



Елизарова Т.Г., Широков И.А.

Ламинарный и
турбулентный режимы
распада вихря Тейлора–
Грина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Елизарова Т.Г., Широков И.А. Ламинарный и турбулентный режимы распада вихря Тейлора–Грина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 63. 16 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-63>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Ламинарный и турбулентный режимы
распада вихря Тейлора–Грина**

Москва — 2013

Т.Г. Елизарова, И.А. Широков

**Ламинарный и турбулентный режимы
распада вихря Тейлора–Грина**

Аннотация

Численное моделирование классической задачи об эволюции вихря Тейлора–Грина выполнено на основе квазигазодинамического алгоритма расчета течений вязкого сжимаемого газа. Показано, что данный алгоритм позволяет единообразно моделировать турбулентный (при большом числе Рейнольдса) и ламинарный (при малом числе Рейнольдса) сценарии эволюции вихревого течения. Кроме того, алгоритм требует существенно меньшее число расчетных точек по пространству для достижения такой же точности, как и методы прямого численного моделирования повышенных порядков аппроксимации.

Ключевые слова: вихрь Тейлора–Грина, квазигазодинамические (КГД) уравнения, моделирование турбулентных течений

T. G. Elizarova, I. A. Shirokov

Laminar and turbulent regimes of the Taylor-Green vortex decay

Abstract

The numerical simulation of the classical Taylor–Green flow problem is performed by means of the quasi-gasdynamic (QGD) algorithm for the viscous compressible gas flow simulation. It is shown that the QGD algorithm gives opportunity to model turbulent (at large Reynolds number) and laminar (at small Reynolds number) flows universally. Besides, the QGD algorithm demands smaller number of the spatial grid than the standard direct numerical simulation methods of high approximation order.

Keywords: Taylor–Green vortex, quasi-gas dynamic (QGD) system, turbulent flow modeling

Оглавление

Введение.....	- 3 -
Постановка задачи.....	- 4 -
Математическая модель и метод численного решения.....	- 5 -
Результаты расчетов для $Re=1600$	- 7 -
Результаты расчетов для $Re=280$	- 10 -
Результаты расчетов для $Re=100$	- 11 -
Сравнение результатов для разных Re и энергетический спектр.....	- 12 -
Выводы.....	- 14 -
Литература.....	- 15 -

Введение

Эволюция вихревого течения, заданного в начальный момент в виде вихря Тейлора–Грина (Taylor–Green vortex, 1937), представляет собой наглядный пример распада первоначального одиночного стационарного вихря с последующим образованием каскада все более и более мелких вихревых образований, которые постепенно затухают за счет присущих течению диссипативных процессов. Данная задача хорошо изучена теоретически как для малых чисел Рейнольдса, при которых течение остается ламинарным, так и для больших чисел Рейнольдса, при которых начальное ламинарное течение трансформируется в турбулентный вихревой каскад. Поэтому задача об эволюции вихря Тейлора–Грина в ряде работ используется в качестве теста для проверки адекватности численных алгоритмов моделирования турбулентных течений, см., например, [1–5]. Детальная визуализация численных результатов, полученных для таких трехмерных нестационарных процессов, обеспечивает их понимание и адекватную трактовку.

Предлагаемая работа посвящена изучению возможностей квазигазодинамической (КГД) системы уравнений для расчета ламинарно-турбулентного перехода на примере указанного течения. Способы построения КГД системы уравнений и примеры ее использования изложены, например, в монографиях [6–8] и последующих публикациях. Некоторые результаты численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода в рамках КГД уравнений представлены в работах [9–13]. Влияние КГД-диссипации на спектральные характеристики турбулентного течения, формирующегося при распаде трехмерного вихревого течения, приведены в [14]. Здесь же детально изложен алгоритм построения пространственного спектра кинетической энергии и прояснены вопросы точности численного моделирования этой задачи при сгущении пространственной сетки и варьировании параметра релаксации.

В данной работе на основе КГД-алгоритма решается задача о распаде вихря Тейлора–Грина в азоте при температуре нормальных условий. Варьирование числа Рейнольдса обеспечивается рассмотрением течений при разных плотностях. Результаты численного моделирования сопоставляются с известными результатами, полученными для ламинарных режимов распада ($Re = 100$ и 280) и для турбулентного режима ($Re = 1600$). Визуальный анализ численных результатов наглядно показывает процесс распада начального вихревого течения, сопровождающийся его усложнением с образованием разномасштабных вихревых структур и их нелинейным взаимодействием. Дальнейшая эволюция приводит к затуханию этих вихрей. При этом наглядно видны отличия вихревых структур для ламинарного и турбулентного режимов, а также сам момент формирования развитого турбулентного течения для $Re = 1600$. Проведенные ниже расчеты выполнены на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100 [15].

Постановка задачи

В соответствии с [3] рассмотрим пространственную область кубической формы: $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ в декартовых координатах. В нашем случае $\pi L = 0.016$ м. Область заполнена газом (азотом). Состояние газа описывается следующими параметрами: $\rho(x, y, z, t)$ – плотностью, $u_x(x, y, z, t)$, $u_y(x, y, z, t)$, $u_z(x, y, z, t)$ – макроскопической скоростью газа, $p(x, y, z, t)$ – давлением. Совокупность компонент вектора скорости будем также обозначать u^i (аналогично для прочих векторов и тензоров).

Используем традиционные начальные условия вихря Тейлора-Грина [1]:

$$\begin{aligned} u_x &= U_0 \sin(x/L) \cos(y/L) \cos(z/L), \quad u_y = -U_0 \cos(x/L) \sin(y/L) \cos(z/L), \quad u_z = 0, \\ p &= p_0 + (\rho_0 U_0^2 / 16) (\cos(2x/L) + \cos(2y/L)) (\cos(2z/L) + 2). \end{aligned} \quad (1)$$

Начальное распределение температуры является однородным по пространству: $T = T_0 = 273$ К. Начальная плотность определяется уравнением состояния идеального газа:

$$\rho = p / (RT). \quad (2)$$

Газовая постоянная азота $R = 297$ Дж/(кг·К). Отметим, что постоянные параметры p_0 , ρ_0 , T_0 также связаны уравнением состояния $p_0 = \rho_0 R T_0$. Введем начальное число Маха как

$$Ma = U_0 / c_{s0} = 0.1, \quad (3)$$

где скорость звука в азоте при начальных условиях $c_{s0} = \sqrt{\gamma R T_0} = 337$ м/с, показатель адиабаты $\gamma = 7/5$ [16]. В рассматриваемой задаче число Маха невелико, и течение можно считать слабо сжимаемым [3].

Введем число Рейнольдса

$$Re = \rho_0 U_0 L / \mu_0, \quad (4)$$

где $\mu_0 = 1.67 \cdot 10^{-5}$ кг/(м·с) – вязкость азота при температуре $T_0 = 273$ К [17]. В данной работе рассмотрены варианты $Re = 100$, $Re = 280$, $Re = 1600$, которые сопоставляются с данными расчетов, приведенными, соответственно, в [1], [4] и [3]. В [2] изложены результаты решения аналогичной задачи затухания изотропной турбулентности для бесконечного числа Рейнольдса, полученные с помощью пяти разностных алгоритмов высокого порядка точности в приближении крупных вихрей (LES), а именно Jameson Multi-stage Scheme, Roe-TVD-MUSCL scheme, ENO.

Порядок задания начальных параметров следующий. Определяем характерную скорость U_0 через (3), плотность ρ_0 через (4), давление

$p_0 = \rho_0 RT_0$, затем задаем начальное распределение скорости и давления (1) и начальное распределение плотности через (2).

Граничные условия являются периодическими, что физически означает неограниченную область, заполненную системой идентичных вихрей.

Математическая модель и метод численного решения

Течение газа будем описывать макроскопической системой квазигазодинамических (КГД) уравнений [8]. Эта система определяет эволюцию во времени плотности, скорости и давления газа, зависящих от эйлеровых координат и от времени. Температура определяется из уравнения состояния идеального газа (2). Полная энергия единицы объема E и полная удельная энтальпия H вычисляются по формулам: $E = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$, $H = (E + p) / \rho$, γ – показатель адиабаты.

Выпишем КГД систему в декартовых координатах [8, с. 94]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla_i j_m^i = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho u^j + \nabla_i (j_m^i u^j) + \nabla^j p = \nabla_i \Pi^{ij}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E + \nabla_i (j_m^i H) + \nabla_i q^i = \nabla_i (\Pi^{ij} u_j). \quad (7)$$

Вектор плотности потока массы j_m^i определяется следующим образом [8, с. 97]:

$$j_m^i = \rho(u^i - w^i), \quad w^i = \frac{\tau}{\rho} (\nabla_j \rho u^i u^j + \nabla^i p). \quad (8)$$

Выражения для тензора вязких напряжений Π^{ij} и теплового потока q^i определяются так [8, с. 83, 96].

$$\Pi^{ij} = \Pi_{NS}^{ij} + \tau u_i \rho (u_k \nabla^k u_j + \frac{1}{\rho} \nabla_j p) + \tau \delta^{ij} (u_k \nabla^k p + \gamma p \nabla^k u_k), \quad (9)$$

$$\Pi_{NS}^{ij} = \mu (\nabla^i u^j + \nabla^j u^i - \frac{2}{3} \nabla^k u_k) + \zeta \delta^{ij} \nabla^k u_k, \quad (10)$$

$$q^i = q_{NS}^i - \tau u_i \rho (u_j \nabla^j \varepsilon + p u_j \nabla^j \frac{1}{\rho}), \quad q_{NS}^i = -\kappa \nabla^i T. \quad (11)$$

Здесь $\delta^{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta^{ij} = 0$ при $i \neq j$ – символ Кронекера, $\varepsilon = p / (\rho(\gamma - 1))$ – внутренняя энергия на единицу массы газа. Коэффициент теплопроводности выражается соотношением [8, с. 71]

$$\kappa = \frac{\mu \gamma R}{Pr(\gamma - 1)}, \quad (12)$$

где Pr – число Прандтля. В рассматриваемой задаче $Pr = 0.71$ [3].

Коэффициент динамической вязкости μ в газе, входящий в выражения для тензора вязких напряжений Π^j и теплового потока q^i (10)–(13), будем определять через температурную зависимость [16]:

$$\mu = \mu_0 (T / T_0)^\omega, \quad (13)$$

где ω – показатель, описывающий межмолекулярное взаимодействие в газе. В настоящей работе $\omega = 0.74$ [16]. Коэффициент второй (объемной) вязкости в рассматриваемой задаче в соответствии с [3] предполагается равным нулю: $\zeta = 0$.

Определим значение релаксационного параметра τ , входящего в (8)–(11):

$$\tau = \alpha h / c_s, \quad (14)$$

где $c_s = \sqrt{\gamma RT}$ – локальная скорость звука, h – величина шага пространственной сетки. Слагаемые с коэффициентом τ представляют собой подсеточную диссипацию, которая сглаживает пульсации газодинамических величин на масштабах порядка шага сетки. Коэффициент α можно рассматривать как настроечный параметр, определяющий уровень подсеточной диссипации.

Для численного решения начально-краевой задачи (5)–(14) с начальными условиями (1) методом конечных разностей введем в области $-\pi L \leq x, y, z \leq \pi L$ равномерную по пространству и по времени сетку $\Omega_{xyzt} = \omega_x \times \omega_y \times \omega_z \times \omega_t$, $\omega_x = \{x_i, i = \overline{0, N-1}, x_i = hi\}$, $\omega_y = \{y_j, j = \overline{0, N-1}, y_j = hj\}$, $\omega_z = \{z_k, k = \overline{0, N-1}, z_k = hk\}$, $\omega_t = \{t_p, p = \overline{0, N_t}, t_p = h_t p\}$. Отметим, что число шагов по времени N_t заранее не определено. Для всех газодинамических величин, зависящих от пространственных координат, введем сеточные функции: для плотности $\rho_{ijk} = \rho(x_i, y_j, z_k, t_p)$, аналогично для других величин. Размерности сеточных функций такие же, как и размерности соответствующих физических величин.

Используем явную по времени разностную схему с аппроксимацией всех пространственных производных центральными разностями со вторым порядком, а производных по времени с первым порядком. Алгоритм построения разностной схемы такой же, как в работах [11–14]. Расчет по явной схеме соответствует эволюции газодинамического течения по времени.

Длину свободного пробега молекул газа для начальных условий определим так: $\lambda_0 = \mu_0 / (\rho \sqrt{2\pi RT_0} \cdot \Omega / 4)$, где $\Omega = 30 / ((7 - 2\omega)(5 - 2\omega))$ [16]. Используемая математическая модель требует выполнения условия $\lambda_0 \ll h$. Это условие справедливо для всех расчетов настоящей работы.

Шаг по времени определим из условия Куранта [8, с. 140]: $h_t = \beta h / c_{s0}$, где $\beta = 0.1$ – число Куранта. Отметим, что величина h входит в выражение релаксационного параметра τ (14).

Как и в работах [11–14], расчеты проводятся в размерных переменных. Для сравнения с данными литературы авторы приводят результаты в безразмерном виде. При этом в качестве параметров используются L , U_0 и ρ_0 . Таким образом, безразмерное значение времени $t_{dl} = t/t_0$, где $t_0 = L/U_0 \approx 1.512 \cdot 10^{-4}$ с, а безразмерное значение удельной кинетической энергии $E_{dl} = E/(\rho_0 U_0^2)$.

Расчет по явной схеме проводится на многопроцессорном вычислительном комплексе К-100, при этом авторы используют технологию распараллеливания вычислений, основанную на декомпозиции расчетной области плоскостями $x = const$. Такая технология использует стандарт передачи сообщений MPI и с успехом применялась в работах [11–14]. Отметим, что программный комплекс обладает полной переносимостью между платформами, поддерживающими язык Си и стандарт MPI.

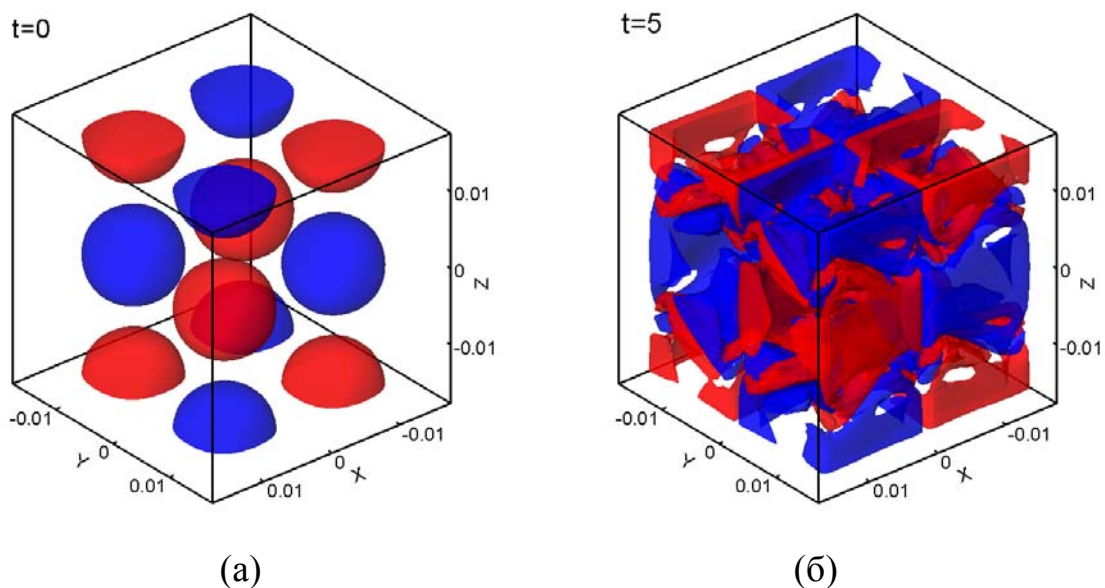
Результаты расчетов для $Re=1600$

На рис. 1 представлены поверхности уровня z -компоненты завихренности поля скорости, т. е. z -компоненты ротора скорости:

$$V_z = \partial u_y / \partial x - \partial u_x / \partial y$$

Отметим, что величина V_z вычисляется в безразмерном виде. Поверхности уровня приведены для различных моментов безразмерного времени от $t = 0$ до $t = 20$. Красный цвет соответствует $V_z = 0.7$, синий $V_z = -0.7$.

Параметры расчета, представленного на рис. 1, следующие: размер сетки 65^3 (т. е. $N = 65$), шаг сетки $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$.



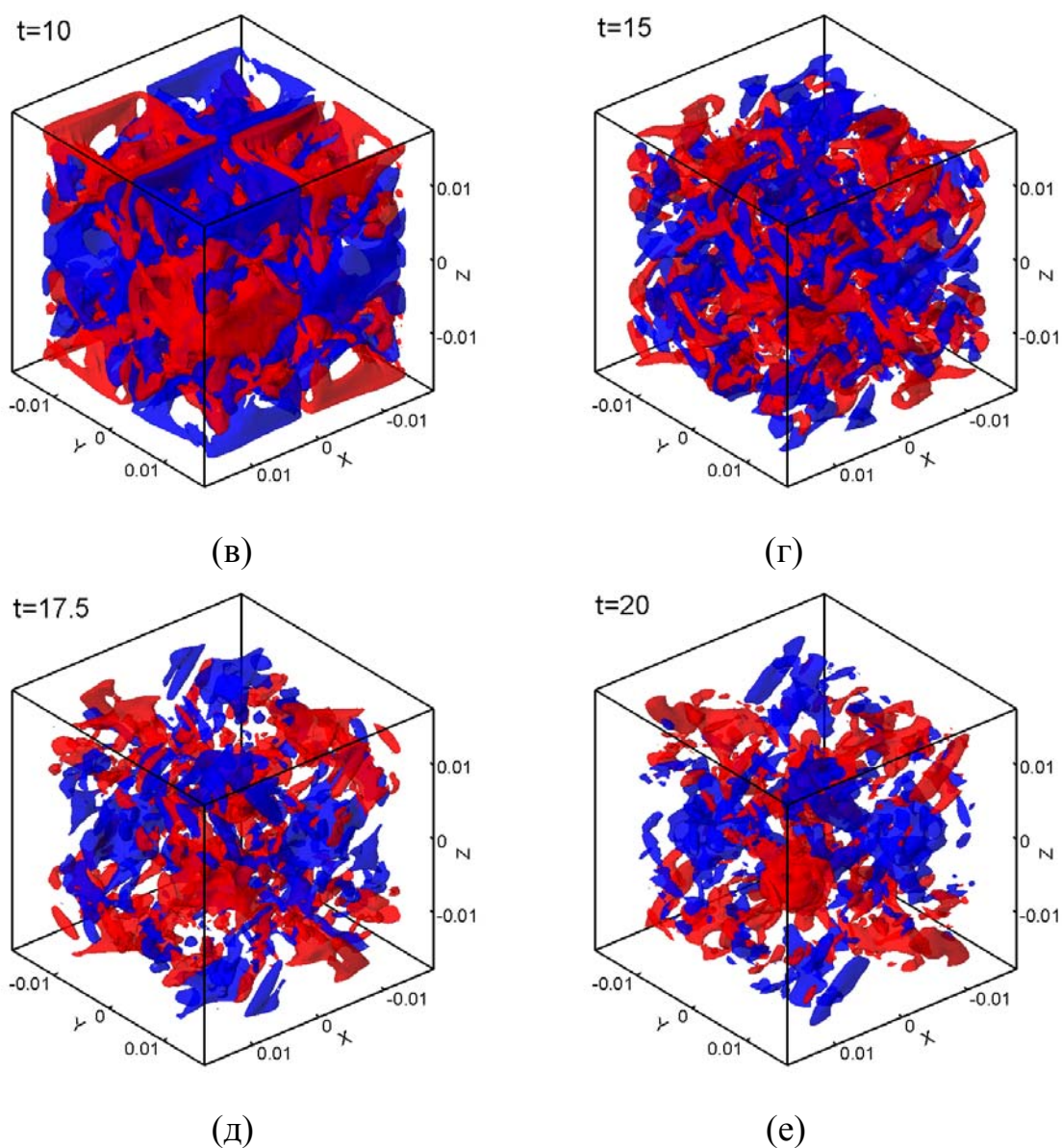


Рис. 1

Видно, что регулярное в начальный момент времени распределение скорости (1) (рис. 1а) к моменту времени $t=5$ и 10 (рис. 1б, в) еще сохраняет «память» о своем начальном распределении, но к моменту времени $t=15$ (рис. 1г) течение становится хаотическим, в котором уже не наблюдается связь с первоначальным распределением скорости, то есть течение становится изотропным. Такое хаотическое распределение скоростей характерно для турбулентного течения. Наблюдаемые здесь особенности эволюции течения хорошо согласуются с анализом эволюции вихря Тейлора–Грина, приведенным в [1] для $Re > 500$ и в [3, 5] для $Re = 1600$. Заметим, что промежуток безразмерного времени $\Delta t = 1$ соответствует характерному периоду вращения первоначального вихря (1).

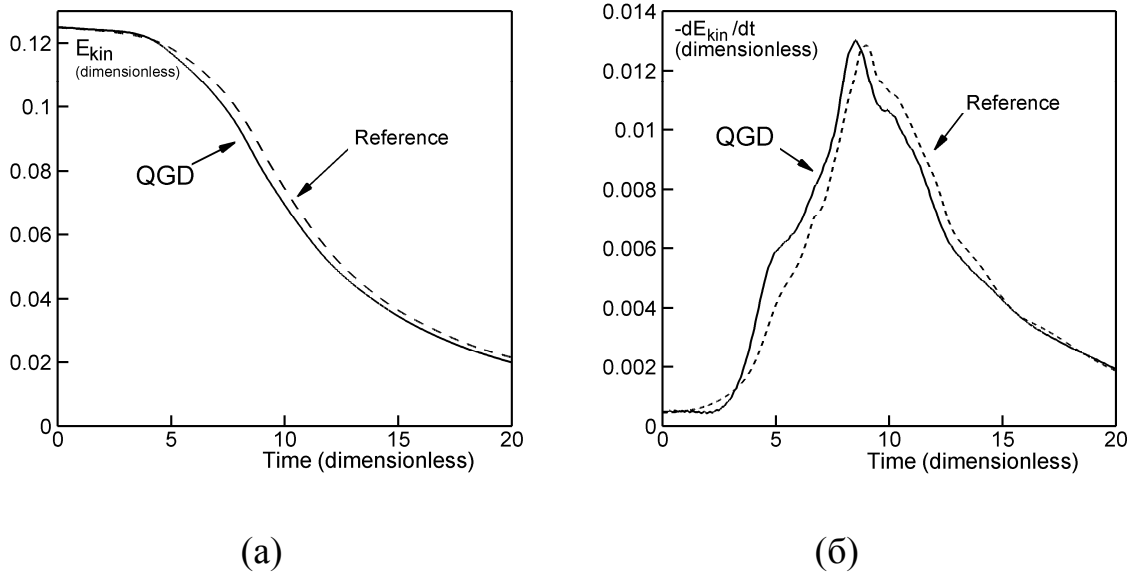


Рис. 2

На рис. 2а представлены зависимости средней по рассматриваемому объему Ω удельной кинетической энергии газа E_{kin} от времени:

$$E_{kin} = \frac{1}{\rho_0 U_0^2 \Omega} \int_{\Omega} (1/2) \rho (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) dx dy dz$$

Кинетическая энергия и время представлены в безразмерном виде. Сплошная кривая соответствует расчету, проведенному авторами. При этом размерность разностной сетки 129^3 , шаг сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$. Пунктирная кривая представляет эталонный результат из [3] с использованием спектрального метода (dealised pseudo-spectral code), а также различных вариантов разрывного метода Галеркина.

Рис. 2б демонстрирует зависимость скорости диссипации кинетической энергии от времени, т. е. величины $\varepsilon = -dE_{kin}/dt$. Как и на рис. 2а, сплошная кривая получена авторами, а пунктирная взята из [3]. Максимальное значение скорости диссипации кинетической энергии определяет область перехода от ламинарного течения к турбулентному и формирование спектра Колмогорова-Обухова (рис. 6).

Результаты расчетов [14] для $Ma = 0.2$ показывают, что увеличение коэффициента α от 0.1 до 0.9 приводит к сглаживанию графиков E_{kin} и смещению максимума распределения ε в сторону меньших времен. Подобный эффект наблюдается и при уменьшении числа точек пространственной сетки.

Результаты решения этой задачи методом прямого численного моделирования (DNS) приведены в целом ряде работ, среди которых отметим [1,3,4] и [5]. В частности в [5] расчеты проведены на сетке с числом узлов 256^3 с помощью методов высокого порядка точности по времени и пространству.

Выбранное в этих расчетах число узлов оценивается как минимально допустимое для DNS подхода с точки зрения разрешения вихревых структур, соответствующих данному числу Рейнольдса. Полученные на основе КГД алгоритма графики (рис. 2) на сетке 129^3 очень хорошо соответствуют данным [1] и [5], полученным на сетке 256^3 .

Использование приближения крупных вихрей (LES) позволяет сократить число расчетных точек в численном алгоритме. Результаты решения данной задачи LES-методом с использованием модели Смагоринского с числом точек 64^3 приведено в [5]. При этом максимальное значение скорости диссипации кинетической энергии оказывается заниженным и достигает значения порядка 0.006, в то время как эталонным значением является величина порядка 0.012. Таким образом, для данного течения LES модель Смагоринского оказывается слишком диссипативной. В указанном расчете используется динамический вариант модели Смагоринского, в котором величина подсеточной диссипации автоматически подстраивается в соответствии с разрешаемыми масштабами вихрей. Расчет по КГД алгоритму на сетке 65^3 дает величину максимума скорости диссипации ~ 0.01 .

Результаты расчетов для $Re=280$

На рис. 3 представлены профили зависимости от времени удельной кинетической энергии E_{kin} (а) и скорости ее диссипации ε (б) для $Re=280$. Аналогично рис. 2, сплошные профили получены авторами, а пунктирные – эталонные результаты из [4], полученные посредством спектрального метода (Fergus pseudo-spectral code) и разрывного метода Галеркина с 96^3 степенями свободы. При этом размерность разностной сетки для КГД алгоритма 129^3 , шаг сетки $h = 2.5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$.

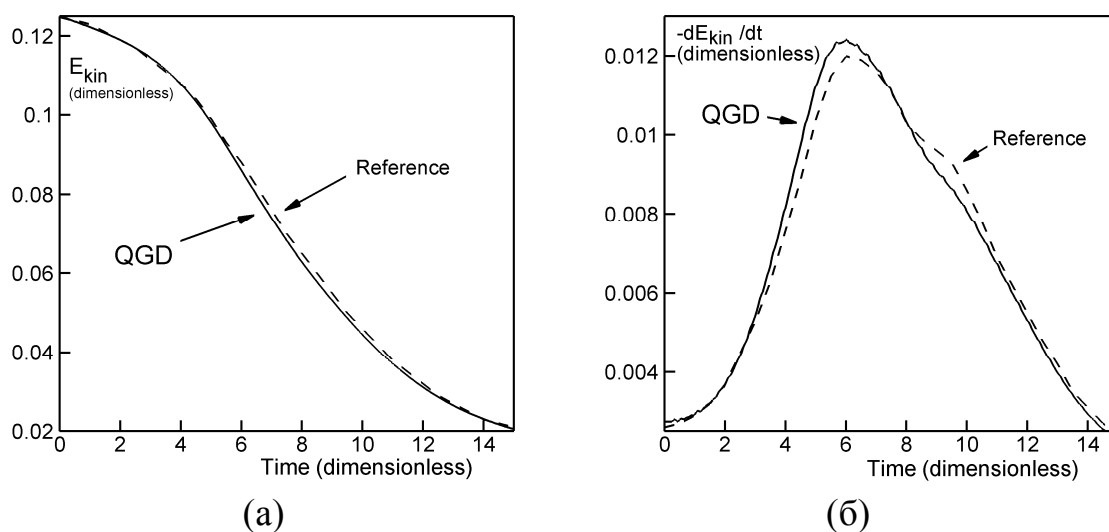
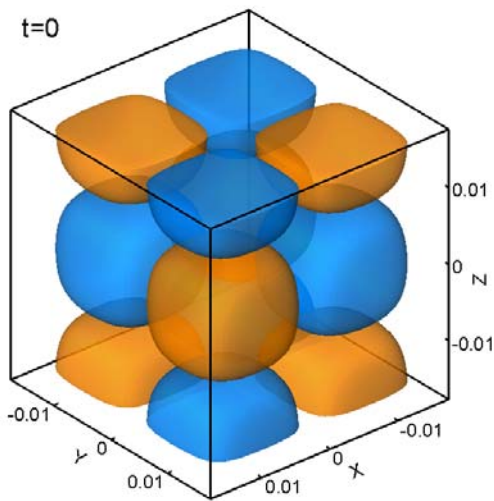


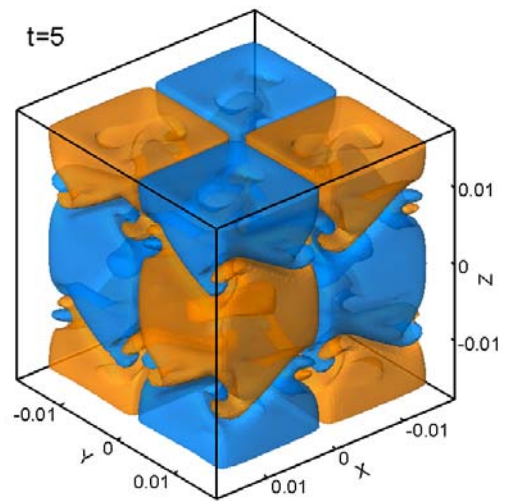
Рис. 3

Результаты расчетов для $Re=100$

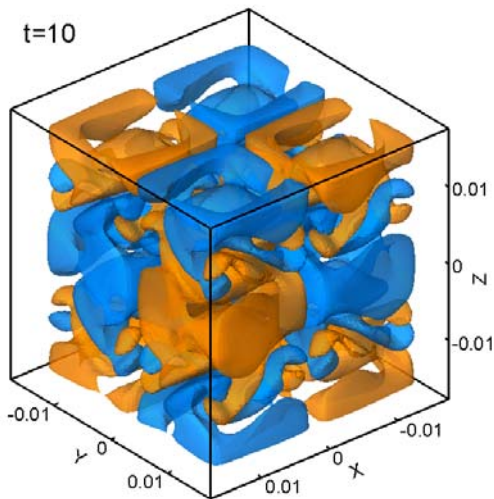
На рис. 4 представлены поверхности уровня z -компоненты завихренности поля скорости для расчета при $Re=100$. Параметры расчета следующие: размер сетки 65^3 (т. е. $N = 65$), шаг сетки $h = 5 \cdot 10^{-4}$ м, $\alpha = 0.1$. Желтый цвет соответствует $V_z = 0.2$, голубой $V_z = -0.2$.



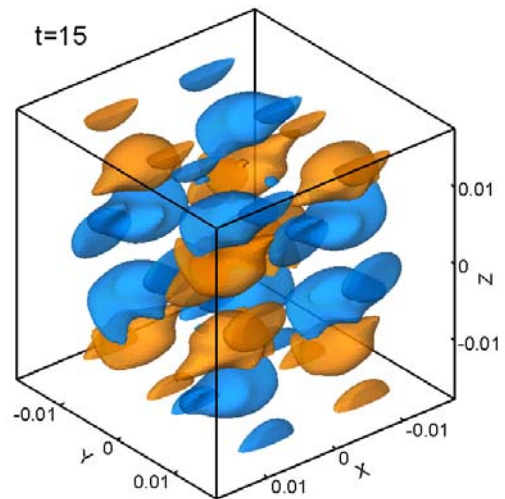
(а)



(б)



(в)



(г)

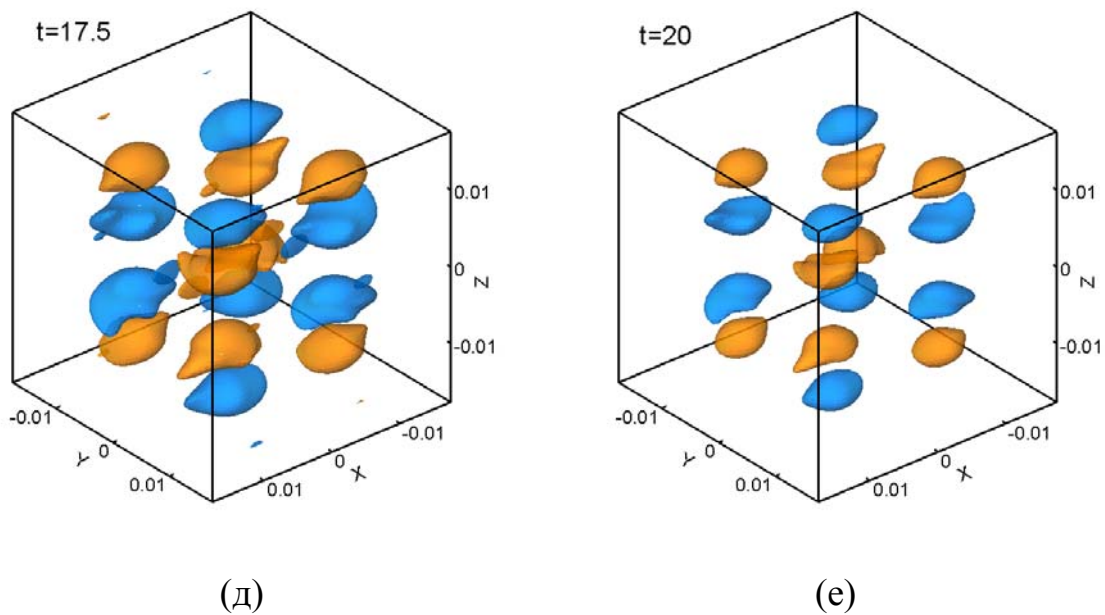


Рис. 4

Скорость диссипации кинетической энергии для этого варианта совместно с вариантами $Re = 1600$ и 280 приведена на рис. 5. Максимальное значение ε для $Re = 100$ соответствует времени $t = 4.5$. К этому моменту времени течение еще сохраняет «память» о начальном распределении скорости, и имеет анизотропный характер (рис. 4б), и в дальнейшем картина течения также остается анизотропной. Таким образом, при распаде одиночного вихря для $Re = 100$ на протяжении всего процесса эволюции течение носит ламинарный характер, при котором не образуется хаотичное поле мелких вихрей, характерное для варианта $Re = 1600$ (рис. 1г–е).

Описанный характер затухания вихря Тейлора–Грина соответствует данным, изложенным в [1] для ламинарных течений, соответствующих $Re < 500$.

Сравнение результатов для разных Re и энергетический спектр

Рис. 5 показывает профили скорости диссипации кинетической энергии ε в зависимости от времени для трех значений числа Рейнольдса: 100, 280, которые соответствуют ламинарному режиму распада, и 1600, при котором наблюдается турбулентный распад вихревого течения. Положение максимума скорости диссипации сдвигается вправо при увеличении числа Рейнольдса. Результаты расчета для $Re = 100$ и 1600 количественно совпадают с аналогичными профилями, приведенными на рис. 7 работы [1]. В указанной работе расчет этих вариантов выполнен на сетке 256^3 с использованием DNS подхода.

Отметим, что используемая авторами КГД-модель не требует какой-либо модификации или подстройки параметров расчета при переходе от

ламинарного случая к турбулентному. Расчет всех указанных вариантов проводится единообразно.

На рис. 6 изображен энергетический спектр турбулентных пульсаций для $Re = 1600$. Методика вычисления спектра такая же, как в [14]. Также на рис. 6 изображена прямая с колмогоровским угловым коэффициентом $-5/3$. Спектр вычислялся в момент времени $t = 8.5$, когда профиль ε достигает максимума (рис. 2б). Профиль энергетического спектра аналогичен профилю для $Re = 1600$ на рис. 4 работы [4], также профилю для $Re = 1500$ на рис. 8.3 работы [5]. При вычислении спектра на рис. 6 использовались пространственные сетки 65^3 и 129^3 . Видно, что результаты на различных сетках почти одинаковы, что говорит о физически адекватном поведении турбулентного сглаживания. При сгущении пространственной сетки кривая спектральной плотности становится более гладкой и располагается ближе к прямой с коэффициентом $-5/3$.

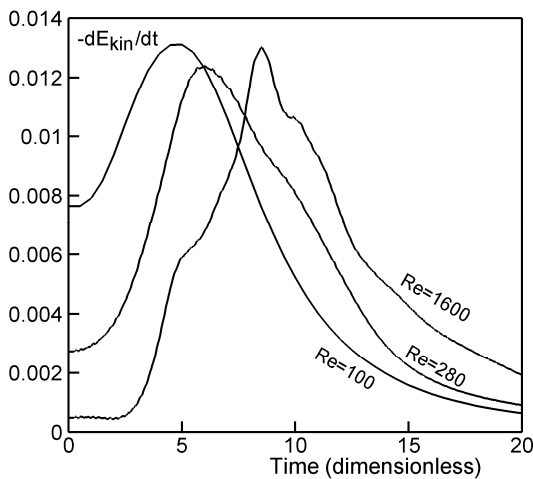


Рис. 5

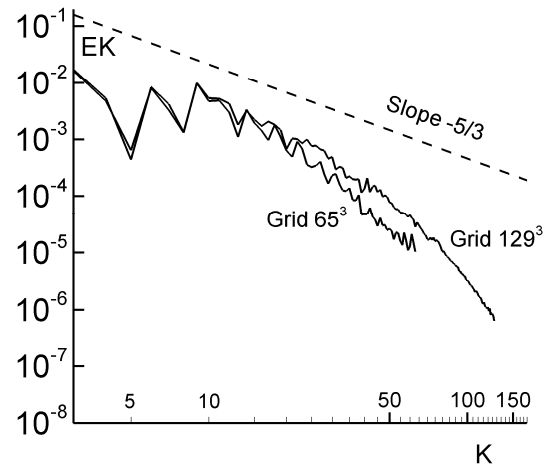


Рис. 6

На рис. 7 изображены линии тока и контуры завихренности V_z в сечении $z = 0.008$ м для $Re = 1600$ (а) и $Re = 100$ (б) при $t = 20$. При $Re = 1600$ наблюдается развитая вихревая структура течения. При $Re = 100$ мелкие вихри отсутствуют. Кроме того, величина завихренности V_z для $Re = 1600$ значительно выше, чем для $Re = 100$. Таким образом, хорошо видна разница между турбулентным и ламинарным случаями. Рис. 7 демонстрирует такую же симметрию вычисленного решения, как и симметрия начальных условий (1), что говорит о корректности и устойчивости численного алгоритма.

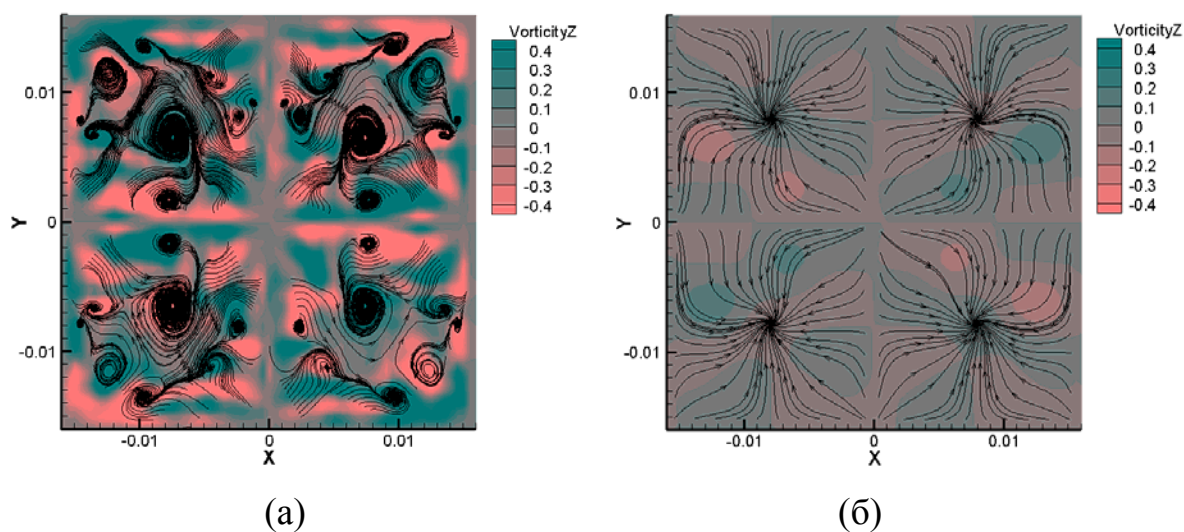


Рис. 7

Выводы

Результаты прямого численного моделирования распада вихря Тейлора–Грина, проведенные авторами на основе КГД-алгоритма, показывают очень хорошее согласие с данными из различных работ, посвященных исследованию этого вихревого течения. При этом согласие имеет как качественный, так и количественный характер для всех рассмотренных чисел Рейнольдса, включая ламинарный и турбулентный режимы распада. Отметим, что в цитированных работах моделирование вихря Тейлора–Грина проводится с помощью разнообразных по своей структуре методов численного решения высоких порядков точности (конечно-разностных, спектральных, метода Галеркина) на более подробных сетках в рамках DNS подхода. При использовании одинаковых пространственных сеток для $Re = 1600$ точность КГД алгоритма превосходит точность LES метода с моделью подсеточной вязкости Смагоринского.

КГД-алгоритм позволяет проводить прямое моделирование распада вихревого течения как в ламинарном, так и в турбулентном случае единообразно, без каких-либо изменений параметров численного алгоритма. Приведенные расчеты показывают перспективность применения КГД-алгоритма для численного моделирования ламинарно-турбулентного перехода и турбулентных газодинамических течений.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект РФФИ 13-01-00703-а.

Литература

- [1] M. Brachet, D. Meiron, S. Orszag, B. Nickel, R. Morf, U. Frisch. Small-scale structure of the Taylor-Green vortex. *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 130, pp. 411–452.
- [2] E. Garnier, M. Mossi, P. Sagaut, P. Comte, M. Deville. On the use of shock-capturing schemes for large-eddy simulation. *J. of Computational Physics*, 1999, vol. 153, pp. 273–311.
- [3] <http://www.as.dlr.de> (German Aerospace Center)
- [4] JB Chapelier, M. De La Llave Plata, F. Renac, E. Martin. Final abstract for ONERA Taylor-Green DG participation. 1st International Workshop On High-Order CFD Methods. January 7-8, 2012 at the 50th AIAA Aerospace Sciences Meeting, Nashville, Tennessee
- [5] D. Fauconnier, Development of a Dynamic Finite Difference Method for Large-Eddy Simulation. PhD thesis. Ghent University. ISBN 978-90-8578-235-3. NUR 978,928. Wettelijk depot: D/2008/10.500/55
- [6] Б.Н. Четверушкин. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. Москва: Макс Пресс. 2004.
- [7] Ю.В. Шеретов. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2009.
- [8] Т.Г. Елизарова. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. Москва: Научный мир. 2007. – 352 с.
- [9] Т.Г. Елизарова, П.Н. Никольский. Численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в течении за обратным уступом. Вестник Московского университета, серия 3. Физика. Астрономия. 2007. № 4, с. 14–17.
- [10] T.G. Elizarova, V.V. Seregin. Filtered simulation method for turbulent heat and mass transfer in gas dynamic flows. Proceedings of the 6th International Symposium on turbulence, heat and mass transfer, Rome, Italy, 14–18, September 2009. Edited by K. Hanjalic, Y. Nagano, S. Jakirilic. Begell House Inc., p. 383–386.
- [11] I. A. Shirokov, T.G. Elizarova, I. Fedioun, J.-C. Lengrand. Numerical simulation of the laminar-turbulent boundary-layer transition on a hypersonic forebody using the

quasi-gas dynamic equations. 4th European Conference for Aerospace Sciences (EUCASS) 4–10 July 2011, St-Petersburg.

[12] И.А. Широков, Т.Г. Елизарова. Численное моделирование колебательного течения в окрестности гиперзвукового летательного аппарата. Математическое моделирование, 2012, т. 24, № 1, с. 21–32.

[13] Широков И.А., Елизарова Т.Г. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в слое вязкого сжимаемого газа. Прикладная математика и информатика. № 42, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2013, 30–53.

[14] Т.Г. Елизарова, И.А. Широков. Тестирование КГД–алгоритма на примере задачи о распаде однородной изотропной турбулентности. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 35. 19 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-35>

[15] <http://www.kiam.ru>

[16] Bird G.A. Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows. Clarendon press, Oxford, 1998.

[17] Таблица физических величин. Справочник под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976, 1008 с.