



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 90 за 2013 г.



Галыбин А.Н., [Митрушкин Д.А.](#),
Мухамедиев Ш.А., [Савенков Е.Б.](#)

Вычислительные алгоритмы
восстановления полей
напряжений в упругой
области по данным
наблюдений

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Вычислительные алгоритмы восстановления полей напряжений в упругой области по данным наблюдений / А.Н.Галыбин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 90. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-90>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. КЕЛДЫША

А.Н. Галыбин, Д.А. Митрушкин,
Ш.А. Мухамедиев, Е.Б. Савенков

**Вычислительные алгоритмы
восстановления полей напряжений
в упругой области по данным наблюдений**

Москва, 2013

А.Н. Галыбин, Д.А. Митрушкин, Ш.А. Мухамедиев, Е.Б. Савенков

Вычислительные алгоритмы восстановления полей напряжений в упругой области по данным наблюдений

Аннотация. В работе рассматриваются вычислительные алгоритмы для решения обратной задачи восстановления полей пластовых напряжений по данным наблюдений в дискретном наборе точек. Эти данные могут включать в себя как информацию о направлениях главных напряжений, так и частичную информацию об их значениях. Приведено описание используемой математической модели, представлены результаты расчетов.

Ключевые слова: теория упругости, восстановление напряжений

A.N. Galybin, D.A. Mitrushkin, Sh.A. Mukhamediev, E.B. Savenkov

Computational algorithms for stress field reconstruction in elastic domain using discrete observation data

Abstract. Computational algorithms are presented for solution of the inverse problem of stress tensor reconstruction using observation data available in discrete set of points. The data can include both principal stress directions and stress magnitudes (if known). Numerical results are presented.

Key words: elasticity, stress reconstruction

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Программы №6 ОНЗ РАН.

Оглавление

Введение	3
1. Основные уравнения и соотношения	4
2. Алгоритм реконструкции ТГН и значений напряжений	5
3. Структура входных данных и геометрические алгоритмы	7
4. Система уравнений для аппроксимаций потенциалов	9
5. Апробация алгоритма	14
Литература	20

ВВЕДЕНИЕ

В геофизике и горном деле часто приходится сталкиваться с задачей определения напряженного состояния некоторой области, на границе которой отсутствуют достоверные данные по напряжениям или смещениям. С другой стороны, имеются некоторые дополнительные дискретные данные по измерениям характеристик тензора напряжений внутри области. Это делает невозможным прямое применение стандартных вычислительных программ МКЭ или МГЭ типа для решения обратной задачи расчета напряжений, поскольку они не ориентированы на решение задач с данными внутри области. Попытка непосредственно адаптировать стандартные методы путем введения фиктивных напряжений с последующей подгонкой к внутренним данным приводит к существенной неустойчивости результатов расчетов. Несмотря на то что методы, основанные на регуляризации по Тихонову, позволяют стабилизировать решения, они не могут обеспечить его единственность, например, в случае, когда известны только направления главных напряжений (ориентации напряжений). Альтернативным подходом является интерполяция напряжений по дискретным данным. Однако стандартные методы интерполяции не обеспечивают соблюдение уравнений равновесия среды и реологических соотношений. Поэтому возникает необходимость в разработке новых методов решения таких задач на основе прямого подхода.

В работе развивается метод реконструкции полей напряжений из дискретных данных о главных направлениях. В дополнение к известной методике [1-4], кроме главных направлений, используются данные по значениям напряжений в некоторых точках, что позволяет однозначно восстановить полный двумерный тензор напряжений.

Область делится на элементы, в которых комплексные потенциалы напряжений аппроксимируются линейными голоморфными функциями. Эти функции предполагаются непрерывными на границах элементов, что используется для формирования первой группы уравнений. На первом этапе известные данные о главных направлениях используются для формирования второй группы уравнений. Поскольку величины напряжений не участвуют в формулировке, это приводит к однородной системе линейных алгебраических уравнений. Для совместности системы добавляется дополнительное уравнение, которое устанавливает, что среднее значение максимального напряжения сдвига по области равно единице. Следовательно, реконструированное поле максимального касательного напряжения определяется неоднозначно – оно включает в себя произвольный положительный мультипликативный параметр. При определении полей средних напряжений необходимо интегрировать уравнения равновесия при известном девиаторе напряжений, что порождает второй аддитивный параметр. На втором этапе два эти параметра определяются из задачи оптимизации функционала, который характеризует норму отклонения

расчетных напряжений, полученных на первом этапе, от данных о величинах напряжений.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Задача по восстановлению полей напряжений состоит из двух этапов. На первом этапе, используя данные об ориентации напряжений в заданном наборе точек, во всей области однозначно определяются траектории главных напряжений (ТГН), т.е. кривые, касательные к которым в каждой точке ориентированы по направлению действия одного из главных напряжений, а также находится поле полного двумерного тензора напряжений с точностью от двух до пяти параметров. На втором этапе по известным замерам величин напряжений можно найти значения этих параметров и тем самым определить значения самих напряжений.

Вкратце представим постановку задачи и основные понятия. В работе используется подход, в котором общее решение плоской задачи теории упругости представляется потенциалами Колосова-Мусхелишвили [5]. При этом в качестве независимых пространственных переменных используются комплексно сопряженные величины $z = x_1 + ix_2$, $\bar{z} = x_1 - ix_2$ (x_1, x_2 – декартовы координаты), а в качестве искомого вводятся вещественная функция среднего напряжения $P(z, \bar{z})$ и комплекснозначная функция девиатора напряжений $D(z, \bar{z})$

$$P = \frac{1}{2}(T_1 + T_2); D = |D|e^{i\alpha}, \quad \alpha = \arg(D) = -2\theta, \quad |D| = \tau_{\max} = \frac{1}{2}(T_1 - T_2) \geq 0. \quad (1)$$

Здесь T_1, T_2 – горизонтальные максимальное и минимальное сжимающие (главные) напряжения в плоскости Ox_1x_2 (сжатие принимается положительным). Модуль функции D равен максимальному касательному напряжению в плоскости x_1, x_2 , а $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$ – нетупой угол между осями, задаваемыми направлениями x_1 и T_1 . Значение θ берется со знаком "+", если угол лежит в I и III квадрантах плоскости Ox_1x_2 , и со знаком "-" – в противоположном случае.

Определение поля напряжений $T(z, \bar{z})$ сводится к вычислению трех скалярных полей: $P(z, \bar{z})$, $\tau_{\max}(z, \bar{z})$, $\theta(z, \bar{z})$. Два уравнения равновесия в комплексной форме имеют вид:

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} = \frac{\partial D}{\partial \bar{z}}, \quad (2)$$

где $\tilde{P} = P + \Pi$, $\Pi = \Pi(z, \bar{z})$ – потенциал горизонтальных объемных сил, являющийся вещественной гармонической функцией. Справедлива следующая форма записи, выражающая общее решение плоской задачи теории упругости:

$$\tilde{P}(z, \bar{z}) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}, \quad D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z), \quad (3)$$

где потенциалы Φ и Ψ являются голоморфными функциями.

При определении поля напряжений по данным об ориентациях θ_j , заданных в конечном числе точек z_j , $j=1, \dots, N$, находится частное решение задачи $D_1(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)$, удовлетворяющее уравнениям задачи. Способ построения общего решения задачи по уже найденному частному решению $D_1(z, \bar{z})$ существенно зависит от свойств функции $\theta(z, \bar{z})$. Возможны два взаимоисключающих случая, когда заданная функция $\theta(z, \bar{z})$ является или не является гармонической, при этом решение зависит от пяти или двух произвольных вещественных постоянных соответственно [6]. Ниже рассматривается второй случай, поскольку первый случай является исключительным и, как правило, не реализуется на практике.

Общее решение задачи представляется в виде

$$\tilde{P} = c_3 \left(\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} \right) + c, \quad D = c_3 D_1,$$

и зависит от двух произвольных вещественных постоянных c и $c_3 > 0$. Эти константы могут быть однозначно определены, если известно некоторое число данных по величинам каких-либо компонент напряжений.

Таким образом, траектории определяются однозначно, функция $\tau_{\max}(z, \bar{z})$ реконструируется с точностью до постоянного положительного множителя, а функция $\tilde{P}(z, \bar{z})$, дополнительно к этому, – с точностью до аддитивной постоянной. Другими словами, скалярные функции, формирующие поле плоского тензора напряжений, определяются с точностью до следующих линейных преобразований:

$$\theta \rightarrow \theta, \quad \tau_{\max} \rightarrow c_3 \tau_{\max}, \quad \tilde{P} \rightarrow c_3 \tilde{P} + c, \quad (c_3 > 0). \quad (4)$$

Гармоническая функция P не влияет на главные направления и поэтому далее не участвует в алгоритме поиска ТГН. Как только девиатор будет определен, она может быть найдена с помощью интегрирования уравнения (2).

2. АЛГОРИТМ РЕКОНСТРУКЦИИ ТГН И ЗНАЧЕНИЙ НАПРЯЖЕНИЙ

Пусть Ω – односвязная упругая область, ограниченная несамопересекающимся замкнутым контуром Γ , $\Gamma = \partial\Omega$. Пусть данные о главных направлениях θ_j тензора напряжений известны в точках z_j , $j=1, \dots, N$, которые расположены как внутри области, так и на ее границе.

Общая задача формулируется следующим образом – определить двумерное поле напряжений в Ω , которое:

1. обеспечивает наилучшее согласие данных θ_j и расчетных (в рамках выбранной математической модели) главных направлений в заданных точках z_j ;
2. удовлетворяет всем уравнениям плоской задачи теории упругости, сформулированным в напряжениях.

Поскольку главные направления определяются только аргументом комплекснозначной биголоморфной функции девиатора напряжений

$$D(z, \bar{z}) = \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z),$$

то задача может быть рассмотрена как задача определения биголоморфной функции с последующим нахождением гармонической функции

$$P(z, \bar{z}) = 2\text{Re}(\Phi(z))$$

из уравнений равновесия (2). Таким образом, исходная задача эквивалентна нахождению комплексных потенциалов $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, которые обеспечивают минимизацию суммы квадратов отклонений аргумента комплекснозначной функции девиатора напряжений от углов $\alpha_j = -2\theta_j$, то есть

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \text{Im} \left[\exp(-i\alpha_j) (\bar{z}_j \Phi'(z_j) + \Psi(z_j)) \right] \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (5)$$

Как только определена функция комплексного девиатора, то по ее аргументу α определяются главные направления. После этого поле ТГН однозначно находится путем интегрирования системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dz}{ds_k} = \exp \left[i \left(\theta(z, \bar{z}) + (k-1) \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (6)$$

где $k=1$ соответствует траекториям наибольшего (сжимающего) главного напряжения, а $k=2$ – ортогональным к ним траекториям наименьшего главного напряжения. Интегрирование (6) может выполняться численно. Поэтому, когда аргумент D известен в любой точке области, поле траекторий можно считать известным везде, за исключением особых точек.

После того как определены поля ТГН и частные решения для функций напряжений, полное и единственное решение может быть определено путем соответствующего выбора констант в (4). Предположим, что известны нормальные, σ_n^l , и (или) касательные, σ_t^l , напряжения на L площадках (с нормальными \mathbf{n}_l , $l=1, \dots, L$). Общее выражение для вектора напряжений, $\sigma_n + i\sigma_t$, на l -ой площадке имеет вид:

$$\sigma_n + i\sigma_t = c + c_3 \left[P(z_l, \bar{z}_l) + e^{-2i\vartheta_l} D(z_l, \bar{z}_l) \right], \quad l=1, \dots, L, \quad (7)$$

где z_l , ϑ_l – соответственно положение и угол наклона l -ой площадки к положительному направлению действительной оси Ox_1 .

Если принять, что известны только нормальные компоненты в разных точках, которые, в принципе, могут быть определены по давлению закрытия трещины гидроразрыва пласта (ГРП), то для определения неизвестных констант возникает задача регрессии, которая может быть записана в виде минимизации невязки

$$\sum_{j=1}^L \left\{ \sigma_n^j - c - c_3 \left[P(z_l, \bar{z}_l) + \operatorname{Re} \left(e^{-2i\vartheta_l} D(z_l, \bar{z}_l) \right) \right] \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (8)$$

Очевидно, что для определения обоих параметров необходимо не менее двух измерений величин напряжений в разных точках.

3. СТРУКТУРА ВХОДНЫХ ДАННЫХ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ

Ниже декартовы координаты обозначаются как x и y . Входными данными в программе являются:

- размеры рассматриваемой прямоугольной области Ω по x и y ;
- количество опорных точек N_d , в которых заданы направления главных напряжений;
- координаты точек $(x_i, y_i), i=1, \dots, N_d$;
- направление ТГН в этих точках (значения угла θ_i);
- ошибки измерения углов θ_i ;
- значения минимального или максимального напряжения в некоторых точках;
- количество коллокационных точек для каждой грани ячеек сетки;
- степень полинома для аппроксимации потенциалов внутри ячейки.

Координаты опорных точек $(x_i, y_i), i=1, \dots, N_d$, заданных в прямоугольной области Ω , представим в виде матрицы BP размерности $2 \times N_d$, где в i -й строке записаны координаты x_i и y_i .

По опорным точкам BP строится сетка Вороного с помощью процедуры *voronoi_bbox*. В результате получаем координаты узлов сетки в виде матрицы V размерности $2 \times N_v$, где N_v – количество узлов сетки, а также нумерацию узлов и ячеек. При этом каждой ячейке ставится в соответствие набор S номеров узлов, из которых она состоит. Набор отсортирован в направлении против часовой стрелки при обходе ячейки. Ребра каждой ячейки нумеруются двумя индексами (i, j) , где i и j – номера узлов, образующих ребро,

последовательно идущих в направлении против часовой стрелки относительно центра ячейки.

Строится матрица $T(i, j)$, элементами которой являются либо номера ячеек, к которым принадлежат ребра (i, j) , либо 0, если такого ребра не существует или оно является граничным и не соответствует ячейке из области Ω . В соответствии с данным подходом, каждое ребро (i, j) может принадлежать только одной ячейке, для соседней ячейки это же ребро обозначается как (j, i) . Тем самым реализуется «двойной» учет ребер.

Далее определим вспомогательные структуры для описания связи между ячейками и ребрами. Сначала удалим из матрицы T элементы, соответствующие граничным ребрам. Введем матрицу E с размером, соответствующим размеру T по следующему алгоритму. Поэлементно сравним матрицу T и транспонированную матрицу T' . Если значения элементов одновременно не равны нулю, то присваиваем соответствующему элементу матрицы E значение из T , в противном случае -0 .

Далее выделяем из E верхнюю треугольную матрицу, что позволяет нам исключить дублирование ребер, т.к. остаются только ребра, у которых $i > j$. Последовательно построчно пробегаая по всем ненулевым элементам получившейся матрицы, заполняем следующую структуру:

$$[iv, jv, v], \quad (9)$$

где iv и jv – номера узлов, составляющих ребро (iv, jv) ячейки v . В результате получаем N_e заполненных структур, которые можно представить в виде матрицы размерностью $3 \times N_e$. Данный подход позволяет ввести одинарную нумерацию внутренних ребер сетки Вороного без их повторения: $i_e = 1, \dots, N_e$.

По аналогии выделяем из транспонированной матрицы E' верхнюю треугольную матрицу и заполняем структуру

$$[ivv, jvv, vv]. \quad (10)$$

Полученная матрица размерностью $3 \times N_e$ также не содержит двойного учета ребер, но в ней уже $ivv < jvv$ для каждой строки. Для введенных выше матриц справедливы следующие равенства для одинаковых номеров строк:

$$iv = jvv, \quad jv = ivv. \quad (11)$$

Используя структуру (9), построим матрицу $e2v$ размерностью $2 \times N_e$, состоящую из двух столбцов iv и jv :

$$e2v = [iv, jv]. \quad (12)$$

В результате получаем однозначную связь между номером ребра в одинарной нумерации и номерами образующих его узлов.

Используя свойство (11) введенных структур, построим матрицу $e2c$, состоящую из столбцов v и vv :

$$e2c = [v, vv], \quad (13)$$

которая одинарному номеру ребра ставит в соответствие номера примыкающих к ребру ячеек. При этом номер ячейки v соответствует ячейке слева от грани, а vv – справа.

Для удобства дальнейшего рассмотрения перейдем к описанию координат точек (x, y) области Ω в комплексной форме $z = x + iy$. Матрицы координат опорных точек BP и узлов сетки Вороного V представим в виде комплексных векторов zbp и zv . Для каждого ребра сетки Вороного введем коллокационные точки. Для начала будем рассматривать одну точку для каждого ребра, расположенную в его центре. По аналогии с координатами узлов сетки запишем координаты коллокационных точек в виде комплексного вектора zcp . Поскольку рассматривается случай, когда каждому внутреннему ребру принадлежит только одна точка коллокации, то можно пронумеровать точки коллокации в соответствии с уже введенной одномерной нумерацией ребер.

Для перехода от пары номеров узлов i и j к номеру ребра (или точки коллокации) в одинарной нумерации введем матрицу $E2IL$ размерностью $N_v \times N_v$, в качестве элементов (i, j) которой стоят номера ребер i_e в одинарной нумерации, если такие ребра существуют, либо 0 в противном случае. Помимо одинарной нумерации нам понадобится двойная нумерация, включающая «двойной» учет ребер, в которой мы будем различать ребра (i, j) и (j, i) . Для ее построения к структуре (9) подклеивается снизу структура (10), в результате получается матрица размерностью $3 \times 2N_e$, нумерация строк которой и будет соответствовать двойной нумерации ребер ($i_e d = 1, \dots, N_e$).

По аналогии с матрицей $E2IL$ введем матрицу $E2IG$ перехода от пары номеров узлов i и j к номеру ребра в двойной нумерации. Также введем матрицу $E2SGN$, которая ставит в соответствие паре номеров узлов (i, j) значение $+1$, если для $i > j$, -1 , если $i < j$, и значение 0 , если такого внутреннего ребра (i, j) нет.

4. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ АППРОКСИМАЦИЙ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть f – один из потенциалов Φ' или Ψ . Для каждой ячейки ω_k сетки Вороного, аппроксимацию потенциала f будем представлять в виде полинома (номер k ячейки в обозначении коэффициентов и других параметров на данном этапе будем опускать, если это не мешает изложению):

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_N z^N, \quad z \in \omega_k. \quad (14)$$

Здесь z – комплекснозначные координаты точек в рассматриваемой ячейке, a_0, a_1, \dots, a_N – не известные пока коэффициенты, отнесенные к области ω_k , N – степень многочлена, одна и та же для всех подобластей ω_k (в программе – параметр NPOLY).

Будем считать, что на каждом ребре ячейки Вороного задана одна точка коллокации с координатой $z_i = zcp_i$; число таких точек равняется числу ребер ячейки внутри расчетной области (то есть на ребрах ячеек, принадлежащих внешней границе всей расчетной области, точек коллокаций нет). Тогда вектор значений многочлена f в точках коллокаций удовлетворяет соотношению:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_1^N \\ 1 & z_2 & \dots & z_2^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{NP} & \dots & z_{NP}^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{NP} \end{bmatrix} = 0, \quad (15)$$

или

$$A^{(k)} a^{(k)} - f^{(k)} = 0,$$

где $A^{(k)}$ – матрица из (15) (матрица Вандермонда), соответствующая ячейке Вороного ω_k , вектор $a^{(k)}$ – вектор неизвестных коэффициентов для ω_k , $f^{(k)}$ – вектор значений в точках коллокаций на границе ячейки ω_k .

Величины $f^{(k)}$ на данном этапе будем считать независимыми неизвестными, определяемыми в ходе решения задачи. Такой подход удобен тем, что позволяет легко адаптировать программу для использования большего числа точек коллокаций на каждом ребре или более сложным условиям непрерывности (например, в слабой форме).

Таким образом, в каждой точке коллокации имеем два значения комплексного потенциала f , соответствующих двум ячейкам Вороного, которым принадлежит заданное ребро. Пусть i – номер (глобальный) точки коллокации, который совпадает с глобальным номером соответствующего ребра в одинарной нумерации всех внутренних ребер, $k^+(i)$ и $k^-(i)$ – номера ячеек Вороного, примыкающих к ребру i . В программе величины $k^+(i)$ и $k^-(i)$ определяются на основе массивов $E2IL$ и $E2IG$.

Тогда для каждого ребра i уравнение непрерывности потенциала f имеет вид:

$$f^{(k^+(i))}(z_i) - f^{(k^-(i))}(z_i) = 0. \quad (16)$$

Определим глобальный вектор неизвестных коэффициентов как

$$a = [a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(NC)}],$$

где $a^{(k)} = [a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_N^{(k)}]$ – вектор коэффициентов, соответствующий ячейке ω_k . Соответственно, вектор значений потенциала в опорных точках будет иметь вид

$$f = [f_1, f_2, \dots, f_{NE}],$$

где NE – число ребер в двойной нумерации. При этом, как уже отмечалось, каждому ребру соответствуют два элемента этого вектора. Неизвестные в f упорядочены в соответствии с порядком ребер в двойной нумерации.

Полная система уравнений непрерывности в матричном виде может быть записана как

$$\begin{bmatrix} A & A_C \\ 0 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ f \end{bmatrix} = 0. \quad (17)$$

В этой системе первая блочная строка – уравнения (15) для всех k , при этом

$$A = \text{diag}(A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(NC)}),$$

а матрица AC состоит из нулей и "–1" и соответствует коэффициентам перед f в (15). Матрица A_C с точностью до перестановки строк и столбцов является единичной матрицей (умноженной на минус единицу). Таким образом, матрица AC всегда невырожденна.

Вторая блочная строка в (17) соответствует уравнениям (16).

Отметим, что

- уравнения, соответствующие разным ячейкам в первой блочной строке, не связаны между собой и поэтому алгоритмически легко формируются в программе;
- уравнения во второй блочной строке легко формируются на основе массивов, определяющих двойную нумерацию ребер; при этом в каждой строке этого блока стоит ровно одно значение +1 и ровно одно значение –1, а остальные элементы – нули.

При увеличении числа точек коллокаций на каждом ребре или использовании других форм условий непрерывности комплексного потенциала изменению подвергается лишь часть программы, отвечающая за формирование матрицы C . Матрица C при этом будет иметь более сложный вид, но схема алгоритма не изменится. После формирования системы уравнений (17) неизвестные f исключаются из нее дополнением по Шуру. Окончательно

система уравнений непрерывности относительно неизвестных коэффициентов a будет иметь вид:

$$-CA_C^{-1}A \cdot a = 0.$$

Для полного набора комплексных потенциалов Φ' и Ψ будем иметь следующую систему уравнений непрерывности на ребрах:

$$\begin{bmatrix} A_\phi & 0 \\ 0 & A_\psi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0,$$

где a – коэффициенты для аппроксимации потенциала Φ' , b – коэффициенты для аппроксимации потенциала Ψ' ,

$$A_\phi = A_\psi = -CA_C^{-1}A.$$

Далее формируется блок уравнений невязок по направлениям в соответствии с уравнением

$$\text{Im}[\exp(-i\alpha_k)(\bar{z}_k \Phi'(z_k) + \Psi(z_k))] = 0, \quad (18)$$

где k – номер ячейки Вороного ω_k . Напомним, что в соответствии со способом разбиения области на ячейки Вороного в каждой ячейке всегда расположена единственная точка, в которой задано направление.

Пусть

$$a^{(k)} = [a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \dots, a_N^{(k)}], \quad b^{(k)} = [b_0^{(k)}, b_1^{(k)}, \dots, b_N^{(k)}]$$

– векторы неизвестных коэффициентов для потенциалов Φ' и Ψ в ячейке ω_k , z_k – координата опорной точки для ячейки ω_k . Тогда уравнение (18) в матричном виде будет иметь вид:

$$\text{Im} \left(\begin{bmatrix} R_\phi^{(k)} & R_\psi^{(k)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right) = 0,$$

где

$$R_\phi^{(k)} = \exp(-i\alpha_k) \bar{z}_k V^{(k)}, \quad R_\psi^{(k)} = \exp(-i\alpha_k) V^{(k)}, \quad R^{(k)} = [R_\phi^{(k)}, R_\psi^{(k)}].$$

В выражениях, приведенных выше, $V^{(k)}$ – матрица Вандермонда (из одной строки), вычисленная в опорной точке z_k

$$V^{(k)} = \begin{bmatrix} 1 & z_k & \dots & z_k^N \end{bmatrix}.$$

Полная система уравнений для невязки по направлению будет иметь вид:

$$\text{Im} \left(R \cdot \begin{bmatrix} a_\phi \\ a_\psi \end{bmatrix} \right) = 0,$$

где

$$R = [R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(NC)}]^T.$$

Далее формируется полная система уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_ϕ и a_ψ , которая включает в себя блок уравнений непрерывности и блок уравнений невязок по направлениям. Удобнее всего ее записать не относительно неизвестных комплексных векторов a и b , а относительно их действительных и мнимых частей. Тогда полная система уравнений примет вид:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}A_\phi & 0 & -\operatorname{Im}A_\phi & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}A_\phi & 0 & -\operatorname{Re}A_\phi \\ \operatorname{Re}A_\psi & 0 & -\operatorname{Im}A_\psi & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}A_\psi & 0 & -\operatorname{Re}A_\psi \\ \operatorname{Im}R_\phi & \operatorname{Im}R_\psi & \operatorname{Re}R_\phi & \operatorname{Re}R_\psi \\ \operatorname{Re}R_\phi \cdot I & \operatorname{Re}R_\psi \cdot I & -\operatorname{Im}R_\phi \cdot I & -\operatorname{Im}R_\psi \cdot I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Re}a \\ \operatorname{Re}b \\ \operatorname{Im}a \\ \operatorname{Im}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

где последнее уравнение – условие нормировки, I – вектор-столбец из единиц размерности, равной числу опорных точек с заданными направлениями. При записи полной системы уравнений используется тот факт, что комплексная система линейных уравнений вида

$$Az = b$$

эквивалентна следующей системе действительных линейных уравнений:

$$\begin{bmatrix} \operatorname{Re}A & -\operatorname{Im}A \\ \operatorname{Im}A & \operatorname{Re}A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \operatorname{Re}z \\ \operatorname{Im}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}b \\ \operatorname{Im}b \end{bmatrix}.$$

Последняя система является переопределенной и решается методом наименьших квадратов. Получаемое решение совпадает с решением задачи минимизации квадратичного функционала (5). После решения системы векторы коэффициентов a и b определяются полностью.

Для определения значений полей тензора напряжений (если данные по значениям напряжений доступны), производится минимизация функционала (8). При этом имеется возможность задавать опорные площадки в точках, отличных от тех, где заданы направления, а также задавать все или только отдельные компоненты нормальных напряжений на площадках. Ориентация площадок, на которых заданы значения нормальных напряжений, не обязана совпадать с ориентацией главных направлений.

5. АПРОБАЦИЯ АЛГОРИТМА

Качество результатов работы алгоритма по восстановлению полей напряжений напрямую зависит от количества и равномерности распределения опорных точек в рассматриваемой области, а также от точности задания опорных направлений и напряжений в этих точках. Рассмотрим характерный набор исходных данных наблюдений (табл.1), обычно имеющих на практике.

Таблица 1. Исходные данные

Номер опорной точки	X координата, м	Y координата, м	Минимальное напряжение, атм	Азимут, градусов	Погрешность азимута, градусов
1	58771	52590	336	114	20
2	65681	51560	389	97	30
3	62697	53630	N/A	105	20
4	67356	53357	360	96	20
5	65351	55321	387	108	10
6	69454	55237	317	94	20
7	57994	55410	N/A	121	20
8	59979	58334	350	122	10
9	64988	58877	364	109	20
10	68503	58329	N/A	99	20
11	55584	60004	328	125	20
12	64153	61977	354	117	20
13	61113	60737	403	123	20
14	68289	60761	370	103	30
15	55711	62542	358	127	20

Таблица содержит данные для восстановления направлений и значений напряжений по 15-ти опорным точкам. Для каждой точки заданы ее координаты, а также азимут и минимальное напряжение. Погрешность задания азимутов варьируется от 10 до 30 градусов. Как уже отмечалось ранее, для восстановления поля значений напряжений достаточно иметь всего 2 точки с заданной величиной напряжения (в данном случае, минимального напряжения). В приведенном примере такие данные известны для 12 опорных точек.

В рассматриваемой области (рис.1) опорные точки распределены практически равномерно, в том числе и вдоль границ, что должно положительно сказаться на результатах восстановления искомых величин.

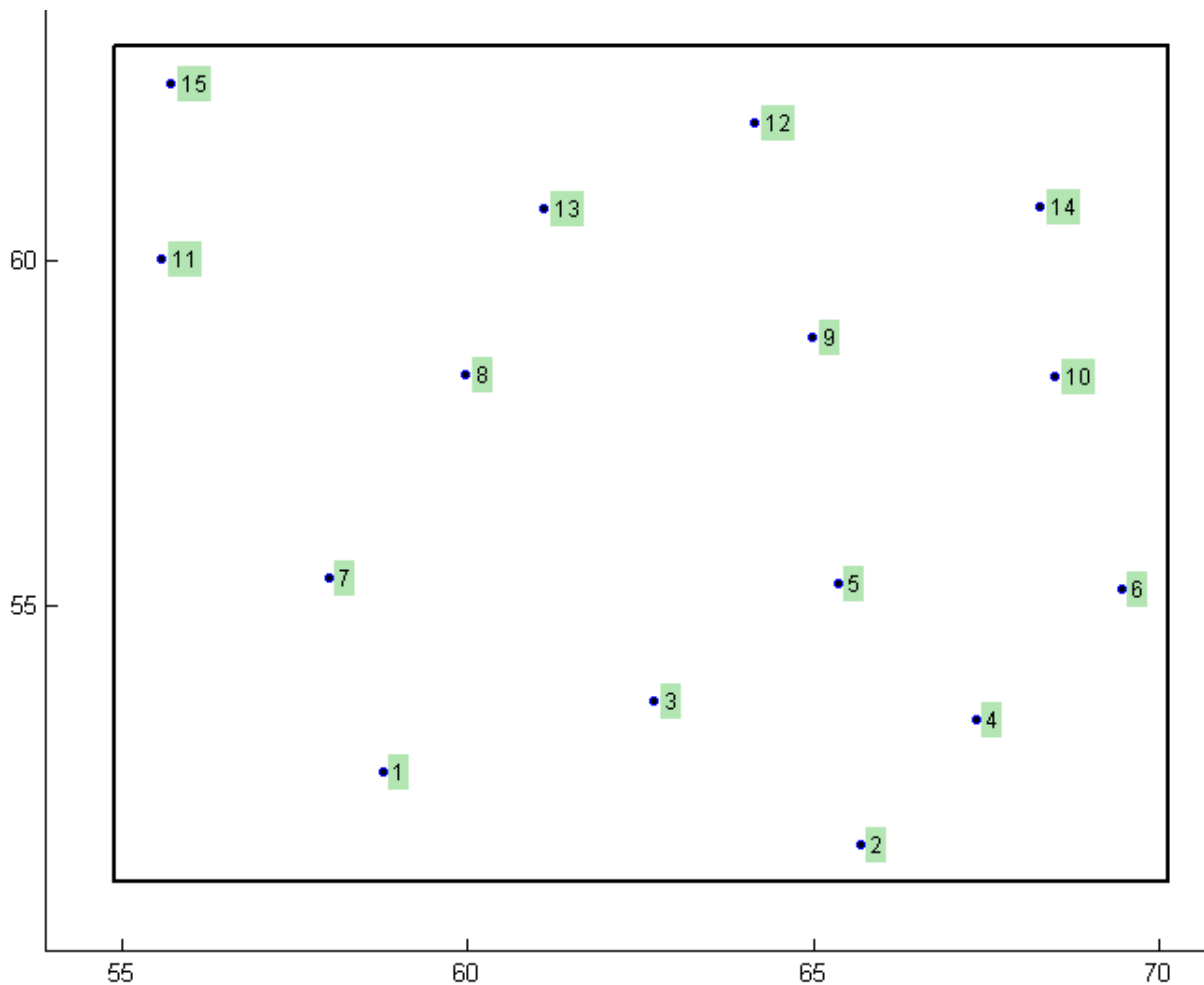


Рис.1. Распределение опорных точек в рассматриваемой области

Исходные азимуты θ_i^0 известны с заданной погрешностью σ_i^0 , где $i=1, \dots, 15$ – номер опорной точки. Таким образом, существует бесконечное количество вариантов (реализаций) наборов значений азимутов $\{\theta_i^k\} \in [\theta_i^0 - \sigma_i^0, \theta_i^0 + \sigma_i^0]$, удовлетворяющих исходным данным. Реализации θ_i^k будем генерировать с помощью нормального распределения с математическим ожиданием θ_i^0 и дисперсией $\sigma_i^k = \frac{1}{3}\sigma_i^0$ (поскольку при нормальном распределении 99% всех реализаций лежит в интервале $(\theta_i^0 - 3\sigma_i^k, \theta_i^0 + 3\sigma_i^k)$). Отметим, что для каждой реализации значения азимутов для различных опорных точек генерируются независимо друг от друга.

На рисунке 2 приведен пример расчета азимутов для одной из реализаций.

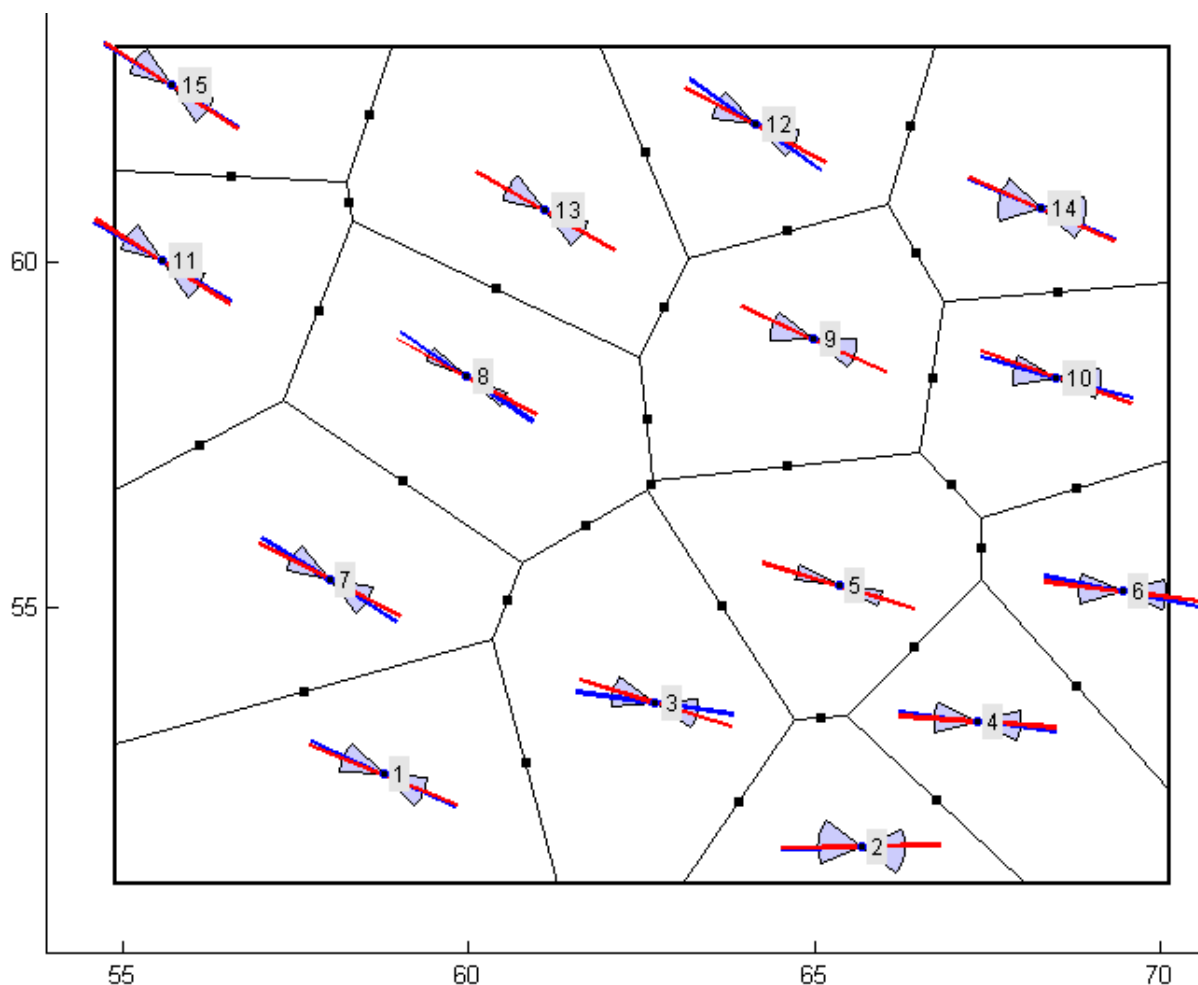


Рис.2. Заданные и восстановленные значения азимутов для одной из реализаций

В исходной области построена сетка Вороного таким образом, чтобы внутри каждой ячейки находилась одна опорная точка. В центрах внутренних граней сетки заданы точки коллокации (отмечены черными квадратами), в которых выполняется условие непрерывности восстанавливаемых значений.

Синими секторами изображены диапазоны возможных значений азимутов трещин для каждой скважины ($[\theta_i^0 - \sigma_i^0, \theta_i^0 + \sigma_i^0]$), синими отрезками – азимуты трещин θ_i^k для данной реализации k , красными отрезками – восстановленные (рассчитанные) направления азимутов. На сером фоне указаны номера опорных точек. Здесь и далее значения азимутов откладываются от вертикали в направлении по часовой стрелке.

Для того чтобы оценить влияние сгенерированных значений азимутов θ_i^k на восстановленные направления и значения напряжений, проведем серию расчетов из большого числа N_r реализаций. Получившиеся при этом средние по всем реализациям значения восстановленных величин будем считать решением исходной задачи. На рисунках 3-6 приведены результаты расчетов для $N_r = 1000$.

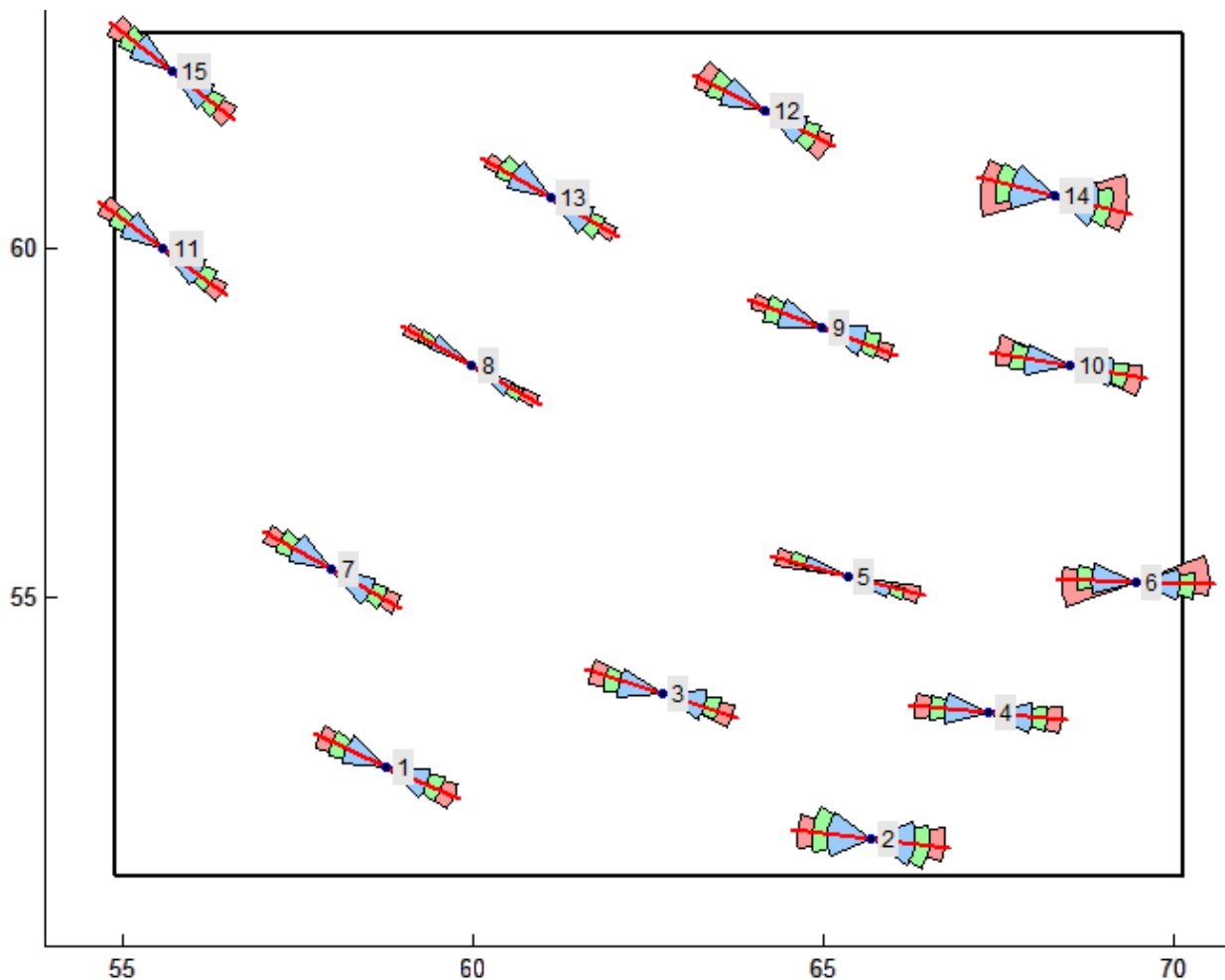


Рис.3. Результаты восстановления направлений

Зелеными секторами нарисованы диапазоны, в которые попали сгенерированные значения азимутов θ_i^k (чем больше реализаций проведено, тем ближе угол зеленых секторов к синим), красными секторами – диапазоны, в которые попали рассчитанные значения азимутов, красными отрезками – средние значения по всем реализациям рассчитанного азимута для каждой опорной точки.

Для удобства анализа результатов расчетов в разработанной программе реализован вывод статистики по всем опорным точкам. Выводятся диапазоны изменения заданных значений азимута (соответствуют синим секторам), диапазоны изменения значений азимутов для всех реализаций (соответствуют зеленым секторам), диапазоны изменения восстановленных значений азимутов (соответствуют красным секторам). А также строятся гистограммы количества реализаций, попавших в соответствующие диапазоны значений азимута, для заданных (на рис.4 и 5 сверху) и восстановленных (на рис.4 и 5 снизу) направлений.

Рассмотрим примеры вывода статистики для нескольких опорных точек с различными ошибками задания азимутов в них:

Statistics for point # 2

Angle from data file: 173.00 with error 30.00

Initial angle: from 143.00 to 203.00 range: 60.00

Realization angles: from 148.34 to 193.18 range: 44.84

Reconstructed angles: from 161.27 to 187.93 range: 26.66

Average recons. angle: 172.85

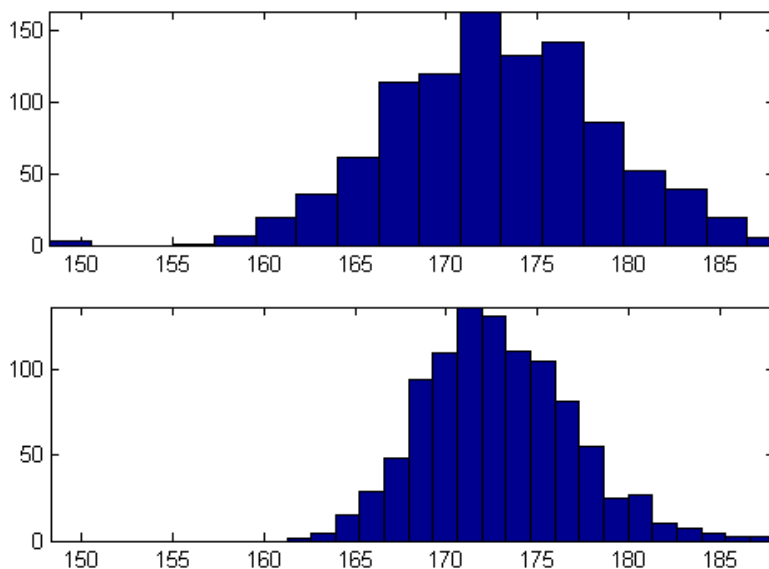


Рис.4. Гистограммы для заданных (сверху) и восстановленных (снизу) направлений напряжений. Точка №2

Statistics for point # 8

Angle from data file: 148.00 with error 10.00

Initial angle: from 138.00 to 158.00 range: 20.00

Realization angles: from 141.92 to 154.53 range: 12.61

Reconstructed angles: from 146.04 to 156.13 range: 10.09

Average recons. angle: 150.79

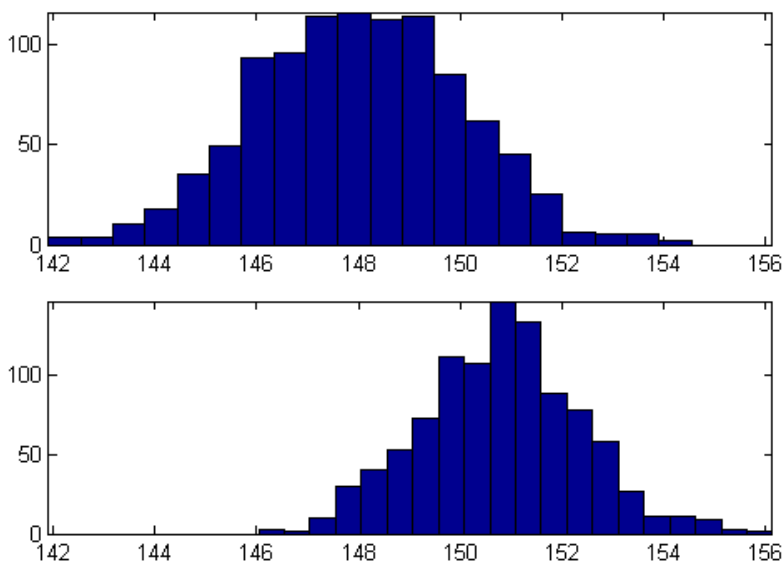


Рис.5. Гистограммы для заданных (сверху) и восстановленных (снизу) направлений напряжений. Точка №8

Из приведенных результатов видно, что восстановленные значения попали в диапазон ошибки задания входных азимутов, а разброс восстановленных значений меньше диапазона ошибки исходных данных. Кроме того, форма распределений заданных и восстановленных значений имеет один и тот же вид.

На рисунке 6 изображены средние по всем реализациям восстановленные поля среднего давления P_{ave} , максимального касательного напряжения τ_{max} , минимальных T_{min} и максимальных T_{max} главных напряжений.

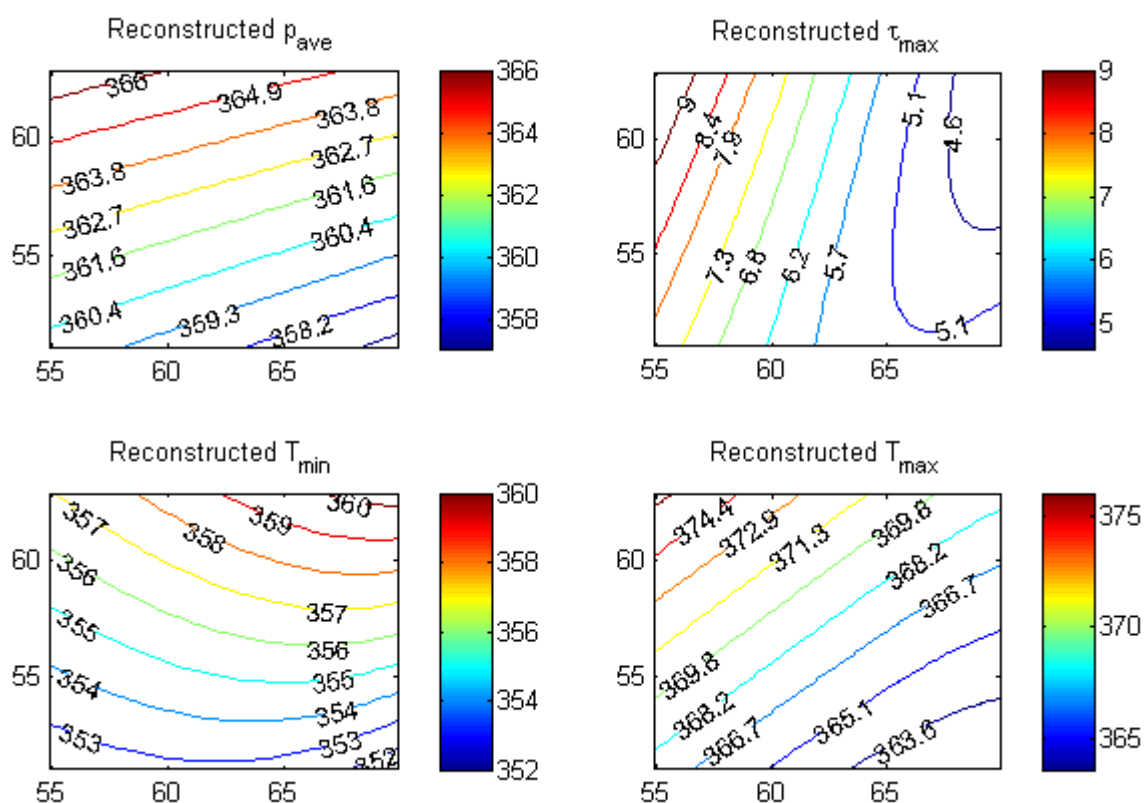


Рис. 6. Восстановленные поля напряжений

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. восстановление траекторий главных напряжений и значений тензора напряжений происходит устойчиво, о чем свидетельствует проведенный анализ чувствительности результатов;
2. диапазон восстановленных направлений и величин напряжений попадает в диапазон изменения входных значений и имеет в большинстве случаев меньший разброс.

Исходя из этого можно заключить, что качество результатов адекватно точности и объему исходных данных наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Galybin A.N. Introduction on STEM for stress analysis in statically determined bodies. Proc 29th Int Conf Boundary Elements and Other Mesh Reduction Methods, WIT Press, Southampton, 2007; 79-88.
- [2] Mukhamediev Sh.A., Galybin A.N., Brady B.H.G. Determination of stress fields in the elastic lithosphere by methods based on stress orientations. Int. J. Rock Mech. Mining Sci. 2006; 43(1): 66-88.
- [3] Galybin A.N., Mukhamediev Sh.A. Determination of elastic stresses from discrete data on stress orientations. Int. J. Solids Structures. 2004; 41(18-19): 5125-5142.
- [4] Irša J., Galybin A.N. Stress Trajectories Element Method for stress determination from discrete data on principal directions. Engineering Analysis with Boundary Elements. 2010; 34(5): 423-432.
- [5] Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
- [6] Мухамедиев Ш.А., Галыбин А.Н. Решение плоской задачи теории упругости при заданных траекториях главных напряжений. Доклады АН. 2004; 396(1): 56-59.