



**Борисов В.Е., Критский Б.В.,
Савенков Е.Б.**

Явные схемы для задач
фильтрации многофазного
многокомпонентного
флюида в пористой среде

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Борисов В.Е., Критский Б.В., Савенков Е.Б. Явные схемы для задач фильтрации многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 92. 27 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-92>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ОРДЕНА ЛЕНИНА
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М. В. КЕЛДЫША

В.Е. Борисов, Б.В. Критский, Е.Б. Савенков

**Явные схемы для задач фильтрации
многофазного многокомпонентного флюида
в пористой среде**

Москва, 2013

В.Е. Борисов, Б.В. Критский, Е.Б. Савенков, Явные схемы для задач фильтрации многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде

Аннотация. В работе рассматриваются явные разностные схемы для решения задач многофазной многокомпонентной фильтрации в пористых средах на примере изотермической композиционной модели. Представлены результаты численного исследования предложенных алгоритмов.¹

Ключевые слова: пластовая фильтрация, композиционная модель, явные схемы

V.E. Borisov, B.V. Kritskiy, E.B. Savenkov, Explicit Schemes for Compositional Flows Simulation in Porous Media

Abstract. In the paper, explicit finite difference schemes for isothermal compositional reservoir flow simulation are considered. Numerical results are presented.

Key words and phrases: reservoir simulation, compositional model, explicit schemes

Содержание

1	Введение	3
2	Математическая модель	3
2.1	Основные допущения	3
2.2	Структура порового пространства	4
2.3	Описание компонентного и фазового состава	4
2.4	Свойства флюида и фазовое равновесие	7
2.5	Закон сохранения массы компонент	9
3	Методы решения	10
3.1	Сетка и сеточные функции	10
3.2	Двухслойная явная схема	11
3.3	Система уравнений для определения первичных неизвестных	11
3.4	Трехслойная явная схема с регуляризацией	14
4	Результаты расчетов	14
5	Заключение	26
	Литература	26

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 12-01-00793-а)

1 Введение

В работе рассматривается применение явных разностных схем для расчета течений многофазного многокомпонентного флюида в пористой среде. Используемые схемы являются обобщением схем, предложенных ранее в [1–4], на случай композиционных моделей фильтрации [5–9].

Основным достоинством рассматриваемого класса алгоритмов является возможность их эффективной реализации на высокопроизводительных многопроцессорных вычислительных системах. За счет использования регуляризационных слагаемых ожидаемый порог устойчивости таких схем имеет асимптотику $\Delta t \sim \Delta x^{3/2}$ (а не $\Delta t \sim \Delta x^2$, как в случае обычных явных схем для задач параболического типа). Для построения алгоритмов с еще более слабым ограничением на шаг по времени возможно их использование как составной части более сложных «явно—неявных» алгоритмов на основе безматричных методов Ньютона–Крылова [10]. Этот вопрос будет детально рассмотрен в последующих работах.

В настоящей работе рассматривается изотермическая постановка задачи фильтрации, однако предложенные алгоритмы легко обобщаются на неизотермический случай.

Авторы хотели бы выразить свою признательность Д.А. Митрушкину, М.А. Трапезниковой, Б.Н. Четверушкину, Н.Г. Чурбановой и Е.В. Шильникову за полезные советы и обсуждения.

2 Математическая модель

Композиционная модель фильтрации является основной моделью, используемой при анализе месторождений со сложным составом углеводородных фракций. В отличие от классической модели типа «черная нефть», содержащей 3 фазы и 3 компонента, число компонент флюида в композиционной модели произвольно (и на практике составляет несколько десятков).

Ниже кратко описан вариант модели, используемой в настоящей работе. Более общие модели описаны, например, в [5–9, 11].

2.1 Основные допущения

В основу математической модели положены следующие допущения:

1. Исследуемая многофазная система включает в себя три подвижные фазы: W — жидкая водная фаза, L — жидкая углеводородная фаза, G — газовая углеводородная фаза. При этом считается, что в водной фазе

присутствует только водный компонент. Число углеводородных компонент является произвольным.

2. Для простоты изложения рассматриваемая в данной работе модель является изотермической. В силу того, что часть определяющих соотношений (уравнения состояния, константы фазового равновесия, вязкости и т.д.) являются функциями температуры, зависимость соответствующих величин от нее указывается явно. Однако, в силу допущения о изотермичности, считается, что всюду далее все производные по температуре T равны нулю. Отметим, что рассматриваемый в работе подход формально может быть обобщен на случай неизотермической многокомпонентной многофазной фильтрации.

2.2 Структура порового пространства

Пусть величина V элементарного объема, включающего скелет и поровое пространство, заполненное флюидом, состоит из следующих четырех частей:

$$V = V_r + V_W + V_L + V_G = V_r + V_f,$$

где V_r — объем скелета; V_W — объем, занятый водной фазой; V_L — объем, занятый жидкой углеводородной фазой; V_G — объем, занятый газообразной фазой. $V_f = V_W + V_L + V_G$ — объем, занятый флюидом.

Пористость ϕ_f (часть объема, занятая подвижными фазами $\alpha = W, L, G$), определяется как

$$\phi_f = V_f/V.$$

Изменение пористости связано только со сжимаемостью скелета. Согласно этому предположению пористость определяется как функция давления [8], например:

$$\phi_f = \phi_{f,0} [1 + c_p(\tilde{p} - \tilde{p}_0)], \quad (1)$$

где $\phi_{f,0}$ — опорное значение пористости при заданном опорном значении давления \tilde{p}_0 ; $c_p = const$ — коэффициент сжимаемости; \tilde{p} — некоторое характерное значение среднепорового давления, которое может быть найдено, например, как средневзвешенное по насыщенностям давление фаз.

2.3 Описание компонентного и фазового состава

Будем считать, что в поровом пространстве присутствуют компоненты следующих типов: нефтяного, водного и газового.

Нефтяной компонент может быть чистым компонентом (состоять из молекул одного типа, например, бензол C_6H_6), либо псевдокомпонентом, то есть

объединять в себе группу чистых компонентов, объединенных по тому или иному признаку.

Водный компонент является чистым компонентом: он состоит из одного химического соединения — воды H_2O . Водный компонент может находиться только в водной фазе.

К газовым компонентам обычно относят компоненты, которые при стандартных условиях являются газами. Газовый компонент может быть конденсируемым или неконденсируемым. Конденсируемый компонент может присутствовать как в жидкой, так и в газовой фазе; неконденсируемый — только в газовой.

Ниже индексы $\alpha = W, L, G$ обозначают величины, относящиеся к соответствующим фазам, индексы $k = \overline{1, N_f}$ — к соответствующим компонентам.

Насыщенности подвижных фаз (т.е. их объемные концентрации) определяются как

$$S_\alpha = V_\alpha/V_f, \quad \sum_{\alpha=W,L,G} S_\alpha = 1. \quad (2)$$

Пусть N_f — общее число компонент во всех фазах; n_k — число молей компонента k ; n_α — число молей фазы α ; $n_{k\alpha}$ — число молей компонента k в фазе α .

Справедливы следующие соотношения:

$$n_\alpha = \sum_{k=1}^{N_f} n_{k\alpha}, \quad n_k = \sum_{\alpha=W,L,G} n_{k\alpha}. \quad (3)$$

В первой сумме суммирование ведется по всем компонентам, образующим фазу, во второй сумме — по всем фазам, содержащим данный компонент.

Полное число молей флюида равняется

$$n_f = \sum_{k=1}^{N_f} n_k = \sum_{\alpha=W,L,G} n_\alpha = \sum_{\substack{k=\overline{1, N_f} \\ \alpha=W,L,G}} n_{k\alpha}.$$

Компонентный состав фаз определяется условиями фазового равновесия. Определим молярные концентрации подвижных фаз как

$$C_\alpha = n_\alpha/n_f, \quad \sum_{\alpha=W,L,G} C_\alpha = 1.$$

Молярная концентрация компонента k в фазе α определяется соотношением:

$$x_{k\alpha} = \frac{n_{k\alpha}}{n_\alpha}, \quad n_\alpha > 0. \quad (4)$$

Тогда из (3) следуют нормировочные соотношения:

$$\sum_{k=1}^{N_f} x_{k\alpha} = 1, \quad \alpha = W, L, G. \quad (5)$$

Молярная плотность компонента k определяется как

$$m_k = n_k/V_f.$$

Молярная плотность фазы α :

$$b_\alpha = n_\alpha/V_\alpha.$$

Полная молярная плотность флюида есть:

$$m_{tot} = \sum_{k=1}^{N_f} m_k = n_f/V_f.$$

Полные концентрации подвижных компонент по определению равны:

$$Z_k = m_k / \sum_{k=1}^{N_f} m_k = m_k/m_{tot}. \quad (6)$$

Они выражаются через концентрации компонент в фазах и концентрации фаз как

$$Z_k = \sum_{\alpha=W,L,G} x_{k\alpha} C_\alpha = x_{kW} C_W + x_{kL} C_L + x_{kG} C_G. \quad (7)$$

Выразим насыщенности фаз через полную молярную плотность, молярные концентрации фаз и молярные плотности фаз:

$$S_\alpha = \frac{V_\alpha}{V_f} = \frac{n_\alpha/b_\alpha}{n_f/m_{tot}} = m_{tot} \frac{n_\alpha/n_f}{b_\alpha} = m_{tot} \frac{C_\alpha}{b_\alpha}, \quad (8)$$

откуда

$$C_\alpha = S_\alpha b_\alpha / m_{tot}.$$

Суммируя выражения (8) по всем подвижным фазам, получаем:

$$\frac{1}{m_{tot}} = \sum_{\alpha=W,L,G} \frac{C_\alpha}{b_\alpha}.$$

Таким образом, полная молярная плотность m_{tot} определяется с помощью коэффициентов C_α как среднее гармоническое.

Умножив обе части (8) на b_α и просуммировав по всем подвижным фазам, получаем:

$$m_{tot} = \sum_{\alpha=W,L,G} b_\alpha S_\alpha. \quad (9)$$

Из (6), (7) и (9) следует, что

$$m_k = \sum_{\alpha=W,L,G} b_\alpha S_\alpha x_{k\alpha}. \quad (10)$$

Давления жидких фаз связаны между собой выражениями

$$p_\alpha - p_\beta = p_{\alpha\beta}^c(\mathbf{S}, T), \quad \alpha \neq \beta, \quad \alpha, \beta = W, L, G,$$

где $p_{\alpha\beta}^c(\mathbf{S}, T)$ — заданные функции температуры и вектора насыщенностей фаз $\mathbf{S} = (S_W, S_L, S_G)$. Не все $p_{\alpha\beta}^c$ могут быть заданы независимо, т.к. (для $\alpha \neq \beta \neq \gamma$):

$$p_\alpha - p_\beta = p_{\alpha\beta}^c, \quad p_\beta - p_\gamma = p_{\beta\gamma}^c,$$

откуда

$$p_\alpha - p_\gamma = p_{\alpha\beta}^c + p_{\beta\gamma}^c = p_{\alpha\gamma}^c.$$

В настоящей работе :

$$p_L = p_W + p_{LW}^c(S_W), \quad p_G = p_L + p_{GL}^c(S_G), \quad (11)$$

где $p_{LW}^c(S_W, T)$, $p_{GL}^c(S_G, T)$ — капиллярные давления на границе между водной и жидкой углеводородной фазой (WL) и жидкой и газовой углеводородными фазами (LG), соответственно. Эти зависимости считаются заданными функциями насыщенностей.

2.4 Свойства флюида и фазовое равновесие

Уравнения состояния определяют связь давления, температуры и объёма фазы. Для описания термодинамического поведения углеводородов в пластовых условиях в основном используются кубические уравнения Ван-дер-Ваальсовского типа, к числу которых относятся уравнения состояния Пенга-Робинсона, Редлиха-Квонга, Соаве-Редлиха-Квонга, Зудкевича-Иоффе и др. (см., например, [12]).

Плотности фаз рассчитываются как взвешенное среднее гармоническое плотностей составляющих фазу компонент:

$$\frac{1}{b_\alpha} = \sum_{k=1}^{N_f} \frac{x_{k\alpha}}{b_k}.$$

Это соотношение является следствием допущения о справедливости закона Амага [13] об объеме смеси различных компонент:

$$v_\alpha = \sum_{k \in \alpha} x_{k\alpha} v_k,$$

где

$$v_k = \frac{1}{b_k} = \frac{w_k}{\rho_k} \quad (12)$$

— молярный объем компонента k , w_k — его молекулярный вес, $\rho_k = \rho_k(p_\alpha, T)$ — его массовая плотность. Для молярного объема фазы справедливо:

$$v_\alpha = w_\alpha / \rho_\alpha, \quad w_\alpha = \sum_{k=1}^{N_f} x_{k\alpha} w_k.$$

Отсюда следует, что массовые плотности фаз определяются как

$$\rho_\alpha = \frac{w_\alpha}{v_\alpha}, \quad b_\alpha = \frac{1}{v_\alpha}.$$

Массовые плотности компонент будем считать заданными функциями давления и температуры:

$$\rho_k = \rho_k(p_\alpha, T).$$

Для вычисления молярных плотностей компонент b_k используется соотношение (12).

Таким образом,

$$b_\alpha = b_\alpha(x_{k\alpha}, p_\alpha, T).$$

В настоящей работе для расчета фазового равновесия (т.е. определения концентраций компонент в фазах) используется метод K -значений (метод констант фазового равновесия). В этом случае считается, что концентрация компонента в фазах является заданной функцией температуры и давления, которая может быть получена, например, табулированием аналитического уравнения состояния в специальной программе (симуляторе термодинамических свойств) или из физического эксперимента.

Такой подход не ограничивает общность предлагаемых алгоритмов — при необходимости уравнения фазового равновесия могут решаться совместно с системой уравнений, представленной в разделе 3.3.

Константы фазового равновесия $K_k^{\alpha\beta}$ по определению равны:

$$K_k^{\alpha\beta} = \frac{x_{k\alpha}}{x_{k\beta}}, \quad (13)$$

где концентрации $x_{k\alpha}$ определены согласно (4). Константы фазового равновесия должны быть заданы для всех конденсируемых компонентов.

В силу определения, для констант фазового равновесия справедливы следующие соотношения:

$$K_k^{\alpha\beta} K_k^{\beta\gamma} = K_k^{\alpha\gamma}, \quad K_k^{\alpha\beta} = \frac{1}{K_k^{\beta\alpha}}. \quad (14)$$

Помимо этого, формально будем считать, что $K_k^{\alpha\alpha} \equiv 1$.

Приведенные выше соотношения показывают, что не все константы фазового равновесия независимы и возможно задать лишь часть из них.

В дальнейшем будем считать, что константы фазового равновесия являются явно заданными функциями давления и температуры,

$$K_k^{\alpha\beta} = K_k^{\alpha\beta}(p, T).$$

2.5 Закон сохранения массы компонент

Уравнение закона сохранения массы для k -го подвижного компонента имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_k + \operatorname{div} \mathcal{F}_k = Q_k, \quad k = \overline{1, N_f}, \quad (15)$$

где

$$M_k = \phi_f m_k, \quad \mathcal{F}_k = \sum_{\alpha=W,L,G} b_\alpha x_{k\alpha} \mathbf{u}_\alpha.$$

Здесь m_k выражаются согласно (10); Q_k — интенсивность притока компонента k от внешних источников (скважин); \mathbf{u}_α — скорость фильтрации α . Остальные величины определены выше.

Скорости \mathbf{u}_α подвижных фаз удовлетворяют закону Дарси:

$$\mathbf{u}_\alpha = -K \frac{k_{r\alpha}(\mathbf{S})}{\mu_\alpha} \nabla \Phi_\alpha,$$

где K — тензор абсолютных проницаемостей; $k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(\mathbf{S})$ — относительная фазовая проницаемость фазы α , $\mu_\alpha = \mu_\alpha(p_\alpha, T)$ — вязкость фазы; $\Phi_\alpha = p_\alpha - \rho_\alpha \gamma z$ — напор фазы; $p_\alpha = p_\alpha(\mathbf{S})$ — поровое давление фазы; ρ_α — массовая плотность фазы; γ — ускорение свободного падения; z — глубина, $\mathbf{S} = (S_W, S_G, S_L)$ — вектор насыщенностей подвижных фаз.

Существуют различные способы задания вязкостей фаз. Так или иначе, все они сводятся к явному заданию зависимости

$$\mu_\alpha = \mu_\alpha(p, T) \quad \text{или} \quad \mu_\alpha = \mu_\alpha(p, T, x_{k\alpha}).$$

Также будем считать, что зависимости относительных фазовых проницаемостей от насыщенных и температуры известны и заданы в явном виде:

$$k_{r\alpha} = k_{r\alpha}(\mathbf{S}, T).$$

3 Методы решения

3.1 Сетка и сеточные функции

Аппроксимации приводятся для пространственно-одномерного случая, однако обобщение подхода на многомерный случай не представляет труда.

Будем считать, что расчетная область Ω разбита на N ячеек, которые имеют форму параллелепипедов с размерами $\Delta_x \times \Delta_y \times \Delta_z$,

$$\Omega = [0, L] \times [0, \Delta_y] \times [0, \Delta_z], \quad \Omega = \cup_{i=1}^N \omega_i. \quad (16)$$

Геометрические центры ячеек имеют координаты $(x_i, \Delta_y/2, \Delta_z/2)$. Величины, относящиеся к ячейкам или центрам ячеек будем нумеровать целым индексом $i = \overline{1, N}$. Величины, относящиеся к границе между соседними ячейками ω_i и ω_{i+1} будем нумеровать полуцелым индексом $i + 1/2$.

Будем считать, что внутренняя граница ячейки ω_i образована двумя прямоугольниками $x_{i-1/2} \times s$ и $x_{i+1/2} \times s$, $\omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}] \times s$, где s — сечение области плоскостью, перпендикулярной оси Ox , $s = [0, \Delta_y] \times [0, \Delta_z]$. Далее без потери общности будем считать, что $s = const$ для всей области.

Расчетная область и сетка схематично изображены на рисунке 1.

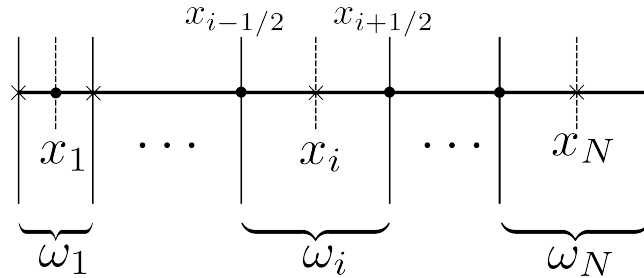


Рис. 1. Расчетная область и сетка

Всюду далее поток массы через боковые (т.е. параллельные плоскостям Oxy и Oxz) грани ячеек ω_i будем считать равным нулю. Таким образом, задача является фактически одномерной, но при этом расчетные ячейки имеют ненулевой (трехмерный) объем,

$$|\omega_i| = \Delta_{x,i} \times \Delta_y \times \Delta_z, \quad \Delta_{x,i} = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

3.2 Двухслойная явная схема

Конечно-объемные аппроксимации уравнений (15) с двухслойной явной аппроксимацией по времени в расчетной ячейке i имеют вид:

$$|\omega_i| \frac{\hat{M}_{k,i} - M_{k,i}}{\Delta t} + s \cdot [\mathcal{F}_{k,i+1/2} - \mathcal{F}_{k,i-1/2}] = |\omega_i| Q_k, \quad k = \overline{1, N_f}, i = \overline{1, N} \quad (17)$$

и позволяют определить значения величин $\hat{M}_{k,i}$ на новом временном слое, соответствующем моменту времени $t + \Delta t$.

Аппроксимация потока компонента k через границу $i + 1/2$ между ячейками i и $i + 1$ имеет вид:

$$\mathcal{F}_{k,i+1/2} = \sum_{\alpha=W,L,G} D_{k,i+1/2}^{\alpha} \nabla \Phi_{\alpha,i+1/2}, \quad (18)$$

где

$$\nabla \Phi_{\alpha,i+1/2} = \Delta \Phi_{\alpha,i+1/2} / \Delta x_i, \quad \Delta \Phi_{\alpha,i+1/2} = \Phi_{\alpha,i+1} - \Phi_{\alpha,i}$$

— аппроксимация градиента напора подвижной фазы α на грани $i + 1/2$ ячейки i , а величина $D_{k,i+1/2}^{\alpha}$ вычисляется согласно [14]:

$$D_{k,i+1/2}^{\alpha} = \begin{cases} D_{k,i}^{\alpha}, & \nabla \Phi_{\alpha,i+1/2} \leq 0, \\ D_{k,i+1}^{\alpha}, & \nabla \Phi_{\alpha,i+1/2} > 0; \end{cases} \quad D_k^{\alpha} = b_{\alpha} x_{k\alpha} \frac{-K k_{r\alpha}}{\mu_{\alpha}}.$$

Далее, пусть

$$\nabla \Phi_{\alpha,i+1/2}^{\pm} = 0.5 (\nabla \Phi_{\alpha,i+1/2} \pm |\nabla \Phi_{\alpha,i+1/2}|).$$

Тогда потоковый член можно переписать в виде:

$$\mathcal{F}_{k,i+1/2} = \sum_{\alpha=W,G,L} \left(D_{k,i}^{\alpha} \nabla \Phi_{\alpha,i+1/2}^{-} + D_{k,i+1}^{\alpha} \nabla \Phi_{\alpha,i+1/2}^{+} \right). \quad (19)$$

Аппроксимируя градиент напора на грани с помощью центральных разностей, получим следующее выражение для $\nabla \Phi_{\alpha,k+1/2}$:

$$\nabla \Phi_{\alpha,i+1/2} = \frac{\Phi_{\alpha,i+1} - \Phi_{\alpha,i}}{\Delta x_i}.$$

3.3 Система уравнений для определения первичных неизвестных

Приведенные ниже соотношения позволяют по значениям решения в момент времени t и приближениям \hat{M}_k на текущем временном слое определить

первичные неизвестные (т.е. величины, характеризующие состояние течения в текущий момент времени).

В качестве первичных неизвестных выберем насыщенности и давления фаз S_α, p_α , а также концентрации компонент в фазах $x_{k\alpha}$. Тогда общее количество первичных неизвестных составит $3 \times N_f + 6$.

Рассмотрим соответствующие группы уравнений.

Нормировочные соотношения для насыщенностей.

$$S_W + S_L + S_G = 1. \quad (20)$$

Определяющие соотношения для плотностей подвижных компонент флюида. Согласно определению величин M_k для подвижных компонент имеем:

$$\phi_f m_k = \hat{M}_k, \quad k = \overline{1, N_f}.$$

Отсюда (с учетом определяющих соотношений (10) для молярных плотностей подвижных компонент):

$$\phi_f \cdot \left[\sum_{\alpha=W,L,G} b_\alpha(x_{k\alpha}, p_\alpha, T) S_\alpha x_{k\alpha} \right] = \hat{M}_k, \quad k = \overline{1, N_f}. \quad (21)$$

Пористость ϕ_f , в свою очередь является заданной функцией среднепорового давления \tilde{p} (1):

$$\phi_f = \phi_f(\tilde{p}), \quad \tilde{p} = \sum_{\alpha=W,L,G} S_\alpha p_\alpha.$$

Плотности фаз. В уравнения (15) входят плотности b_α фаз. Соответствующие расчетные формулы приведены в разделе 2.4. С алгоритмической точки зрения достаточно знать, что

$$b_\alpha = b_\alpha(x_{k\alpha}, p_\alpha, T), \quad k = \overline{1, N_f}, \alpha = W, L, G.$$

Уравнения для капиллярных давлений. Согласно (11), уравнения для капиллярных давлений имеют вид:

$$p_L = p_W + p_{cLW}(S_W), \quad p_G = p_L + p_{cGL}(S_G). \quad (22)$$

где функции

$$p_{LW}^c = p_{LW}^c(S_W), \quad p_{GL}^c = p_{GL}^c(S_G)$$

считаются заданными.

Условия фазового равновесия и нормировочные соотношения для концентраций. Условия фазового равновесия задаются константами фазового равновесия как функции давления и температуры,

$$\frac{x_{k\alpha}}{x_{k\beta}} = K_k^{\alpha\beta}(p, T), \quad k = \overline{1, N_f}, \quad \alpha, \beta = W, L, G.$$

Всего имеем $N_f \times 9$ заданных функций $K_k^{\alpha\beta}$ и $N_f \times 3$ неизвестных $x_{k\alpha}$.

С учетом дополнительных соотношений для $K_k^{\alpha\beta}$ из раздела (2.4) получим $2 \times N_f$ независимых $K_k^{\alpha\beta}$:

$$K_k^{\alpha\beta}, K_k^{\alpha\gamma}.$$

Опорные пары фаз могут быть выбраны формально произвольно. Их выбор обусловлен вычислительными соображениями.

Как ранее упоминалось в (5), нормировочные соотношения для концентраций подвижных компонент в фазах имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{N_f} x_{k\alpha} = 1, \quad \alpha = W, L, G.$$

Таким образом имеем $2 \times N_f + 3$ уравнений:

$$\frac{x_{k\alpha}}{x_{k\beta}} = K_k^{\alpha\beta}(p, T), \quad \frac{x_{k\alpha}}{x_{k\gamma}} = K_k^{\alpha\beta}(p, T), \quad (23)$$

$$\alpha \neq \beta \neq \gamma, \quad k = \overline{1, N_f}, \quad \alpha, \beta, \gamma = W, L, G;$$

$$\sum_{k=1}^{N_f} x_{k\alpha} = 1, \quad \text{для } \alpha = W, L, G \text{ таких что } S_\alpha > 0. \quad (24)$$

Число неизвестных параметров $x_{k\alpha}$ для $\alpha = W, L, G$ равняется $3 \times N_f$.

Общее число уравнений в (20)–(24) составляет $3 \times N_f + 6$ и совпадает с числом первичных неизвестных.

После определения величин \hat{M}_k из уравнений (17) значения первичных неизвестных находятся как решение системы уравнений (20)–(24). Таким образом, общий алгоритм решения задачи имеет вид:

1. Интегрирование уравнений (15) явной схемой по времени (например, (17)) для определения величин \hat{M}_k , $k = \overline{1, N_f}$.
2. Решение системы нелинейных уравнений для определения первичных неизвестных.

3.4 Трехслойная явная схема с регуляризацией

По аналогии с работами [1–4] введем в уравнения (15) регуляризующие члены, позволяющие ослабить ограничение на шаг по времени, следующее из условия устойчивости Куранта. В итоге преобразованные уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} M_k + \tau \frac{\partial^2 M_k}{\partial t^2} + \operatorname{div} \mathcal{F}_k = Q_k + \operatorname{div} [\lambda \nabla M_k], \quad k = \overline{1, N_f}, \quad (25)$$

где τ и λ — регуляризующие параметры, имеющие размерность времени и кинематической вязкости.

Конечно-объемные аппроксимации уравнений (25) с трехслойной центрально — разностной аппроксимацией по времени в расчетной ячейке i имеют вид:

$$\begin{aligned} |\omega_i| \frac{\hat{M}_{k,i} - \check{M}_{k,i}}{2\Delta t} + |\omega_i| \tau \frac{\hat{M}_{k,i} - 2M_{k,i} + \check{M}_{k,i}}{(\Delta t)^2} + s \cdot [\mathcal{F}_{k,i+1/2} - \mathcal{F}_{k,i-1/2}] = \\ = |\omega_i| Q_k + s \cdot [\mathcal{G}_{k,i+1/2} - \mathcal{G}_{k,i-1/2}], \quad k = \overline{1, N_f}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{G}_{k,i+1/2} = \lambda_{i+1/2} \nabla M_{k,i+1/2}, \quad \nabla M_{k,i+1/2} = \frac{M_{k,i+1} - M_{k,i}}{\Delta_{x,i}}.$$

В дальнейшем будем считать, что $\lambda_{i+1/2} = \text{const} = \lambda$.

Потоки $\mathcal{F}_{k,i+1/2}$ вычисляются согласно (19).

Для определения первичных неизвестных используется та же система уравнений, что и ранее (см. раздел 3.3).

4 Результаты расчетов

В качестве теста рассмотрим следующую задачу.

Параметры расчетной области в соответствии с (16) имеют следующие значения: $L = 5.0$ м, $\Delta_y = \Delta_z = 1.0$ м. Число ячеек сетки $N = 100$, $\Delta_x = L/N = 0.05$ м.

Рассматривалась изотермическая ($T = 550$ К) фильтрация флюида, состоящего из трех компонент ($N_f = 3$): водного w , легкого g и тяжелого o углеводородных (псевдо)компонент. Свойства компонент g и o частично брались из модели SPE4, рассмотренной в [15].

Молярные массы компонент равны:

$$w_w = 0.018 \text{ кг/моль}, \quad w_g = 0.250 \text{ кг/моль}, \quad w_o = 0.450 \text{ кг/моль}.$$

Массовая плотность водного компонента задается следующим образом:

$$\rho_w^W = \rho_0 + \beta \cdot (p_W - p_{W,0}),$$

где $\rho_0 = 1000.0$ кг/м³, $p_{W,0} = 1.0$ Бар, $\beta = 4.4 \cdot 10^{-2}$ Бар⁻¹. Величины ρ_g^G, ρ_g^L и ρ_o^G, ρ_o^L определяются согласно уравнению состояния Пенга-Робинсона [12] со следующими входными параметрами для компонент: $T_c = 783.1$ К, $p_c = 0.9653 \times 10^6$ Бар, $w_{as} = 0.55$ для компоненты g и $T_c = 699.8$ К, $p_c = 1.5513 \times 10^6$ Бар, $w_{as} = 0.4$ для компоненты o , соответственно.

Выражения для K -значений имеют вид:

$$K_g^{LG} = \left(1.23 \times 10^6 + \frac{833.4 \times 10^6}{14.50 \cdot p_G} \right) \cdot \exp \left(-\frac{16000}{5/4 \cdot T + 273.15} \right),$$

$$K_o^{LG} = \left(212 + \frac{155.4 \times 10^3}{14.50 \cdot p_L} \right) \cdot \exp \left(-\frac{4000}{5/4 \cdot T - 206.85} \right).$$

В силу постановки задачи, а именно — нерастворимости углеводородных компонент g, o в водной фазе W и присутствии w только в фазе W , остальные K -значения были заданы следующим образом:

$$K_w^{LW} = K_w^{GW} = 0.0, \quad K_g^{WG} = 0.0, \quad K_o^{WL} = 0.0.$$

Вязкости компонент и фаз измеряются в Бар·с и имеют следующий вид:

$$\mu_g^L = 4.4 \times 10^2 \cdot (\tilde{T})^{-3.4}, \quad \mu_n^L = 2.0 \times 10^3 \cdot (\tilde{T})^{-3.4},$$

$$\mu_g^G = 0.5 \times 10^{-10} \cdot (\tilde{T})^{0.9}, \quad \mu_n^G = 1.0 \times 10^{-10} \cdot (\tilde{T})^{0.9},$$

где $\tilde{T} = 5/4 \cdot T + 273.15$,

$$\mu_G = (x_g^G \mu_g^G + x_n^G \mu_n^G), \quad \mu_L = (x_g^L \mu_g^L + x_n^L \mu_n^L),$$

$$\mu_W = 2.414 \times 10^{-10} \cdot 10.0^{247.8/(T-140.0)}.$$

В соответствии с используемой моделью компонентного состава, $x_w^W = 1.0$, $x_w^G = x_w^L = x_g^W = x_n^W = 0.0$.

Значения коэффициентов тензора абсолютных проницаемостей были взяты постоянными и равными $K = 6.64 \times 10^{-11}$ м².

Относительные фазовые проницаемости $k_{r\alpha}$ определяются в соответствии с приближением Стоуна в модификации Азиза и Сеттари [11]:

$$\bar{S}_\alpha = \frac{S_\alpha - S_{\alpha r}}{1 - S_{Wr} - S_{Gr} - S_{Lr}}, \quad \alpha = W, G, L,$$

$$k_{rW}(\bar{S}_W) = \begin{cases} \bar{S}_W^{1/2} \left[1 - \left(1 - \bar{S}_W^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \right]^2, & 0 < \bar{S}_W < 1, \\ 1, & \bar{S}_W \geq 1, \\ 0, & \bar{S}_W \leq 0; \end{cases}$$

$$k_{rG}(\bar{S}_G) = \begin{cases} \bar{S}_G^{1/2} \left[1 - \left(1 - \bar{S}_G^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \right]^2, & 0 < \bar{S}_G < 1, \\ 1, & \bar{S}_G \geq 1, \\ 0, & \bar{S}_G \leq 0; \end{cases}$$

$$k_{LW}(\bar{S}_W) = \begin{cases} (1 - \bar{S}_W)^{1/2} \left[1 - \bar{S}_W^{n/(n-1)} \right]^{2(n-1)/n}, & 0 < \bar{S}_W < 1, \\ 1, & \bar{S}_W \leq 0, \\ 0, & \bar{S}_W \geq 1; \end{cases}$$

$$k_{LG}(\bar{S}_L) = \begin{cases} \bar{S}_L^{1/2} \left[1 - \left(1 - \bar{S}_L^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \right]^2, & 0 < \bar{S}_L < 1, \\ 1, & \bar{S}_L \geq 1, \\ 0, & \bar{S}_L \leq 0; \end{cases}$$

$$k_N(\bar{S}_W, \bar{S}_L) = \begin{cases} \frac{\bar{S}_L k_{LW} k_{LG}}{(1 - \bar{S}_W)(\bar{S}_W + \bar{S}_L)}, & \bar{S}_W < 1, \bar{S}_W + \bar{S}_L > 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь \bar{S}_α – эффективные насыщенности фаз, $S_{\alpha r}$ – критические насыщенности фаз, $S_{Wr} = S_{Gr} = S_{Lr} = 0.05$, $n = 3.25$. Вид относительных фазовых проницаемостей k_{rW} , k_{rG} и k_{rL} приведен на рис. 2 и 3.

Для описания капиллярных давлений использовалась приближенная модель Паркера [16]:

$$p_{LW}^c(\bar{S}_W) = p_L - p_W = \frac{1}{\alpha_c \beta_{LW}} \left(\bar{S}_W^{n/(1-n)} - 1 \right)^{1/n}, \quad 0 < \bar{S}_W < 1,$$

$$p_{GL}^c(\bar{S}_G) = p_G - p_L = \frac{1}{\alpha_c \beta_{GL}} \left[\left(1 - \bar{S}_G \right)^{n/(1-n)} - 1 \right]^{1/n}, \quad 0 < \bar{S}_G < 1,$$

$$n = 3.25, \quad \alpha_c = 48.0 \text{ Бар}^{-1}, \quad \beta_{LW} = 0.67, \quad \beta_{GL} = 2.$$

На участках, где эффективные насыщенности перестают удовлетворять указанному интервалу, капиллярные давления продолжают постоянными значениями. Вид капиллярных давлений p_{LW}^c и p_{GL}^c в рассматриваемом случае приведен на рис. 4.

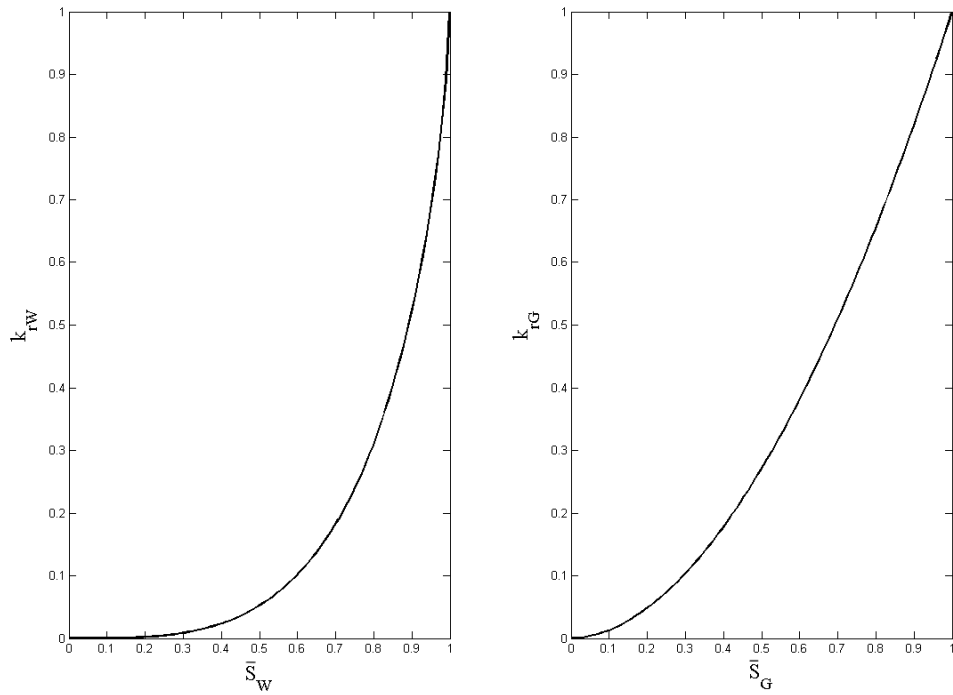


Рис. 2. Вид относительных фазовых проницаемостей k_{rW} и k_{rG}

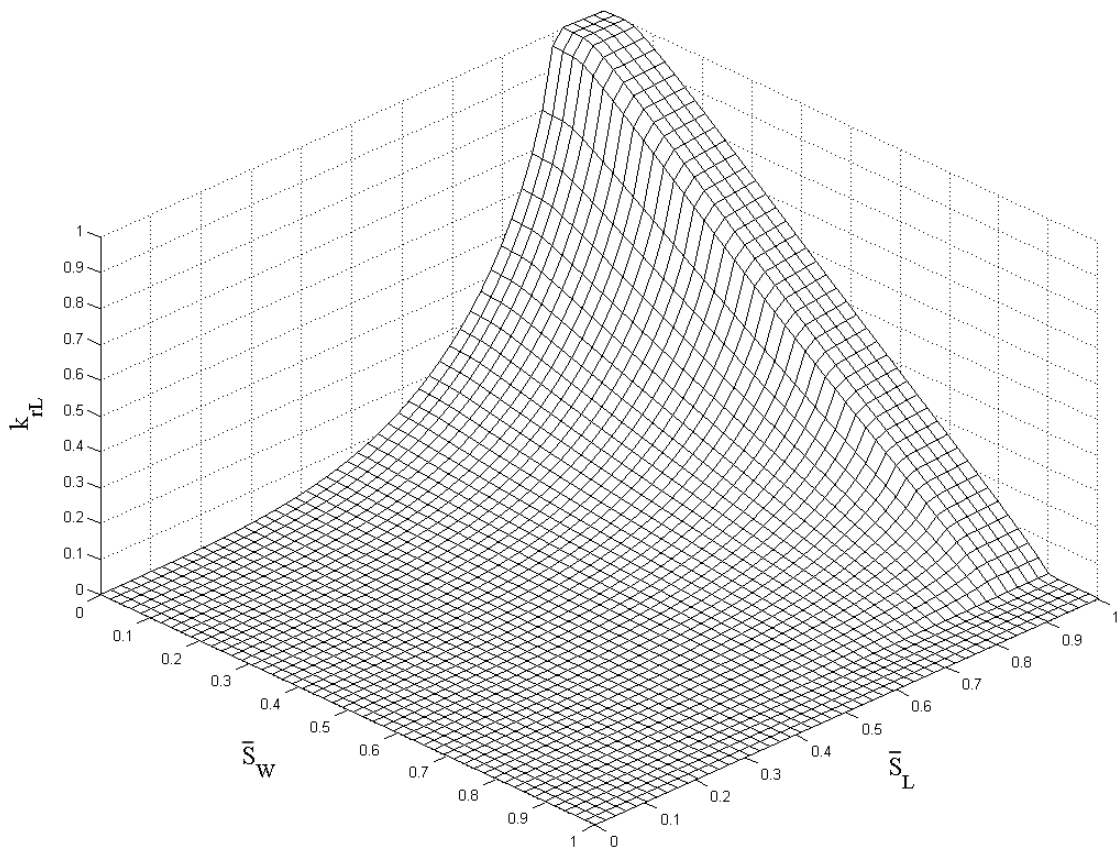


Рис. 3. Вид относительной фазовой проницаемости k_{rL}

Опорные значения для пористости в (1) равны соответственно $\phi_{f,0} = 0.4$, $C_p = 5.0 \cdot 10^{-5}$ Бар⁻¹, $\tilde{p}_0 = 1.0$ Бар.

Система уравнений для определения первичных неизвестных (см. раздел 3.3) для нашей задачи состоит из 15 уравнений, $\alpha = W, L, G$, $k = w, g, o$:

$$\sum_{\alpha} S_{\alpha} = 1.0,$$

$$\sum_k x_{kW} = 1.0, \quad \sum_k x_{kG} = 1.0, \quad \sum_k x_{kL} = 1.0,$$

$$p_L = p_W + p_{LW}^c(S_W), \quad p_G = p_L + p_{GL}^c(S_G),$$

$$\phi(p_W, p_G, p_L, S_W, S_G, S_L) \cdot \sum_{\alpha} x_{w\alpha} \cdot S_{\alpha} \cdot b_{\alpha}(p_W, p_G, p_L, x_{w\alpha}, x_{g\alpha}, x_{o\alpha}) = \hat{M}_w,$$

$$\phi(p_W, p_G, p_L, S_W, S_G, S_L) \cdot \sum_{\alpha} x_{g\alpha} \cdot S_{\alpha} \cdot b_{\alpha}(p_W, p_G, p_L, x_{w\alpha}, x_{g\alpha}, x_{o\alpha}) = \hat{M}_g,$$

$$\phi(p_W, p_G, p_L, S_W, S_G, S_L) \cdot \sum_{\alpha} x_{o\alpha} \cdot S_{\alpha} \cdot b_{\alpha}(p_W, p_G, p_L, x_{w\alpha}, x_{g\alpha}, x_{o\alpha}) = \hat{M}_o,$$

$$\begin{aligned} x_{wG}/x_{wW} &= K_w^{GW}(p_W, p_G, p_L), & x_{wL}/x_{wW} &= K_w^{LW}(p_W, p_G, p_L), \\ x_{gW}/x_{gG} &= K_g^{WG}(p_W, p_G, p_L), & x_{gL}/x_{gG} &= K_g^{LG}(p_W, p_G, p_L), \\ x_{oW}/x_{oL} &= K_o^{WL}(p_W, p_G, p_L), & x_{oL}/x_{oG} &= K_o^{LG}(p_W, p_G, p_L). \end{aligned}$$

Для решения этой системы используется метод Ньютона.

В качестве начальных условий задаются постоянные значения насыщенностей водной и жидкой углеводородной фаз, а также давление жидкой углеводородной фазы:

$$S_W = 0.2, \quad S_L = 0.65, \quad p_L = 300.0 \text{ Бар.}$$

Все остальные параметры в начальный момент времени вычисляются согласованно с заданными.

В первой расчетной ячейке располагается источник водного компонента (и, соответственно, водной фазы) Q_w (см. (15)), заданный формулой

$$Q_w = \Theta(p_{well} - p_W), \tag{26}$$

где $p_{well} = const = 350$ Бар, $\Theta = 1.44$ моль/(Бар·с).

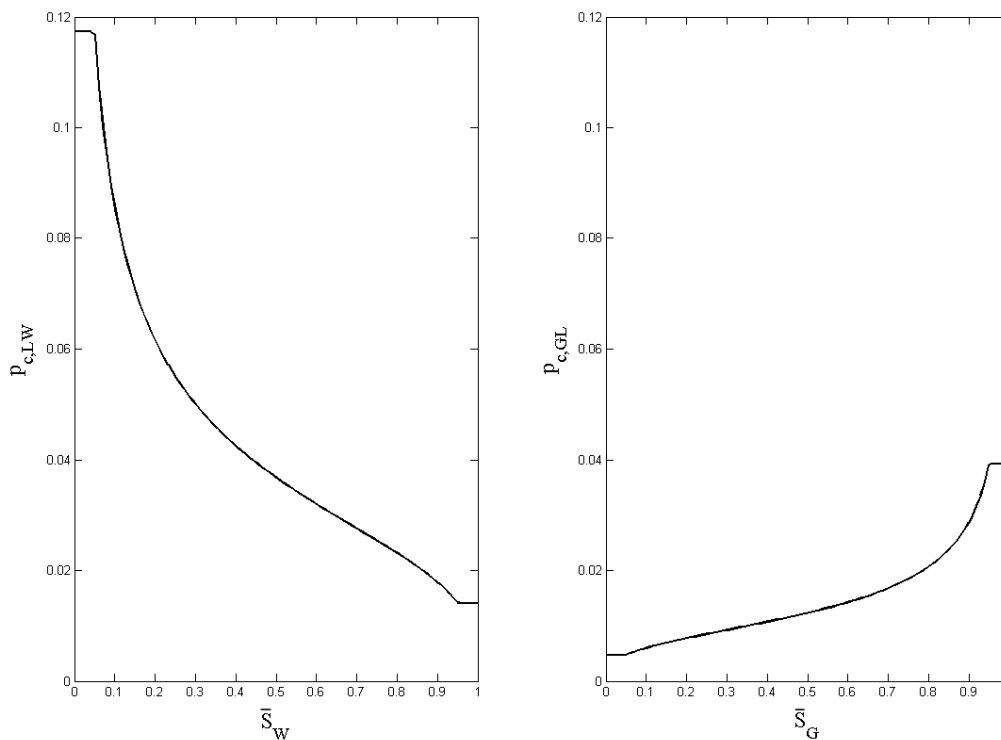


Рис. 4. Вид капиллярных давлений p_{LW}^c и p_{GL}^c

В качестве граничных условий на левой границе задается условие непротекания; на правой границе зафиксированы значения параметров, соответствующие начальному распределению.

Все расчеты велись до достижения момента времени $t = 2.5 \times 10^{-1}$ с. Для наглядности на всех приведенных далее рисунках показана не вся расчетная область, а только ее часть с координатами $[0.0, 2.0]$ по оси Ox , в которой локализованы фронты насыщенностей фаз. Т.к. давления фаз отличаются только на значения капиллярных давлений, которые в данной задаче малы по сравнению с изменениями давлений в расчетной области, везде далее на рисунках представлено распределения давления водной фазы P_W (за исключением рисунка с начальным распределением давлений фаз).

Распределение давления и насыщенностей фаз в начальный момент времени представлены на рис. 5 и 6.

В качестве эталонного рассматривались результаты расчета, проведенного по двухслойной явной схеме при максимально допустимом (согласно курантовскому ограничению) шаге по времени $\Delta t_{\text{expl}} = 1.0 \times 10^{-6}$ с. Результаты расчета представлены на рис. 7 и 8.

Расчеты по трехслойной явной схеме проводились при следующих значе-

ниях параметров:

$$\begin{aligned}\lambda &= 1.0 \times 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}, \\ \tau &= 5.0 \times 10^{-5} \text{ с для } \Delta t = 1.0 \times 10^{-5} \text{ с}, \\ \tau &= 5.5 \times 10^{-3} \text{ с для } \Delta t = 1.0 \times 10^{-4} \text{ с}, \\ \tau &= 5.5 \times 10^{-1} \text{ с для } \Delta t = 1.0 \times 10^{-3} \text{ с}.\end{aligned}$$

Отметим, что регуляризующие параметры λ и τ для каждого Δt варьировались в широком диапазоне. Приведенные выше значения являются оптимальными с точки зрения совпадения с «точным» решением.

Результаты расчетов по трехслойной явной схеме приведены на рис. 9 — 14. В таблице 1 приведены относительные ошибки полученного решения по сравнению с «точным» в равномерной норме,

$$\varepsilon_S = \frac{\|\Delta \mathbf{S}\|_\infty}{\|\mathbf{S}\|_\infty} \times 100\%, \quad \varepsilon_p = \frac{\|\Delta \mathbf{p}\|_\infty}{\|\mathbf{p}\|_\infty} \times 100\%.$$

Таблица 1. Относительные ошибки решения, полученного с использованием трехслойной схемы.

$\tau/\Delta t$	$\Delta t/\Delta t_{\text{expl}}$	ε_S	ε_p
5.0×10^0	10^1	3.8%	0.8%
5.5×10^1	10^2	2.9%	1.6%
5.5×10^2	10^3	43.0%	2.4%

Как видно из этой таблицы, регуляризованный алгоритм обеспечивает достаточно высокую точность решения при увеличении шага по времени на 2 порядка по сравнению с явной двухслойной схемой. При большем увеличении шага давление рассчитывается с хорошей точностью, однако распределения насыщенных вычисляются с неприемлемо большой ошибкой. Это связано с тем, что регуляризующий параметр τ можно интерпретировать как время релаксации потока флюида от его значения на текущем временном слое до его значения на следующем временном слое (определяемом законом Дарси) [17]. Если это время существенно превышает шаг по времени, то решение задачи будет заведомо неточным.

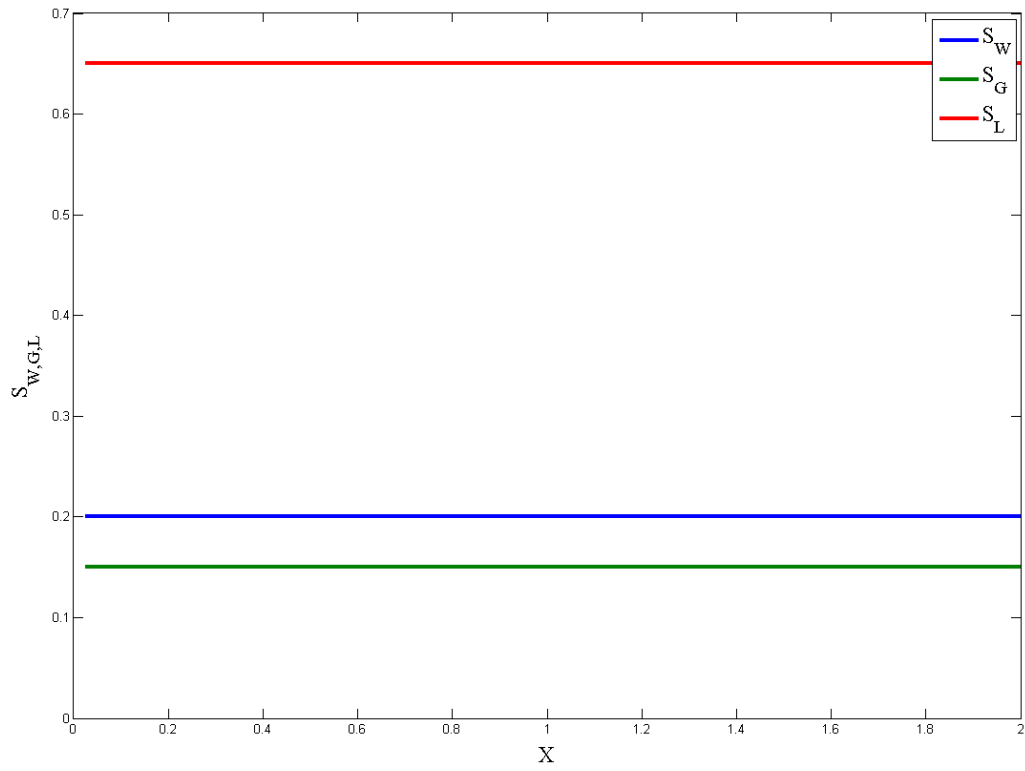


Рис. 5. Начальное распределение насыщенностей фаз $S_{W,L,G}$.

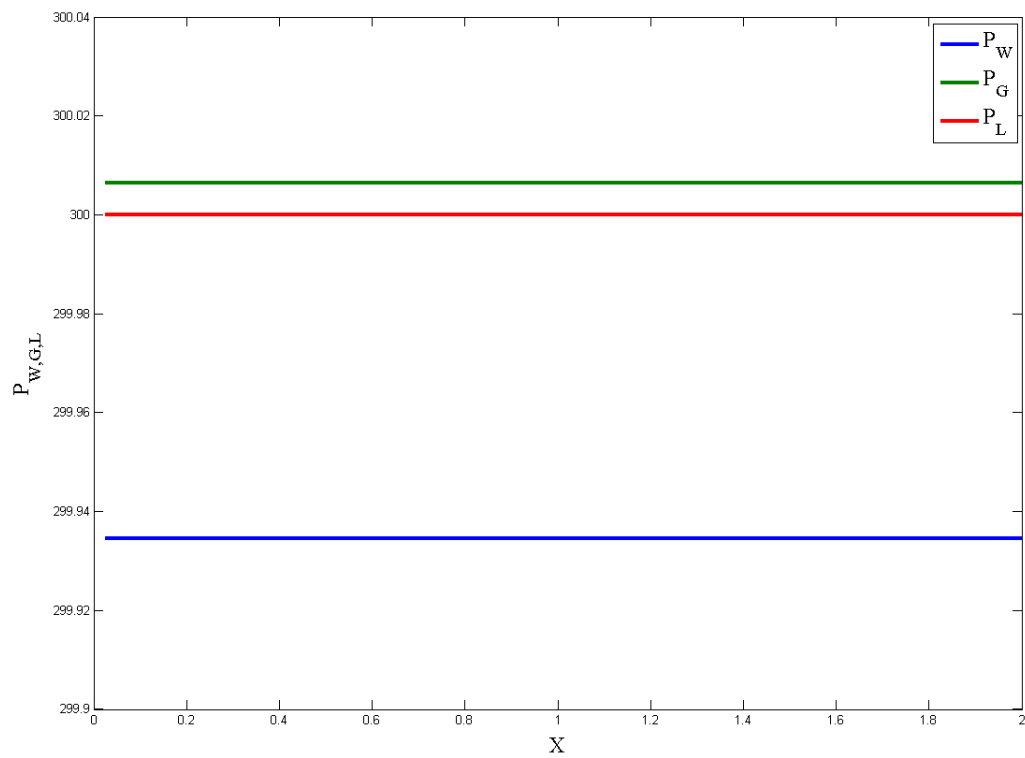


Рис. 6. Начальное распределение давления фаз $P_{W,L,G}$.

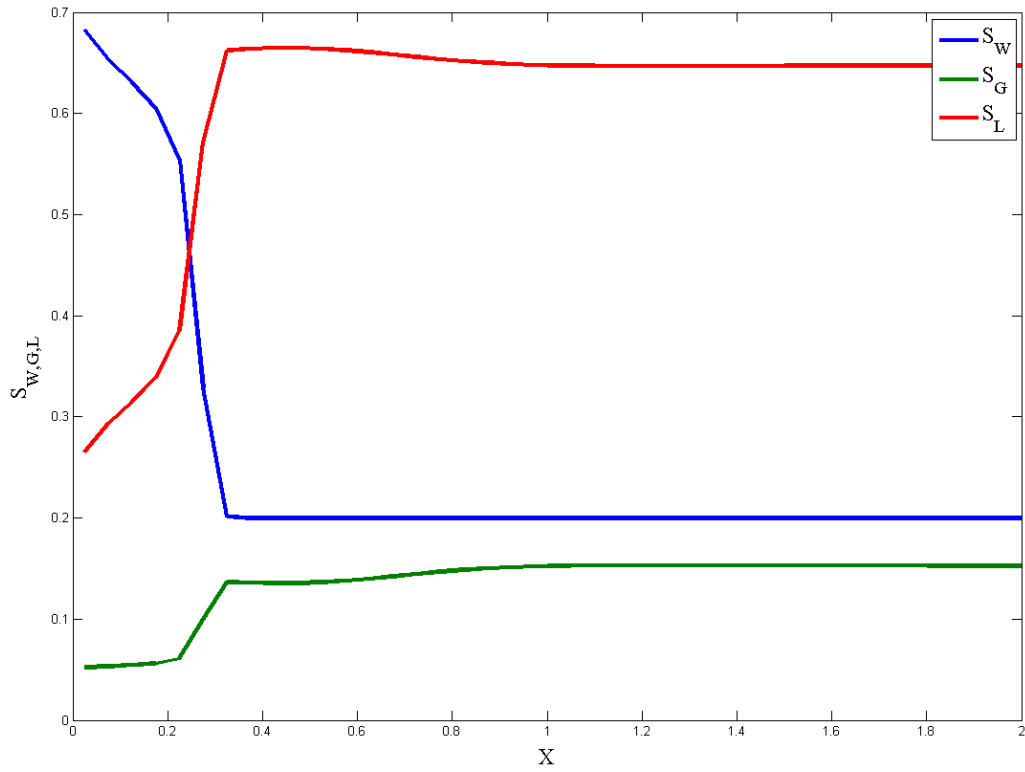


Рис. 7. Итоговые насыщенности фаз $S_{W,L,G}$ в расчете по двухслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ с.

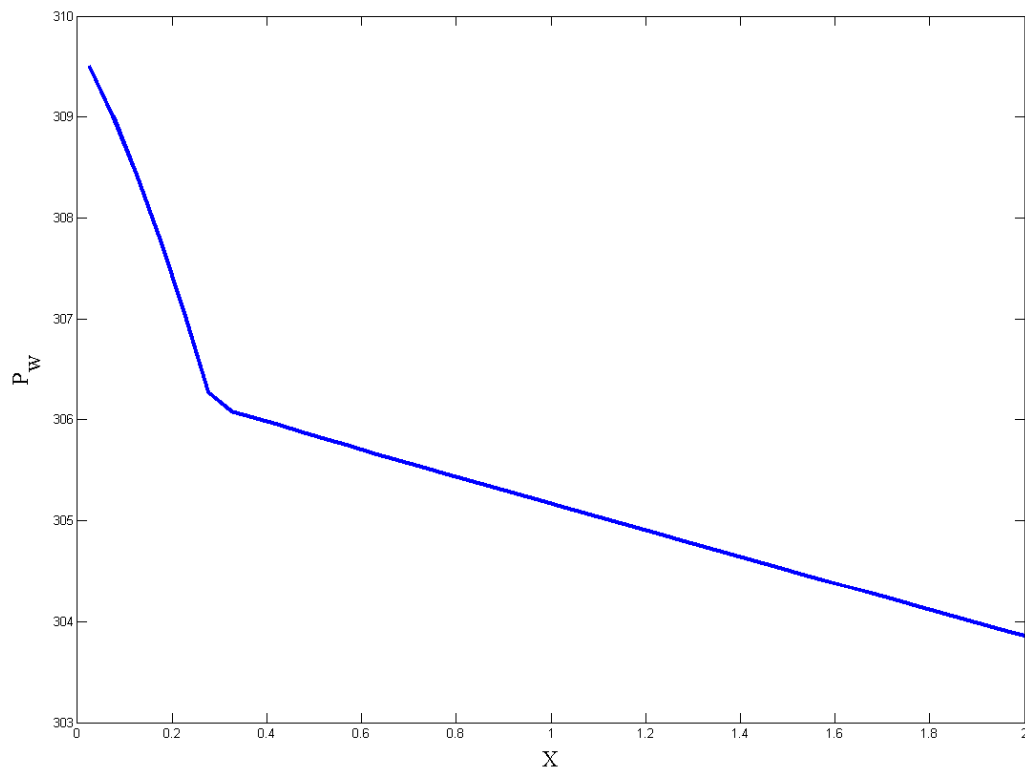


Рис. 8. Итоговое давление водной фазы P_W в расчете по двухслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-6}$ с.

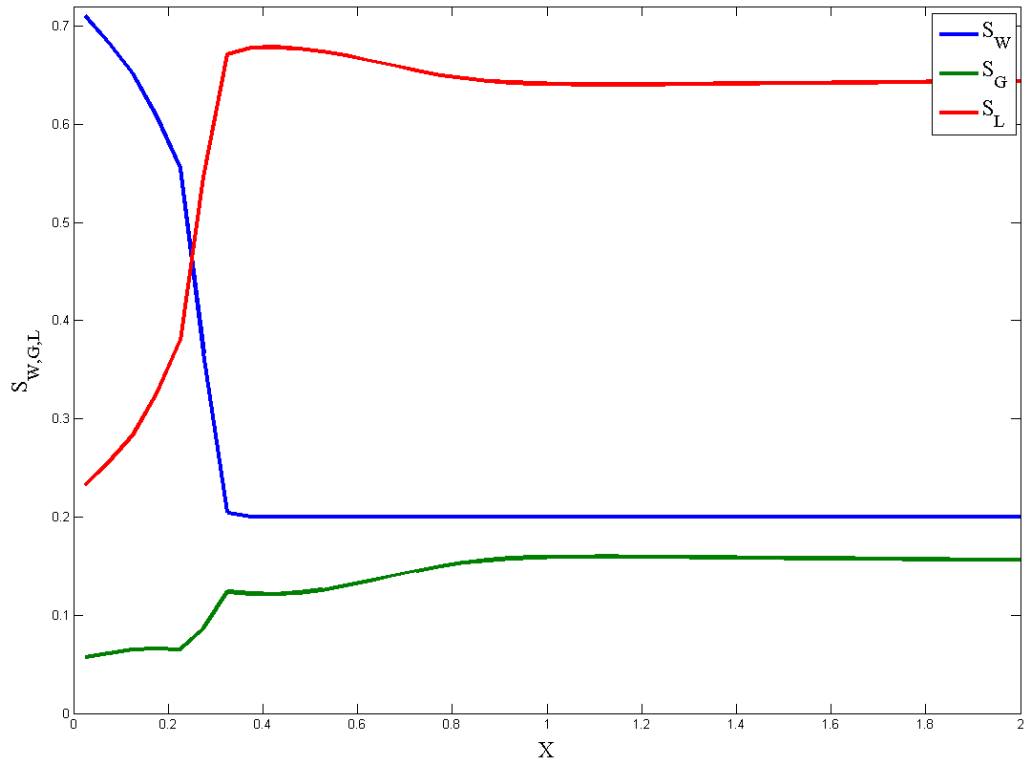


Рис. 9. Итоговые насыщения фаз $S_{W,L,G}$ в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ с.

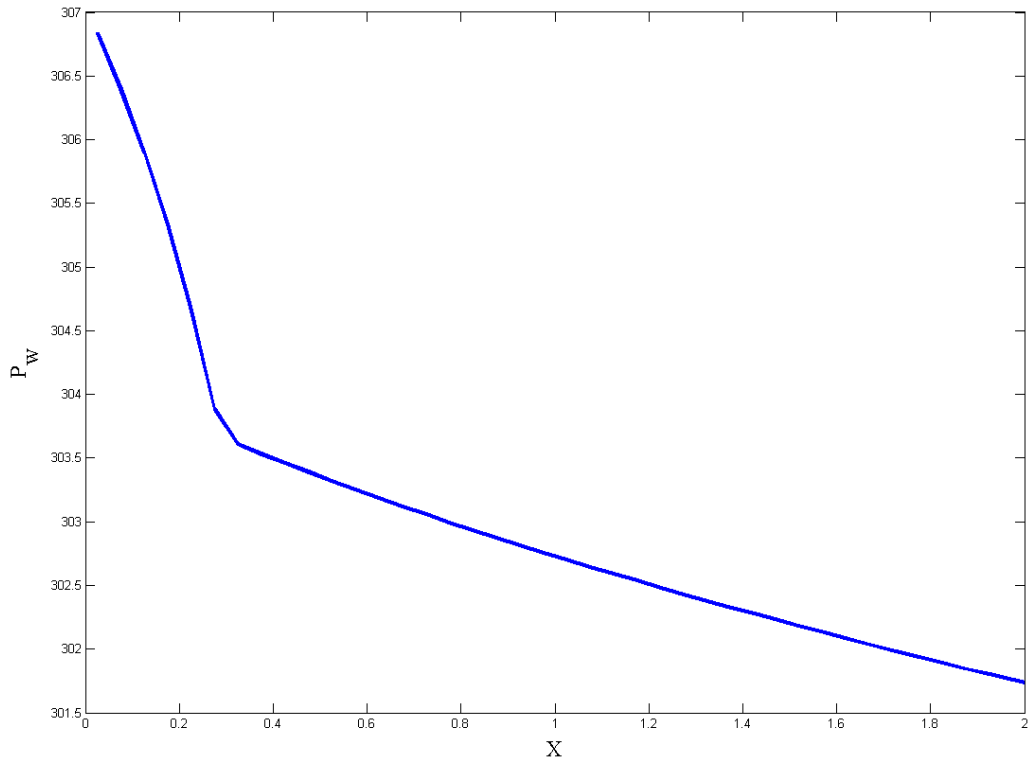


Рис. 10. Итоговое давление водной фазы P_W в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-5}$ с.

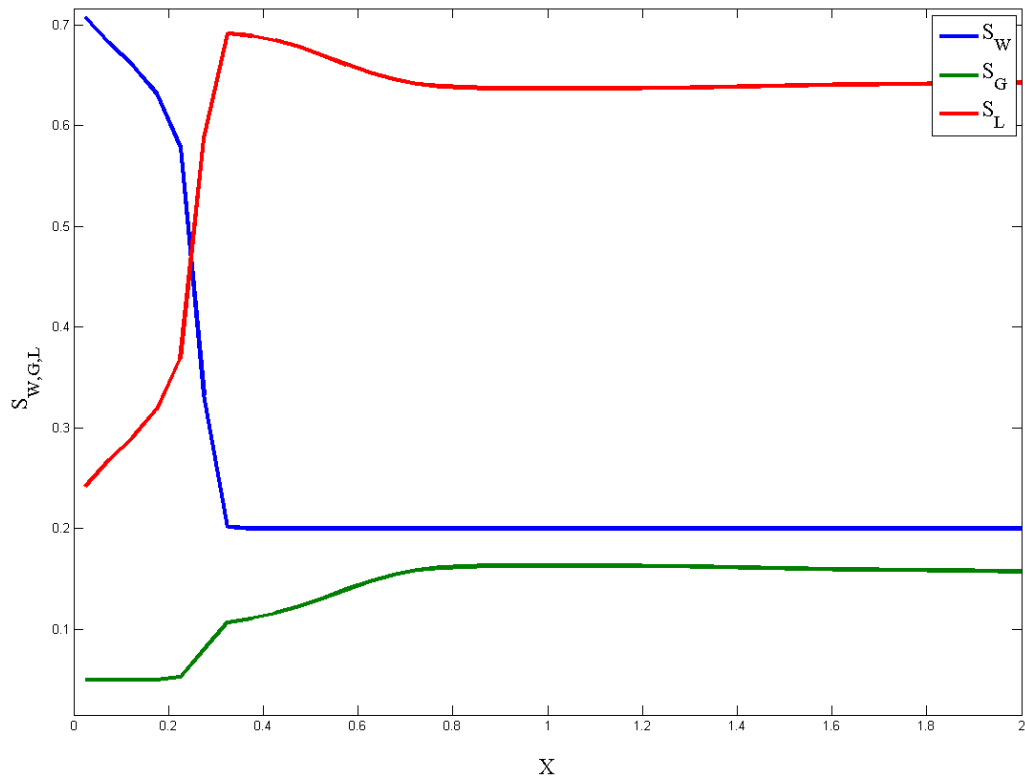


Рис. 11. Итоговые насыщенности фаз $S_{W,L,G}$ в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ с.

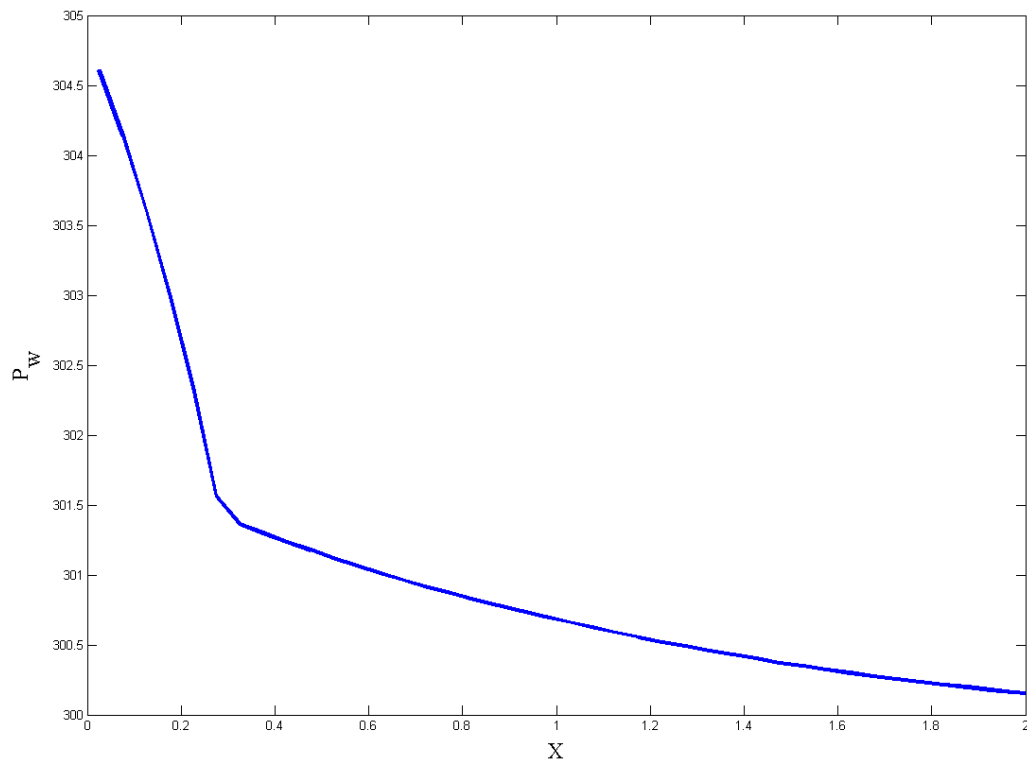


Рис. 12. Итоговое давление водной фазы P_W в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-4}$ с.

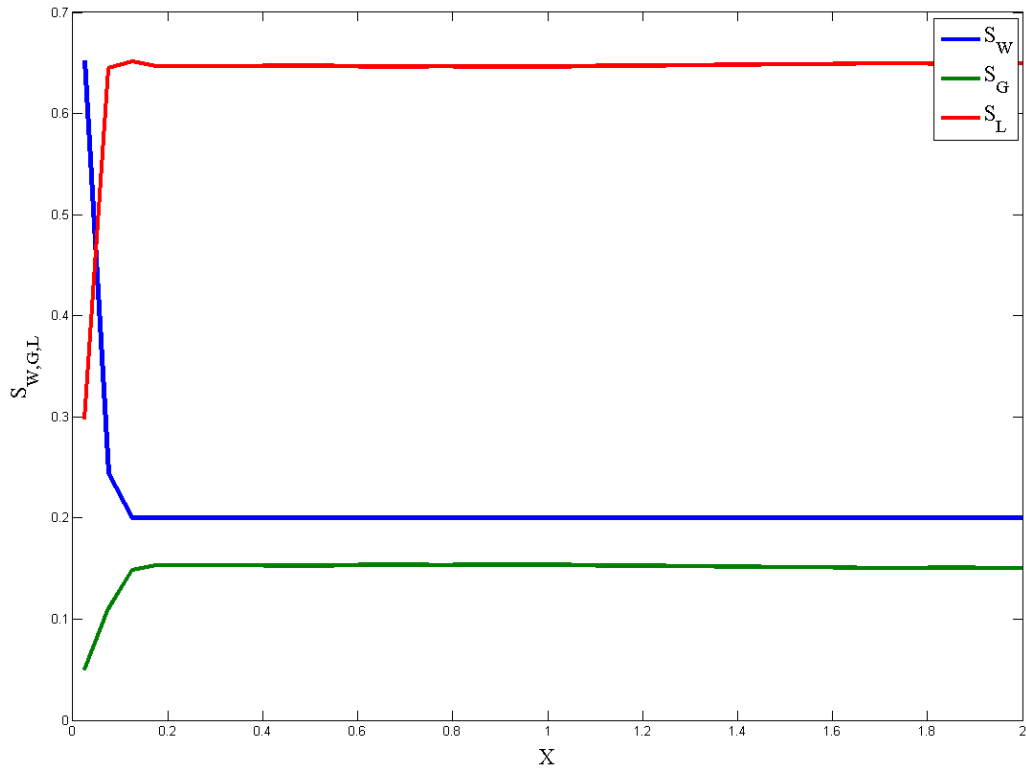


Рис. 13. Итоговые насыщенности фаз $S_{W,L,G}$ в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ с.

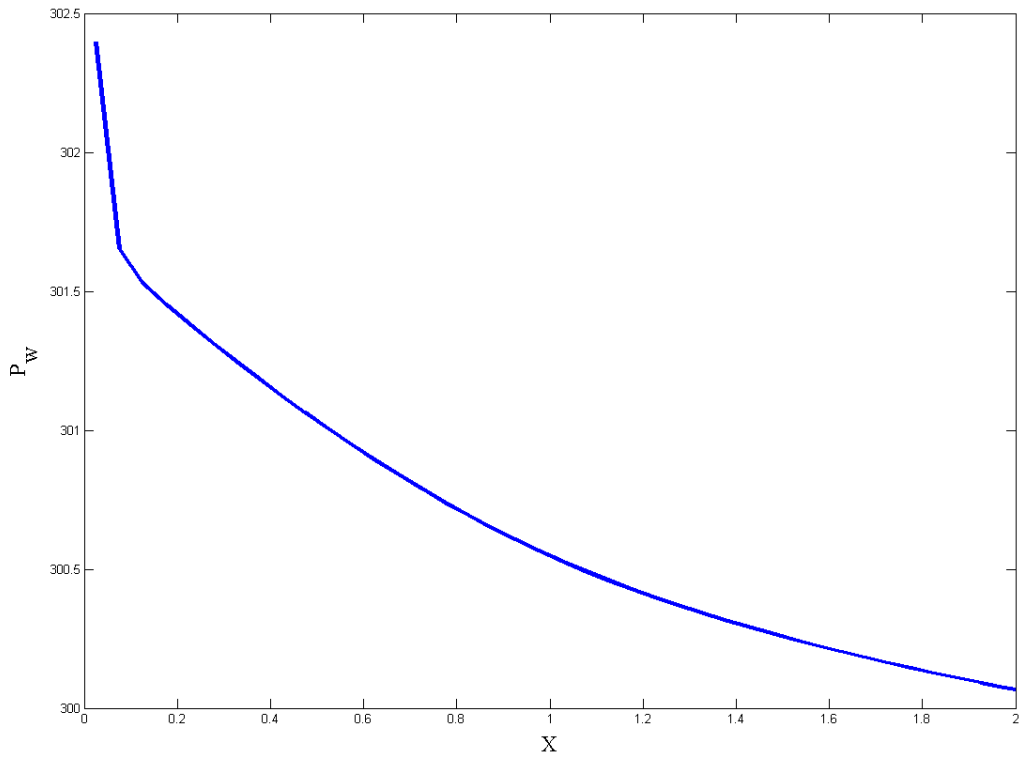


Рис. 14. Итоговое давление водной фазы P_W в расчете по трехслойной явной схеме с $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ с.

5 Заключение

Работа посвящена исследованию явных разностных схем для задач многофазной многокомпонентной фильтрации флюида в пористых средах. Рассмотрены двухслойные и трехслойные регуляризованные схемы с гиперболизацией. Проведено численное сравнение указанных методов на примере модельной постановки задачи о вытеснении углеводородного флюида водяной фазой. Используются характерные для задач пластовой фильтрации значения параметров и основных зависимостей. На примере численных расчетов показано, что использование регуляризованных схем позволяет существенно повысить шаг по времени, сохранив явный характер схемы и логическую простоту вычислительного алгоритма.

Список литературы

- [1] Трапезникова М.А., Белоцерковская М.С., Четверушкин Б.Н. Аналог кинетически-согласованных схем для моделирования задач фильтрации // Математическое моделирование, 2002, т.14, № 10, с.69-76.
- [2] Четверушкин Б.Н., Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Чурбанова Н.Г., Шильников Е.В. Об одной явной схеме для решения задач фильтрации // Математическое моделирование, 2010, т.22, №4, с.99-109.
- [3] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Использование явных схем для моделирования процесса двухфазной фильтрации // Математическое моделирование, 2011, т.23, №7, с.52-60.
- [4] Морозов Д.Н., Трапезникова М.А., Четверушкин Б.Н., Чурбанова Н.Г. Моделирование задач фильтрации на гибридных вычислительных системах // Математическое моделирование, 2012, т.24, №10, с.33-39.
- [5] Борисов В.Е., Критский Б.В., Марченко Н.А., Митрушкин Д.А., Савенков Е.Б. Композиционная неизотермическая модель фильтрации в пористой среде с учетом химических реакций и активной твердой фазы // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2013. № 91. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-91>
- [6] Cao H. Development of Techniques for General Purpose Simulator // Ph.D. dissertation, Stanford University, 2002.

- [7] Young L.C., Stephenson R.E. A generalized compositional approach for reservoir simulation // SPE 10516, SPE Journal, October 1983.
- [8] Каневская Р.Д.. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов // Москва-Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2002.
- [9] Coats K.H., Thomas L.K., Pierson R.G. Compositional and Black Oil Reservoir Simulation // SPE paper 29111, SPE Reservoir Simulation Symposium, 12-15 February 1995, San Antonio, Texas.
- [10] Knoll D.A., Keyes D.E. Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications // Journal of Computational Physics, V. 193, PP. 357-397, 2004.
- [11] Aziz K., Settari A. Petroleum reservoir simulation // Kluwer Acad. Publishers, 1979.
- [12] Баталин О.Ю., Брусиловский А.И., Захаров М.Ю., Фазовые равновесия в системах природных углеводородов. — М.: Недра, 1992. 272 с.
- [13] Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике. 2-е изд., перераб. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1985. 512 с.
- [14] Zhangxin Chen, Guanren Huan, Yuanle Ma. Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media Volume 2 of Computational Science and Engineering. SIAM, 2006. 531 p.
- [15] Aziz, K., Ramesh, A.B., Woo, P.T. Fourth SPE Comparative Solution Project: Comparison of Steam Injection Simulators // ID:13510-PA. Journal of Petroleum Technology Volume 39, Number 12. Publisher: Society of Petroleum Engineers, 1987.
- [16] Басниев К.С, Кочина И.Н., Максимов В.М. Подземная гидромеханика: Учебник для вузов. —М.: Недра, 1993. 416 с.
- [17] Шильников Е. В. Квазигазодинамические уравнения как инструмент для численного моделирования течений вязкого газа на современных высокопроизводительных системах. Mathematica Montisnigri, Podgorica, Montenegro – V. XXIV, 2012. p. 107-120.