



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**Овчинников М. Ю., Пеньков В.И.,
Ролдугин Д. С.**

Трехосная магнитная
система ориентации
космического аппарата в
инерциальном пространстве

Рекомендуемая форма библиографической ссылки

Овчинников М. Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д. С. Трехосная магнитная система ориентации космического аппарата в инерциальном пространстве // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 74. 24 с.

URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-74>

Публикации по материалам препринта

M.Yu. Ovchinnikov, D.S. Roldugin, V.I. Penkov, Three-axis active magnetic attitude control asymptotical study // Acta Astronautica, 2015, V. 110, pp. 279-286

DOI: [10.1016/j.actaastro.2014.11.030](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2014.11.030)

URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0094576514004640>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**М.Ю. Овчинников, В.И. Пеньков,
Д.С. Ролдугин**

**Трехосная магнитная система
ориентации спутника
в инерциальном пространстве**

Москва — 2013

Овчинников М.Ю., Пеньков В.И., Ролдугин Д.С.

Трехосная магнитная система ориентации спутника в инерциальном пространстве

Рассматривается магнитная система ориентации спутника, обеспечивающая его произвольную наперед заданную ориентацию в инерциальном пространстве. На примере плоского движения рассматривается логика формирования алгоритма управления, схожая с конструированием ПД-регулятора. Работа алгоритма затем анализируется при помощи асимптотических методов, показывается демпфирование угловой скорости аппарата и устойчивость требуемой ориентации. При помощи теории Флоке подбираются оптимальные по быстрдействию параметры алгоритма.

Ключевые слова: магнитная система ориентации, трехосная ориентация

Michael Ovchinnikov, Vladimir Penkov, Dmitry Roldugin

Active magnetic attitude control system providing three-axis inertial attitude

Active magnetic attitude control system providing arbitrary inertial attitude of a satellite is considered. An algorithm that closely resembles PD-controller is constructed on the basis of a planar model problem. System behavior is analyzed using asymptotical technique. Angular velocity damping and the required attitude stability are proven. Optimal algorithm parameters are chosen using Floquet theory.

Key words: magnetic attitude control system, three-axis stabilization

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-33045) и Министерства образования и науки РФ (проекты 8182 и 14.132.21.1588).

Оглавление

Введение	3
1. Постановка задачи.....	4
2. Конструирование алгоритма ориентации	8
3. Исследование переходных процессов	11
4. Исследование устойчивости.....	13
5. Численное моделирование	19
Заключение.....	22
Благодарности.....	23
Литература	23

Введение

Актуальность задачи по обеспечению произвольной трехосной ориентации спутника, оснащенного только магнитными катушками в качестве исполнительных элементов, обусловлена развитием малых аппаратов, способных выполнять все больший спектр задач. Интерес к таким аппаратам возрос в течение последних 15-20 лет, причем заметно смещение от малых аппаратов массой в несколько десятков килограмм (микроспутники) к малым аппаратам массой уже всего в несколько килограмм (наноспутники). Это связано с подъемом индустрии малых спутников и поиском новых, экономичных и простых решений для обеспечения их ориентации. Лучшими по важным для малых аппаратов критериям (масса, стоимость, отсутствие расхода рабочего тела, энергопотребление) исполнительными элементами для этого являются токовые катушки, но несмотря на все увеличивающуюся интенсивность исследований в этой области, найти алгоритм трехосной ориентации и тем более показать его работоспособность пока не удалось. Специфика этих исполнительных элементов такова, что возникает проблема неуправляемости – невозможно в каждый момент времени реализовать произвольный механический момент, а значит, и произвольную ориентацию аппарата.

Попытки преодоления этого ограничения предпринимались неоднократно. Среди работ, имеющих большой интерес с точки зрения фундаментальной науки, можно выделить только [1], в которой показана возможность обеспечения трехосной ориентации аппарата при помощи токовых катушек. Однако, в работе рассматривается малая окрестность требуемой ориентации спутника, сам спутник – сферически симметричный, а полученные в рамках теории дифференциальных игр фундаментальные результаты с трудом переносятся на реальные космические аппараты. Отметим также работу [2], в которой бегло рассматривается задача стабилизации аппарата при помощи токовых катушек, но основное внимание уделено задаче определения ориентации, а решение задачи управления не обосновано должным образом и содержит лишь несколько результатов численного моделирования. Интересный подход представлен в [3], где на основе функций Ляпунова и теоремы Барбашина-Красовского доказывается асимптотическая устойчивость трехосной ориентации. Однако в работе сделано важное допущение о сферической симметричности аппарата, что позволяет авторам в функции Ляпунова отбросить один из членов. В случае же произвольного тензора инерции это условие не выполняется, в результате работа не удовлетворяет критерию применимости разработанного подхода.

Работ, посвященных численному моделированию динамики спутника, заметно больше. Например, в [4] рассматриваются линеаризованные уравнения движения, а работа предложенного закона управления исследуется численно. Аналогично в [5] рассматривается удержание аппарата в окрестности

требуемой ориентации при помощи только токовых катушек. Особняком стоит работа [6], в которой показана работа токовых катушек, установленных на борту малого аппарата Gurwin-Techsat. В работе приведены данные летных испытаний с использованием только магнитных катушек, но для специфического случая – после отключения основных исполнительных элементов – маховиков. Таким образом, была решена лишь задача поддержания требуемой ориентации после ее достижения, а также в статье не приводятся никаких аналитических результатов, которые позволили бы обобщить этот успех. Таким образом, работа имеет большое практическое значение, но невысокую ценность для фундаментальной науки.

В настоящей работе предлагается алгоритм управления, который, как и в рассмотренных выше статьях, конструируется «по мотивам» ПД-регулятора. Однако вместо того, чтобы просто отбросить нереализуемую часть требуемого механического момента (параллельную локальному вектору геомагнитной индукции), здесь предлагается другой путь, который вначале обосновывается при решении плоской модельной задачи, а затем обобщается на трехмерное движение космического аппарата. При этом при помощи методов осреднения исследуется работа предложенного алгоритма.

1. Постановка задачи

Опишем сначала используемую в работе модель геомагнитного поля. Будем моделировать геомагнитное поле полем, вектор индукции которого равномерно движется по поверхности кругового конуса. Для этого введем инерциальную систему $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, где O_a – центр масс Земли, ось $O_a Y_3$ направлена по оси вращения Земли, $O_a Y_1$ лежит в плоскости земного экватора и направлена в восходящий узел орбиты спутника, $O_a Y_2$ дополняет систему до правой. Если перенести вектор индукции в центр масс Земли, то конус касается оси $O_a Y_3$ системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$, его ось лежит в плоскости $O_a Y_2 Y_3$ (рис. 1). Угол полураствора конуса вычисляется [7] из соотношения

$$\operatorname{tg} \Theta = \frac{3 \sin 2i}{2(1 - 3 \sin^2 i + \sqrt{1 + 3 \sin^2 i})}. \quad (1.1)$$

Вектор геомагнитной индукции в рамках этой модели движется по поверхности конуса равномерно с удвоенной орбитальной скоростью, $\chi = 2\omega_0 t + \chi_0 = 2u + \chi'_0$, где ω_0 – орбитальная скорость, u – аргумент широты. Без ограничения общности можно считать, что $\chi'_0 = 0$.

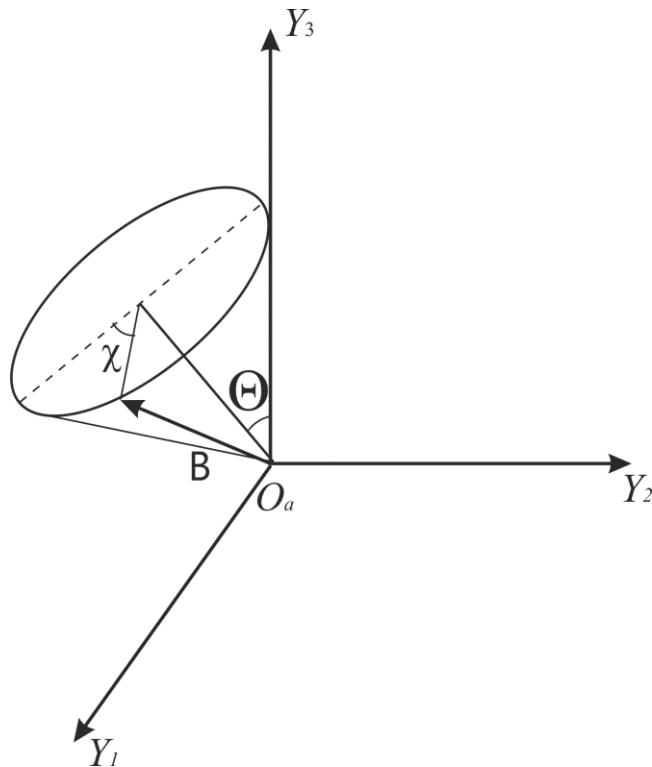


Рис. 1. Осредненная модель геомагнитного поля

Описанную модель геомагнитного поля, иногда называемую *осредненной*, будем использовать в настоящей работе. Хотя эта модель не позволяет учесть неравномерность вращения местного вектора геомагнитной индукции при движении спутника по орбите (как это учитывает, например, модель прямого диполя) и его суточное изменение (как учитывает модель наклонного диполя), тем не менее она позволяет достаточно верно описать основные свойства магнитного поля, влияющие на динамику спутника. Детальное сравнение моделей выполнено в [8].

Введем недостающие для описания движения спутника правые ортогональные системы координат.

$O_a Z_1 Z_2 Z_3$ – инерциальная система, полученная из системы $O_a Y_1 Y_2 Y_3$ поворотом на угол Θ вокруг оси $O_a Y_1$. Вектор геомагнитной индукции в этой системе имеет вид $\mathbf{B}_z = B_0 (\sin \Theta \sin 2u, \sin \Theta \cos 2u, \cos \Theta)^T$.

$OL_1 L_2 L_3$ – система, связанная с кинетическим моментом спутника. O – центр масс спутника, ось OL_3 направлена по вектору кинетического момента спутника, ось OL_2 – перпендикулярно OL_3 и лежит в плоскости, параллельной $O_a Z_1 Z_2$ и проходящей через O , ось OL_1 дополняет систему до правой.

$Ox_1 x_2 x_3$ – связанная система, ее оси совпадают с главными центральными осями инерции спутника.

Ориентацию систем друг относительно друга будем определять тремя матрицами направляющих косинусов $\mathbf{Q}, \mathbf{A}, \mathbf{D}$, записанными в виде таблиц соответственно

	L_1	L_2	L_3		x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3
Z_1	q_{11}	q_{12}	q_{13}	L_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	Z_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}
Z_2	q_{21}	q_{22}	q_{23}	L_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	Z_2	d_{21}	d_{22}	d_{23}
Z_3	q_{31}	q_{32}	q_{33}	L_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	Z_3	d_{31}	d_{32}	d_{33}

Введем индексы Z, L, x для обозначения векторов, заданных, соответственно, в системах $O_a Z_1 Z_2 Z_3$, $OL_1 L_2 L_3$ и $Ox_1 x_2 x_3$.

Для описания движения спутника при большой угловой скорости вращения будем использовать уравнения в переменных Белецкого-Черноуцкого $L, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \theta$ [9], где L – модуль вектора кинетического момента, углы ρ, σ определяют его ориентацию относительно инерциальной системы $O_a Z_1 Z_2 Z_3$ (рис. 2). Ориентация осей системы $Ox_1 x_2 x_3$ относительно системы $OL_1 L_2 L_3$ задается углами Эйлера φ, ψ, θ .

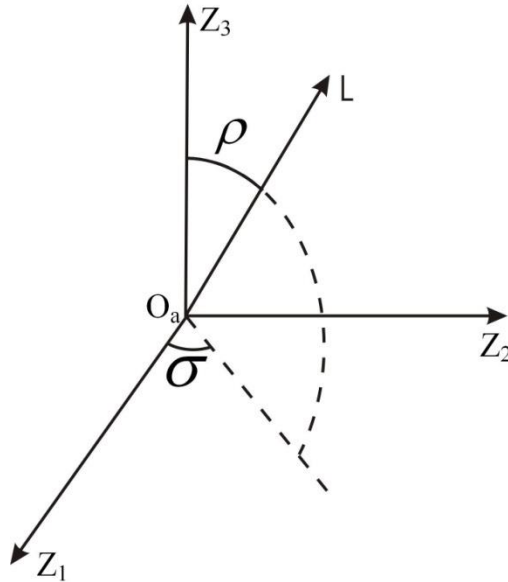


Рис. 2. Ориентация вектора кинетического момента в инерциальном пространстве

Матрицы \mathbf{Q} и \mathbf{A} направляющих косинусов имеют соответственно вид

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \rho \cos \sigma & -\sin \sigma & \sin \rho \cos \sigma \\ \cos \rho \sin \sigma & \cos \sigma & \sin \rho \sin \sigma \\ -\sin \rho & 0 & \cos \rho \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \psi - \cos \theta \sin \varphi \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi - \cos \theta \cos \varphi \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \\ \cos \varphi \sin \psi + \cos \theta \sin \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Рассмотрим осесимметричный спутник и введем его тензор инерции $\mathbf{J}_x = \text{diag}(A, A, C)$. Считаем, что его центр масс движется по круговой орбите.

Движение такого спутника относительно центра масс описывается [10] системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= M_{3L}, \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{L} M_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{L \sin \rho} M_{2L}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{1}{L} (M_{2L} \cos \psi - M_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{dt} &= L \cos \theta \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) + \frac{1}{L \sin \theta} (M_{1L} \cos \psi + M_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{L}{A} - \frac{1}{L} M_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{L} M_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Переменные Белецкого-Чернуосько удобно использовать для анализа переходных процессов, когда основной интерес представляет величина угловой скорости спутника, характеризуемая переменной L . Установившееся движение удобнее рассматривать при помощи уравнений Эйлера. В этом случае для описания динамики спутника рассматриваются переменные $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \alpha, \beta, \gamma$. Здесь ω_i – компоненты вектора абсолютной угловой скорости спутника в системе $Ox_1x_2x_3$ ($i=1,2,3$), самолетные углы α, β, γ задают ориентацию системы $Ox_1x_2x_3$ относительно $OZ_1Z_2Z_3$. Матрица направляющих косинусов \mathbf{D} имеет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \beta \cos \gamma & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma \\ \sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

Уравнения движения спутника (теперь уже с произвольным тензором инерции $\mathbf{J}_x = \operatorname{diag}(A, B, C)$) с учетом момента, создаваемого взаимодействием МСО с геомагнитным полем, имеют вид

$$\begin{aligned} A \frac{d\omega_1}{dt} &= (B - C)\omega_2\omega_3 + M_{1x}, \\ B \frac{d\omega_2}{dt} &= -(A - C)\omega_1\omega_3 + M_{2x}, \\ C \frac{d\omega_3}{dt} &= -(B - A)\omega_1\omega_2 + M_{3x}, \\ \frac{d\alpha}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\omega_3 \sin \gamma + \omega_2 \cos \gamma), \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где M_{1x}, M_{2x}, M_{3x} – компоненты вектора момента в системе $Ox_1x_2x_3$.

2. Конструирование алгоритма ориентации

Рассмотрим модельную задачу движения твердого тела вокруг неподвижной оси под действием механического момента. Поворот тела относительно некоторого заданного положения описывается углом φ , уравнения движения такого тела

$$\ddot{\varphi} = M.$$

Необходимо найти механический момент, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения $\varphi = 0$. Чтобы сделать это, приведем следующую цепь рассуждений. Используем невязку

$$\Delta = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi),$$

описывающую отклонение тела от требуемого положения и его скорость. Будем искать управление, обеспечивающее стремление этой невязки к нулю, что будет соответствовать требуемой ориентации. Выделим в ней позиционную и дифференциальную части Δ_2 и Δ_1 соответственно и найдем их вариации:

$$\delta\Delta_1 = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta t, \quad \delta\Delta_2 = \sin \varphi \dot{\varphi} \delta t.$$

Дифференциальная часть невязки может быть минимизирована, так как ее вариация содержит $\ddot{\varphi}$. Фактически это означает, что ее величиной можно управлять. Для второй невязки это сделать не удастся. Поэтому выпишем разложение невязки в ряд по степеням приращения времени,

$$\Delta(t + \delta t) = \Delta(t) + \frac{d\Delta(t)}{dt} \delta t + \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} \delta t^2 + \dots$$

Заметим теперь, что за счет минимизации невязки Δ_1 первая вариация невязки Δ_2 стремится к нулю, что позволяет переписать последнее выражение в виде

$$\Delta(t + \delta t) - \Delta(t) = \delta\Delta_1 + \frac{d^2\Delta(t)}{dt^2} \delta t^2 + \dots$$

Поэтому для учета второй части невязки придется рассматривать ее вторую вариацию,

$$\delta^2\Delta_2 = \frac{1}{2}(\cos \varphi \dot{\varphi}^2 + \sin \varphi \ddot{\varphi}) \delta t^2.$$

Первое слагаемое второй невязки снова мало. В результате на поведение невязки Δ_2 начиная с какого-то момента, когда $\dot{\varphi}$ уже мало, влияние оказывает в основном выражение $\sin \varphi \ddot{\varphi}$, которым можно управлять:

$$\Delta(t + \delta t) - \Delta(t) = \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\delta t + \frac{1}{2} \sin \varphi \ddot{\varphi} \delta t^2 + \dots$$

В результате для минимизации невязки Δ механический момент должен подбираться исходя из одновременно выполняемых условий

$$\dot{\varphi}M < 0, \quad \sin \varphi M < 0. \quad (2.1)$$

Момент выберем как сумму моментов, удовлетворяющих каждый одному из этих условий,

$$M = -k_a \sin \varphi - k_\omega \dot{\varphi},$$

где k_a и k_ω – положительные коэффициенты. Тогда уравнения движения принимают вид

$$\ddot{\varphi} + k_\omega \dot{\varphi} + k_a \sin \varphi = 0 \quad (2.2)$$

и представляют собой при определенных условиях уравнения затухающих колебаний.

Перенесем теперь эти рассуждения на случай твердого тела, вращающегося вокруг центра масс. Для компонент невязки имеем

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2),$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{2} \left[(d_{11} - 1)^2 + d_{12}^2 + d_{13}^2 + d_{21}^2 + (d_{22} - 1)^2 + d_{23}^2 + d_{31}^2 + d_{32}^2 + (d_{33} - 1)^2 \right].$$

Нетрудно показать, что

$$\Delta_2 = 3 - d_{11} - d_{22} - d_{33}.$$

Уравнения движения будем использовать в виде

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{M}_{\text{упр}} - \mathbf{M}_{\text{гир}} = \mathbf{M}, \quad (2.3)$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \mathbf{D}\mathbf{W},$$

где

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\delta\Delta_1 = \sum \omega_i \dot{\omega}_i \delta t = \boldsymbol{\omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} \delta t$.

Первая часть невязки снова оказывается управляемой. Для второй – позиционной – части невязки, имеем

$$\delta\Delta_2 = -\sum \dot{d}_{ii} \delta t = \left[\omega_1 (d_{23} - d_{32}) + \omega_2 (d_{31} - d_{13}) + \omega_3 (d_{12} - d_{21}) \right] \delta t.$$

Вводя вектор $\mathbf{S} = (d_{23} - d_{32}, d_{31} - d_{13}, d_{12} - d_{21})^T$, перепишем последнее выражение в виде $\delta\Delta_2 = \boldsymbol{\omega} \mathbf{S} \delta t$.

Вторая часть невязки не может быть минимизирована напрямую, однако мы можем воспользоваться рассуждениями, примененными для модельной задачи, и считать, что за счет минимизации Δ_1 угловая скорость падает, а потому следует рассмотреть вторую вариацию второй компоненты невязки,

$$\delta^2 \Delta_2 = (\mathbf{S} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} + \dot{\mathbf{S}} \boldsymbol{\omega}) \delta t^2.$$

Снова отбрасываем слагаемое, содержащее угловую скорость, и для минимизации невязки Δ получаем условия

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \quad \mathbf{S} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{M} < 0, \quad (2.4)$$

аналогичные (2.1). Опять обращаемся к возможности демпфирования угловой скорости и в механическом моменте \mathbf{M} отбрасываем гироскопическую компоненту, опускаем также «весовую» матрицу \mathbf{J}^{-1} . Наконец, принимая во внимание, что $\mathbf{M}_{yup} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$, и делая циклическую перестановку в (2.4), получаем

$$\mathbf{m}(\mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega}) < 0, \quad \mathbf{m}(\mathbf{B} \times \mathbf{S}) < 0,$$

что приводит, по аналогии с модельной задачей, к дипольному управляющему моменту

$$\mathbf{m} = -k_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}. \quad (2.5)$$

Отметим, что построение закона управления (2.5) имеет аналогии с построением ПД-регулятора. В этом случае управление можно построить следующим образом. Используем функцию – кандидат на функцию Ляпунова –

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + k_a \sum_{i=1}^3 (1 - d_{ii}).$$

Очевидно, положению равновесия соответствует $\boldsymbol{\omega} = 0$, $\mathbf{D} = \text{diag}(1,1,1)$, то есть имеет место совпадение осей инерциальной и связанной систем. Найдем производную этой функции

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} (\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{J} \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{J} \dot{\boldsymbol{\omega}}) - k_a \sum_{i=1}^3 \dot{d}_{ii}.$$

Несложно видеть, что производная V в силу уравнений движения (2.3) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{M}_{yup} + \mathbf{M}_{zup} + k_a \mathbf{S}). \quad (2.6)$$

Потребуем отрицательность производной функции везде, кроме положения равновесия, $\frac{dV}{dt} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Отсюда имеем

$$\mathbf{M}_{yup} + k_a \mathbf{S} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega},$$

так как $\boldsymbol{\omega} \mathbf{M}_{zup} = 0$. В результате получаем выражение для управляющего момента

$$\mathbf{M}_{yup} = -k_{\omega} \boldsymbol{\omega} - k_a \mathbf{S}. \quad (2.7)$$

Выражение (2.7) имеет ту же структуру, что и (2.5), однако задает механический, а не дипольный момент. Стандартная схема получения дипольного момента на основе (2.7) – реализация только перпендикулярной локальному вектору геомагнитной индукции компоненты. То есть, вместо управляющего момента, определяемого выражением (2.7), используется момент $\mathbf{M}'_{yup} = (\mathbf{B}_0 \times \mathbf{m}) \times \mathbf{B}_0$,

где вектор геомагнитной индукции имеет единичную длину (направление вектора геомагнитной индукции). Подставляя дипольный момент (2.5) в

выражение для производной кандидата в функцию Ляпунова, получаем выражение

$$\frac{dV}{dt} = -k_{\omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{B}_0)^2 + k_a |\boldsymbol{\omega}| |\mathbf{S}| \cos(\mathbf{B}_0, \boldsymbol{\omega}) \cos(\mathbf{B}_0, \mathbf{S}),$$

которое можно использовать для определения, когда следует применять управление – второе слагаемое должно быть отрицательным. Численное моделирование, однако, показало, что при таком подходе не наблюдается выигрыша в быстродействии алгоритма по сравнению с его непрерывной реализацией, поэтому введение дополнительных условий в алгоритм управления представляется нецелесообразным.

Рассуждения, приведенные при выводе дипольного момента (2.5), и рассуждения, касающиеся аналогии такого управления с ПД-регулятором, не могут рассматриваться как строгое обоснование работоспособности алгоритма. Покажем теперь, что предложенный закон управления, тем не менее, позволяет добиться трехосной ориентации спутника в инерциальном пространстве, и найдем ограничения, позволяющие его реализовать.

3. Исследование переходных процессов

Перейдем к аналитическому исследованию динамики спутника под управлением магнитной системы ориентации, реализующей закон управления (2.5). Получить аналитические результаты в общем случае движения аппарата представляется затруднительным, поэтому выделим несколько режимов движения и основных допущений, которые позволят получить представление о работе алгоритма (2.5) на всем цикле управления.

Во-первых, рассмотрим быстрое вращение аппарата. Перепишем закон управления (2.5) в виде

$$\mathbf{m} = -k'_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega} - k'_a \mathbf{B} \times \mathbf{S}, \quad (3.1)$$

где $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \boldsymbol{\Omega}$. Вектор геомагнитной индукции здесь и далее считаем единичным (его величина постоянна в рамках осредненной модели). Предположим теперь, что коэффициенты k'_{ω} и k'_a имеют один порядок (их безразмерное отношение имеет порядок единицы, размерность обоих коэффициентов Н·м/Тл²). Вопрос наилучшего выбора этих коэффициентов будет рассмотрен далее. При таких предположениях при быстрых вращениях демпфирующая компонента момента превалирует над позиционной, так как $|\boldsymbol{\Omega}| \ll 1$. Момент тогда приближенно можно представить в виде

$$\mathbf{m} = -k'_{\omega} \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega}.$$

Однако в этом случае имеем дело с движением аппарата под управлением известного алгоритма «-Vdot», предложенного Сеймором Кантом и опубликованного в [11]. Динамика спутника в этом случае и работа алгоритма были ранее рассмотрены авторами в работе [12]. Перейдем поэтому к следующему выделенному этапу движения аппарата.

Основываясь на результатах, полученных в [12], можно утверждать, что снижение угловой скорости аппарата происходит до величины порядка орбитальной ($|\Omega| = O(1)$). В этом случае пренебрегать позиционной частью механического момента будет некорректно. Поэтому рассмотрим движение спутника с законом управления (2.5), но будем предполагать, что создаваемый при этом механический момент мал в том смысле, что изменение кинетического момента (как величины, так и направления) за оборот спутника по орбите и оборот вокруг центра масс мало по сравнению с его значением. В этом случае можно провести рассуждения, аналогичные проведенным в [12].

Для исследования динамики спутника будем использовать уравнения Белецкого-Черноузько (1.4), а сам спутник будем считать осесимметричным. Запишем уравнения движения спутника в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерный момент $\overline{\mathbf{M}}_L$, определяемый выражением

$$\mathbf{M}_L = k'_a B_0^2 \overline{\mathbf{M}}_L.$$

Перейдем в (1.4) к дифференцированию по аргументу широты $u = \omega_0(t - t_0)$, где t_0 – некоторый начальный момент времени. Введем безразмерный кинетический момент l по формуле $L = L_0 l$, где L_0 – начальный кинетический момент спутника. Все это позволяет записать уравнения движения в виде

$$\begin{aligned} \frac{dl}{du} &= \varepsilon \overline{M}_{3L}, \quad \frac{d\rho}{du} = \varepsilon \frac{1}{l} \overline{M}_{1L}, \quad \frac{d\sigma}{du} = \frac{\varepsilon}{l \sin \rho} \overline{M}_{2L}, \\ \frac{d\theta}{du} &= \varepsilon \frac{1}{l} (\overline{M}_{2L} \cos \psi - \overline{M}_{1L} \sin \psi), \\ \frac{d\varphi}{du} &= \eta_1 l \cos \theta + \frac{\varepsilon}{l \sin \theta} (\overline{M}_{1L} \cos \psi + \overline{M}_{2L} \sin \psi), \\ \frac{d\psi}{du} &= \eta_2 l - \varepsilon \frac{1}{l} \overline{M}_{1L} \cos \psi \operatorname{ctg} \theta - \varepsilon \frac{1}{l} \overline{M}_{2L} (\operatorname{ctg} \rho + \sin \psi \operatorname{ctg} \theta). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь введены обозначения $\varepsilon = \frac{k'_a B_0^2}{\omega_0 L_0}$, $\eta_1 = \frac{L_0}{\omega_0} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$, $\eta_2 = \frac{L_0}{A \omega_0}$. В случае

слабого магнитного момента параметр ε и отношения $\frac{\varepsilon}{\eta_i} \ll \frac{k'_a B_0^2 C}{L_0^2}$ малы. Тогда,

как это следует из вида уравнений (3.2), переменные φ, ψ, u можно считать быстрыми по сравнению с переменными l, ρ, σ, θ .

Разделение переменных на медленные и быстрые позволяет использовать известные методы асимптотического анализа [13]. Сейчас нас интересует в первую очередь эволюция медленных переменных, к которым относится модуль вектора кинетического момента, поэтому будем рассматривать первое приближение по степеням параметра ε . Для этого необходимо провести усреднение правой части уравнений вдоль порождающего решения.

Порождающим решением является регулярная прецессия вокруг вектора кинетического момента. Поскольку при $\varepsilon = 0$ быстрые переменные изменяются равномерно, при усреднении временное и пространственное средние совпадают, поэтому достаточно усреднить правую часть уравнений для медленных переменных независимо по всем быстрым переменным. Для этого также будем считать, что моменты инерции A и C выбраны так, что η_1 , η_2 и 1 (скорость изменения u) рационально несоизмеримы. Чтобы получить усредненные уравнения, необходимо вычислить выражения $\langle M_{iL} \rangle_{u,\varphi,\psi}$, $\langle M_{iL} \cos \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$ и $\langle M_{iL} \sin \psi \rangle_{u,\varphi,\psi}$. Однако момент представляет собой сумму позиционной и демпфирующей компонент. Результат осреднения демпфирующей компоненты известен [12]. Покажем, что позиционная компонента не оказывает эволюционного влияния на демпфирование угловой скорости аппарата, то есть

$$\langle (\mathbf{S} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \rangle = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы выполнялось условие

$$\langle \mathbf{S} \rangle_{\psi,\varphi} = 0.$$

Очевидно, $\mathbf{S}_L = \mathbf{A}\mathbf{S}_x$, причем матрица перехода между инерциальной и связанной системой задается выражением $\mathbf{D} = \mathbf{A}^T \mathbf{Q}^T$. Это приводит к усреднению выражений вида $a_{ij}a_{kl}$ по быстрым углам ψ и φ . Для первой компоненты \mathbf{S}_L имеем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & a_{11}a_{12}q_{31} + a_{11}a_{22}q_{32} + a_{11}a_{32}q_{33} - a_{11}a_{13}q_{21} - a_{11}a_{23}q_{22} - a_{11}a_{33}q_{23} + \\ & + a_{12}a_{13}q_{11} + a_{12}a_{23}q_{12} + a_{12}a_{33}q_{13} - a_{12}a_{11}q_{31} - a_{12}a_{21}q_{32} - a_{12}a_{31}q_{33} + \\ & + a_{13}a_{11}q_{21} + a_{13}a_{21}q_{22} + a_{13}a_{31}q_{23} - a_{13}a_{12}q_{11} - a_{13}a_{22}q_{12} - a_{13}a_{32}q_{13}. \end{aligned}$$

Группируя члены при q_{ij} , получаем

$$\begin{aligned} S_{1L} = & q_{32}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + q_{33}(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31}) + q_{22}(a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}) + \\ & + q_{23}(a_{13}a_{31} - a_{11}a_{33}) + q_{12}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) + q_{13}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}). \end{aligned}$$

Учитывая выражения для a_{ij} (1.3) и для q_{ij} (1.2), после усреднения по ψ получаем $\langle S_{1L} \rangle_{\psi} = q_{12} \sin \varphi \sin \theta$ и окончательно $\langle S_{1L} \rangle_{\psi,\varphi} = 0$. Аналогичные выкладки нетрудно провести для S_{2L} и S_{3L} .

В результате получаем нулевое эволюционное влияние позиционной части механического момента, то есть он не оказывает воздействия на демпфирование угловой скорости. Это позволяет перейти к следующему режиму движения спутника и исследованию устойчивости.

4. Исследование устойчивости

В предыдущем разделе было показано, что закон управления (2.5) приводит к демпфированию угловой скорости спутника. При этом величина его

кинетического момента стремится к нулю по экспоненциальному закону [14], [12]. Коэффициенты k'_ω и k'_a теперь могут быть разного порядка, $|\mathbf{\Omega}| = o(1)$. Запишем уравнения движения (1.6) в безразмерном виде, перейдя к дифференцированию по аргументу широты и безразмерному моменту,

$$\begin{aligned}
\frac{d\Omega_1}{du} &= \frac{(B-C)}{A} \Omega_2 \Omega_3 + \varepsilon_1 \overline{M}_{1x}, \\
\frac{d\Omega_2}{du} &= -\frac{(A-C)}{B} \Omega_1 \Omega_3 + \varepsilon_1 \frac{A}{B} \overline{M}_{2x}, \\
\frac{d\Omega_3}{du} &= -\frac{(B-A)}{C} \Omega_1 \Omega_2 + \varepsilon_1 \frac{A}{C} \overline{M}_{3x}, \\
\frac{d\alpha}{du} &= \frac{1}{\cos \beta} (-\Omega_3 \sin \gamma + \Omega_2 \cos \gamma), \\
\frac{d\beta}{du} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\
\frac{d\gamma}{du} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $\varepsilon_1 = \frac{k'_a B_0^2}{A \omega_0^2}$ – новый малый параметр. Для того чтобы сделать уравнения (4.1)

удобными для анализа методами осреднения, приведем все переменные к одному порядку величины (углы имеют порядок единицы, тогда как угловые скорости малы), введя соотношение $\mathbf{\Omega} = \varepsilon_2 \mathbf{w}$, где $\varepsilon_2 = |\mathbf{\Omega}(0)|$. Далее, вводя вектор $\mathbf{x} = (\alpha, \beta, \gamma, w_1, w_2, w_3)$, запишем уравнения (4.1) в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \varepsilon_2 \mathbf{X}(\mathbf{x}, u, \varepsilon, \mu). \tag{4.2}$$

Здесь

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos \beta} (-w_3 \sin \gamma + w_2 \cos \gamma) \\ w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma \\ w_1 - \operatorname{tg} \beta (w_2 \cos \gamma - w_3 \sin \gamma) \\ \frac{(B-C)}{A} w_2 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \overline{M}_{1x} \\ -\frac{(A-C)}{B} w_1 w_3 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{B} \overline{M}_{2x} \\ -\frac{(B-A)}{C} w_1 w_2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2^2} \frac{A}{C} \overline{M}_{3x} \end{pmatrix}.$$

Предположим пока, что $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \kappa = O(1)$. Вид уравнения (4.2) позволяет

использовать для его анализа формальную процедуру осреднения по явно входящему аргументу широты [15]. Однако в силу того, что осредненные уравнения затем линеаризуются для исследования устойчивости, целесообразно сначала провести линеаризацию и только потом проводить осреднение.

Линеаризованные уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_1}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \left(-(B_2^2 + B_3^2) \chi w_1 + B_1 B_2 \chi w_2 + B_1 B_3 \chi w_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2B_1 B_2 \alpha + 2B_1 B_3 \beta - 2(B_2^2 + B_3^2) \gamma \right), \\ \frac{dw_2}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{B} \left(B_1 B_2 \chi w_1 - (B_1^2 + B_3^2) \chi w_2 + B_2 B_3 \chi w_3 - \right. \\ &\quad \left. - 2(B_1^2 + B_3^2) \alpha + 2B_2 B_3 \beta + 2B_1 B_2 \gamma \right), \\ \frac{dw_3}{du} &= \varepsilon_2 \kappa \frac{A}{C} \left(B_1 B_3 \chi w_1 + B_2 B_3 \chi w_2 - (B_1^2 + B_2^2) \chi w_3 + \right. \\ &\quad \left. + 2B_2 B_3 \alpha - 2(B_1^2 + B_2^2) \beta + 2B_1 B_3 \gamma \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\frac{d\alpha}{du} = \varepsilon_2 w_2, \quad \frac{d\beta}{du} = \varepsilon_2 w_3, \quad \frac{d\gamma}{du} = \varepsilon_2 w_1,$$

где $\chi = k'_\omega / k'_a$. Уравнения первого приближения имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{\gamma} + \varepsilon_1 \chi (p + q) \dot{\gamma} + 2\varepsilon_1 (p + q) \gamma &= 0, \\ \ddot{\alpha} + \varepsilon_1 \chi (p + q) \frac{A}{B} \dot{\alpha} + 2\varepsilon_1 (p + q) \frac{A}{B} \alpha &= 0, \\ \ddot{\beta} + 2\varepsilon_1 \chi p \frac{A}{C} \dot{\beta} + 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C} \beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $p = \frac{1}{2} \sin^2 \Theta$, $q = \cos^2 \Theta$. Решение уравнений (4.4) приводит по каждому углу к затухающим колебаниям. Таким образом, по каждому углу получаем линеаризованные уравнения модельной задачи (2.2). Из (4.4) видно, что если k_a мало (χ велико), то степень устойчивости уменьшается – один из корней характеристического уравнения приближается к мнимой оси. Аналогично, если k_ω мало (χ мало), то степень устойчивости мала – оба корня близки к мнимой оси. Выпишем корни характеристического многочлена для всех трех уравнений,

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \chi (p + q) \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 (p + q)^2 - 8\varepsilon_1 (p + q)} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\varepsilon_1 \chi (p + q) \frac{A}{B} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 (p + q)^2 \left(\frac{A}{B} \right)^2 - 8\varepsilon_1 (p + q) \frac{A}{B}} \right), \end{aligned}$$

$$\lambda_{5,6} = -\varepsilon_1 \chi p \frac{A}{C} \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 \chi^2 p^2 \left(\frac{A}{C}\right)^2 - 4\varepsilon_1 p \frac{A}{C}}.$$

Введем параметры

$$\theta_1 = B/A, \quad \theta_2 = C(p+q)/2pA$$

и новые коэффициенты усиления при помощи выражений

$$K_\omega = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2}(p+q)k'_\omega, \quad K_a = \frac{B_0^2}{A\omega_0^2}(p+q)k'_a.$$

Тогда, учитывая выражения для ε_1 и χ , корни характеристического многочлена можно записать в виде

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-K_\omega \pm \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a} \right), \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_\omega}{\theta_1} \pm \frac{1}{\theta_1} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a} \right), \\ \lambda_{5,6} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{K_\omega}{\theta_2} \pm \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Выберем моменты инерции аппарата так, чтобы $C > B > A$. В этом случае $\theta_1 > 1$. Рассмотрим далее три варианта.

I. $\theta_2 > \theta_1 > 1$. Этот случай имеет место для орбит с низким наклоном, когда q велико, а p мало. Коэффициенты усиления могут попасть в одну из трех областей.

1. $8K_a > K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения в (4.5) отрицательны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \min \left(\frac{1}{2} K_\omega, \frac{1}{2\theta_1} K_\omega, \frac{1}{2\theta_2} K_\omega \right).$$

Отсюда в силу условия, задаваемого случаем I, получаем

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_2} K_\omega.$$

2. $8\theta_2 K_a < K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости определяется из выражения

$$\xi = \frac{1}{2} \min \left(K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_1} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_1 K_a}, \frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

Можно показать, что

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(K_\omega - \sqrt{K_\omega^2 - 8K_a} \right).$$

3. $8K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (4.5) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 .

Однако наибольший интерес представляет случай, когда $\xi_1 = \xi_2$, что дает

$$K_\omega^2 = \frac{8\theta_2^2}{2\theta_2 - 1} K_a,$$

или, возвращаясь к исходным обозначениям,

$$k'_a = \frac{2\theta_2 - 1}{8\theta_2^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (4.6)$$

На рис. 3 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(1, 1.5, 2)$ кг·м², находящегося на орбите наклонением 30° и высотой 350 км и парабола (4.6).

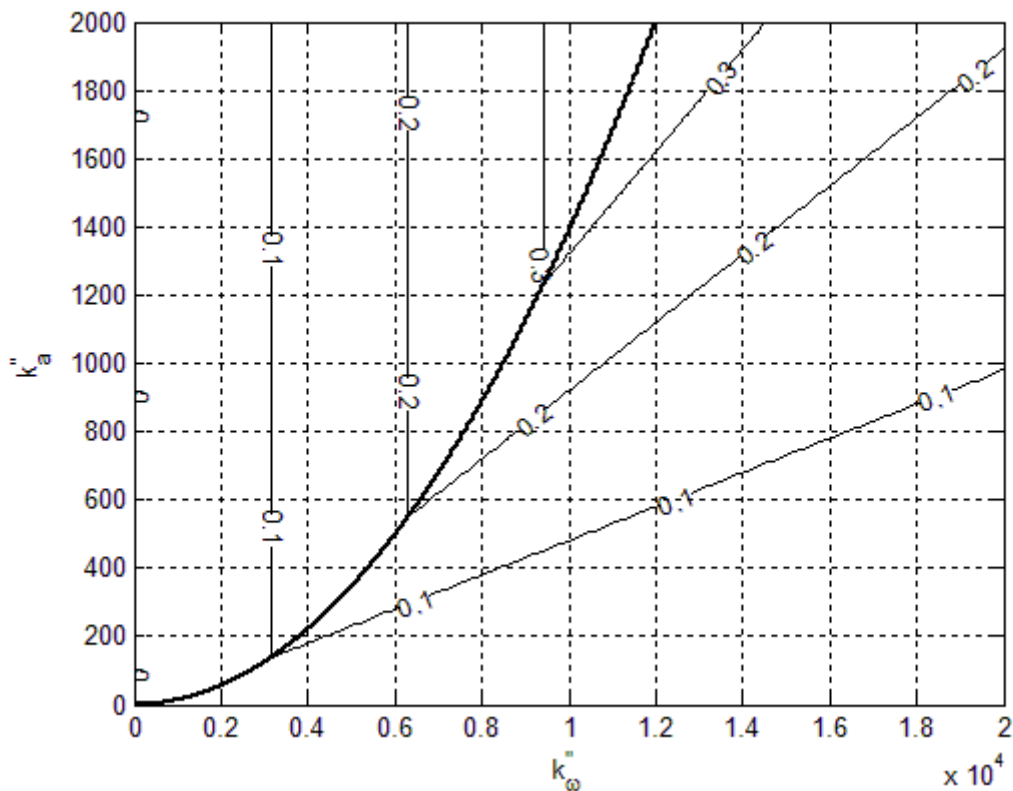


Рис. 3. Выбор оптимальных коэффициентов усиления.

Рис. 3 раскрывает смысл параболы (4.6) – она указывает на оптимальное соотношение параметров k'_a и k'_ω . Выбирая значения коэффициентов на параболе и задаваясь ограничением на величину дипольного момента катушек, можно определить степень устойчивости. Перейдем к рассмотрению других вариантов.

II. $\theta_1 > \theta_2 > 1$. В этом случае рассуждения, очевидно, принципиально не изменятся, оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{2\theta_1 - 1}{8\theta_1^2} \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (4.7)$$

III. $\theta_1 > 1 > \theta_2$. Такое соотношение верно для орбит с высоким наклонением. Проведем рассуждения, аналогичные варианту I.

1. $8\theta_2 K_a > K_\omega^2$. Все подкоренные выражения в (4.5) отрицательны, степень устойчивости

$$\xi_1 = \frac{1}{2\theta_1} K_\omega.$$

2. $8\theta_1 K_a < K_\omega^2$. В этом случае все подкоренные выражения положительны и степень устойчивости

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{K_\omega}{\theta_2} - \frac{1}{\theta_2} \sqrt{K_\omega^2 - 8\theta_2 K_a} \right).$$

3. $8\theta_1 K_a < K_\omega^2 < 8\theta_2 K_a$. В этом случае одно или два подкоренных выражения в (4.5) положительны, и степень устойчивости может быть равна либо ξ_1 , либо ξ_2 . Оптимальная парабола задается выражением

$$k'_a = \frac{1}{8\theta_1} \left(2 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \frac{B_0^2}{A\omega_0^2} (p + q) k_\omega'^2. \quad (4.8)$$

На рис. 4 представлены изолинии значений степени устойчивости для аппарата с тем же тензором инерции $\mathbf{J} = \text{diag}(1, 1.5, 2)$ кг·м², но находящегося на орбите наклонением 80°.

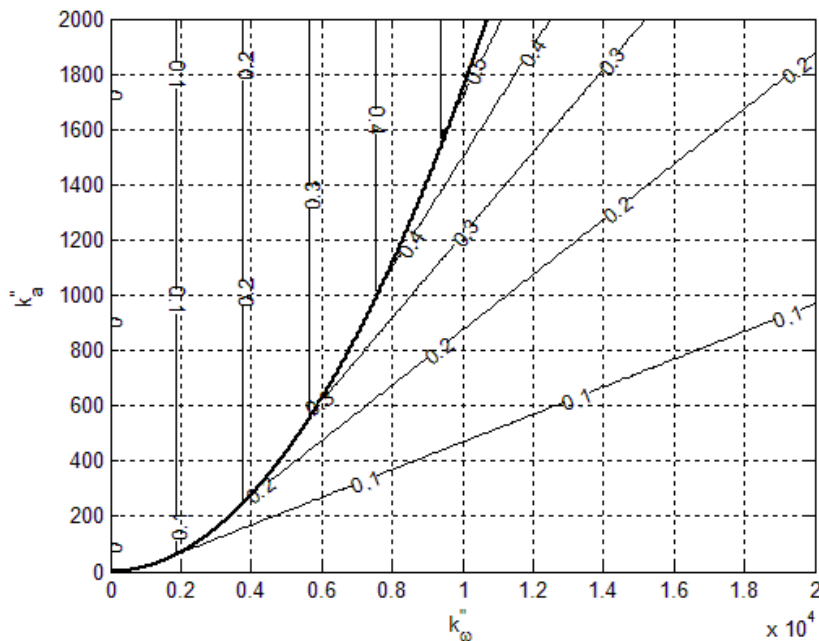


Рис. 4. Оптимальная парабола для орбиты с высоким наклонением.

Рис. 3 и рис. 4 схожи, из них видно, что на орбитах с высоким наклоном следует несколько увеличить долю демпфирующей компоненты в управлении. В целом соотношения (4.6) и (4.8) позволяют в зависимости от тензора инерции аппарата и наклона его орбиты выбирать оптимальные коэффициенты усиления.

Вернемся теперь к уравнениям (4.2). Приведенные выше рассуждения касались случая $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \kappa = O(1)$. Предположим теперь, что это соотношение не

выполняется, вместо него имеет место $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^n$, причем n может быть как больше 2, так и меньше. Обозначая $\mathbf{y} = (\alpha, \beta, \gamma)$, запишем уравнения (4.2) в виде

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \varepsilon_2 \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\omega}) + \varepsilon_2^{n-1} \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}),$$

$$\dot{\mathbf{y}} = \varepsilon_2 \mathbf{f}_3(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{y}).$$

Если $n > 2$, то уравнения, полученные формальным осреднением, верны с точностью ε_2 на интервале времени $u \ll 1/\varepsilon_2$, если же $n < 2$, то усреднение верно на интервале времени $u \ll 1/\varepsilon_2^{n-1}$. В первом случае на характерном интервале времени успевают заметно (на величину порядка 1) измениться только углы (в силу незначительного влияния управляющего момента), во втором случае – только скорости. При $n=2$ углы и скорости меняются одинаково, что и было рассмотрено выше. Однако осреднение можно провести в любом случае, и полученная система имеет положение равновесия и оказывается асимптотически устойчивой. Тогда [16] для исходной системы существует предельный цикл (также асимптотически устойчивый), и ее движение не отклоняется от положения равновесия усредненной системы более, чем на ε_2^k , где $k = \min(1, n-1)$. Но это позволяет использовать формальное осреднение на бесконечном интервале времени и распространить полученный выше результат на любое значение n .

5. Численное моделирование

Полученные в предыдущем разделе результаты верны, если параметры k'_a и k'_ω невелики и соизмеримы. В результате удастся показать асимптотическую устойчивость требуемого положения равновесия и найти оптимальное соотношение между параметрами управления за счет простых формул (4.6), (4.7) или (4.8). Распространим эти результаты на общий случай, пользуясь теорией Флоке [17]. Сначала построим численно изолинии характеристических показателей системы (4.3) для тех же параметров системы, которые были использованы при построении рис. 3.

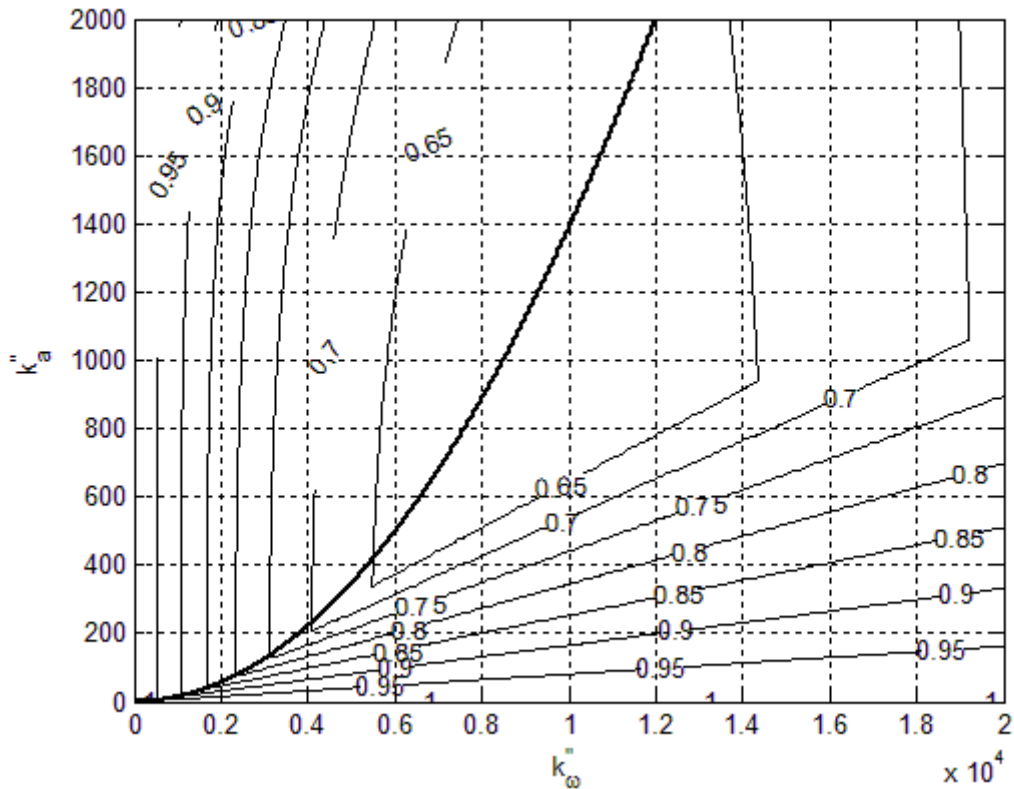


Рис. 5. Сравнение численных и аналитических результатов

Из рис. 5 видно, что с увеличением коэффициентов усиления наблюдается все увеличивающееся расхождение численных и аналитических результатов. Это объясняется тем, что по мере роста этих коэффициентов усиливается управляющий механический момент, что противоречит предположению о малом моменте. На рис. 6 представлены характеристические показатели для превалирования позиционной части момента.

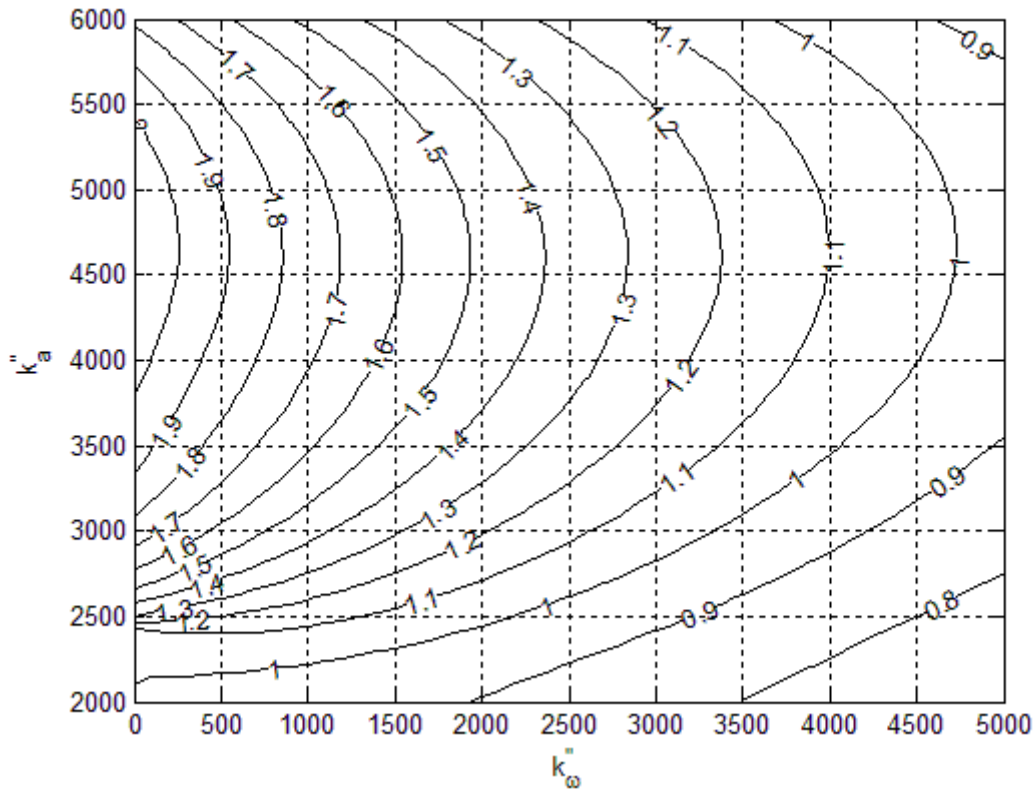


Рис. 6. Устойчивость при сильном позиционном моменте

Из рис. 6 видно, что существует область неустойчивости, которой нет в аналитических результатах. Это обусловлено тем, что численно можно рассматривать превалирование одной из компонент момента, тогда как аналитические результаты получены для примерно равных коэффициентов усиления. Неустойчивость вызвана “разбалтыванием” аппарата позиционным моментом: скорость, получаемая им на каждом этапе цикла управления, настолько велика, что демпфирующая компонента момента оказывается неспособна ее парировать. Впрочем, из рис. 4 также видно, что не следует допускать превалирования одной из компонент момента. Хотя в аналитических результатах устойчивость сохраняется, но степень устойчивости падает.

На рис. 7 приведен результат численного моделирования движения спутника. Коэффициенты усиления выбраны при помощи рис. 4, $k'_\omega = 9580$, $k'_a = 1510$. Наклонение орбиты – 70° .

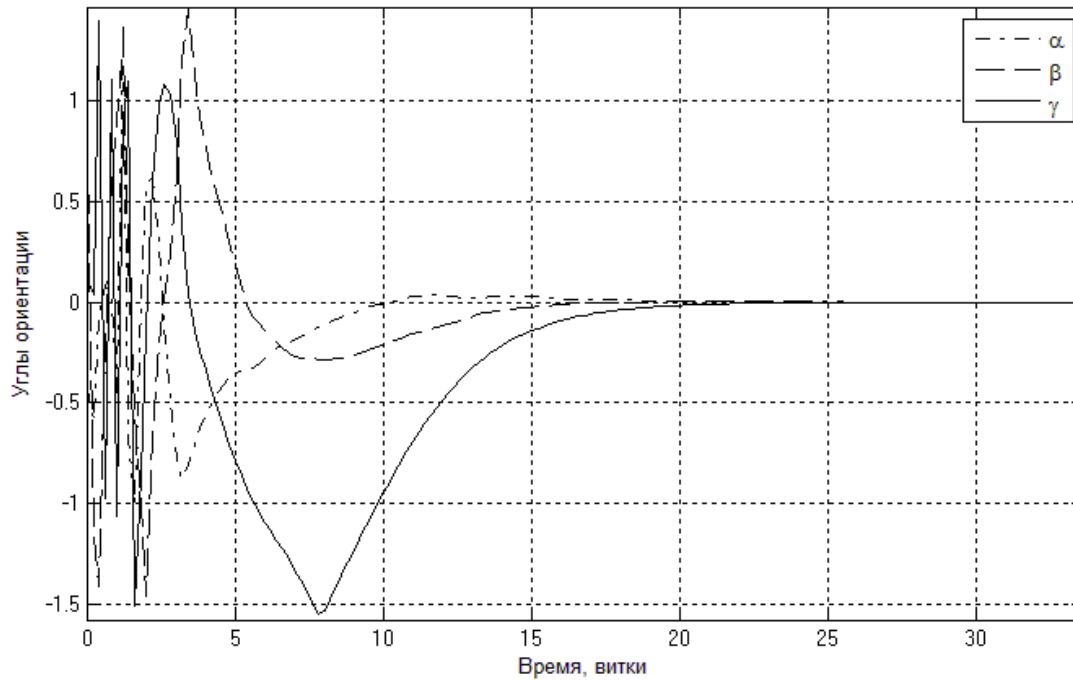


Рис. 7. Углы ориентации спутника

Отметим, что ограничение на величину механического момента имеет важное значение для успешности применения управления (рис. 6) и не является искусственным ограничением, необходимым для проведения аналитического исследования (введение малого параметра). Это накладывает ограничение на достижимую точность. В частности, для спутника с рассмотренными выше параметрами управляющий механический момент должен быть не более $5 \cdot 10^{-6}$ Нм. Этот момент оказывается лишь в несколько раз больше возмущающего гравитационного, в результате точность ориентации оказывается немногим лучше 10° . Для спутников других конфигураций, в частности, для кубсатов, точность может быть выше, до нескольких градусов. Однако для аппарата малой массы величина управляющего момента также должна быть меньше, чтобы сохранялось условие малого изменения кинетического момента по сравнению с его величиной. Для разрешения этой проблемы необходима модификация закона управления (2.5) – например, введение «весовой» матрицы \mathbf{J}^{-1} или другой или применение переменных коэффициентов усиления (в этом случае с падением рассогласования по скорости и положению величина управляющего момента не будет уменьшаться) [18].

Заключение

В работе исследована динамика спутника под управлением магнитной системы ориентации. Конструируется алгоритм управления, позволяющий добиться трехосной ориентации аппарата в инерциальном пространстве. Аналитически показывается демпфирование угловой скорости спутника до

нуля, при помощи методов осреднения показывается асимптотическая устойчивость требуемой ориентации. Построены кривые зависимости степени устойчивости от параметров алгоритма, представлен способ выбора оптимальных параметров управления.

Благодарности

Авторы выражают благодарность В.В. Сидоренко и С.С. Ткачеву за полезные замечания по работе.

Литература

1. Smirnov G., Ovchinnikov M., Miranda F. On the magnetic attitude control for spacecraft via the epsilon-strategies method // *Acta Astronautica*. V. 63. № 5-6. 2008. p. 690–694.
2. Ткаченко А.И. Магнитная стабилизация космического аппарата и эффект компенсации информационных ошибок // *Космические исследования*. Т. 50. № 1. 2012. с. 79–89.
3. Wang P., Shtessel Y., Wang Y. Satellite attitude control using only magnetorquers // *Proceedings of the Thirtieth Southeastern Symposium on System Theory*. Morgantown, West Virginia, 1998. p. 500–504.
4. Wisniewski R. Linear time varying approach to satellite attitude control using only electromagnetic actuation // *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. V. 23. № 4. 2000. p. 640–647.
5. Jafarboland M., Momeni H., Sadati N., Baclou H. Controlling the attitude of linear time-varying model LEO satellite using only electromagnetic actuation // *IEEE Aerospace Conference Proceedings*. Big Sky, Montana, 2002. p. 2221–2229.
6. Guelman M., Ortenberg F., Shiryaev A., Waler R. The Gurwin-Techsat Microsatellite: Six Years Successful Operation in Space // *4S Symposium: Small Satellites, Systems and Services*. La Rochelle, p. 62.
7. Белецкий В.В., Новогребельский А.Б. Существование устойчивых относительных равновесий искусственного спутника в модельном магнитном поле // *Астрономический журнал*. Т. 50. № 2. 1973. с. 327–335.
8. Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985.
9. Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.: Изд-во Московского университета, 1975.
10. Черноусько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов // *Прикладные математика и механика*. Т. 27. № 3. 1963. с. 473–483.
11. Stickler A.C., Alfriend K.T. Elementary Magnetic Attitude Control System // *Journal of Spacecraft and Rockets*. V. № 5. 1976. p. 282–287.

12. Овчинников М.Ю., Ролдугин Д.С., Карпенко С.О., Пеньков В.И. Исследование быстродействия алгоритма активного магнитного демпфирования // *Космические исследования*. Т. 50. № 2. 2012. с. 176–183.
13. Гребеников Е.А. Метод усреднения в прикладных задачах. М.: Наука, 1986.
14. Сарычев В.А., Сазонов В.В. Оценка влияния диссипативного магнитного момента от вихревых токов на быстрое вращение спутника // *Космические исследования*. Т. 20. № 2. 1982. с. 297–300.
15. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1958.
16. Арнольд В.И., Нейштадт А.И., Козлов В.В. *Динамические системы-3* / под ред. В.И. Арнольда. М.: ВИНТИ, 1985.
17. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Едиториал УРСС, 2004.
18. Lovera M., Astolfi A. Global Magnetic Attitude Control of Spacecraft in the Presence of Gravity Gradient // *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*. V. 42. № 3. 2006. p. 796–805.