



Сычугова Е.П.

Решение уравнения
переноса методом конечных
элементов на
неструктурированных
треугольных сетках

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сычугова Е.П. Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 85. 24 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-85>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Е.П.Сычугова

**Решение уравнения переноса
методом конечных элементов
на неструктурированных
треугольных сетках**

Москва — 2013

Сычугова Е.П.

Решение уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках

Рассматривается проблема решения уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированной треугольной сетке.

Ключевые слова: уравнение переноса, метод конечных элементов, неструктурированная треугольная сетка, метод дискретных ординат

Elena Pavlovna Sychugova

Discontinuous Finite Element Method for Solving the Transport Equation on an Unstructured Grid of Triangular Cells

The problem of solving the transport equation by the discontinuous finite element method on an unstructured grid of triangular cells is considered.

Key words: transport equation, discontinuous finite element method, unstructured grid of triangular cells, discrete-ordinates method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 13-01-00870 А.

Оглавление

Введение	3
1. Метод конечных элементов в одномерной плоской геометрии	4
1.1 Постановка задачи	4
1.2 Аппроксимация уравнения переноса в одномерной геометрии с помощью взвешенных невязок.....	5
1.3 Результаты тестовых расчетов.....	8
2. Метод конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках	10
2.1 Постановка задачи	10
2.2 Аппроксимация уравнения переноса в двумерной геометрии с помощью взвешенных невязок.....	11
2.3 Алгоритм решения на неструктурированной треугольной сетке.	18
2.4 Результаты тестовых расчетов.....	20
Библиографический список.....	24

Введение

В настоящее время возникла потребность в высокоточном численном решении уравнения переноса на мелких неструктурированных тетраэдральных сетках, детально описывающих расчетную область в трехмерной X-Y-Z геометрии. В России нет отечественных программ, позволяющих проводить такие расчеты. В США был предложен метод конечных элементов DFEM [1] (Discontinuous Finite Element Method) с аппроксимацией по Галеркину для решения уравнения переноса на тетраэдральных и на шестигранных неструктурированных сетках на базе приближения дискретных ординат [2], и на его основе разработана программа ATILLA. Кроме того, разработан балансный метод характеристического типа произвольно высокого порядка (АНОТ-С) [3], и на его основе разработана программа АНОТ-С-UG на языке СИ.

В нашей стране широко развит только балансный метод решения уравнения переноса на структурированных сетках. Этот метод использует точные *балансные* уравнения внутри каждой ячейки сетки и предполагает непрерывность пространственных моментов углового потока на ее гранях. При этом, как правило, возникают разрывы аппроксимации решения в узлах сетки, которые никак не учитываются. Соответствующие этому методу взвешенные схемы («алмазная», Θ -WDD, AWDD, LN, LC и др.) различаются системой линейных уравнений, в которую входят одно или несколько точных *балансных* уравнений относительно моментов решения по пространству и дополнительные «взвешенные» соотношения, необходимые для получения положительного решения. Такие методы алгоритмически просты и позволяют вычислять интегральные параметры системы (например, Кэфф, скорость реакций и т.д.) с достаточной степенью точности на структурированной сетке в трехмерной геометрии.

Основная идея Метода Конечных Элементов (МКЭ) [1] заключается в нахождении решения уравнения переноса в каждой ячейке (или на конечном элементе) с учетом граничных условий так, что решение является разрывной функцией вдоль граней ячейки. Для этого используются разложение решения в ячейке в ряд по пространственным базисным функциям и аппроксимация уравнения переноса с корректным учетом разрывов решения на ее границе. Если пространственные интегралы от невязки уравнения переноса с линейно независимыми весовыми функциями приравнять к нулю, то получается система линейных уравнений относительно коэффициентов разложения. Существенным является то, что за решение в узле принимается его предельное значение при приближении к нему в направлении распространения частиц.

Спрашивается, какой метод точнее? Какой метод алгоритмически проще для решения уравнения переноса на неструктурированных тетраэдральных сетках? Ответить можно только после проведения сравнительных численных экспериментов.

Данная работа посвящена решению уравнения переноса методом конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках. Для того чтобы лучше разобраться в тонкостях этого метода, сначала рассматривается МКЭ для решения уравнения переноса в плоской одномерной геометрии с линейными базисными функциями и с весовыми функциями двух типов: полиномиальными и базисными. Приводятся результаты расчетов одномерной тестовой задачи с вакуумом [4]. Во второй части рассматривается проблема решения уравнения переноса на неструктурированной треугольной сетке методом конечных элементов. Приводятся численные результаты, полученные МКЭ и LN методом с использованием неоднородной задачи с отражателем и вакуумом [5].

1. Метод конечных элементов в одномерной плоской геометрии

1.1 Постановка задачи

Запишем краевую задачу для уравнения переноса частиц в одномерной плоской геометрии (азимутально независимая задача) на интервале $[0, x_B]$ вдоль оси X для энергетической группы g ($g = 1, 2, \dots, NG$):

$$\mu \frac{d\Psi^g}{dx} + \Sigma_T^g(x) \cdot \Psi^g(x, \mu) = Q^g(x, \mu) \quad (1.1)$$

относительно функции плотности потока частиц $\Psi^g(x, \mu)$, летящих в направлении $\vec{\Omega}$:

$$\mu = \cos \theta = (\vec{\Omega} \cdot \vec{n}_x), \quad -1 < \mu < 1,$$

где θ – угол между вектором $\vec{\Omega}$ и осью X , \vec{n}_x – внешняя нормаль к оси X . В уравнение (1.1) входит $\Sigma_T^g(x)$ – полное макроскопическое сечение в группе g и функция $Q^g(x, \mu)$ – правая часть уравнения переноса, состоящая из источника межгрупповых переходов, источника деления и заданного внутреннего источника. На границе Γ интервала $[0, x_B]$ задаются нулевые значения углового потока для направлений внутрь области

$$\Psi_{|\Gamma, (\Omega \cdot \vec{n}_x) < 0}^g(\mu) = 0 \quad (1.2)$$

либо условия отражения.

Для решения этой задачи используется метод дискретных ординат по угловой переменной в сочетании с методом конечных элементов по пространственной переменной.

1.2 Аппроксимация уравнения переноса в одномерной геометрии с помощью взвешенных невязок

Запишем уравнение переноса (1.1) с использованием дискретных ординат:

$$\mu_m \frac{d\Psi_m}{dx} + \Sigma_T(x) \cdot \Psi_m(x) = Q_m(x), \quad (1.3)$$

где индексу m соответствует направление полета частиц, заданное направляющим косинусом μ_m , $m=1,2,\dots,M$ из квадратурного набора, индекс номера группы g опущен. Формулы МКЭ выводятся путем аппроксимации уравнения переноса с помощью взвешенных невязок [6]. Введем пространственную сетку. На интервале $[0, x_B]$ выберем $I+1$ узлов $\{x_i\}$, $x_1=0, x_{I+1}=x_B$ так, чтобы свойства среды внутри каждого интервала были постоянны. Пусть каждый i -тый интервал является конечным элементом с номером i . Сопоставим ему функцию $\psi_{m,i}(x)$, аппроксимирующую точное решение $\Psi_m(x)$ уравнения (1.3) внутри интервала и равную нулю вне него. Тогда глобальное решение $\psi_m(x)$ может быть записано следующим образом:

$$\psi_m(x) = \sum_{i=1}^I \psi_{m,i}(x).$$

Функция $\psi_m(x)$ является разрывной на концах интервалов пространственной сетки. Определим аппроксимацию $\psi_{m,i}(x)$ внутри i -того интервала с помощью линейно-независимого набора двух линейных базисных функций $L_i^k(x)$:

$$\psi_{m,i}(x) = \sum_{k=1}^2 \psi_{m,i}^k L_i^k(x), \quad (1.4)$$

где k – номер одного из двух концов i -того интервала. Линейный полином $L_i^k(x)$ равен единице, если на интервале i $x = x_k$, и равен нулю, если $x \neq x_k$ (рис. 1).

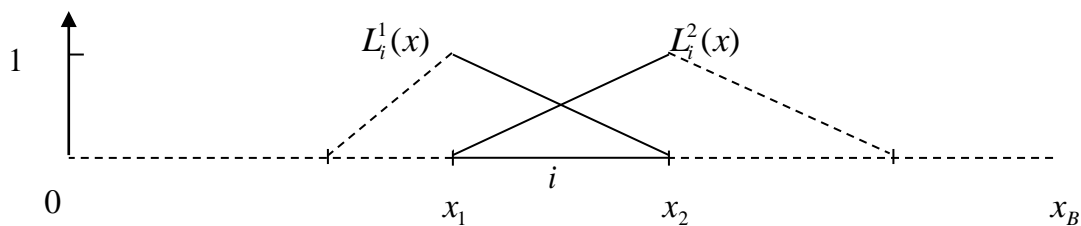


Рис. 1. Конечный элемент, соответствующий i -тому интервалу сетки, и его линейные базисные функции

Полином $L_i^k(x)$ является многочленом Лагранжа и задается на элементе $[x_1, x_2]$ по формулам:

$$L_i^1(x) = -\frac{x-x_2}{x_2-x_1}, \quad L_i^2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \quad (1.5)$$

Неизвестные коэффициенты $\psi_{m,i}^k$ можно интерпретировать как значения аппроксимируемого решения $\psi_{m,i}(x)$ в точках x_k i -того интервала.

Аналогичным образом вводится аппроксимация $q_{m,i}(x)$ правой части $Q_m(x)$ уравнения (1.3) внутри i -того интервала:

$$q_{m,i}(x) = \sum_{k=1}^2 q_{m,i}^k L_i^k(x). \quad (1.6)$$

Для завершения описания пространства глобальных функций необходимо однозначно определить значение аппроксимируемого потока на концах интервала. Существенным является предположение о том, что значение потока на конце интервала является его пределом при приближении к концу в том направлении, в котором частицы летят.

В соответствии с приведенным выше определением пространства, в котором аппроксимируется точное решение, имеется $2 \cdot I$ неизвестных, которые должны быть найдены для каждого направления m и группы g , где I – полное число интервалов. Поэтому необходимо получить $2 \cdot I$ уравнений для этих неизвестных. Достаточно построить систему из двух уравнений относительно двух неизвестных на заданном интервале, полагая, что поток на входящем конце интервала известен из граничных условий или из предыдущих вычислений в примыкающем интервале. Входящим концом интервала является тот его конец, через который поток частиц в него входит. Входящий конец для одного интервала является выходящим концом для примыкающего. Определение входящего конца зависит от рассматриваемого направления μ_m .

Для получения системы двух уравнений для двух неизвестных на i -том интервале необходимо определить невязку уравнения. Приведем общее выражение для невязки с использованием следующих параметров γ_k ($k=1, 2$):

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{поток входит через } x_k; \\ 0, & \text{поток выходит через } x_k. \end{cases}$$

Подставим аппроксимацию углового потока (1.4) и члена источника (1.6) в уравнение (1.3) для того, чтобы получить выражение для невязки на интервале i для направления m :

$$R_{m,i}(x) = \mu_m \frac{d\psi_{m,i}(x)}{dx} + \mu_m \gamma_2 [\psi_{\mathbf{B}_{m,i}}(x_2) - \psi_{m,i}(x_2)] \delta(x - x_2) + \mu_m \gamma_1 [\psi_{m,i}(x_1) - \psi_{\mathbf{B}_{m,i}}(x_1)] \delta(x - x_1) + \Sigma_T(x) \cdot \psi_{m,i}(x) - q_{m,i}(x). \quad (1.7)$$

В это выражение входит Дельта-функция Дирака, возникающая вследствие скачка разрывной функции. Для того чтобы учесть разрывы потока, в выражение (1.7) введено обозначение $\psi_{\mathbf{B}_{m,i}}(x_k)$, которое определяется как граничный поток направления m через точку x_k i -того интервала.

Невязка $R_{m,i}(x)$ не может быть тождественно равной нулю для функции $\psi_{m,i}(x)$, так как вряд ли точное решение может быть задано полиномами низкого порядка. Поэтому в МКЭ вводится набор из двух линейно независимых весовых функций $W_j(x)$, $j = 1, 2$, для которых требуется выполнение следующих условий:

$$\int_{x_1}^{x_2} R_{m,i}(x) W_j(x) dx = 0, \quad j = 1, 2. \quad (1.8)$$

Выражение (1.8) представляет собой линейную алгебраическую систему двух уравнений относительно двух неизвестных $\psi_{m,i}^k$. При надлежащем выборе весовых функций эта система невырожденная и разрешима.

В случае полиномиального набора весовыми функциями являются 1 и $(x - x_c)$, где $x_c = 0.5 * (x_1 + x_2)$ – центр тяжести i -того интервала. Запишем систему уравнений (1.8), полученную в результате интегрирования с полиномиальными весовыми функциями. Для $\mu_m > 0$ имеем $\Delta x = x_2 - x_1$, и полиномиальная система имеет вид:

$$\begin{cases} \Sigma_{T,i} \frac{\Delta x}{2} \psi_{m,i}^1 + (\mu_m + \Sigma_{T,i} \frac{\Delta x}{2}) \psi_{m,i}^2 = \frac{\Delta x}{2} q_{m,i}^1 + \frac{\Delta x}{2} q_{m,i}^2 + \mu_m \psi_{\mathbf{B}_{m,i}}^1 \\ (\mu_m + \Sigma_{T,i} \frac{\Delta x}{6}) \psi_{m,i}^1 - \Sigma_{T,i} \frac{\Delta x}{6} \psi_{m,i}^2 = \frac{\Delta x}{6} q_{m,i}^1 - \frac{\Delta x}{6} q_{m,i}^2 + \mu_m \psi_{\mathbf{B}_{m,i}}^1 \end{cases} \quad (1.9)$$

Решение системы (1.9) имеет вид:

$$\begin{aligned} \psi_{m,i}^1 &= \frac{\psi_{\mathbf{B}_{m,i}}^1 (1 + \frac{2}{3} f_x) + q_{m,i}^1 \frac{\Delta x}{6} \frac{(1 + f_x)}{\mu_m} - q_{m,i}^2 \frac{\Delta x}{6 \mu_m}}{1 + \frac{2}{3} f_x + \frac{f_x^2}{6}}; \\ \psi_{m,i}^2 &= \frac{\psi_{\mathbf{B}_{m,i}}^1 (1 - \frac{1}{3} f_x) + q_{m,i}^2 \frac{\Delta x}{2 \mu_m} (1 + \frac{f_x}{3}) + q_{m,i}^1 \frac{\Delta x}{2 \mu_m}}{1 + \frac{2}{3} f_x + \frac{f_x^2}{6}}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Здесь введено обозначение:

$$f_x = \frac{\sum_{T,i} \cdot \Delta x}{\mu_m}.$$

В случае базисного набора весовые функции совпадают с базисными функциями, т.е. в качестве весов используются полиномы Лагранжа $L_i^k(x)$ для $k=1,2$. Этот способ соответствует аппроксимации по Галеркину. Запишем систему уравнений, полученную в результате интегрирования с базисными весовыми функциями для $\mu_m > 0$:

$$\begin{cases} \left(\frac{\mu_m}{2} + \sum_{T,i} \frac{\Delta x}{3}\right)\psi_{m,i}^1 + \left(\frac{\mu_m}{2} + \sum_{T,i} \frac{\Delta x}{6}\right)\psi_{m,i}^2 = \frac{\Delta x}{3} q_{m,i}^1 + \frac{\Delta x}{6} q_{m,i}^2 + \mu_m \psi_{\mathbf{B},i}^1 \\ \left(-\frac{\mu_m}{2} + \sum_{T,i} \frac{\Delta x}{6}\right)\psi_{m,i}^1 + \left(\frac{\mu_m}{2} + \sum_{T,i} \frac{\Delta x}{3}\right)\psi_{m,i}^2 = \frac{\Delta x}{6} q_{m,i}^1 + \frac{\Delta x}{3} q_{m,i}^2 \end{cases} \quad (1.11)$$

Решение системы уравнений (1.11) совпадает с решением (1.9). Это означает, что **выбор весовых функций не влияет на решение МКЭ**.

Формула (1.10) не требует больших вычислительных затрат. Для того чтобы сравнить решение методом конечных элементов с решением, полученным балансными методами, необходимо дополнительно вычислить значения плотности потока, соответствующие центральным точкам интервала, которые в одномерной геометрии равны полусумме значений на концах интервалов.

Как следует из (1.10), отрицательные потоки могут появляться, если, например, на i -том интервале отсутствует источник и значение $f_x > 3$ вследствие использования грубой расчетной сетки. Однако это происходит настолько редко, что алгоритм коррекции потока не требуется. Для получения положительного решения достаточно измельчить сетку.

В качестве граничных условий могут использоваться условия отражения. В этом случае значение входящего потока на границе приравнивается к значению выходящего потока, вычисленного в этой же точке в направлении, соответствующем зеркальному отражению.

1.3 Результаты тестовых расчетов

Численное сравнение результатов расчета с использованием метода конечных элементов, взвешенной «алмазной» схемы DD0 с коррекцией отрицательных потоков “fix-up” [2] и LN метода [7] проводилось с использованием пакета РЕАКТОР [8] в одномерной плоской геометрии.

Рассматривалась задача №1, которая была специально разработана для иллюстрации недостатков взвешенной «алмазной» схемы [4]. Это однорупповая задача в S_8 приближении дискретных ординат с изотропным рассеянием. Плоский слой толщиной 8 см состоит из четырех областей с различным составом. Геометрия показана на рис. 2. Используется равномерная пространственная сетка, состоящая из 40 интервалов.

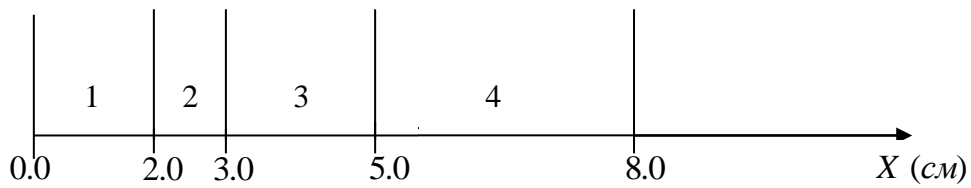


Рис. 2. Геометрия задачи

В табл. 1 приведены макросечения четырех веществ, показанных на рис. 2. В области с веществом 1 задан изотропный источник, равный 50.0, и в области $5.0 \text{ см} < x < 6.0 \text{ см}$ задан изотропный источник, равный 1.0. На левой границе задано зеркальное отражение, на правой границе - вакуум.

Таблица 1

Макросечения

	Вещество 1 (см^{-1})	Вещество 2 (см^{-1})	Вещество 3 (см^{-1})	Вещество 4 (см^{-1})
Σ_T	50.0	5.0	0.0	0.1
$\Sigma_{s,0}$	0.0	0.0	0.0	0.9
$\nu\Sigma_f$	0.0	0.0	0.0	0.0

Результаты численных расчетов показаны на рис. 3.

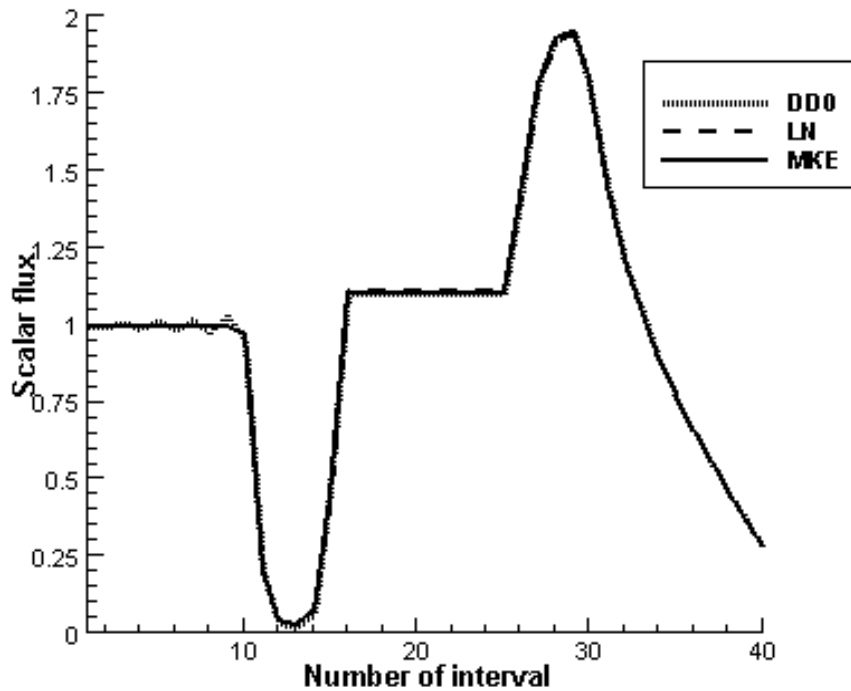


Рис. 3. Скалярный поток задачи 1, вычисленный по DD0 и LN схемам и по МКЭ.

Скалярные потоки близки между собой. Тем не менее, DD0 схема уступает по точности LN схеме и методу МКЭ, т.к. порождает нефизические осцилляции потока в первой области с большим значением полного сечения.

Для сравнения в табл. 2 приводятся максимальные и минимальные значения скалярного потока, а также значения в центре расчетной области, полученные в расчетах разными методами.

Таблица 2

Значения скалярного потока

	DD0	LN	МКЭ
Минимальное значение в веществе 2 (интервал 13)	0.02135	0.03229	0.03035
Промежуточное значение в веществе 3 (интервалы 16 – 25)	1.10715	1.11248	1.10711
Максимальное значение в веществе 4 (интервал 29)	1.95216	1.94328	1.95050

Из табл. 2 следует, что наибольший разброс значений дают DD0 и LN схемы. МКЭ принимает промежуточные значения: ближе к LN схеме в минимуме, ближе к DD0 схеме в максимуме и практически совпадает с DD0 схемой в центральной вакуумной области (вещество 3).

Из полученных результатов расчетов задачи №1 можно сделать вывод о том, что линейный метод конечных элементов не уступает по точности балансным схемам DD0 и LN и может быть использован для решения уравнения переноса в двумерной геометрии на неструктурированных сетках.

2. Метод конечных элементов на неструктурированных треугольных сетках

2.1 Постановка задачи

Запишем краевую задачу для уравнения переноса частиц в двумерной X-Y геометрии, заданную в выпуклой области G для энергетической группы g :

$$\mu \frac{d\Psi^g}{dx} + \eta \frac{d\Psi^g}{dy} + \Sigma_T^g(x, y) \cdot \Psi^g(x, y, \mu, \eta) = Q^g(x, y, \mu, \eta) \quad (2.1)$$

относительно функции плотности потока частиц $\Psi^g(x, y, \mu, \eta)$, летящих в направлении $\vec{\Omega} = (\mu, \eta, \xi)$ ($\mu^2 + \eta^2 + \xi^2 = 1$):

$$\mu = (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_x),$$

$$\eta = \sqrt{1 - \mu^2} \cos \varphi = (\vec{\Omega} \cdot \vec{e}_y),$$

где φ – угол вращения вокруг оси μ , так, что $d\tilde{\Omega} = d\mu d\varphi$, \bar{e}_x и \bar{e}_y – единичные нормали к осям X и Y соответственно. Функция $\Psi^g(x, y, \mu, \eta)$ симметрична по φ , и для решения нужна только полусфера направлений.

В уравнение (2.1) входит $\Sigma_T^g(x, y)$ – полное макроскопическое сечение в группе g и функция $Q^g(x, y, \mu, \eta)$ – правая часть уравнения переноса, состоящая из источника межгрупповых переходов, источника деления и заданного внутреннего источника. На границе Γ интервала области G задаются нулевые значения углового потока для направлений внутрь области:

$$\Psi_{|\Gamma, (\Omega, \eta) < 0}^g(\mu, \eta) = 0 \quad (2.2)$$

либо условия отражения.

Для решения задачи (2.1) – (2.2) используется метод дискретных ординат по угловой переменной в сочетании с линейным методом конечных элементов по пространственной переменной.

2.2 Аппроксимация уравнения переноса в двумерной геометрии с помощью взвешенных невязок

Запишем уравнение переноса (2.1) с использованием дискретных ординат:

$$\mu_m \frac{d\Psi_m}{dx} + \eta_m \frac{d\Psi_m}{dy} + \Sigma_T(x, y) \cdot \Psi_m(x, y) = Q_m(x, y), \quad (2.3)$$

где индекс номера группы g опущен и индексу m ($m=1, 2, \dots, M$) соответствует дискретное направление $\bar{\Omega}_m = (\mu_m, \eta_m)$ из квадратурного набора ES_n [9] с весами ω_m , нормализованными так, что $\sum_{m=1}^M \omega_m = 1$.

Формулы МКЭ выводятся путем аппроксимации уравнения переноса с помощью взвешенных невязок [6]. Построим неструктурированную треугольную сетку в выпуклой области G . Неструктурированной треугольной сеткой называется такая сетка, у которой каждая вершина треугольника может быть общей вершиной произвольного числа треугольников, но каждая сторона треугольника может быть общей только с одним другим треугольником сетки [10]. Пусть разбиение области G на треугольники удовлетворяет условию неизменности свойств среды внутри каждого треугольника.

Пусть вся область разбивается на I треугольников, и каждый i –тый треугольник является конечным элементом с номером i . Сопоставим ему функцию $\psi_{m,i}(x, y)$, аппроксимирующую точное решение $\Psi_m(x, y)$ уравнения (2.3) внутри треугольника и равную нулю вне него. Тогда глобальное решение $\Psi_m(x, y)$ может быть записано следующим образом:

$$\psi_m(x, y) = \sum_{i=1}^I \psi_{m,i}(x, y).$$

Функция $\psi_m(x, y)$ является разрывной на границе треугольников сетки. Определим аппроксимацию $\psi_{m,i}(x, y)$ внутри i -того треугольника с помощью линейно-независимого набора трех линейных базисных функций $L_i^k(x, y)$, разлагая в ряд по линейным многочленам Лагранжа:

$$\psi_{m,i}(x, y) = \sum_{k=1}^3 \psi_{m,i}^k L_i^k(x, y), \quad (2.4)$$

где k – номер одной из трех вершин i -того треугольника. Полином $L_i^k(x, y)$ равен единице, если в i -том треугольнике, $x = x_k$ и $y = y_k$, и равен нулю, если $x \neq x_k$ и $y \neq y_k$ (рис. 4).

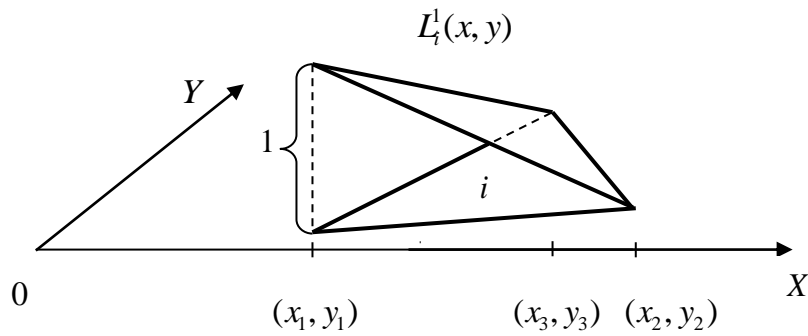


Рис. 4. Конечный элемент, соответствующий i -тому треугольнику сетки, и его линейная базисная функция $L_i^1(x, y)$

Многочлены Лагранжа $L_i^k(x, y)$ задаются в декартовых координатах на i -том элементе с вершинами в точках (x_1, y_1) , (x_2, y_2) и (x_3, y_3) по формулам:

$$\begin{aligned} L_i^1(x, y) &= \frac{(x-x_2)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y-y_2)}{(x_3-x_2)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)} \\ L_i^2(x, y) &= \frac{(x-x_3)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y-y_3)}{(x_1-x_3)(y_3-y_2)-(x_3-x_2)(y_1-y_3)} \\ L_i^3(x, y) &= \frac{(x-x_1)(y_2-y_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)}{(x_2-x_1)(y_1-y_3)-(x_1-x_3)(y_2-y_1)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Неизвестные коэффициенты $\psi_{m,i}^k$ можно интерпретировать как значения аппроксимируемого решения $\psi_{m,i}(x, y)$ в точках (x_k, y_k) i -того треугольника. Так как угловой поток задается в каждом треугольнике независимо, существует

двусмысленное определение углового потока на сторонах сетки. Для однозначного определения значений аппроксимируемого потока на сторонах треугольника в МКЭ значения потока на каждой стороне треугольника являются пределом потока при приближении к ней в том направлении, в котором частицы летят.

Аналогичным образом вводится аппроксимация $q_{m,i}(x, y)$ правой части $Q_m(x, y)$ уравнения (2.3) внутри i -того треугольника:

$$q_{m,i}(x, y) = \sum_{k=1}^3 q_{m,i}^k L_i^k(x, y). \quad (2.6)$$

В соответствии с определением пространства, в котором аппроксимируется точное решение, имеется $3 \cdot I$ неизвестных, которые должны быть найдены для каждого направления m и группы g , где I – полное число треугольников. Поэтому необходимо получить $3 \cdot I$ уравнений для этих неизвестных. Достаточно построить систему из трех уравнений относительно трех неизвестных на заданном треугольнике, полагая, что поток на входящей стороне треугольника известен из граничных условий или из предыдущих вычислений в примыкающем треугольнике. Входящей стороной треугольника является та его сторона, через которую поток частиц входит в него. Входящая сторона для одного треугольника является выходящей стороной для примыкающего к нему треугольника. Определение входящей стороны зависит от рассматриваемого направления (μ_m, η_m) . Имеются два различных случая освещенности треугольника. На рис. 5 показано взаимное расположение треугольника и направления $\vec{\Omega}_m$, при котором только одна его сторона является входящей. Кроме того, показана типичная нумерация вершин (против часовой стрелки) и соответствующих им противоположных сторон треугольника.

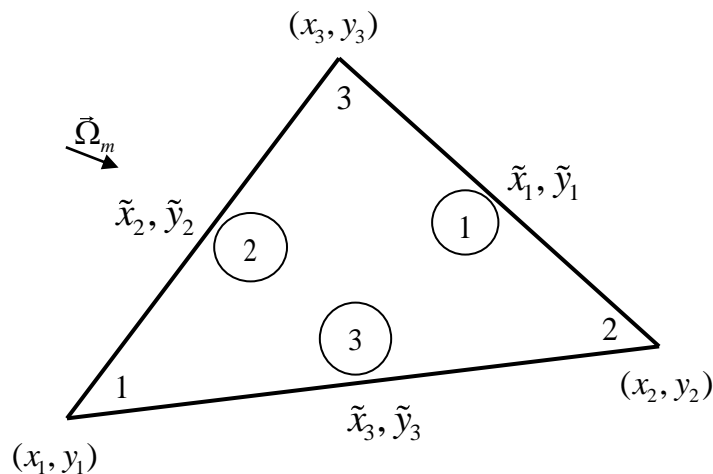


Рис. 5. Треугольник с одной входящей стороной под номером 2

На рис. 6 показан треугольник с двумя входящими сторонами для того же направления $\vec{\Omega}_m$.

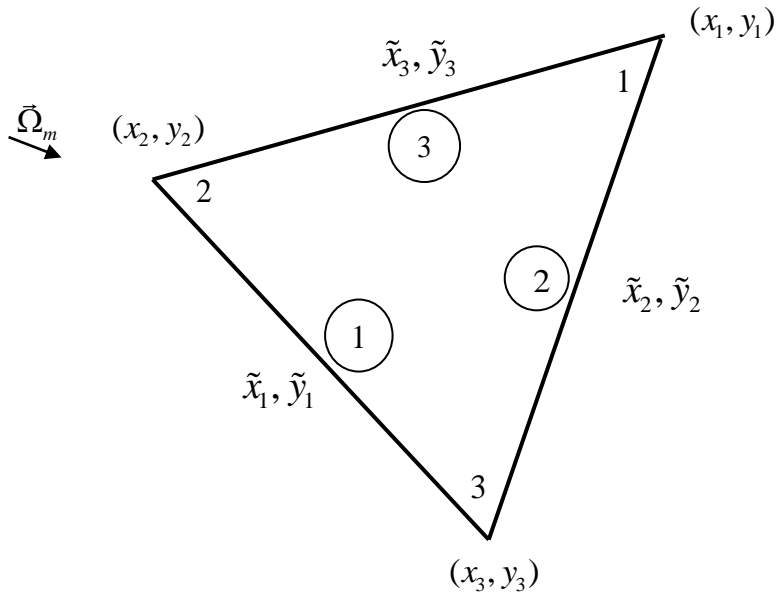


Рис. 6. Треугольник с двумя входящими сторонами с номерами 1 и 3

Уравнения для сторон треугольника записываются следующим образом:

$$\tilde{x}_j: \quad x = x_j + \frac{\Delta x_j (y - y_j)}{\Delta y_j}, \quad (2.7a)$$

$$\tilde{y}_j: \quad y = y_j + \frac{\Delta y_j (x - x_j)}{\Delta x_j}, \quad (2.7b)$$

где $j=1, 2, 3$ и введены обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta y_1 &= y_2 - y_1, \Delta y_2 = y_3 - y_2, \Delta y_3 = y_1 - y_3, \\ \Delta x_1 &= x_2 - x_1, \Delta x_2 = x_3 - x_2, \Delta x_3 = x_1 - x_3. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для получения системы трех уравнений относительно трех неизвестных в i -том треугольнике необходимо записать невязку уравнения. Приведем общее выражение для невязки с использованием параметров γ_k ($k=1, 2, 3$). Пусть $\gamma_k=1$, если поток частиц входит в треугольник через сторону с номером k , и $\gamma_k=0$, если поток выходит из треугольника через сторону с номером k .

Подставим аппроксимацию углового потока $\psi_{m,i}(x, y)$ и правой части $q_{m,i}(x, y)$ в уравнение (2.3) и запишем выражение для невязки в треугольнике i для направления m :

$$\begin{aligned}
R_{m,i}(x, y) = & \mu_m \frac{\partial \psi_{m,i}(x, y)}{\partial x} + \eta_m \frac{\partial \psi_{m,i}(x, y)}{\partial y} + \\
& \Sigma_T(x, y) \cdot \psi_{m,i}(x, y) - q_{m,i}(x, y) + \\
& \mu_m \gamma_1 [\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) - \psi_{m,i}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)] \delta(x - \tilde{x}_1) + \\
& \mu_m \gamma_2 [\psi_{m,i}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) - \psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)] \delta(x - \tilde{x}_2) + \\
& \mu_m \gamma_3 [\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) - \psi_{m,i}(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)] \delta(x - \tilde{x}_3) + \\
& \eta_m \gamma_1 [\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) - \psi_{m,i}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)] \delta(y - \tilde{y}_1) + \\
& \eta_m \gamma_2 [\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) - \psi_{m,i}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)] \delta(y - \tilde{y}_2) + \\
& \eta_m \gamma_3 [\psi_{m,i}(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) - \psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)] \delta(y - \tilde{y}_3).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

В это выражение входит Дельта-функция Дирака, возникающая вследствие скачка разрывной функции. Для того чтобы учесть разрывы потока, в (2.9) введены обозначения входящего потока $\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ направления m через сторону k для i -того треугольника.

Невязка $R_{m,i}(x, y)$ не может быть тождественно равной нулю для функции $\psi_{m,i}(x, y)$, так как вряд ли точное решение может быть задано линейными многочленами. Потребуем равенства нулю интегралов по треугольнику от невязки с весовыми функциями, в качестве которых используются базовые функции $L_i^k(x, y)$, $k=1, 2, 3$ (метод Галеркина):

$$\iint_{cell} R_{m,i}(x, y) L_i^k(x, y) dx dy = 0, k = 1, 2, 3. \tag{2.10}$$

Выражение (2.10) представляет собой линейную алгебраическую систему трех уравнений относительно трех неизвестных $\psi_{m,i}^k$, $k=1, 2, 3$. Эта система невырожденная и разрешима аналитическим способом.

Перепишем выражение для невязки (2.9) с учетом разложений по многочленам Лагранжа решения (2.4) и правой части (2.6) внутри треугольника и входящего потока $\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k)$ на сторонах треугольника:

$$\begin{aligned}
\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) &= \psi_{\mathbf{B}m,i}^{2(1)} L_i^2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) + \psi_{\mathbf{B}m,i}^{3(1)} L_i^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \\
\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) &= \psi_{\mathbf{B}m,i}^{1(2)} L_i^1(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) + \psi_{\mathbf{B}m,i}^{3(2)} L_i^3(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2), \\
\psi_{\mathbf{B}m,i}(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) &= \psi_{\mathbf{B}m,i}^{1(3)} L_i^1(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3) + \psi_{\mathbf{B}m,i}^{2(3)} L_i^2(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где введены коэффициенты $\psi_{\mathbf{B}m,i}^{k(j)}$, которые можно интерпретировать как значения входящего потока в вершине k на стороне $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j)$. В (2.11) учтено, что многочлены Лагранжа принимают нулевые значения на соответствующих сторонах:

$$L_i^k(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) \equiv 0, k=1,2,3.$$

В результате получим следующее выражение для невязки:

$$\begin{aligned} R_{m,i}(x, y) = & \mu_m [\psi_{m,i}^1 \frac{\partial L_i^1}{\partial x} + \psi_{m,i}^2 \frac{\partial L_i^2}{\partial x} + \psi_{m,i}^3 \frac{\partial L_i^3}{\partial x}] + \eta_m [\psi_{m,i}^1 \frac{\partial L_i^1}{\partial y} + \psi_{m,i}^2 \frac{\partial L_i^2}{\partial y} + \psi_{m,i}^3 \frac{\partial L_i^3}{\partial y}] + \\ & \Sigma_T(x, y) \cdot [\psi_{m,i}^1 L_i^1 + \psi_{m,i}^2 L_i^2 + \psi_{m,i}^3 L_i^3] - [q_{m,i}^1 L_i^1 + q_{m,i}^2 L_i^2 + q_{m,i}^3 L_i^3] + \\ & \mu_m \gamma_1 [L_i^2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(1)} - \psi_{m,i}^2) + L_i^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(1)} - \psi_{m,i}^3)] \delta(x - \tilde{x}_1) + \\ & \mu_m \gamma_2 [L_i^1(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)(\psi_{m,i}^1 - \psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(2)}) + L_i^3(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)(\psi_{m,i}^3 - \psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(2)})] \delta(x - \tilde{x}_2) + \\ & \mu_m \gamma_3 [L_i^1(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(3)} - \psi_{m,i}^1) + L_i^2(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(3)} - \psi_{m,i}^2)] \delta(x - \tilde{x}_3) + \\ & \eta_m \gamma_1 [L_i^2(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(1)} - \psi_{m,i}^2) + L_i^3(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(1)} - \psi_{m,i}^3)] \delta(y - \tilde{y}_1) + \\ & \eta_m \gamma_2 [L_i^1(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(2)} - \psi_{m,i}^1) + L_i^3(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)(\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(2)} - \psi_{m,i}^3)] \delta(y - \tilde{y}_2) + \\ & \eta_m \gamma_3 [L_i^1(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)(\psi_{m,i}^1 - \psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(3)}) + L_i^2(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)(\psi_{m,i}^2 - \psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(3)})] \delta(y - \tilde{y}_3). \end{aligned}$$

Приведем окончательный вид системы линейных уравнений, при получении которой по формулам (2.10) используются барицентрические координаты [11]:

$$\left\{ \begin{aligned} & -(0.5A_{m,i}^{(1)} + \gamma_3 A_{m,i}^{(3)} + \gamma_2 A_{m,i}^{(2)})\psi_{m,i}^1 - 0.5(A_{m,i}^{(2)} + \gamma_3 A_{m,i}^{(3)})\psi_{m,i}^2 - 0.5(A_{m,i}^{(3)} + \gamma_2 A_{m,i}^{(2)})\psi_{m,i}^3 + \\ & \quad \Sigma_t(2\psi_{m,i}^1 + \psi_{m,i}^2 + \psi_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} = (2q_{m,i}^1 + q_{m,i}^2 + q_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} - \\ & \quad \gamma_3 A_{m,i}^{(3)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(3)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(3)}) - \gamma_2 A_{m,i}^{(2)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(2)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(2)}); \\ & -0.5(A_{m,i}^{(1)} + \gamma_3 A_{m,i}^{(3)})\psi_{m,i}^1 - (0.5A_{m,i}^{(2)} + \gamma_3 A_{m,i}^{(3)} + \gamma_1 A_{m,i}^{(1)})\psi_{m,i}^2 - 0.5(A_{m,i}^{(3)} + \gamma_1 A_{m,i}^{(1)})\psi_{m,i}^3 + \\ & \quad \Sigma_t(\psi_{m,i}^1 + 2\psi_{m,i}^2 + \psi_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} = (q_{m,i}^1 + 2q_{m,i}^2 + q_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} - \\ & \quad \gamma_3 A_{m,i}^{(3)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(3)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(3)}) - \gamma_1 A_{m,i}^{(1)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(1)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(1)}); \\ & -0.5(A_{m,i}^{(1)} + \gamma_2 A_{m,i}^{(2)})\psi_{m,i}^1 - 0.5(A_{m,i}^{(2)} + \gamma_1 A_{m,i}^{(1)})\psi_{m,i}^2 - (0.5A_{m,i}^{(3)} + \gamma_1 A_{m,i}^{(1)} + \gamma_2 A_{m,i}^{(2)})\psi_{m,i}^3 + \\ & \quad \Sigma_t(\psi_{m,i}^1 + \psi_{m,i}^2 + 2\psi_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} = (q_{m,i}^1 + q_{m,i}^2 + 2q_{m,i}^3) \frac{s_i}{4} - \\ & \quad \gamma_2 A_{m,i}^{(2)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(2)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{1(2)}) - \gamma_1 A_{m,i}^{(1)} (\psi_{\mathbf{B} m,i}^{3(1)} + 0.5\psi_{\mathbf{B} m,i}^{2(1)}). \end{aligned} \right. \quad (2.12)$$

В (2.12) величина s_i обозначает площадь i -того треугольника, которая вычисляется через координаты вершин по формуле:

$$s_i = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}. \quad (2.13)$$

В (2.12) величины $A_{m,i}^{(j)}$ вычисляются для сторон $j=1,2,3$ по формуле:

$$A_{m,i}^{(j)} = \mu_m \Delta y_{j+1} - \eta_m \Delta x_{j+1}, \quad (2.14)$$

если принять справедливыми тождества $\Delta x_4 \equiv \Delta x_1, \Delta y_4 \equiv \Delta y_1$.

Поясним смысл $A_{m,i}^{(j)}$ на примере величины $A_{m,i}^{(1)}$ для направления $\vec{\Omega}_m$ с положительными направляющими косинусами $\mu_m > 0, \eta_m > 0$ и для стороны с номером 1 треугольника i , изображенного на рис.7 в локальной системе координат $X'Y'$.

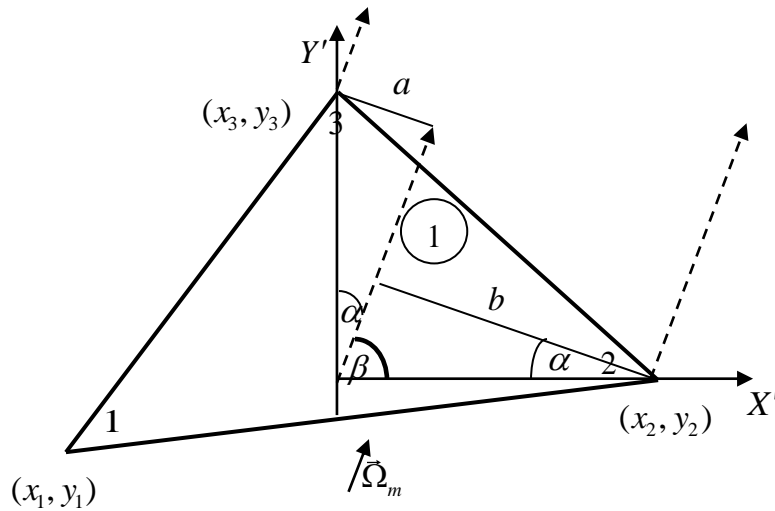


Рис. 7. Геометрический смысл величины $A_{m,i}^{(1)}$

Величина $A_{m,i}^{(1)}$ равна длине отрезка, перпендикулярного направлению $\vec{\Omega}_m$ и через который проходят частицы, выходящие из i -того треугольника через сторону 1 в направлении $\vec{\Omega}_m$, т.е.

$$A_{m,i}^{(1)} = a + b = \mu_m \Delta y_2 - \eta_m \Delta x_2. \quad (2.15)$$

В этом легко убедиться, если учесть равенство углов α , т.к. их образующие стороны взаимно перпендикулярны, а также справедливость формул:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta &= \eta_m / \mu_m, \Rightarrow \mu_m = \cos \beta, \eta_m = \sin \beta; \\ a &= \Delta y_2 \sin \alpha = \Delta y_2 \sin(\pi / 2 - \beta) = \mu_m \Delta y_2; \\ b &= -\Delta x_2 \cos \alpha = -\Delta x_2 \cos(\pi / 2 - \beta) = -\eta_m \Delta x_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Если $A_{m,i}^{(j)} > 0$, то частицы выходят из i -того треугольника через сторону j , если $A_{m,i}^{(j)} < 0$, то частицы входят в i -тый треугольник через сторону j .

Система уравнений (2.12) справедлива для всех случаев освещенности треугольника. Для ее решения используется прямой метод Гаусса-Жордана [12].

2.3 Алгоритм решения на неструктурированной треугольной сетке

При решении уравнения переноса (2.3) на сетке, состоящей из произвольных треугольников, используется массив координат узлов сетки $X(n)$ и $Y(n)$ для $n=1, \dots, N_{nod}$, где N_{nod} – полное число узлов. Кроме того, необходимо перенумеровать треугольники сетки $i=1, \dots, N_{elm}$ и присвоить номера отсутствующим треугольникам, которые «примыкают» к внешним сторонам треугольников, расположенных на границе области, начиная с номера $N_{elm} + 1$ и заканчивая номером $N_{elm} + N_B$, где N_B – число сторон на границе области.

Кроме того, для проведения расчетов необходимо перенумеровать вершины внутри каждого треугольника против часовой стрелки от 1 до 3 так, чтобы нумерация вершин вдоль общей стороны двух треугольников увеличивалась в противоположных направлениях, как показано на рис.8.

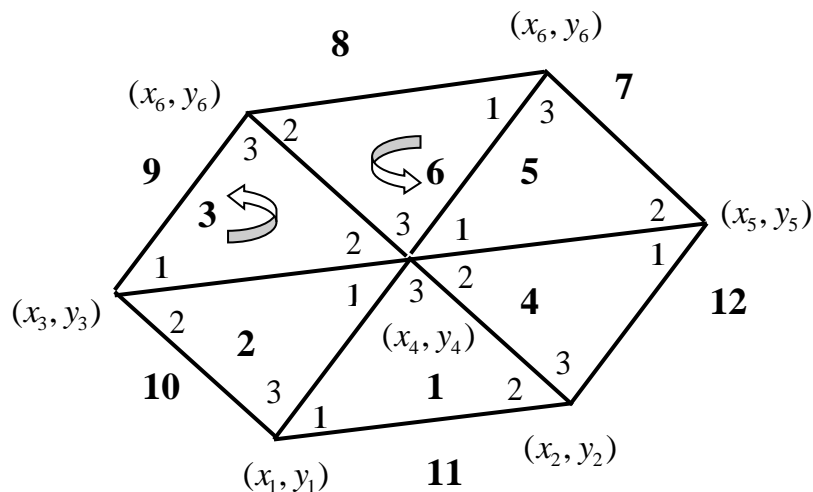


Рис. 8. Нумерация треугольников и вершин внутри треугольника

Назовем нумерацию вершин «непрерывной», если номера вершин соседних треугольников вдоль общей стороны совпадают с учетом перестановки. На рис.8 нумерация непрерывна, внутренний узел (x_4, y_4) является общим для шести треугольников. Такая же непрерывная нумерация будет, если во внутреннем узле число вершин треугольников кратно трем. Назовем такую сетку структурированной. Характерным свойством является то, что номера противоположных вершин в соседних треугольниках всюду совпадают.

Если в узле (x_4, y_4) находится, например, 4 треугольника, то у одной из сторон не будет «непрерывной» нумерации. На рис.9 показана такая сетка с

«разрывной» нумерацией вершин. Эта сетка является неструктурированной и требует дополнительного описания сторон треугольников.

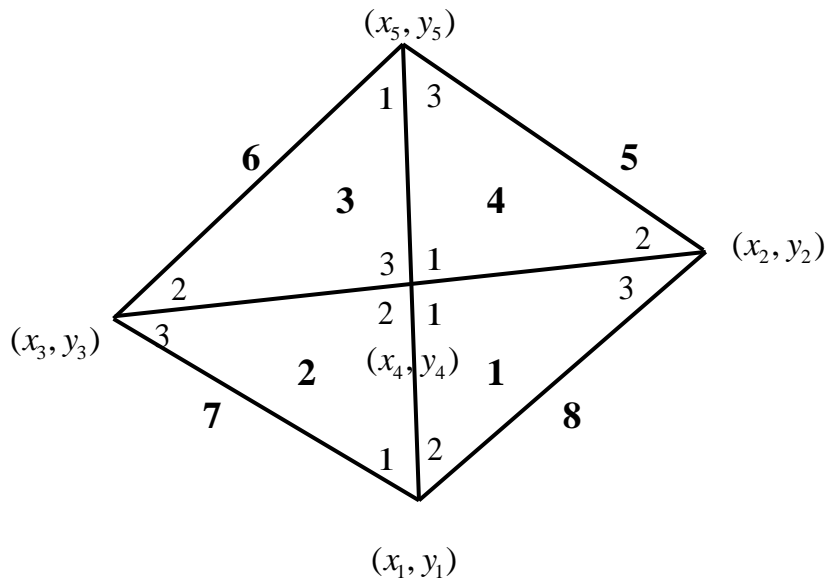


Рис. 9. Пример неструктурированной сетки

В случае структурированной сетки для каждого треугольника достаточно задать номера узлов в соответствии с номерами вершин треугольника и номера смежных треугольников в том же порядке. Например, для треугольника с номером 1, изображенного на рис.8, задается массив из шести чисел:

$$1, 2, 4, \underbrace{4, 2, 11}_{\substack{\text{номера} \\ \text{смежных} \\ \text{треугольников}}}$$

номера узлов ·

В случае неструктурированной сетки дополнительно задаются признаки сторон треугольника в порядке возрастания их номеров. Если сторона граничная или внутренняя с непрерывной нумерацией, то признак равен 1. Если сторона внутренняя с разрывной нумерацией, то признак равен -1. Например, для треугольника с номером 1, изображенного на рис.9, задается массив из девяти чисел:

$$4, 1, 2, \quad 8, 4, 2, \quad 1, -1, 1$$

номера узлов номера смежных признаки ·
треугольника треугольников сторон
треугольника

Этой информации достаточно для правильного учета входных и выходных значений потока при решении системы уравнений (2.12) в каждом треугольнике.

Опишем алгоритм решения уравнения переноса на треугольной сетке. Перед началом расчета вычисляются значения площадей треугольников s_i и значения величин $A_{m,i}^{(j)}$, соответствующих трем сторонам i -того треугольника для всех направлений $\bar{\Omega}_m$, используя координаты узлов. Одновременно по значениям $A_{m,i}^{(j)}$ вычисляются параметры $\gamma_{m,i}^{(j)}$, равные нулю, если поток выходит через j -тую сторону из ячейки, и единице, если входит в нее.

Кроме того, перед началом расчета для каждого направления $\bar{\Omega}_m$, $m=1,2,\dots,M$, формируется массив $NORD(i,m)$, $i=1,\dots,N_{elm}$, номеров треугольников в том порядке, в котором будет решаться система линейных уравнений (2.12) (в соответствии с освещенностью каждого треугольника). Далее осуществляется решение уравнения переноса (2.3) на треугольной сетке с использованием внутренних итераций по источнику внутригруппового рассеяния, в соответствии со значениями $\gamma_{m,i}^{(1)}$, $\gamma_{m,i}^{(2)}$ и $\gamma_{m,i}^{(3)}$. Всего возможны 6 вариантов формул, соответствующих освещенности одной или двух сторон.

Численные эксперименты показали, что описанный выше линейный метод конечных элементов Галеркина позволяет получать численное решение на неструктурированных треугольных сетках с приемлемой степенью точности.

2.4 Результаты тестовых расчетов

Приведем результаты тестовых расчетов методом конечных элементов на неструктурированной треугольной сетке, позволяющие оценить его эффективность по сравнению с балансным LN методом на квадратной сетке. Все расчеты проводились с использованием пакета РЕАКТОР [8].

Рассматривалась одnogрупповая задача Латропа [5] в S_8 приближении дискретных ординат с изотропным цилиндрическим источником рассеяния радиуса 2.0 см, расположенным в центре области. Источник окружен двумя концентрическими кольцевыми зонами радиусом 3.0 и 4 см. В этих зонах чередуются области с пустотой и с отражателем так, чтобы не было беспрепятственных способов утечки частиц из области с источником. Для решения этой задачи в X-Y геометрии использовалась квадратная сетка [5], которая приведена на рис. 10. Пространственный шаг равен 0.5 см. В области источника находятся 52 ячейки. Полное число квадратов равно 208.

Неструктурированная треугольная сетка задачи также заимствована из работы [5] и приведена на рис. 11. Для ее построения и вычисления координат узлов треугольной сетки, расположенных на окружностях, использованы радиусы фактических границ областей так, чтобы точно соответствовать площадям цилиндрических областей. Квадратная сетка менее точно представляет площади цилиндрических областей. Все треугольные ячейки имеют одинаковую площадь, $s_i = 0.7854 \text{ cm}^2$, $i=1,\dots,80$. В области источника находятся 16 ячеек. Полное число треугольников равно 80.

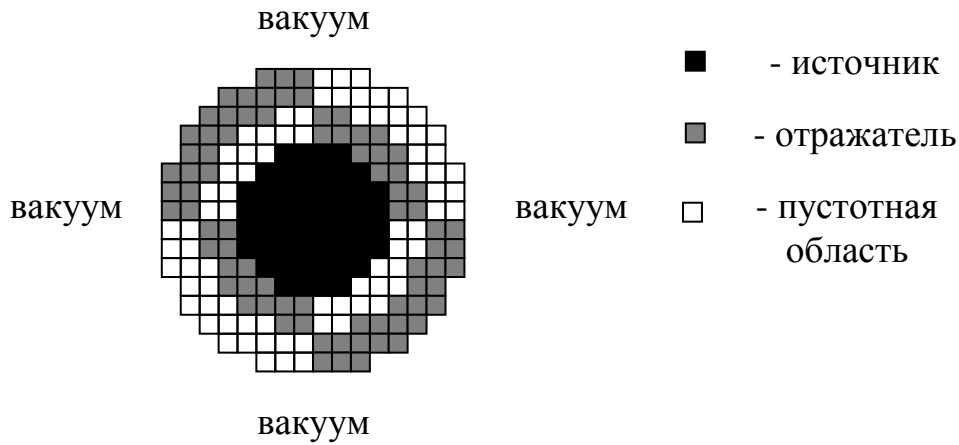


Рис. 10. Квадратная сетка из 208 ячеек

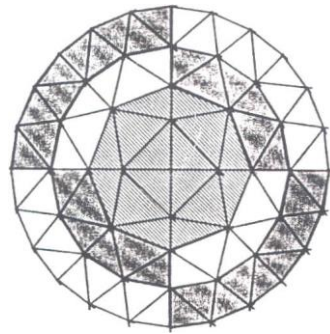


Рис. 11. Треугольная сетка из 80 ячеек

В табл. 3 приведены макросечения трех областей. В области 1 и 2 вещества совпадают, в области 3 вещество отсутствует. В области с веществом 1 задан изотропный источник, равный 1.0.

Таблица 3

Макросечения

	Вещество 1 ($см^{-1}$)	Вещество 2 ($см^{-1}$)	Вещество 3 ($см^{-1}$)
Σ_T	0.75	0.75	0.0
$\Sigma_{s,0}$	0.5	0.5	0.0
$\nu\Sigma_f$	0.0	0.0	0.0

На границе области заданы вакуумные граничные условия. Итерационный процесс заканчивался, когда максимальная относительная ошибка между двумя соседними итерациями не превышала $\varepsilon = 10^{-6}$. Результаты численных расчетов LN и МКЭ методами показаны на рис. 12 и 13 соответственно.

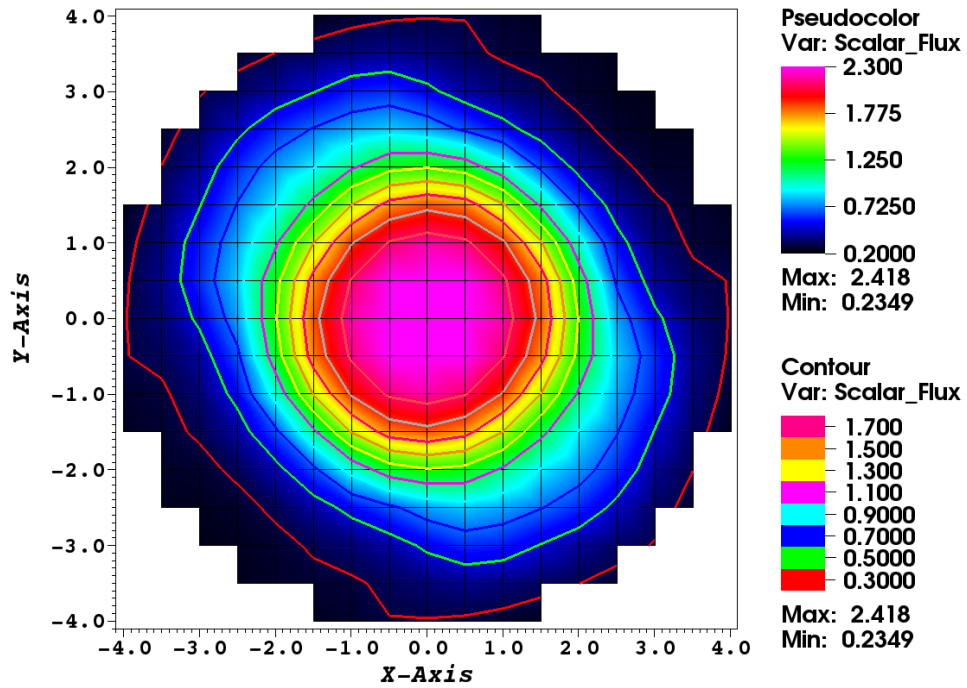


Рис. 12. Средний поток частиц, рассчитанный LN методом на квадратной сетке

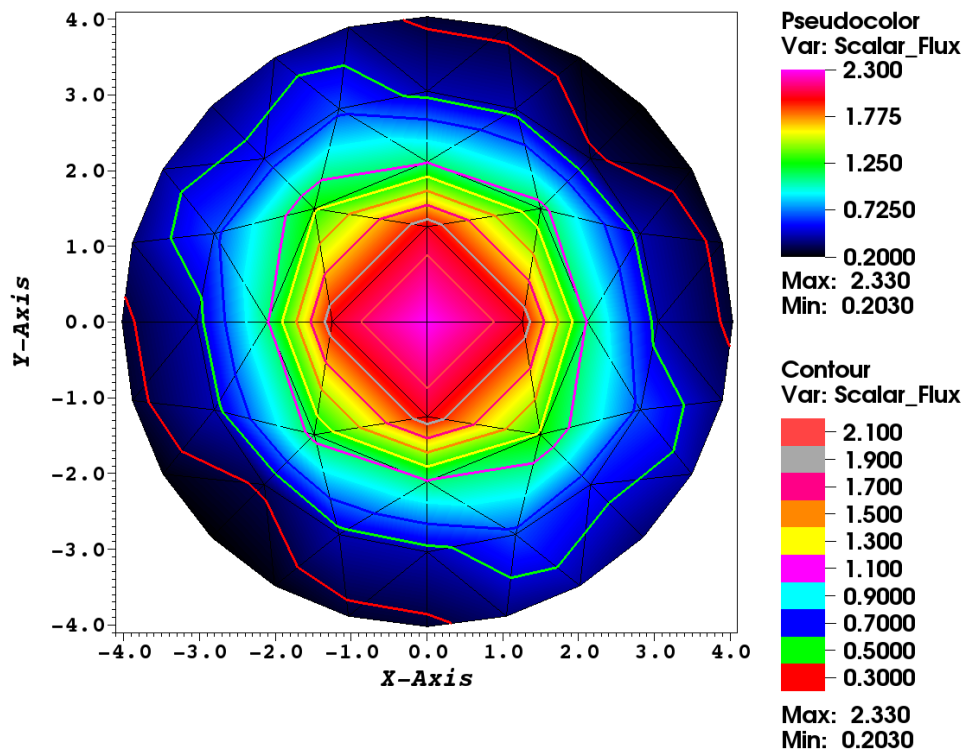


Рис. 13. Средний поток частиц, рассчитанный методом конечных элементов на треугольной сетке

Видно, что характер поведения решения одинаковый: потоки частиц прижаты к центру с юго-запада и с северо-востока. Значения средних потоков, полученные двумя методами, близки, хотя количество ячеек треугольной сетки в 2.6 раза меньше, чем квадратной.

В обоих случаях получено положительное решение. Результаты расчетов LN методом в двумерной X-Y геометрии совпадают с результатами расчетов в трехмерной X-Y-Z геометрии, если задать граничные условия отражения сверху и снизу по оси Z. Метод LN сошелся за 13 итераций, благодаря использованию метода пространственного ребаланса для ускорения сходимости итераций. Метод конечных элементов сошелся за 25 итераций без использования алгоритма ускорения итераций.

Преимущество использования неструктурированных треугольных сеток перед структурированными квадратными сетками для задач переноса в областях с криволинейными границами очевидно. В дальнейшем предполагается разработать алгоритм и программу для решения уравнения переноса на тетраэдральных сетках в трехмерной X-Y-Z геометрии, а так же алгоритмы ускорения сходимости внутренних итераций на треугольной неструктурированной сетке на основе метода пространственного ребаланса.

В заключение выражаю благодарность руководителю проекта РФФИ 13-01-00870-а к.ф.-м.н. Воронкову Александру Васильевичу за поддержку и помощь в обеспечении научной литературой. Выражаю особую благодарность к.ф.-м.н. Иновенкову Игорю Николаевичу, руководителю моей дипломной работы «Численное решение некоторых кинетических уравнений физики плазмы» на факультете ВМК МГУ за его научное предвидение в конце семидесятых о том, что «будущее прикладной математики за обобщенными функциями и многочленами Лежандра». Эти разделы не входили в официальный учебный курс. Поэтому он настаивал на том, чтобы его ученики знали этот материал.

Библиографический список

1. Discontinuous Finite Element S_N Methods on Three-Dimensional Unstructured Grids. Wareing Todd A. и др. // J. Nucl. Sci. Eng., 2001, V. 138, P. 256-268.
2. «Вычислительные методы в физике реакторов» // Сб. статей под ред. Х. Гринспена, К. Келбера, Д. Окрента. Москва: Атомиздат, 1972.
3. Azmy Y.Y., Barnett D.A. Arbitrarily High Order Transport Method of the Characteristic Type for Tetrahedral Grids // ANS Int. Mtg. on Mathematical Methods for Nuclear Applications, 9-13 September, 2001, Salt Lake City, Utah USA.
4. Reed W.H. New Difference Schemes for the Neutron Transport Equation // J. Nucl. Sci. Eng., 1971, V. 46, P. 309-317.
5. Miller D. J., Mathews K.A., Brennan C. R. Split-Cell Discrete Ordinates Transport on an Unstructured Grid of Triangular Cells // Transport Theory Statist. Phys., V. 25, Issue 7, P. 833-867, 1996.
6. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация // Пер. с англ. М.: Мир, 1986, 318 с.
7. Childs R.L., Rhoades W.A. Theoretical Basis of the Linear Nodal and Linear Characteristic Methods in the TORT Computer Code // ORNL/tm-12246, Oak Ridge National Laboratory, (January 1993).
8. Voronkov A., Arzhanov V. REACTOR – Program System for Neutron-Physical Calculations // Proc. Int. Mtg. Advances in Mathematics, Computations, and Reactor Physics, USA, V.5, April 28 – May 2, 1991.
9. Carlson B.G. A Method of Characteristics and Other Improvements in Solution Methods for the Transport Equation // J. Nucl. Sci. Eng., 1976, V. 61, P. 408-425.
10. Morel Jim E., Warsa James S. An S_n Spatial Discretization Scheme for Tetrahedral Meshes // J. Nucl. Sci. Eng., 2005, V. 151, P. 157-166.
11. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method, 4th ed., Vol. 1, McGraw-Hill, London (1994).
12. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.