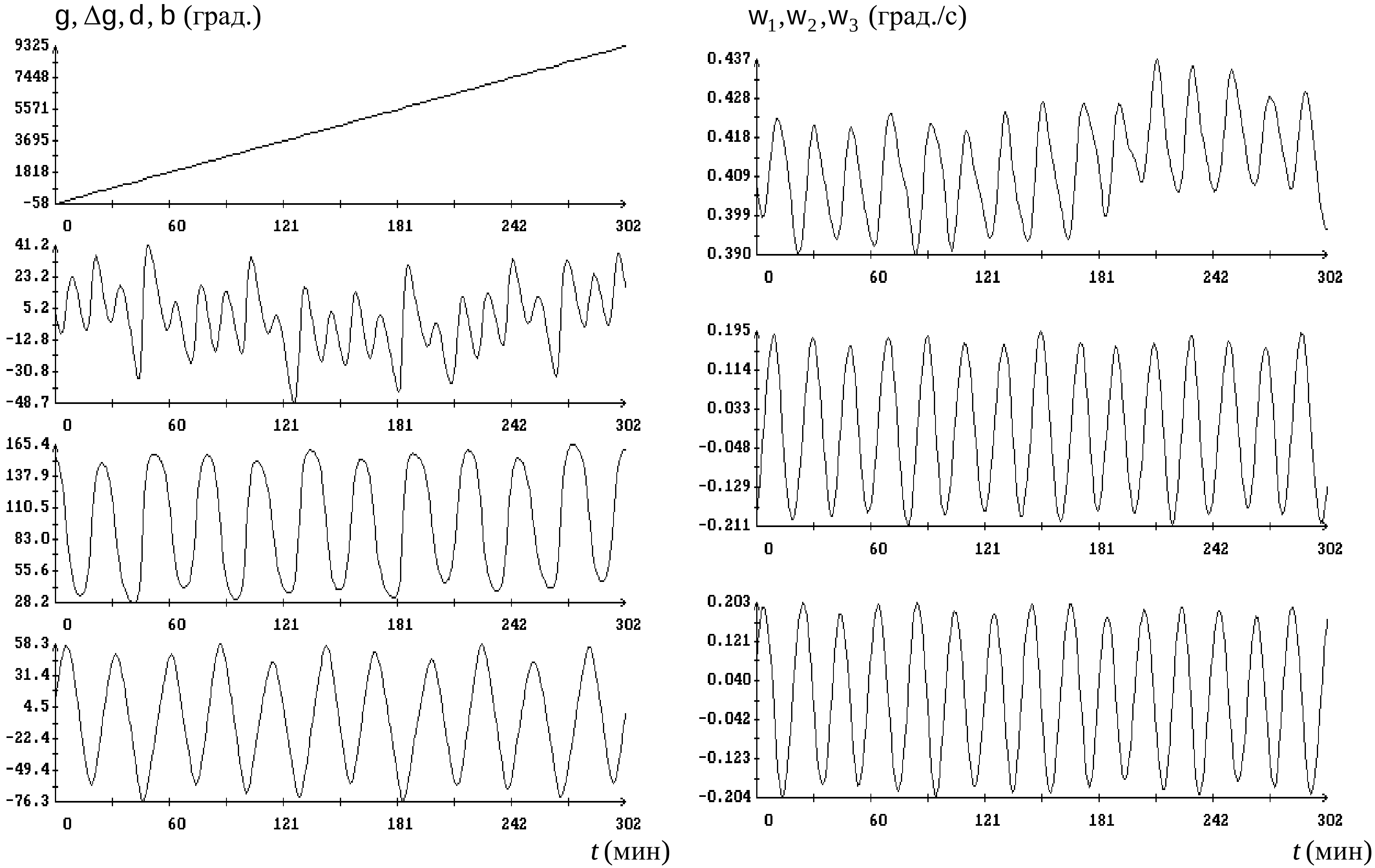

Рис. 2а. Движение Фотона М-3, реконструированное методом наименьших квадратов. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 09:09:05 ДМВ 22.09.2007.

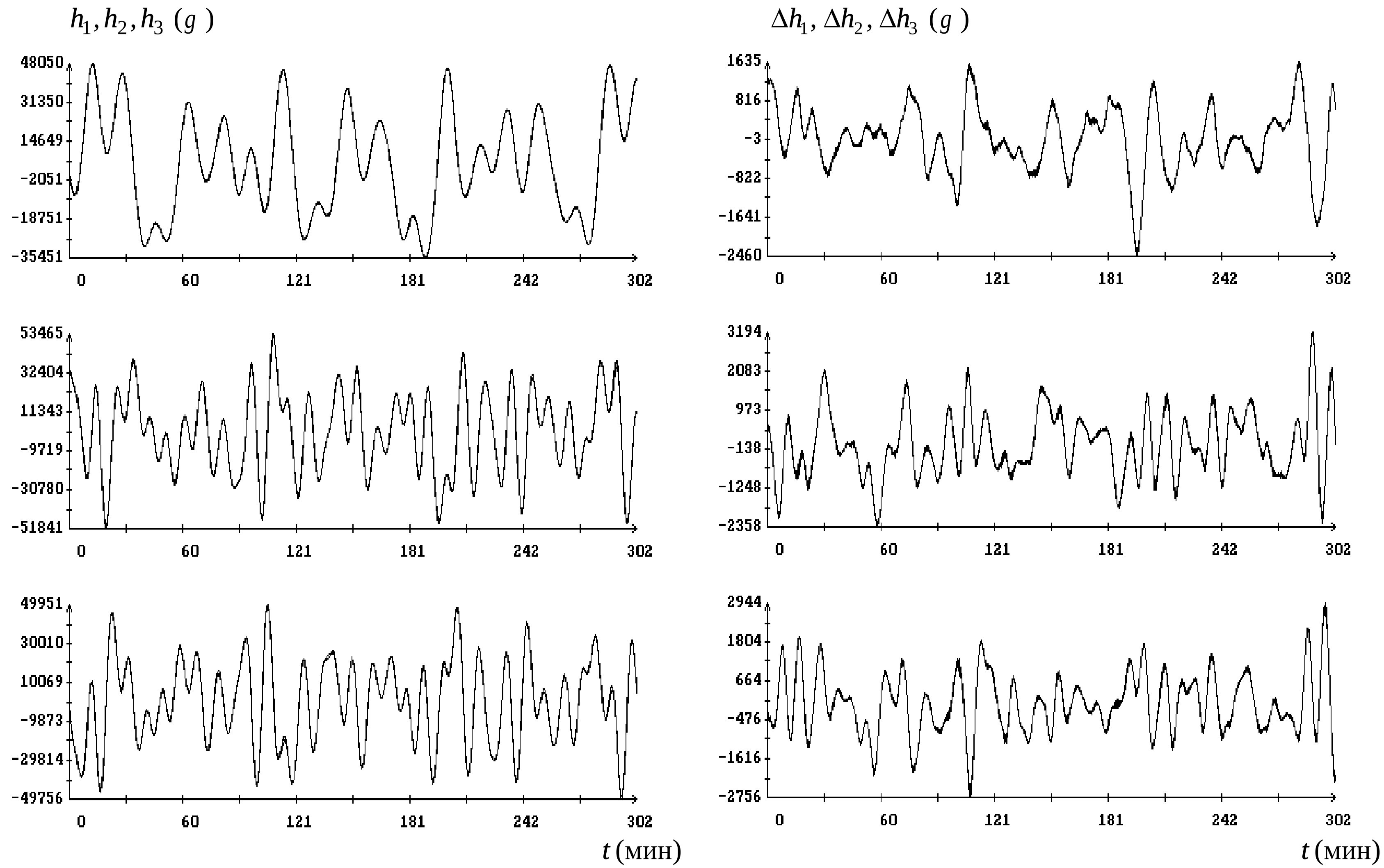

Рис. 2б. Аппроксимация магнитных измерений, полученная методом наименьших квадратов, $s = 831g$, $N = 4000$.
Момент $t = 0$ на графиках соответствует 09:09:05 ДМВ 22.09.2007.

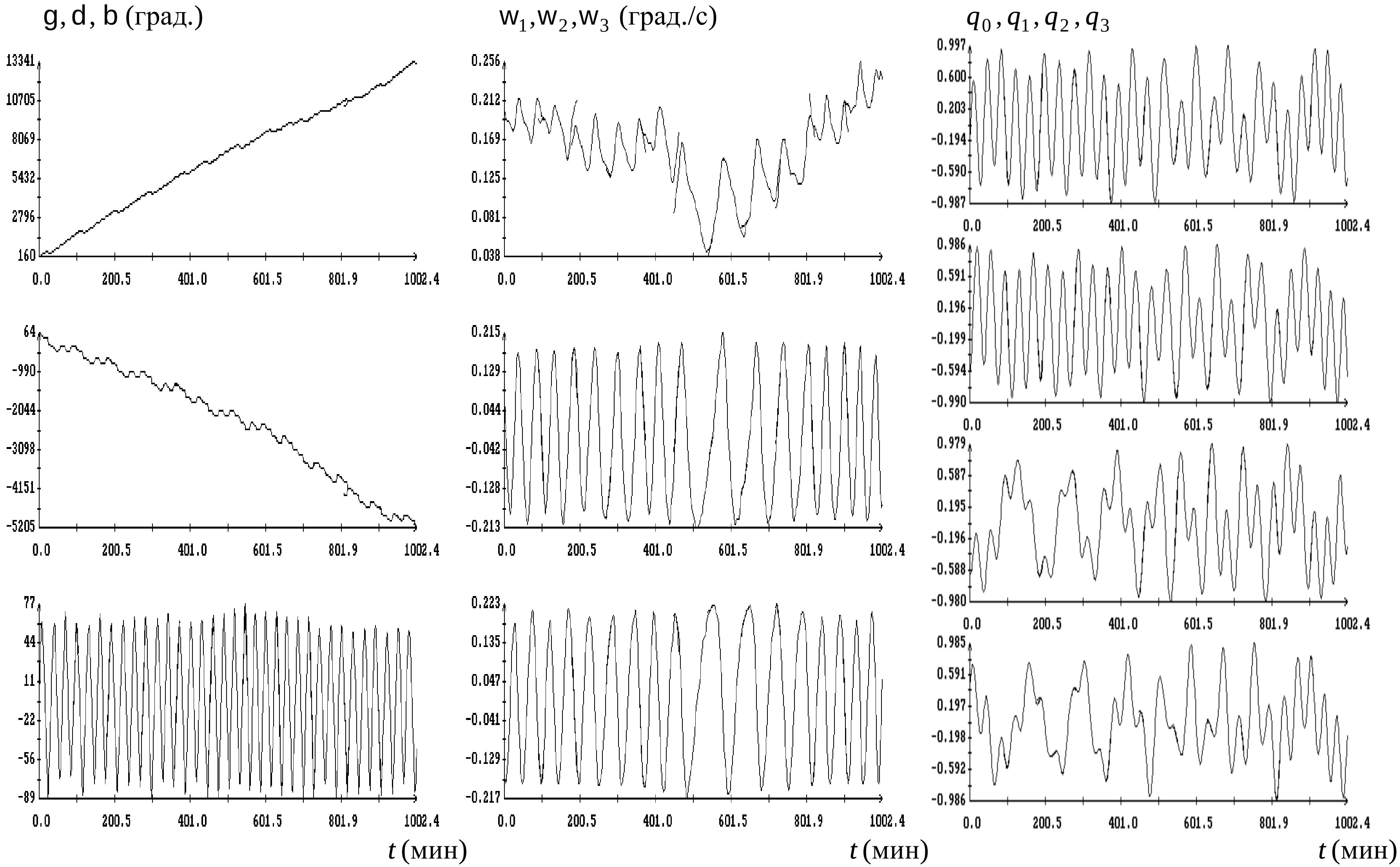

Рис. 3. Результаты реконструкции движения на 11 смежных промежутках времени.

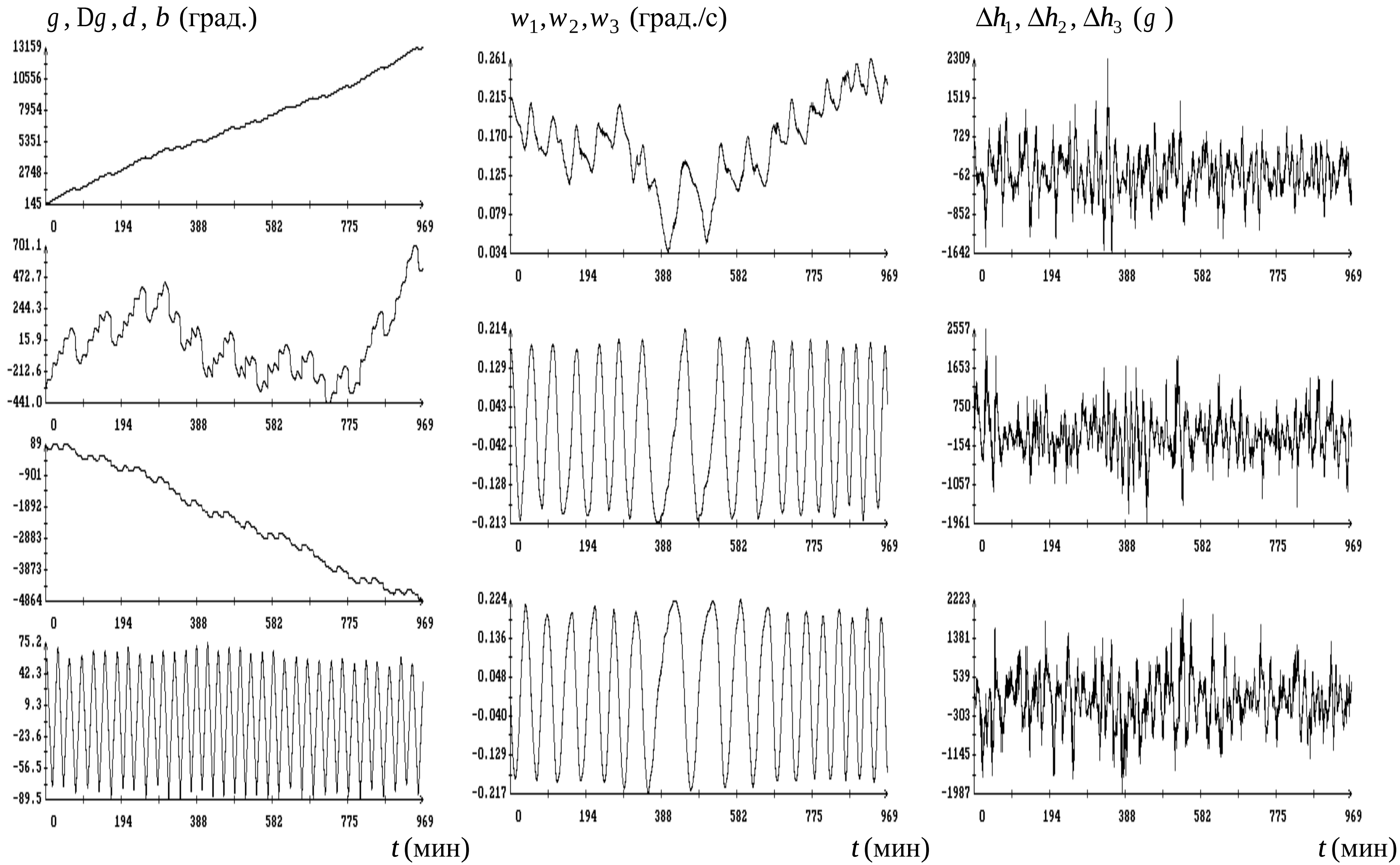

Рис. 4а. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с, $s_0 = 481g$. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

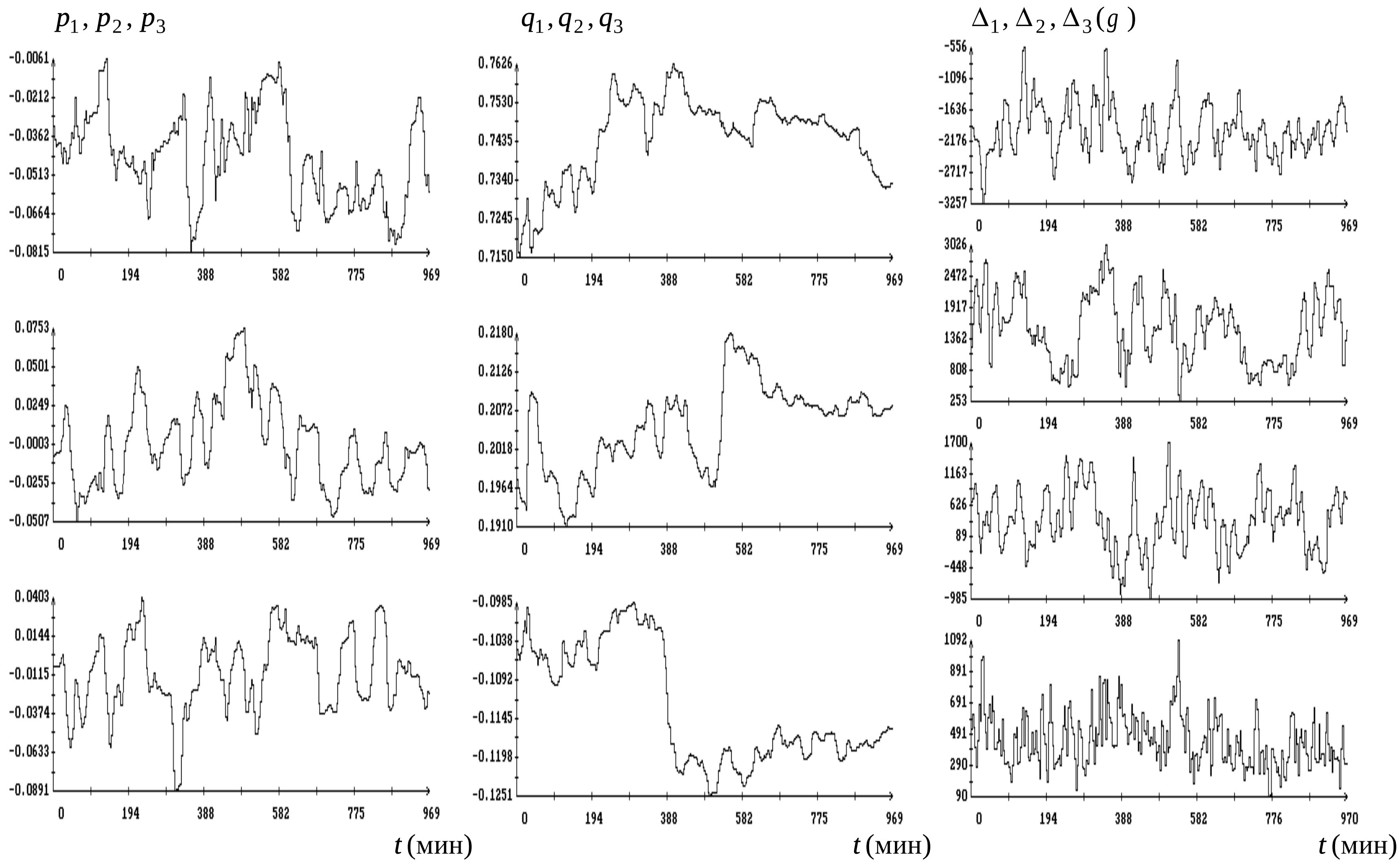

Рис. 4б. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

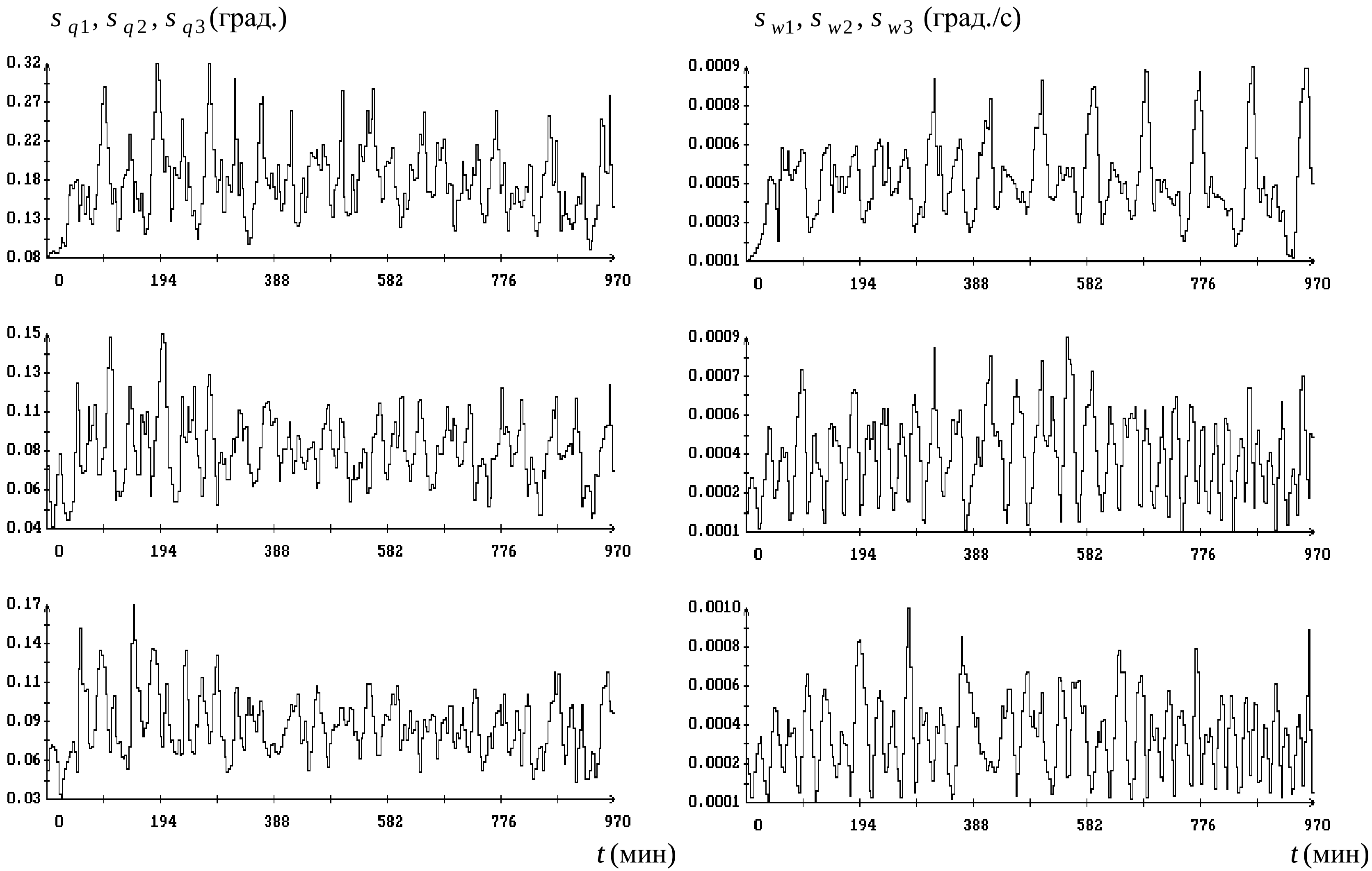

Рис. 4в. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

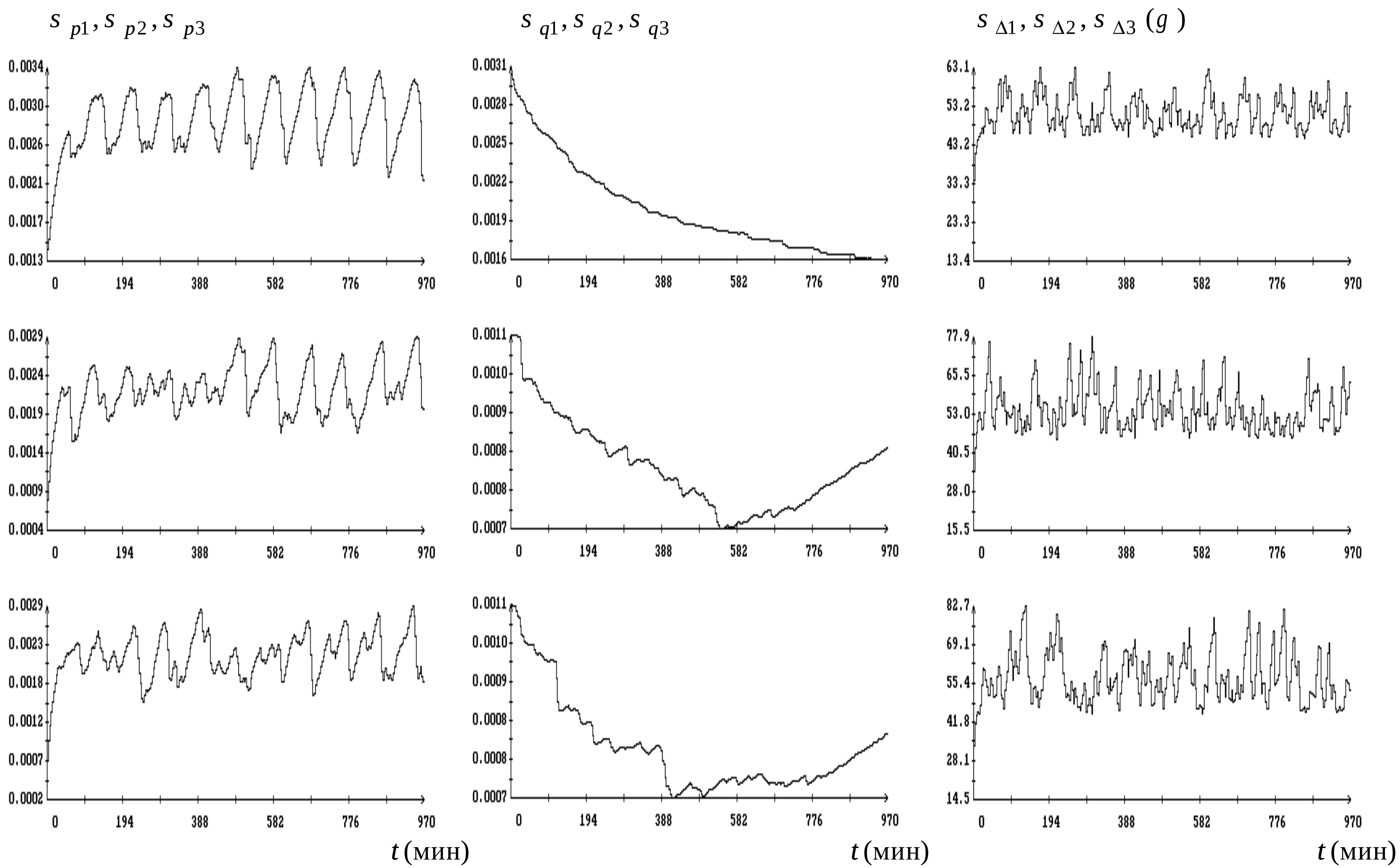

Рис. 4г. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

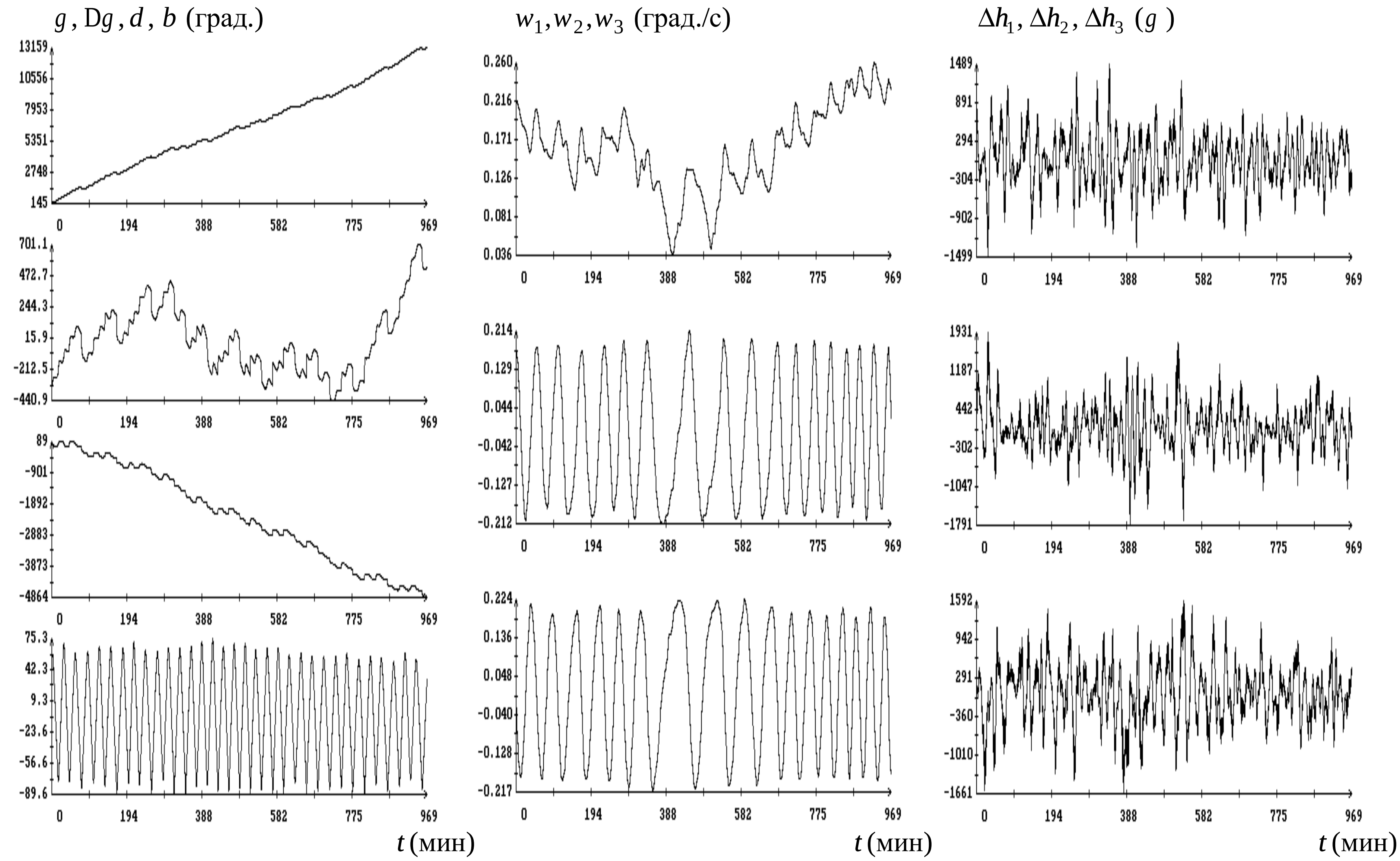

Рис. 5а. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

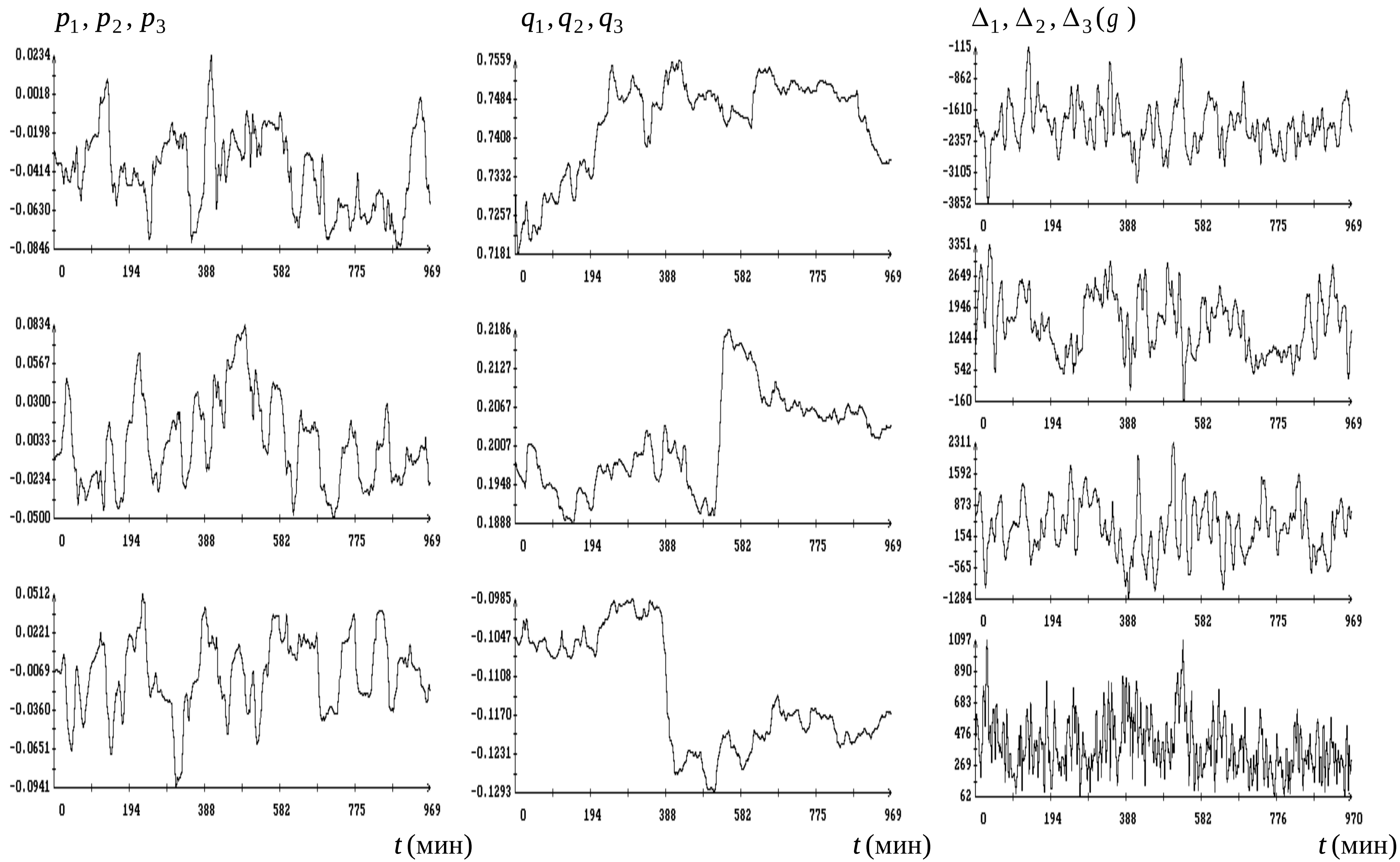

Рис. 5б. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

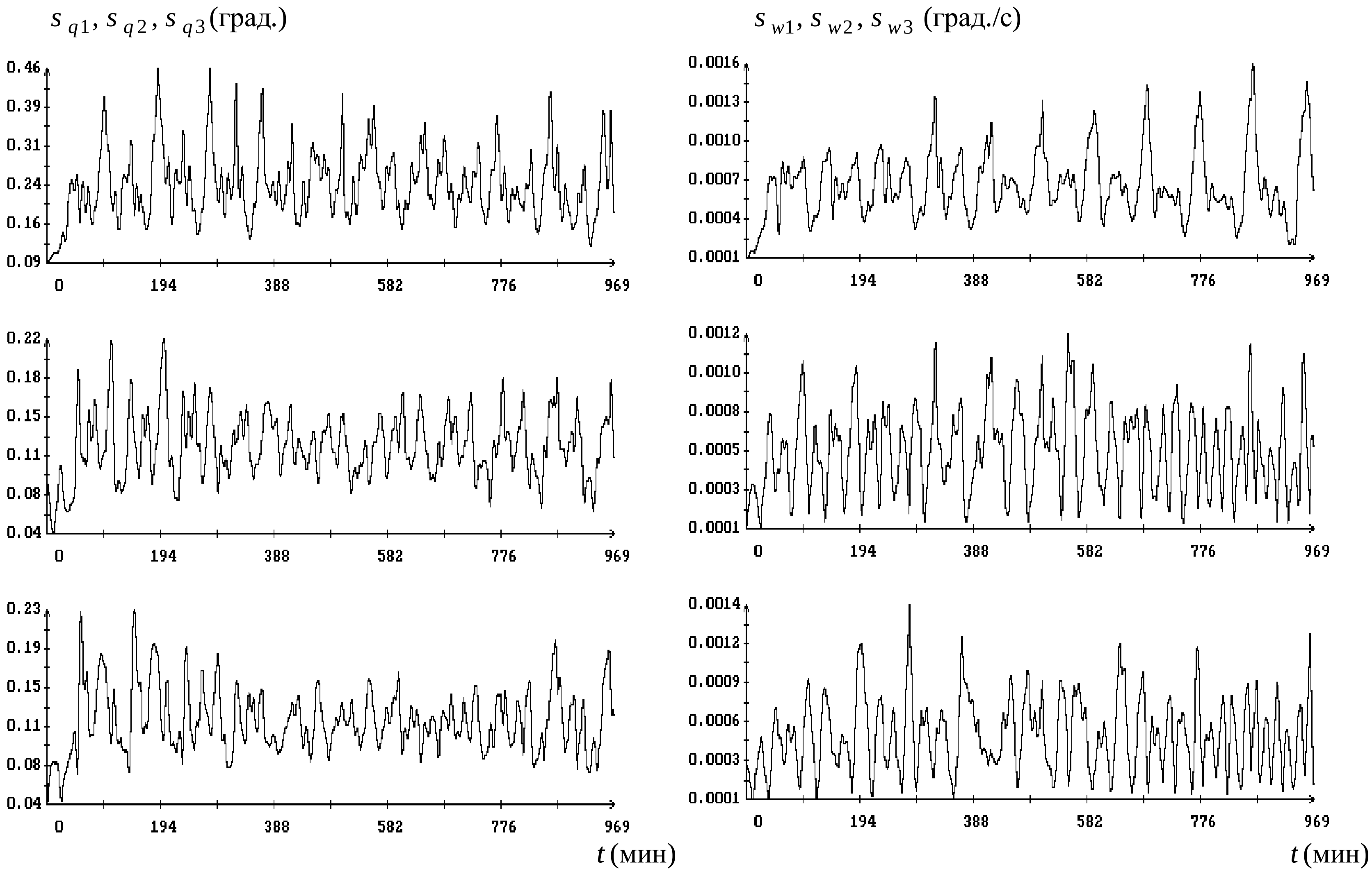

Рис. 5в. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

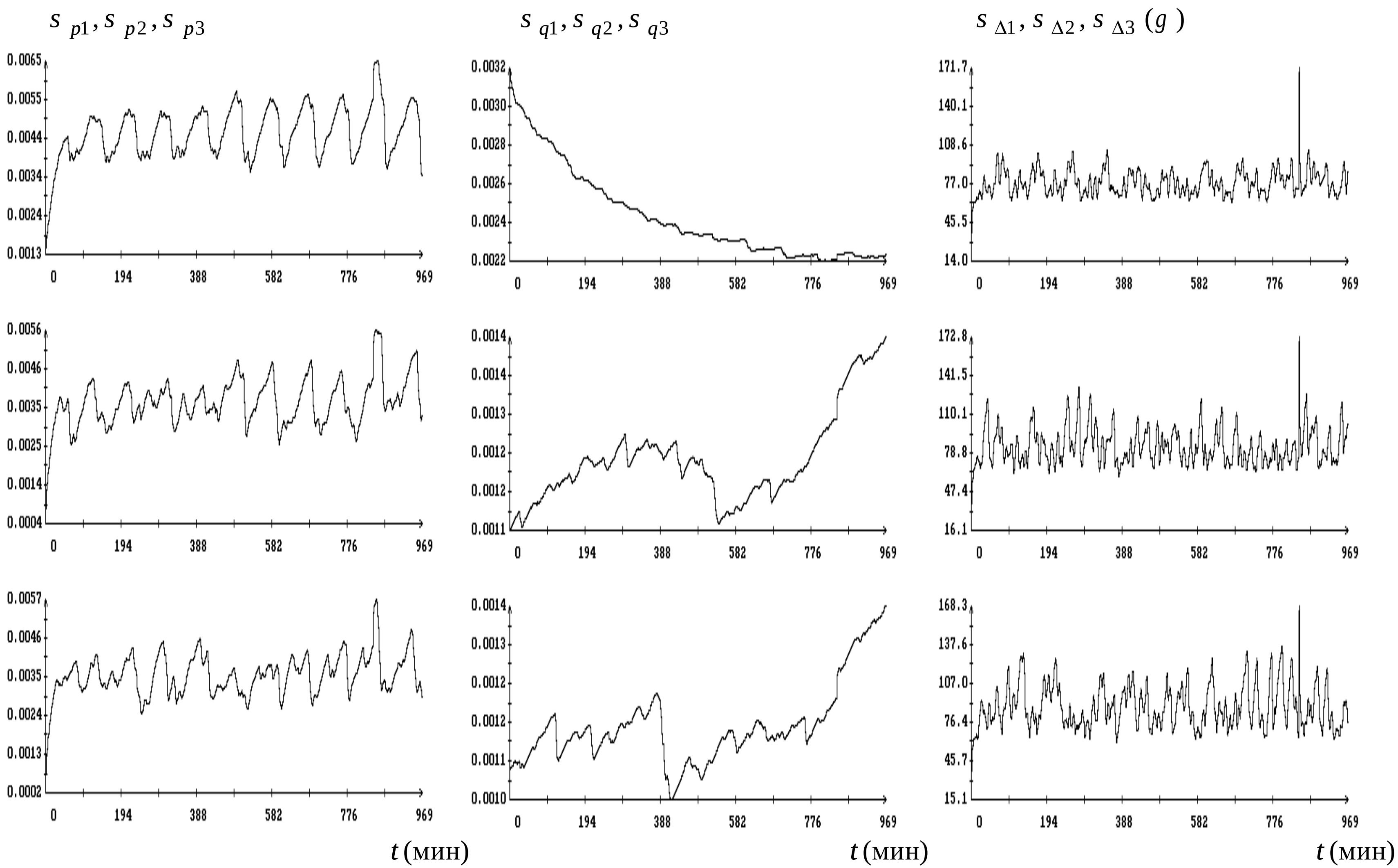

Рис. 5г. Реконструкция движения с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

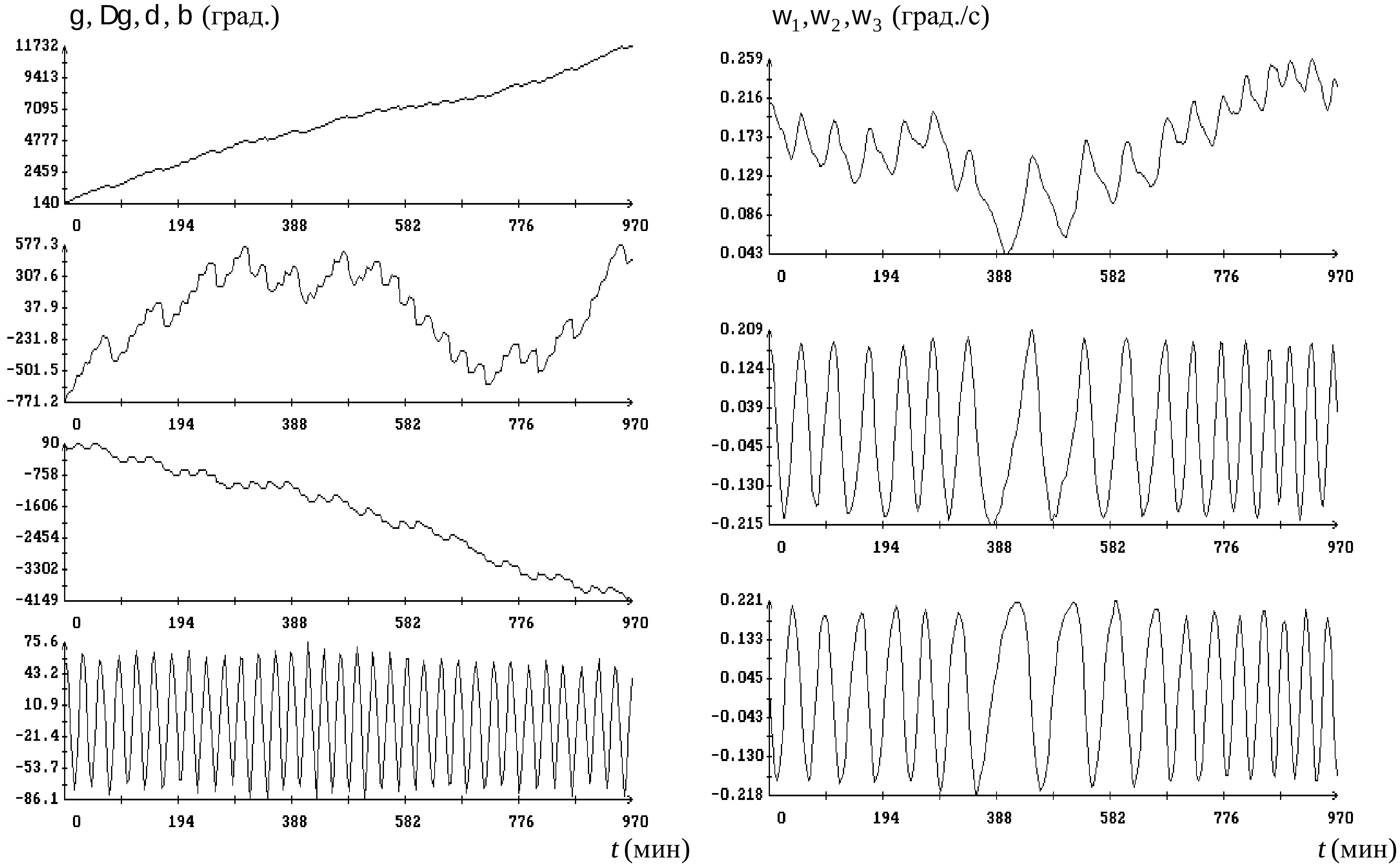

Рис. 6а. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

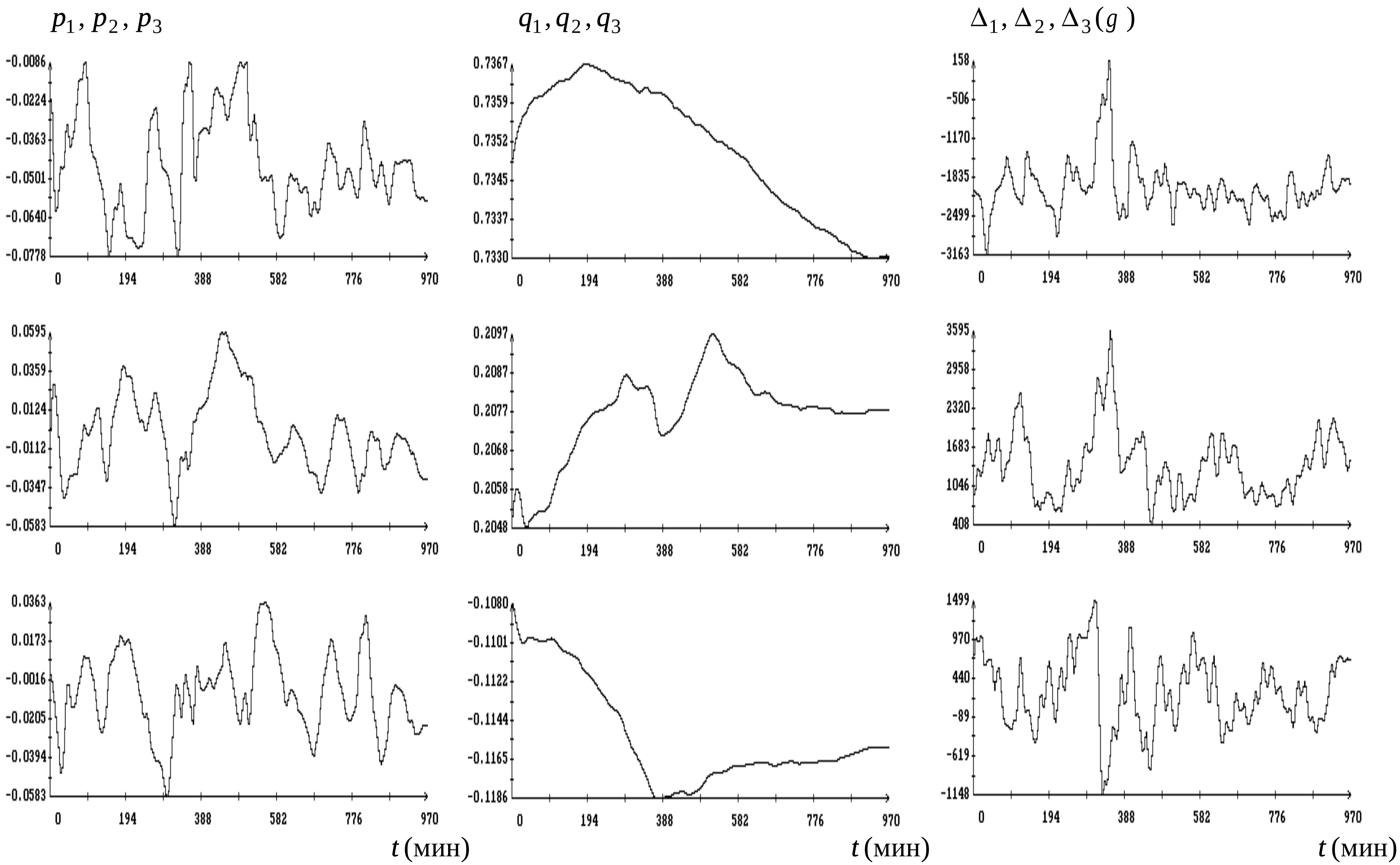

Рис. 6б. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

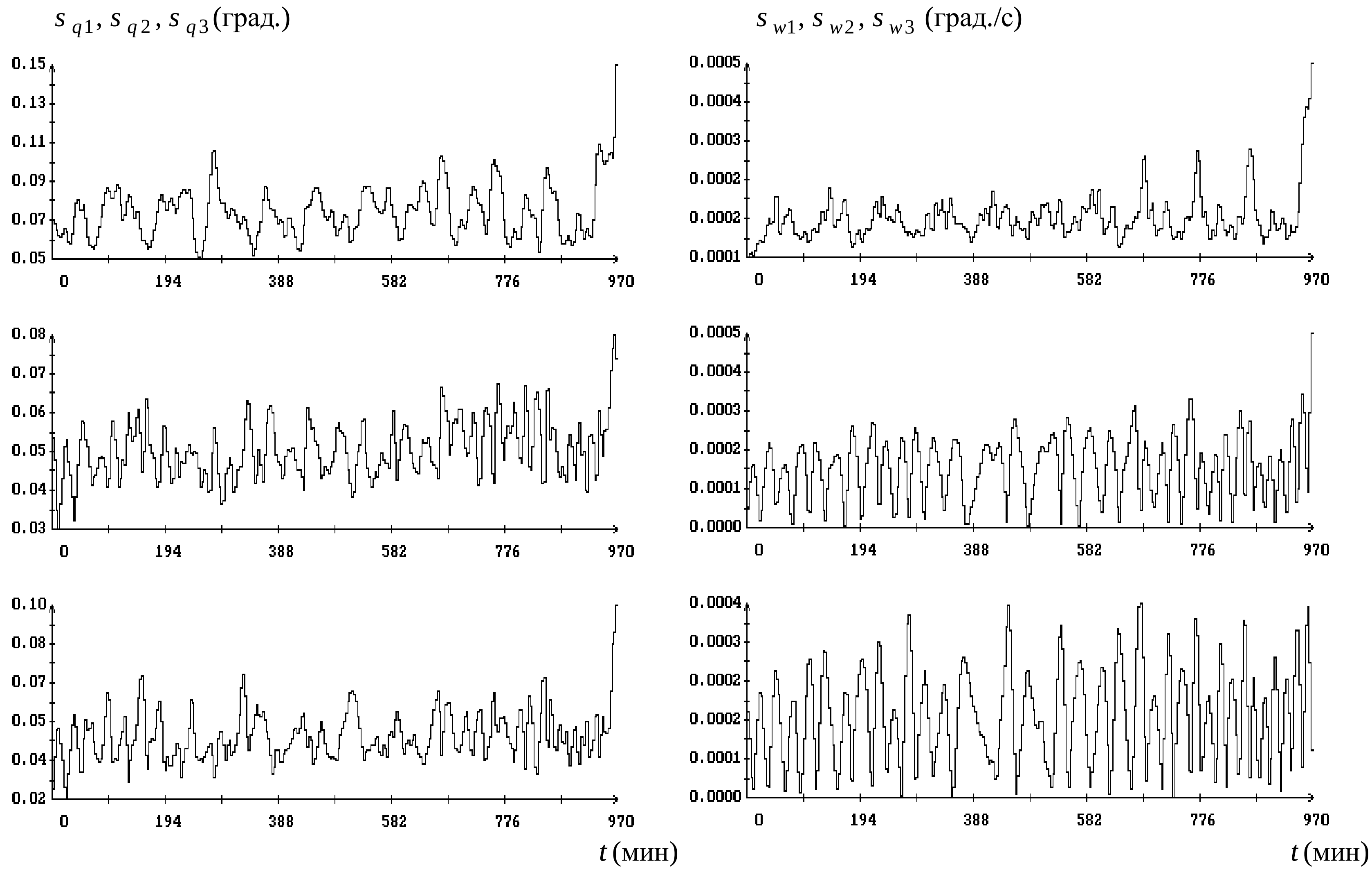

Рис. 6в. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

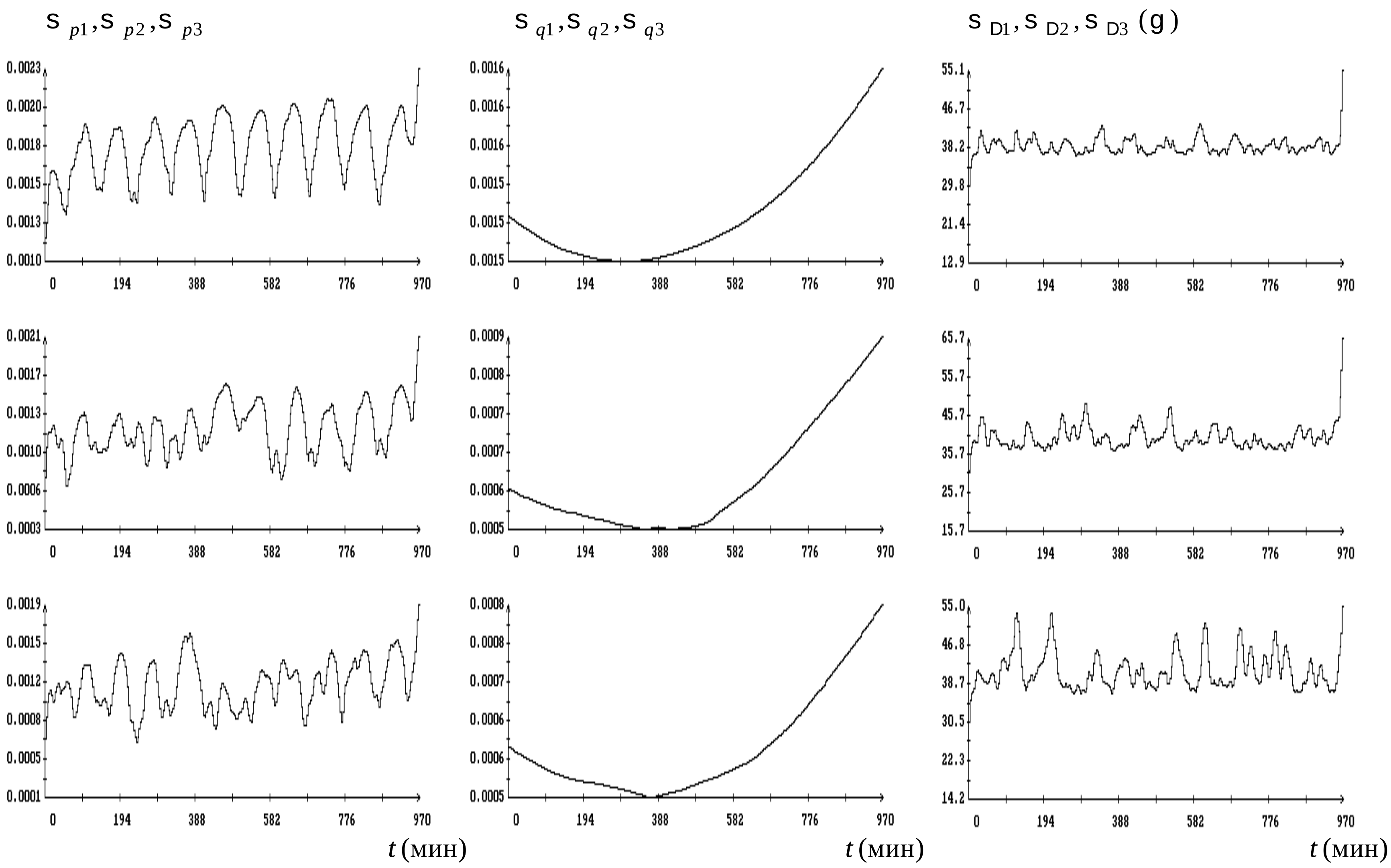

Рис. 6г. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Шаг по времени 200с. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

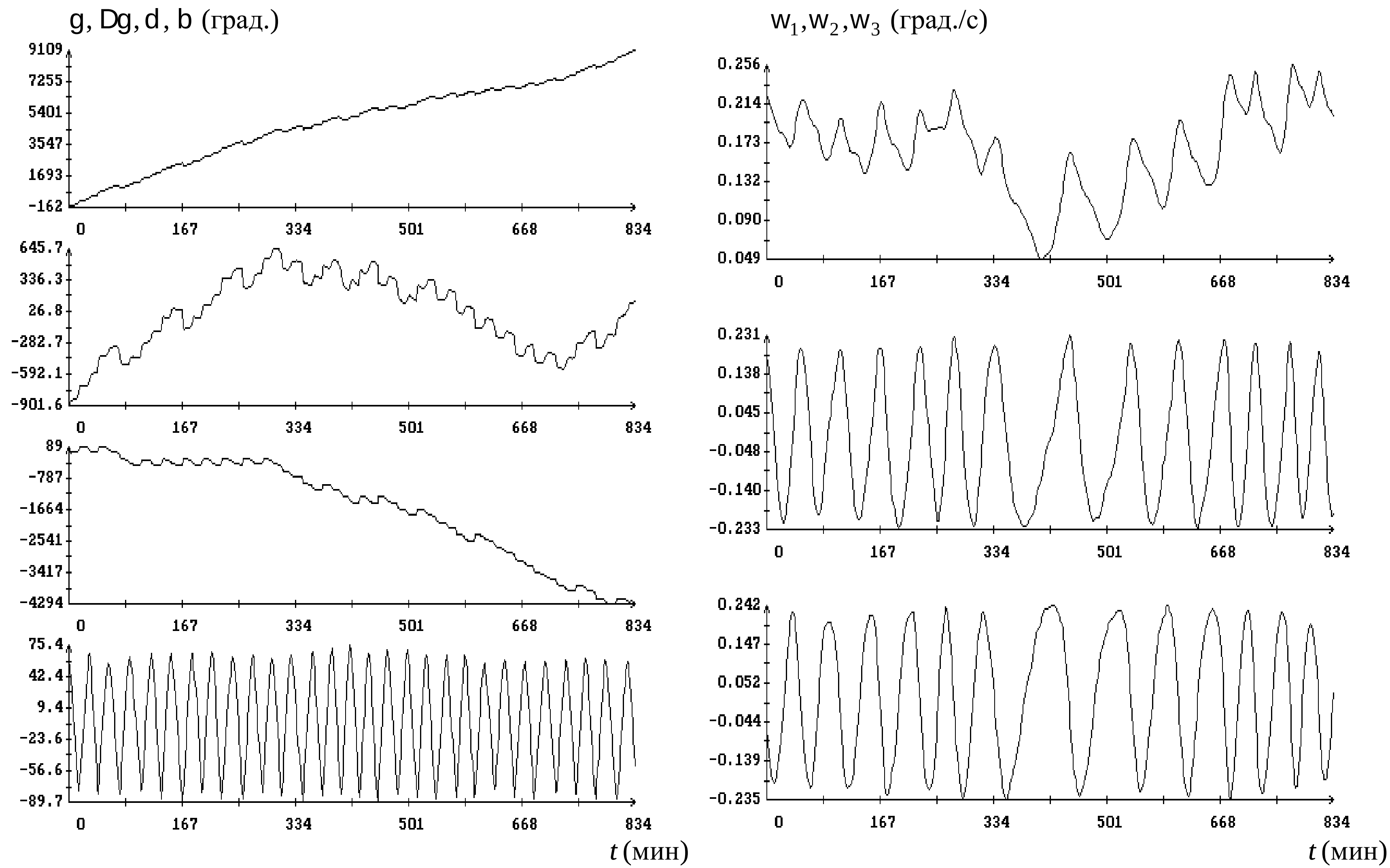

Рис. 7а. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

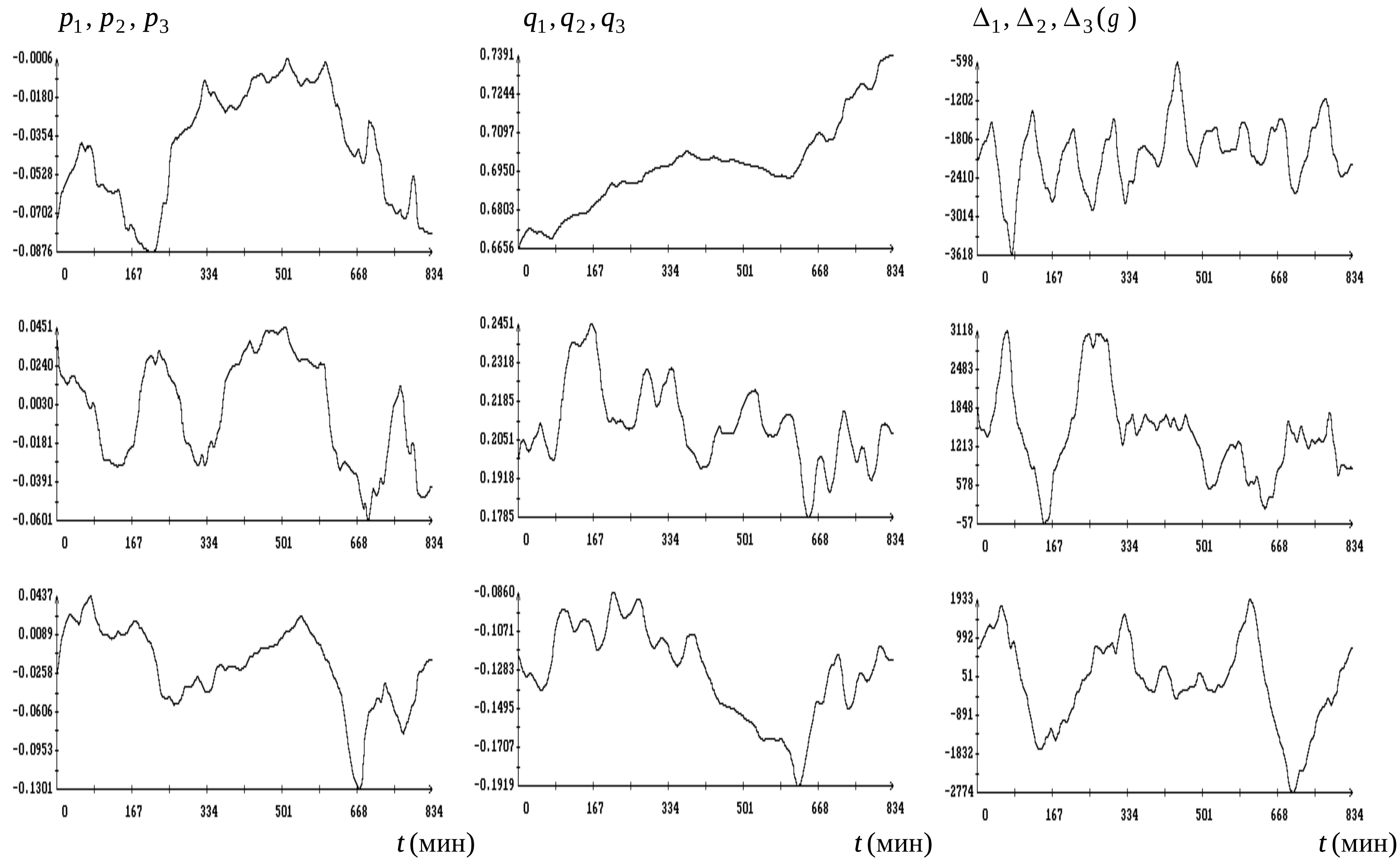

Рис. 7б. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

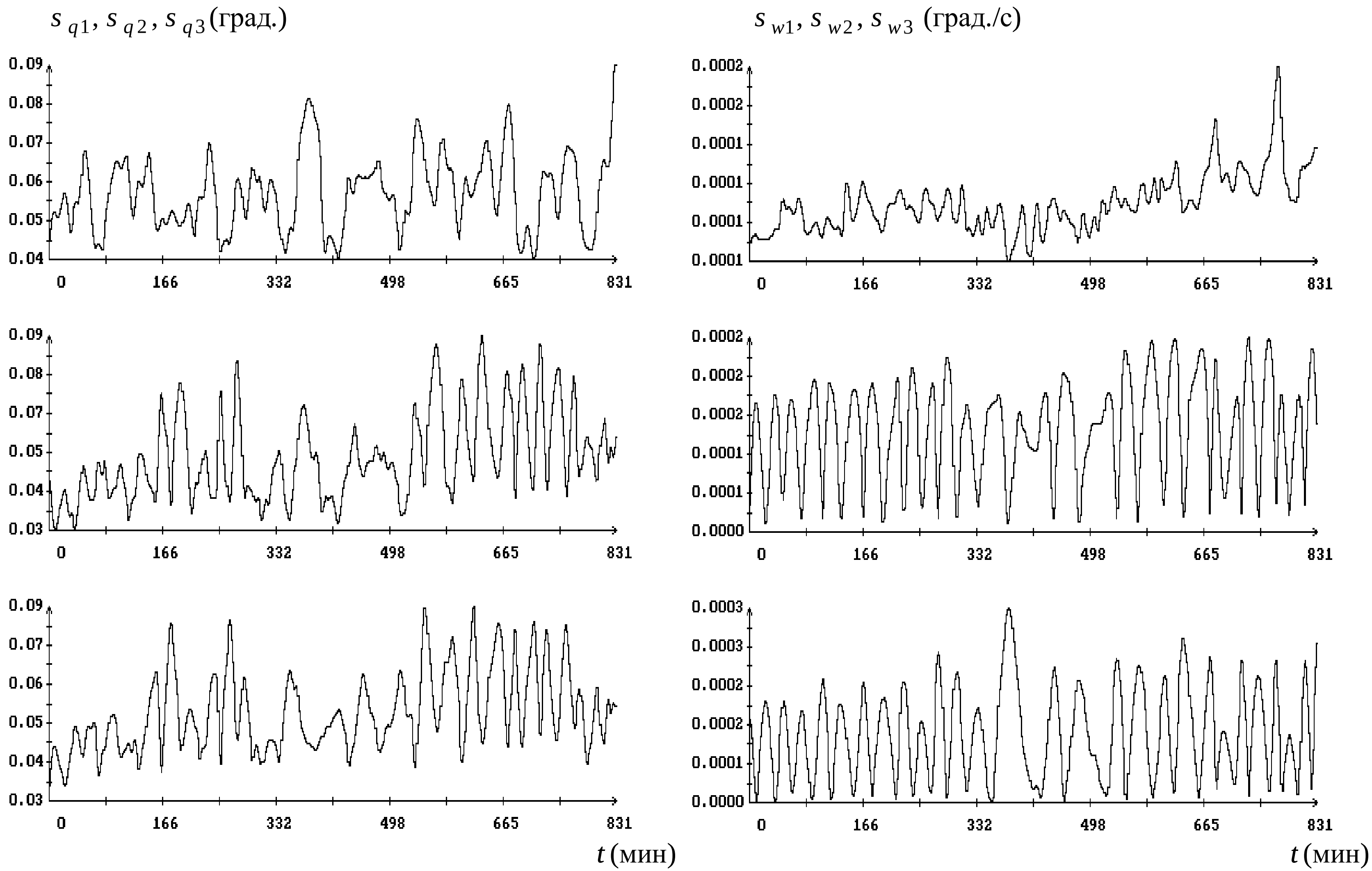

Рис. 7в. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.

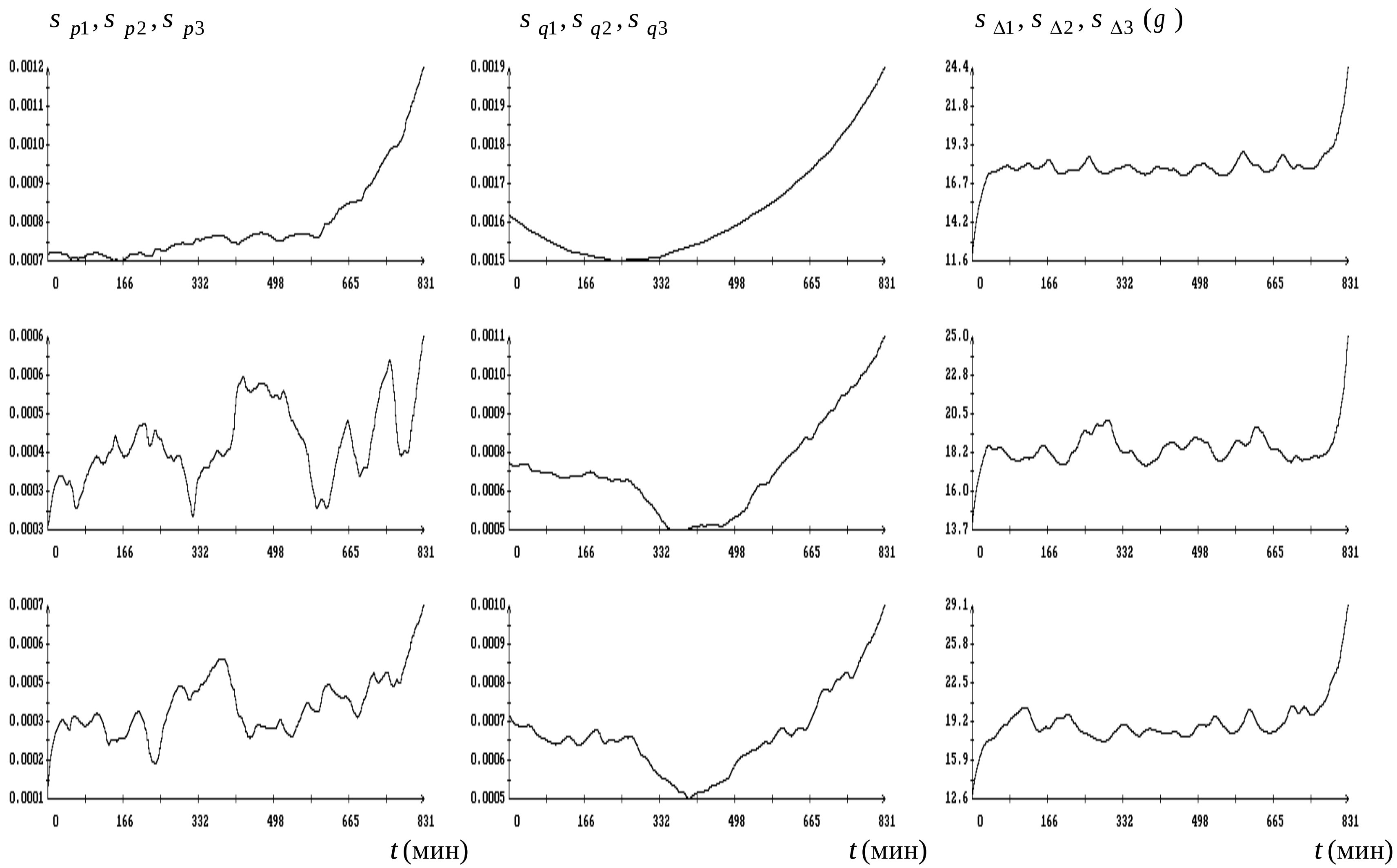

Рис. 7г. Сглаживание с помощью фильтра Калмана. Автоматический выбор шага по времени. Момент $t = 0$ на графиках соответствует 00:57:00 ДМВ 18.09.2007.