



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 98 за 2013 г.



Галанин М.П., Ходжаева С.Р.

Методы решения жестких
обыкновенных
дифференциальных
уравнений. Результаты
тестовых расчетов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Ходжаева С.Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2013. № 98. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук**

М.П. Галанин, С.Р. Ходжаева

**Методы решения
жестких обыкновенных
дифференциальных уравнений.
Результаты тестовых расчетов**

Москва — 2013

Галанин М.П., Ходжаева С.Р.

Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов

Целью работы является исследование (m,k)-метода, одностадийной комплексной схемы Розенброка, метода конечных суперэлементов и явного четырехстадийного метода Рунге-Кутты применительно к решению жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Анализ тестовых расчетов показал, что оптимальным выбором для систем с большим числом жесткости является одностадийная комплексная схема Розенброка. Метод конечных суперэлементов является «точным» для решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, оптимальным вспомогательным методом для его реализации является (4,2)-метод. Построен и протестирован вариант метода конечных суперэлементов для решения нелинейных задач, оказавшийся непригодным для задач большой жесткости.

Ключевые слова: жесткие системы, МКСЭ, (4,2)-метод, CROS

Galanin M.P., Khodzhaeva S.R.

Methods of solving stiff ordinary differential equations. Results of test calculations

The aim of this paper is to research the (m,k)-method, CROS, finite superelement method and 4-stage explicit Runge-Kutta method for solving stiff systems of ordinary differential equations. Analysis of tests results showed that the optimal choice for systems with high stiffness is the CROS. The finite superelement method is the «precise» method for solving linear systems of ordinary differential equations, the optimal supporting method for its implementation is the (4,2)-method. The variation of the finite superelement method has been built and tested for solving nonlinear problems, this method proved to be unsuitable for problems with high stiffness.

Key words: stiff systems, finite superelement method, (4,2)-method, CROS

Оглавление

§ 1. Введение. Постановка задачи	3
§ 2. Методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений.	4
§ 3. Тестовые задачи	7
§ 4. Результаты тестовых расчетов.....	10
§ 5. Обсуждение полученных результатов	18
§ 6. Применение метода конечных суперэлементов для нелинейных задач.....	19
Заключение	28
Литература.....	28

§ 1. Введение. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u' = f(u), u(0) = u_0, 0 \leq t \leq t_0, \quad (1.1)$$

где u – вектор-столбец $\{u_1(t), \dots, u_n(t)\}^T$ (в случае неавтономной системы следует произвести замену переменных $u_{n+1} = t$ и ввести дополнительное уравнение $u'_{n+1} = 1$, сделав тем самым систему автономной), причем известно, что данная система является жесткой.

Далее будут встречаться и неавтономные системы.

Будем считать линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $u' = Au$ (A – постоянная матрица $n \times n$) жесткой, если выполняются два следующих условия [1, 14]:

1) все собственные числа λ_i матрицы A имеют отрицательную действительную часть, т.е. $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, i = 1, 2, \dots, n$;

2) число

$$S = \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k|}{\min_{1 \leq k \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_k|}$$

велико. Число S называется жесткостью задачи.

Если $A = A(t)$ и $\lambda_k = \lambda_k(t)$, то вводят понятие жесткости на временном интервале. В этом случае число $\sup_{t \in (0, t_0)} S(t)$ должно быть большим. В случае нелинейных

систем для определения жесткости можно провести локальную линеаризацию.

Не все задачи, называемые в литературе жесткими, соответствуют данному определению. Часто жесткими называют все задачи, решение которых содержит компоненты с резко различными характерными временами изменения [2].

Особенность жестких задач заключается в том, что стандартные явные методы интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений не являются пригодными для их решения. В то же время большинство интересных задач являются жесткими, чем и обусловлен интерес к методам численного решения таких задач. Целью данной работы являются анализ численных методов поиска решения поставленной задачи и оценка качества работы методов в зависимости от её характера.

В настоящей работе проведено сравнение численных методов решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений: (4,2)-метода, метода конечных суперэлементов для линейных задач, метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности и одностадийной комплексной схемы Розенброка. Сравнение выполнено на основе решения тестовых задач. Для оценки работы методов выбран набор тестов, обладающих разной степенью жесткости [3].

Предложен и протестирован вариант метода конечных суперэлементов для нелинейных задач.

§ 2. Методы решения жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений

2.1. (m,k)-метод [4]

Пусть заданы целые положительные числа m и k , $k \leq m$. Обозначим через M_m множество целых чисел i , удовлетворяющих условию $1 \leq i \leq m$, а через M_k и J_i – подмножества из M_m следующего вида [4]:

$$M_k = \{m_i \in M_m \mid 1 = m_1 < m_2 < \dots < m_k \leq m\},$$

$$J_i = \{m_{j-1} \in M_m \mid j > 1, m_j \in M_k, m_j \leq i\}, \quad 2 \leq i \leq m.$$

Тогда семейство (m,k) –методов записывается в виде:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^m p_i k_i, \quad D_n = E - a\tau f'_n,$$

$$D_n k_i = \tau f \left(y_n + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j \right) + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \quad i \in M_k,$$

$$D_n k_i = k_{i-1} + \sum_{j \in J_i} \alpha_{ij} k_j, \quad i \in M_m \setminus M_k,$$

где τ – шаг интегрирования решаемой задачи; y_n – приближенное решение при $t = t_n$; E – единичная матрица размерности n ; $f'_n = \partial f(y_n) / \partial y$ – матрица Якоби векторной функции $f(y)$; a , p_i , α_{ij} и β_{ij} – вещественные коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости (m,k) –метода.

Рассмотрим реализованный в данной работе L –устойчивый $(4,2)$ –метод четвертого порядка точности [4]. Он выглядит следующим образом:

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^4 p_i k_i, \quad D_n = E - a\tau f'_n,$$

$$D_n k_1 = \tau f(y_n), \quad D_n k_2 = k_1, \quad D_n k_3 = \tau f(y_n + \beta_{31} k_1 + \beta_{32} k_2) + \alpha_{32} k_2, \quad D_n k_4 = k_3 + \alpha_{42} k_2,$$

а числовые коэффициенты a , p_i , α_{j2} , β_{3k} , $1 \leq i \leq 4$, $3 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 2$ имеют следующие значения [4]:

$$a = 0.57281606248213, \quad p_1 = 1.27836939012447,$$

$$p_2 = -1.00738680980438, \quad p_3 = 0.92655391093950$$

$$p_4 = -0.33396131834691, \quad \beta_{31} = 1.00900469029922,$$

$$\beta_{32} = -0.25900469029921, \quad \alpha_{32} = -0.49552206416578,$$

$$\alpha_{42} = -1.28777648233922.$$

Именно при таких значениях числовых коэффициентов схема обладает 4-м порядком точности и L -устойчивостью.

2.2. Одностадийная комплексная схема Розенброка (CROS)

Общий вид многостадийных схем семейства Розенброка [5] имеет следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{m=1}^s b_m w_m,$$

$$\left[E - \tau a_{nm} f_u \left(y_n + \tau \sum_{k=1}^{m-1} c_{mk} w_k, t_n + \tau c_m \right) \right] w_m = f \left(y_n + \tau \sum_{k=1}^{m-1} a_{mk} w_k, t_n + \tau a_m \right),$$

где f_u – матрица Якоби решаемой задачи; s – число стадий метода; $a_{mk}, a_m, b_m, c_{mk}, c_m$ – заданные комплексные (вообще говоря) числа.

Формулы перехода на новый временной слой для однопараметрического семейства одностадийных схем Розенброка имеют следующий вид:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \operatorname{Re} k, \quad (E - \beta \tau f_u(y_n, t)) k = f(y_n, t + \tau a_1),$$

где $f_u(y, t)$ – матрица Якоби решаемой системы, $\operatorname{Re} k$ – действительная часть вектора k с комплексными координатами, E – единичная матрица, τ – шаг метода, β и a_1 – числовые параметры, определяющие свойства конкретной схемы.

Данная схема обладает точностью $O(\tau^2)$ при $\operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} \beta = \frac{1}{2}$, поэтому выберем $a_1 = \frac{1}{2}$ и приведем исследование свойств системы в зависимости от значения коэффициента β .

Выясним, при каких значениях параметра β данная схема является A -устойчивой (приведенные далее рассуждения основаны на [6-9]).

Функция устойчивости одностадийной комплексной схемы Розенброка имеет следующий вид [4]:

$$R(\xi) = \frac{1 + (1 - \beta)\xi}{1 - \beta\xi},$$

а по определению схема является A -устойчивой, если $|R(\xi)| \leq 1$ при $\operatorname{Re}(\xi) \leq 0$.

Пусть $\beta = a + ib$, $\xi = \xi_1 + i\xi_2$. Запишем условие A -устойчивости и получим допустимые значения коэффициента β .

$$\left| \frac{1 + (1 - a - ib)(\xi_1 + i\xi_2)}{1 - (a + ib)(\xi_1 + i\xi_2)} \right| \leq 1.$$

После преобразований получим следующее неравенство:

$$(\xi_1^2 + \xi_2^2) - 2a(\xi_1^2 + \xi_2^2) \leq -2\xi_1.$$

Но $\xi_1 \leq 0$, поэтому окончательно приходим к условию A -устойчивости для одностадийной комплексной схемы Розенброка: $\operatorname{Re}(\beta) \geq \frac{1}{2}$.

Напомним, что схема является Lp-устойчивой, если она A-устойчива и выполняется следующее условие: $R(\xi) = O(\xi^{-p})$, $p > 0$ при $|\xi| \rightarrow \infty$ и $\text{Re} \xi < 0$ [9].

Комплексная схема Розенброка является L1-устойчивой, если параметр β лежит на правой половине окружности с центром в точке $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}$, а на концах этой полуокружности $\left(\beta = \frac{1+i}{2}, \beta = \frac{1-i}{2}\right)$ обладает свойством L2-устойчивости [5].

Запишем итоговый вид одностадийной комплексной схемы Розенброка, для определенности выбрав $\beta = \frac{1+i}{2}$:

$$y_{n+1} = y_n + \tau \text{Re} k, \left(E - \frac{1+i}{2} \tau f_u(y_n, t) \right) k = f(y_n, t + \frac{\tau}{2}).$$

В точках $\beta = \frac{1+i}{2}$ и $\beta = \frac{1-i}{2}$ комплексная схема Розенброка имеет второй порядок аппроксимации и обладает L2-устойчивостью. Но при попытке совместить эти качества схемы при переходе к действительным числам оказывается, что такой переход без потери какого-либо из свойств невозможен: L2-устойчивость не является достижимой в случае действительных коэффициентов, поэтому приходится делать выбор между вторым порядком аппроксимации и L1-устойчивостью. Значения коэффициента β , при которых выполняется одно из описанных выше свойств, равны соответственно $\beta = \frac{1}{2}$ (пересечение прямой $\text{Re}(\beta) = \frac{1}{2}$ с осью действительных чисел) и $\beta = 1$ (пересечение полуокружности $\left| \beta - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, $\text{Re}(\beta) \geq \frac{1}{2}$ с осью действительных чисел).

Из приведенных выше рассуждений следует, что схема Розенброка с комплексными коэффициентами обладает лучшими качествами, чем аналогичная схема с действительными коэффициентами.

2.3. Четырехстадийный явный метод Рунге-Кутты

Четырехстадийный явный метод Рунге-Кутты обладает четвертым порядком точности. Переход к решению на новом слое происходит по следующим формулам [1]:

$$y_{n+1} = y_n + \tau K, \quad K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad \text{где } k_1 = f(y_n, t_n), \quad k_2 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2}k_1, t_n + \frac{\tau}{2}\right), \\ k_3 = f\left(y_n + \frac{\tau}{2}k_2, t_n + \frac{\tau}{2}\right), \quad k_4 = f(y_n + \tau k_3, t_n + \tau).$$

2.4. Метод конечных суперэлементов [10-13]

Пусть поставлена задача Коши для линейной системы с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} u_t = Au, 0 \leq t \leq t_0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Точное решение данной задачи имеет вид: $u(t) = u_0 e^{At}$, $0 \leq t \leq t_0$ [10].

Рассмотрим интервал $\Delta t = \frac{t_0}{N}$, входящий во временной интервал всей задачи, $0 < \Delta t \leq t_0$. Пусть $t_k = k\Delta t$. Тогда $u(t_k) = u_0 e^{At_k} = u_0 \underbrace{e^{A\Delta t} \cdot e^{A\Delta t} \cdot \dots \cdot e^{A\Delta t}}_k = u(t_{k-1}) e^{A\Delta t}$ [10]. Таким образом, для нахождения значения функции $u(t_k)$ в конце данного интервала требуется знать значение функции $u(t_{k-1})$ в конце предыдущего интервала и значение матричной экспоненты $e^{A\Delta t}$. Для ее нахождения введем n (размерность исходной задачи) вспомогательных задач следующего вида:

$$\begin{cases} \Phi'_m = A\Phi'_m, t_{k-1} \leq t \leq t_k, \\ \Phi_m(0) = (0, 0, \dots, \underset{m}{1}, \dots, 0)^T, \end{cases}$$

где $1 \leq m \leq n$. Эти вспомогательные задачи можно решать с малым шагом $\tau \ll \Delta t$ стандартными методами, используемыми для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Тогда решение поставленной задачи на слое t_k записывается в следующем виде: $u(t_k) = \sum_{m=1}^n u_{k-1,m} \Phi_m$, где $u_{k-1,m}$ — m -я компонента вектора u_{k-1} .

Мы называем данный метод методом конечных суперэлементов (МКСЭ), т.к. в описанном виде он совпадает с МКСЭ Федоренко [10-13], хотя он имеет и название метода матричной экспоненты [10].

Далее рассмотрим примеры, использованные в данной работе для тестирования описанных методов [3].

§ 3. Тестовые задачи

Тест 1

$$\begin{cases} u_1' = \mu_0 u_1, \\ u_2' = (\mu_0 - \mu_1) u_1 + (\mu_1 + \nu_1) u_2 - \nu_1 u_3, \\ u_3' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) u_1 + 2\nu_1 u_2 + (\mu_1 - \nu_1) u_3, \\ u_4' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) u_1 + 2\nu_1 u_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2) u_3 + (\mu_2 + \nu_2) u_4 - \nu_2 u_5, \\ u_5' = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) u_1 + 2\nu_1 u_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2) u_3 + 2\nu_2 u_4 + (\mu_2 - \nu_2) u_5. \end{cases}$$

Пусть $u_2(0) = u_3(0)$ и $u_4(0) = u_5(0)$. Тогда точное решение данной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений имеет следующий вид

(при $0 \leq t \leq 1$):

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1(0)e^{\mu_0 t}, \\ u_2(t) = u_1(t) + (u_2(0) - u_1(0))e^{\mu_1 t} \cos v_1 t, \\ u_3(t) = u_1(t) + \sqrt{2}(u_2(0) - u_1(0))e^{\mu_1 t} \sin v_1 \left(t + \frac{\pi}{4}\right), \\ u_4(t) = u_3(t) + (u_4(0) - u_3(0))e^{\mu_2 t} \cos v_2 t, \\ u_5(t) = u_3(t) + \sqrt{2}(u_4(0) - u_3(0))e^{\mu_2 t} \sin v_2 \left(t + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Собственные значения матрицы системы равны $\lambda_1 = \mu_0$, $\lambda_{2,3} = \mu_1 \pm iv_1$, $\lambda_{4,5} = \mu_2 \pm iv_2$.

Рассмотрим пять случаев различных параметров исследуемой системы.

Случай 1: плохо обусловленная задача. Начальные условия имеют следующий вид:

$$u_1(0) = 0.1, u_2(0) = u_3(0) = 1, u_4(0) = u_5(0) = 0.5,$$

а значения параметров:

$$\mu_0 = 10, \mu_1 = 4, v_1 = 20\pi, \mu_2 = 5, v_2 = 100.$$

Определим число обусловленности M задачи с матрицей A следующим образом: $M = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ [14]. Тогда число обусловленности матрицы рассматриваемой системы имеет величину $M = 241$ (здесь и далее оценка проведена с использованием октаэдрической нормы [1]). Собственные значения задачи равны $\lambda_1 = 10$, $\lambda_{2,3} = 4 \pm 20\pi i$, $\lambda_{4,5} = 5 \pm 100i$. Все их действительные части являются положительными, а значит, задача не является жесткой в смысле приведенного выше определения.

Случай 2: хорошо обусловленная задача. Начальные условия:

$$u_1(0) = 1, u_2(0) = u_3(0) = 1.5, u_4(0) = u_5(0) = 2.5.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \mu_1 = 1, v_1 = 1, \mu_2 = -1, v_2 = 10.$$

Число обусловленности матрицы $M = 105$. Собственные числа матрицы равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, $\lambda_{4,5} = -1 \pm 10i$. Не все их действительные части отрицательны, поэтому данная задача не является жесткой.

Случай 3: быстроосцилирующая задача. Начальные условия:

$$u_1(0) = 0.5, u_2(0) = u_3(0) = 0.8, u_4(0) = u_5(0) = 2.$$

Значения параметров:

$$\mu_0 = -2, \mu_1 = 1, v_1 = 1, \mu_2 = -1, v_2 = 1000.$$

Число обусловленности задачи $M = 10499$. Собственные числа $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, $\lambda_{4,5} = -1 \pm 1000i$. Данный случай аналогичен предыдущим, задача не является жесткой.

Случай 4: жесткая задача. Начальные условия имеют следующий вид:

$$u_1(0) = 10, u_2(0) = u_3(0) = 11, u_4(0) = u_5(0) = 111,$$

а значения параметров:

$$\mu_0 = -100, \mu_1 = -1, \nu_1 = 1, \mu_2 = -10000, \nu_2 = 10.$$

Число обусловленности матрицы $M = 79956$. Собственные числа $\lambda_1 = -100$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$, $\lambda_{4,5} = -10000 \pm 10i$. Число жесткости задачи $S = 10^4$.

Случай 5: жесткоосцилирующая задача. Начальные условия:

$$u_1(0) = 100, u_2(0) = u_3(0) = 101, u_4(0) = u_5(0) = 201.$$

Значения параметров решаемой задачи:

$$\mu_0 = -10000, \mu_1 = 1, \nu_1 = 1, \mu_2 = -100, \nu_2 = 1000.$$

Число обусловленности задачи $M = 175084$. Собственные числа $\lambda_1 = -10000$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm i$, $\lambda_{4,5} = -100 \pm 1000i$.

Тест 2

Рассмотрим следующую линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u_1' = \mu_1 u_1, \\ u_2' = \mu_1 u_2 + u_1, \\ u_3' = \mu_2 u_3, \\ u_4' = \mu_2 u_4 + u_3, \\ u_5' = \mu_2 u_5 + 2u_4, \\ u_6' = \mu_2 u_6 + 3u_5. \end{cases}$$

Точное решение этой системы имеет вид ($0 \leq t \leq 1$):

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1(0)e^{\mu_1 t}, \\ u_2(t) = (u_2(0) + u_1(0)t)e^{\mu_1 t}, \\ u_3(t) = u_3(0)e^{\mu_2 t}, \\ u_4(t) = (u_4(0) + u_3(0)t)e^{\mu_2 t}, \\ u_5(t) = (u_5(0) + 2u_4(0)t + u_3(0)t^2)e^{\mu_2 t}, \\ u_6(t) = (u_6(0) + 3u_5(0)t + 3u_4(0)t^2 + u_3(0)t^3)e^{\mu_2 t}. \end{cases}$$

При начальных условиях $u_1(0) = u_2(0) = 1$, $u_3(0) = u_4(0) = u_5(0) = u_6(0) = 1000$ и значениях параметров $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = -10000$ данная система линейных обыкновенных дифференциальных уравнений является жесткой. Число обусловленности решаемой задачи $M = 20006$, а жесткость $S = 10000$.

Тест 3

$$u' = -cu.$$

Точное решение имеет следующий вид:

$$u(t) = u(0)e^{-ct}.$$

Начальное условие решаемой задачи ($0 \leq t \leq 1$): $u(0) = 1$, а параметр α принимает четыре разные значения: $\alpha = 1, 10, 100, 1000$, от которых зависит сложность решаемой задачи.

Тест 4

$$\begin{cases} u_1' = -\alpha u_1, \\ u_2' = -u_2. \end{cases}$$

Точное решение задачи:

$$\begin{cases} u_1(t) = u_1(0)e^{-\alpha t}, \\ u_2(t) = u_2(0)e^{-t}. \end{cases}$$

Начальные условия ($0 \leq t \leq 1$): $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Параметр α , регулирующий жесткость задачи, принимает четыре разные значения: $\alpha = 1, 10, 100, 1000$.

Зависимость чисел обусловленности и жесткости от параметра α выглядит следующим образом: $M = \alpha$, $S = \alpha$.

Тест 5

$$\begin{cases} u_1' = -\alpha u_2, \\ u_2' = \alpha u_1 - u_2. \end{cases}$$

Начальные условия ($0 \leq t \leq 1$): $u_1(0) = u_2(0) = 1$. Тогда точное решение задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{(1-2\alpha)\sin\frac{bt}{2}}{b} + \cos\frac{bt}{2} \right), \\ u_2(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(\frac{(2\alpha-1)\sin\frac{bt}{2}}{b} + \cos\frac{bt}{2} \right), \end{cases}$$

где $b = \sqrt{4\alpha^2 - 1}$.

Параметр задачи α принимает четыре различных значения $\alpha = 1, 10, 100, 1000$. Чем выше значения параметра α , тем сильнее осциллирует решение задачи. Случай $\alpha = 1000$ соответствует жесткоосциллирующей задаче.

§4. Результаты тестовых расчетов

Ниже для каждого из рассмотренных методов приведена абсолютная ошибка численного решения в зависимости от используемого при вычислениях временного шага. Абсолютная ошибка Δ вычислялась по следующей формуле: $\Delta = \max_i \|u_i - y_i\|_\infty$, где u_i , y_i – векторы точного и численного решений на i -ом временном слое, $\|\cdot\|_\infty$ – кубическая норма вектора [1].

4.1. (4,2)-метод

В данных таблицах приведена абсолютная погрешность Δ (4,2)-метода, полученная при использовании различных временных шагов τ .

Таблица 4.1.1

Тест 1	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$2.78 \cdot 10^{-10}$	$9.29 \cdot 10^{-15}$	$1.71 \cdot 10^{-7}$	$8.64 \cdot 10^{-5}$	$8.64 \cdot 10^{-5}$
$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$4.33 \cdot 10^{-9}$	$9.41 \cdot 10^{-15}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$6.94 \cdot 10^{-8}$	$1.22 \cdot 10^{-14}$	$4.35 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$
$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$	$6.66 \cdot 10^{-14}$	$6.94 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-1}$	$1.57 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 1.60 \cdot 10^{-4}$	$1.78 \cdot 10^{-5}$	$9.42 \cdot 10^{-13}$	$1.09 \cdot 10^{-2}$	1.32	1.32
$\tau = 3.20 \cdot 10^{-4}$	$2.85 \cdot 10^{-4}$	$1.50 \cdot 10^{-11}$	$1.57 \cdot 10^{-1}$	5.39	5.40
$\tau = 6.40 \cdot 10^{-4}$	$4.54 \cdot 10^{-3}$	$2.39 \cdot 10^{-10}$	$9.44 \cdot 10^{-1}$	9.84	$1.01 \cdot 10^1$
$\tau = 1.28 \cdot 10^{-3}$	$7.20 \cdot 10^{-2}$	$3.82 \cdot 10^{-9}$	1.48	9.39	$1.29 \cdot 10^1$
$\tau = 2.56 \cdot 10^{-3}$	1.11	$6.09 \cdot 10^{-8}$	1.66	6.39	$4.38 \cdot 10^1$
$\tau = 5.12 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^1$	$9.69 \cdot 10^{-7}$	1.95	3.72	$6.66 \cdot 10^1$

Из результатов для теста 1, представленных в таблице 4.1.1, видно, что (4,2)-метод на малых шагах (до $\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$) адекватно работает на всех типах задач. При увеличении шага интегрирования в случаях жесткой и жесткоосциллирующей задач абсолютная ошибка становится велика и численное решение начинает сильно отличаться от точного.

Таблица 4.1.2

Тест 2	$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 1.60 \cdot 10^{-4}$
Δ	$8.64 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$1.48 \cdot 10^{-1}$	1.57	$1.32 \cdot 10^1$

Таблица 4.1.3

Тест 2	$\tau = 3.20 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 6.40 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1.28 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 5.12 \cdot 10^{-3}$
Δ	$5.39 \cdot 10^1$	$9.84 \cdot 10^1$	$9.39 \cdot 10^1$	$6.38 \cdot 10^1$	$3.71 \cdot 10^1$

Задача, поставленная в тесте 2, является жесткой. При ее решении с использованием малых шагов интегрирования численное решение не сильно отличается от точного (см. табл. 4.1.2-4.1.3), но при увеличении шага (от $\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$) наблюдается рост абсолютной ошибки до довольно большой величины ($\sim 10^2$).

Таблица 4.1.4

Тест 3	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
--------	--------------	---------------	----------------	-----------------

$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-4}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4.1.5

Тест 4	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-4}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$	$1.01 \cdot 10^{-1}$	$2.05 \cdot 10^{-2}$

Таблица 4.1.6

Тест 5	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.06 \cdot 10^{-15}$	$2.38 \cdot 10^{-13}$	$2.33 \cdot 10^{-8}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.43 \cdot 10^{-14}$	$2.28 \cdot 10^{-9}$	$2.31 \cdot 10^{-4}$	1.24
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.46 \cdot 10^{-10}$	$2.24 \cdot 10^{-5}$	$6.92 \cdot 10^{-1}$	1.38
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$1.48 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-1}$	1.15	1.28

При оценке результатов решения тестовых задач 3, 4, 5 (табл. 4.1.4-4.1.6) заметим, что (4,2)-метод успешно решает задачи со значениями параметра $\alpha = 1, 10, 100$, при решении задач с параметром $\alpha = 1000$ в тесте 5 наблюдается резкое увеличение численной ошибки метода.

4.2. CROS

В приведенных ниже таблицах отображена зависимость абсолютной ошибки численного решения Одностадийного комплексного метода Розенброка от выбранного шага интегрирования τ .

Таблица 4.2.1

Тест 1	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.54 \cdot 10^{-3}$	$8.60 \cdot 10^{-9}$	$1.04 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-2}$
$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$6.15 \cdot 10^{-3}$	$3.44 \cdot 10^{-8}$	$4.16 \cdot 10^{-2}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$	$2.12 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$2.47 \cdot 10^{-2}$	$1.38 \cdot 10^{-7}$	$1.65 \cdot 10^{-1}$	$7.26 \cdot 10^{-1}$	$7.29 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$9.88 \cdot 10^{-2}$	$5.49 \cdot 10^{-7}$	$6.17 \cdot 10^{-1}$	2.24	2.24
$\tau = 1.60 \cdot 10^{-4}$	$3.95 \cdot 10^{-1}$	$2.20 \cdot 10^{-6}$	1.57	5.58	5.60
$\tau = 3.20 \cdot 10^{-4}$	1.58	$8.80 \cdot 10^{-6}$	2.13	6.65	8.27
$\tau = 6.40 \cdot 10^{-4}$	6.32	$3.51 \cdot 10^{-5}$	1.96	3.43	$2.73 \cdot 10^1$
$\tau = 1.28 \cdot 10^{-3}$	$2.50 \cdot 10^1$	$1.41 \cdot 10^{-4}$	1.68	1.05	$5.26 \cdot 10^1$
$\tau = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$8.73 \cdot 10^1$	$5.62 \cdot 10^{-4}$	1.67	$3.01 \cdot 10^{-1}$	$5.17 \cdot 10^1$
$\tau = 5.12 \cdot 10^{-3}$	$1.28 \cdot 10^2$	$2.24 \cdot 10^{-3}$	1.67	$1.67 \cdot 10^{-1}$	$5.04 \cdot 10^1$

По результатам, представленным в таблице 4.2.1, видно, что применение одностадийной комплексной схемы Розенброка для решения плохо обусловленной задачи (вариант 1), жесткой (вариант 4) и жесткоосцилирующей (вариант 5) задач на шагах интегрирования от $\tau=1.60 \cdot 10^{-4}$ приводит к довольно большой величине абсолютной ошибки.

Таблица 4.2.2

Тест 2	$\tau=1.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau=2.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau=4.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau=8.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau=1.60 \cdot 10^{-4}$
Δ	$5.69 \cdot 10^{-1}$	2.12	7.28	$2.24 \cdot 10^1$	$5.57 \cdot 10^1$

Таблица 4.2.3

Тест 2	$\tau=3.20 \cdot 10^{-4}$	$\tau=6.40 \cdot 10^{-4}$	$\tau=1.28 \cdot 10^{-3}$	$\tau=2.56 \cdot 10^{-3}$	$\tau=5.12 \cdot 10^{-3}$
Δ	$6.65 \cdot 10^1$	$3.42 \cdot 10^1$	$1.04 \cdot 10^1$	2.81	$7.34 \cdot 10^{-1}$

При решении задачи с большой жесткостью (тест 2) даже на малых шагах интегрирования τ применение CROS приводит к большой ошибке численного решения (см. табл. 4.2.2-4.2.3).

Таблица 4.2.4

Тест 3	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=100$	$\alpha=1000$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-4}$	$6.13 \cdot 10^{-10}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-2}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-1}$	$5.66 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$1.96 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4.2.5

Тест 4	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=100$	$\alpha=1000$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-4}$	$6.13 \cdot 10^{-10}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-3}$	$6.13 \cdot 10^{-8}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-2}$	$6.09 \cdot 10^{-6}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-1}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$	$3.21 \cdot 10^{-2}$	$1.63 \cdot 10^{-2}$	$5.69 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4.2.6

Тест 5	$\alpha=1$	$\alpha=10$	$\alpha=100$	$\alpha=1000$
$\tau=1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.10 \cdot 10^{-9}$	$1.39 \cdot 10^{-6}$	$1.42 \cdot 10^{-3}$	1.19
$\tau=1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.10 \cdot 10^{-7}$	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$1.41 \cdot 10^{-1}$	1.46
$\tau=1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.09 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-2}$	1.33	1.38
$\tau=1.00 \cdot 10^{-1}$	$1.03 \cdot 10^{-3}$	$7.01 \cdot 10^{-1}$	1.30	1.30

При решении тестовых задач 3 и 4 даже на крупных шагах интегрирования τ и при больших значениях параметра ошибка решения, полученного при по-

мощи одностадийной комплексной схемы Розенброка, не является большой величиной. Аналогичные результаты получаются и при решении тестовой задачи 5 со значениями параметра $\alpha=1$ и $\alpha=10$. В случаях $\alpha=100$ и $\alpha=1000$ возникает резкое увеличение абсолютной ошибки.

4.3. Четырехстадийный метод Рунге-Кутты

В таблицах 4.3.1-4.3.6 приведены абсолютные ошибки Δ метода Рунге-Кутты в зависимости от используемого шага интегрирования τ .

Таблица 4.3.1

Тест 1	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$6.15 \cdot 10^{-16}$	$1.52 \cdot 10^{-18}$	$2.29 \cdot 10^{-10}$	$4.70 \cdot 10^{-5}$	$7.45 \cdot 10^{-5}$
$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$9.85 \cdot 10^{-15}$	$1.19 \cdot 10^{-18}$	$3.65 \cdot 10^{-5}$	$8.18 \cdot 10^{-4}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$5.09 \cdot 10^{-13}$	$8.80 \cdot 10^{-18}$	$2.23 \cdot 10^{-7}$	$1.52 \cdot 10^{-2}$	$2.41 \cdot 10^{-2}$
$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$4.22 \cdot 10^{-11}$	$3.73 \cdot 10^{-16}$	$9.66 \cdot 10^{-6}$	$3.39 \cdot 10^{-1}$	$5.38 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 1.60 \cdot 10^{-4}$	$6.73 \cdot 10^{-10}$	$5.98 \cdot 10^{-15}$	$1.55 \cdot 10^{-4}$	9.67	$1.53 \cdot 10^1$
$\tau = 3.20 \cdot 10^{-4}$	$1.07 \cdot 10^{-8}$	$9.57 \cdot 10^{-14}$	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$9.29 \cdot 10^{15}$	$1.70 \cdot 10^{16}$
$\tau = 6.40 \cdot 10^{-4}$	$1.63 \cdot 10^{-7}$	$1.50 \cdot 10^{-12}$	$4.04 \cdot 10^{-2}$	$1.37 \cdot 10^{44}$	$2.31 \cdot 10^{44}$
$\tau = 1.28 \cdot 10^{-3}$	$2.52 \cdot 10^{-6}$	$2.39 \cdot 10^{-11}$	$5.15 \cdot 10^{-1}$	$1.40 \cdot 10^{40}$	$2.29 \cdot 10^{40}$
$\tau = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$4.65 \cdot 10^{-3}$	$9.27 \cdot 10^{-9}$	1.92	$1.91 \cdot 10^{567}$	$4.73 \cdot 10^{567}$
$\tau = 5.12 \cdot 10^{-3}$	5.67	$3.43 \cdot 10^{-7}$	$9.12 \cdot 10^{268}$	$2.82 \cdot 10^{1059}$	$8.98 \cdot 10^{1059}$

Из результатов применения четырехстадийного метода Рунге-Кутты видно, что он является непригодным для решения быстроосцилирующих задач (вариант 3), жестких задач (вариант 4) и жесткоосцилирующих задач (вариант 5).

Таблица 4.3.2

Тест 2	$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 1.60 \cdot 10^{-4}$
Δ	$6.66 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-2}$	$2.15 \cdot 10^{-1}$	4.81	$1.37 \cdot 10^2$

Таблица 4.3.3

Тест 2	$\tau = 3.20 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 6.40 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1.28 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 2.56 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 5.12 \cdot 10^{-3}$
Δ	$1.47 \cdot 10^{17}$	$2.03 \cdot 10^{45}$	$2.03 \cdot 10^{41}$	$3.89 \cdot 10^{568}$	$7.16 \cdot 10^{1060}$

Тест 2 является жесткой задачей, о чем свидетельствуют и результаты таблиц 4.3.2-4.3.3. Мы наблюдаем резкий рост абсолютной ошибки численного решения.

Таблица 4.3.4

Тест 3	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$3.74 \cdot 10^{-17}$	$3.07 \cdot 10^{-15}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$

$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.09 \cdot 10^{-15}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	$8.42 \cdot 10^{243}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.32 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{22}$	$2.65 \cdot 10^{59}$

Таблица 4.3.5

Тест 4	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$5.29 \cdot 10^{-17}$	$3.07 \cdot 10^{-15}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$4.34 \cdot 10^{-15}$	$3.09 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$4.37 \cdot 10^{-11}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	$8.42 \cdot 10^{243}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$4.69 \cdot 10^{-7}$	$7.12 \cdot 10^{-3}$	$1.50 \cdot 10^{22}$	$2.65 \cdot 10^{59}$

Таблица 4.3.6

Тест 5	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$8.57 \cdot 10^{-17}$	$6.90 \cdot 10^{-14}$	$7.12 \cdot 10^{-9}$	$7.15 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$4.56 \cdot 10^{-15}$	$6.98 \cdot 10^{-10}$	$7.13 \cdot 10^{-5}$	1.25
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-2}$	$4.53 \cdot 10^{-11}$	$6.92 \cdot 10^{-6}$	$5.26 \cdot 10^{-1}$	$5.11 \cdot 10^{257}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-1}$	$4.20 \cdot 10^{-7}$	$6.77 \cdot 10^{-2}$	$3.61 \cdot 10^{23}$	$5.33 \cdot 10^{59}$

Использование метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности для решения тестовых задач 3, 4, 5 со значениями параметра $\alpha = 1, 10$ приводит к довольно малым ошибкам численного решения. При увеличении сложности решаемой задачи ($\alpha = 100, \alpha = 1000$) наблюдаем рост абсолютной ошибки численного решения на шагах, больших $\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$.

4.4. Метод конечных суперэлементов

В данных таблицах приведены абсолютные ошибки метода конечных суперэлементов в зависимости от выбранного шага интегрирования τ , размер используемой ячейки $\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$.

Решение вспомогательных задач метода получено при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности и (4,2)-метода. Результаты, приведенные в таблице первыми, получены с использованием (4,2)-метода, а результаты, приведенные вторыми, – при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности (темным цветом выделены меньшие ошибки).

Таблица 4.4.1

Тест 1	$\frac{\Delta t}{\tau}$	Вар. 1	Вар. 2	Вар. 3	Вар. 4	Вар. 5
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^4$	$2.74 \cdot 10^{-12}$	$8.95 \cdot 10^{-15}$	$1.76 \cdot 10^{-11}$	$9.87 \cdot 10^{-9}$	$9.87 \cdot 10^{-9}$
		$9.45 \cdot 10^{-12}$	$5.46 \cdot 10^{-15}$	$5.21 \cdot 10^{-12}$	$3.09 \cdot 10^{-9}$	$3.09 \cdot 10^{-9}$
$\tau = 2.00 \cdot 10^{-6}$	$5.00 \cdot 10^3$	$2.77 \cdot 10^{-11}$	$9.33 \cdot 10^{-15}$	$2.73 \cdot 10^{-10}$	$1.56 \cdot 10^{-7}$	$1.56 \cdot 10^{-7}$
		$9.58 \cdot 10^{-12}$	$5.41 \cdot 10^{-15}$	$8.32 \cdot 10^{-11}$	$4.99 \cdot 10^{-8}$	$4.99 \cdot 10^{-8}$

$\tau = 4.00 \cdot 10^{-6}$	$2.50 \cdot 10^3$	$3.34 \cdot 10^{-11}$ $1.08 \cdot 10^{-11}$	$9.40 \cdot 10^{-15}$ $5.32 \cdot 10^{-15}$	$4.36 \cdot 10^{-9}$ $1.33 \cdot 10^{-9}$	$2.41 \cdot 10^{-6}$ $8.11 \cdot 10^{-7}$	$2.41 \cdot 10^{-6}$ $8.11 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^3$	$3.90 \cdot 10^{-11}$ $6.24 \cdot 10^{-11}$	$1.15 \cdot 10^{-14}$ $1.50 \cdot 10^{-14}$	$1.06 \cdot 10^{-8}$ $3.25 \cdot 10^{-9}$	$5.81 \cdot 10^{-6}$ $2.00 \cdot 10^{-6}$	$5.81 \cdot 10^{-6}$ $2.00 \cdot 10^{-6}$
$\tau = 8.00 \cdot 10^{-6}$	$1.25 \cdot 10^3$	$1.25 \cdot 10^{-10}$ $3.90 \cdot 10^{-11}$	$9.33 \cdot 10^{-15}$ $5.10 \cdot 10^{-15}$	$6.97 \cdot 10^{-8}$ $2.13 \cdot 10^{-8}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$ $1.34 \cdot 10^{-5}$	$3.64 \cdot 10^{-5}$ $1.34 \cdot 10^{-5}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^3$	$2.78 \cdot 10^{-10}$ $1.05 \cdot 10^{-10}$	$9.28 \cdot 10^{-15}$ $1.00 \cdot 10^{-14}$	$1.70 \cdot 10^{-7}$ $5.20 \cdot 10^{-8}$	$8.64 \cdot 10^{-5}$ $3.33 \cdot 10^{-5}$	$8.64 \cdot 10^{-5}$ $3.33 \cdot 10^{-5}$
$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$5.00 \cdot 10^2$	$4.33 \cdot 10^{-9}$ $1.33 \cdot 10^{-9}$	$9.41 \cdot 10^{-15}$ $5.12 \cdot 10^{-15}$	$2.72 \cdot 10^{-6}$ $8.32 \cdot 10^{-7}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$ $5.80 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-3}$ $5.80 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$2.50 \cdot 10^2$	$6.94 \cdot 10^{-8}$ $2.12 \cdot 10^{-8}$	$1.22 \cdot 10^{-14}$ $6.19 \cdot 10^{-15}$	$4.35 \cdot 10^{-5}$ $1.33 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$ $1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$ $1.08 \cdot 10^{-2}$
$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$	$1.25 \cdot 10^2$	$1.11 \cdot 10^{-6}$ $3.39 \cdot 10^{-7}$	$6.66 \cdot 10^{-14}$ $2.28 \cdot 10^{-14}$	$6.94 \cdot 10^{-4}$ $2.13 \cdot 10^{-4}$	$1.57 \cdot 10^{-1}$ $2.40 \cdot 10^{-1}$	$1.57 \cdot 10^{-1}$ $2.40 \cdot 10^{-1}$

Таблица 4.4.2

Тест 2	$\tau = 1.00 \cdot 10^{-6}$	$\tau = 2.00 \cdot 10^{-6}$	$\tau = 4.00 \cdot 10^{-6}$	$\tau = 5.00 \cdot 10^{-6}$	$\tau = 8.00 \cdot 10^{-6}$
$\frac{\Delta t}{\tau}$	$1.00 \cdot 10^4$	$5.00 \cdot 10^3$	$2.50 \cdot 10^3$	$2.00 \cdot 10^3$	$1.25 \cdot 10^3$
Δ	$9.87 \cdot 10^{-8}$ $3.09 \cdot 10^{-8}$	$1.56 \cdot 10^{-6}$ $4.99 \cdot 10^{-7}$	$2.41 \cdot 10^{-5}$ $8.11 \cdot 10^{-6}$	$5.81 \cdot 10^{-5}$ $2.00 \cdot 10^{-5}$	$3.64 \cdot 10^{-4}$ $1.34 \cdot 10^{-4}$

Таблица 4.4.3

Тест 2	$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 2.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$	$\tau = 8.00 \cdot 10^{-5}$
$\frac{\Delta t}{\tau}$	$1.00 \cdot 10^3$	$5.00 \cdot 10^2$	$2.50 \cdot 10^2$	$1.25 \cdot 10^2$
Δ	$8.64 \cdot 10^{-4}$ $3.33 \cdot 10^{-4}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$ $5.80 \cdot 10^{-3}$	$1.48 \cdot 10^{-1}$ $1.08 \cdot 10^{-1}$	1.57 2.40

Таблица 4.4.4

Тест 3	$\frac{\Delta t}{\tau}$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^4$	$8.65 \cdot 10^{-16}$ $5.47 \cdot 10^{-16}$	$1.18 \cdot 10^{-15}$ $9.42 \cdot 10^{-16}$	$1.18 \cdot 10^{-15}$ $9.50 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^3$	$1.03 \cdot 10^{-15}$ $1.35 \cdot 10^{-15}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $9.49 \cdot 10^{-16}$	$1.59 \cdot 10^{-15}$ $8.23 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^3$	$7.74 \cdot 10^{-16}$ $1.03 \cdot 10^{-15}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $9.50 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^2$	$8.22 \cdot 10^{-16}$ $5.10 \cdot 10^{-16}$	$1.59 \cdot 10^{-15}$ $8.23 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$	$5.81 \cdot 10^{-8}$ $2.00 \cdot 10^{-8}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^2$	$8.22 \cdot 10^{-16}$ $5.12 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$ $3.32 \cdot 10^{-7}$

$\tau = 5.00 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^1$	$1.44 \cdot 10^{-15}$ $6.89 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$	$5.81 \cdot 10^{-8}$ $2.00 \cdot 10^{-8}$	$3.28 \cdot 10^{-4}$ $2.91 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^1$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$ $3.33 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$ $7.12 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4.4.5

Тест 4	$\frac{\Delta t}{\tau}$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^4$	$8.65 \cdot 10^{-16}$ $5.47 \cdot 10^{-16}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $9.42 \cdot 10^{-16}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $1.07 \cdot 10^{-15}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^3$	$1.03 \cdot 10^{-15}$ $1.35 \cdot 10^{-15}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $1.35 \cdot 10^{-15}$	$1.59 \cdot 10^{-15}$ $1.35 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^3$	$7.74 \cdot 10^{-16}$ $1.03 \cdot 10^{-15}$	$1.17 \cdot 10^{-15}$ $1.03 \cdot 10^{-15}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^2$	$8.22 \cdot 10^{-16}$ $5.10 \cdot 10^{-16}$	$1.59 \cdot 10^{-15}$ $8.23 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$	$5.81 \cdot 10^{-8}$ $2.00 \cdot 10^{-8}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^2$	$8.22 \cdot 10^{-16}$ $5.01 \cdot 10^{-16}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$ $3.33 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^1$	$1.44 \cdot 10^{-15}$ $6.89 \cdot 10^{-16}$	$6.22 \cdot 10^{-12}$ $1.92 \cdot 10^{-12}$	$5.81 \cdot 10^{-8}$ $2.00 \cdot 10^{-8}$	$3.28 \cdot 10^{-4}$ $2.91 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^1$	$1.08 \cdot 10^{-14}$ $3.56 \cdot 10^{-15}$	$9.87 \cdot 10^{-11}$ $3.09 \cdot 10^{-11}$	$8.64 \cdot 10^{-7}$ $3.32 \cdot 10^{-7}$	$3.34 \cdot 10^{-3}$ $7.12 \cdot 10^{-3}$

Таблица 4.4.6

Тест 5	$\frac{\Delta t}{\tau}$	$\alpha = 1$	$\alpha = 10$	$\alpha = 100$	$\alpha = 1000$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-6}$	$1.00 \cdot 10^4$	$1.44 \cdot 10^{-15}$ $5.70 \cdot 10^{-16}$	$1.19 \cdot 10^{-14}$ $5.06 \cdot 10^{-15}$	$7.46 \cdot 10^{-14}$ $5.07 \cdot 10^{-15}$	$2.41 \cdot 10^{-11}$ $7.15 \cdot 10^{-12}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^3$	$1.97 \cdot 10^{-15}$ $1.97 \cdot 10^{-15}$	$1.85 \cdot 10^{-14}$ $1.85 \cdot 10^{-14}$	$1.30 \cdot 10^{-13}$ $2.26 \cdot 10^{-13}$	$1.46 \cdot 10^{-8}$ $4.47 \cdot 10^{-8}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-5}$	$1.00 \cdot 10^3$	$1.00 \cdot 10^{-15}$ $1.29 \cdot 10^{-15}$	$6.93 \cdot 10^{-15}$ $1.05 \cdot 10^{-14}$	$2.31 \cdot 10^{-12}$ $7.98 \cdot 10^{-13}$	$2.34 \cdot 10^{-7}$ $7.15 \cdot 10^{-7}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^2$	$1.04 \cdot 10^{-15}$ $5.21 \cdot 10^{-15}$	$2.19 \cdot 10^{-14}$ $6.48 \cdot 10^{-15}$	$1.46 \cdot 10^{-9}$ $4.45 \cdot 10^{-10}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$ $4.47 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-4}$	$1.00 \cdot 10^2$	$1.08 \cdot 10^{-15}$ $5.09 \cdot 10^{-16}$	$2.36 \cdot 10^{-13}$ $7.02 \cdot 10^{-14}$	$2.33 \cdot 10^{-8}$ $7.12 \cdot 10^{-9}$	$2.32 \cdot 10^{-3}$ $7.15 \cdot 10^{-4}$
$\tau = 5.00 \cdot 10^{-4}$	$2.00 \cdot 10^1$	$1.20 \cdot 10^{-15}$ $7.63 \cdot 10^{-16}$	$1.43 \cdot 10^{-10}$ $4.36 \cdot 10^{-11}$	$1.45 \cdot 10^{-5}$ $4.45 \cdot 10^{-6}$	$7.59 \cdot 10^{-1}$ $3.97 \cdot 10^{-1}$
$\tau = 1.00 \cdot 10^{-3}$	$1.00 \cdot 10^1$	$1.43 \cdot 10^{-14}$ $4.92 \cdot 10^{-15}$	$2.28 \cdot 10^{-9}$ $6.97 \cdot 10^{-10}$	$2.31 \cdot 10^{-4}$ $7.13 \cdot 10^{-5}$	1.24 1.25

В приведенных ниже таблицах показана зависимость абсолютной ошибки

метода конечных суперэлементов при фиксированном (малом) шаге интегрирования τ от выбранного размера ячейки. Рассмотрены жесткие случаи (тест 2, а также тесты 3, 4, 5 при $\alpha = 1000$).

В таблицах через Δt обозначен размер ячейки, а через τ – шаг суммирования метода.

В приведенных результатах для всех тестов отсутствуют результаты для $\tau = 5 \cdot 10^{-6}$ и $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$ из-за нецелесообразности использования метода конечных суперэлементов при столь близких значениях размеров ячейки и шага суммирования.

Таблица 4.4.7

Тест 2	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-7}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$	$1.92 \cdot 10^{-9}$
$\tau = 1 \cdot 10^{-6}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$	$3.09 \cdot 10^{-8}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-6}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	$2.00 \cdot 10^{-5}$	—

Таблица 4.4.8

Тест 3	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-7}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.05 \cdot 10^{-16}$
$\tau = 1 \cdot 10^{-6}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	—

Таблица 4.4.9

Тест 4	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-7}$	$7.17 \cdot 10^{-15}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$8.23 \cdot 10^{-16}$	$6.78 \cdot 10^{-15}$	$5.72 \cdot 10^{-15}$	$1.89 \cdot 10^{-14}$
$\tau = 1 \cdot 10^{-6}$	$4.60 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.56 \cdot 10^{-15}$	$3.99 \cdot 10^{-15}$	$8.03 \cdot 10^{-15}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-6}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	$1.92 \cdot 10^{-12}$	—

Таблица 4.4.10

Тест 5	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$	$\Delta t = 1 \cdot 10^{-6}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-7}$	$1.59 \cdot 10^{-11}$	$4.47 \cdot 10^{-13}$	$4.47 \cdot 10^{-13}$	$1.59 \cdot 10^{-11}$	$1.59 \cdot 10^{-11}$	$1.59 \cdot 10^{-11}$
$\tau = 1 \cdot 10^{-6}$	$1.66 \cdot 10^{-11}$	$7.15 \cdot 10^{-12}$	$7.15 \cdot 10^{-12}$	$1.66 \cdot 10^{-11}$	$1.66 \cdot 10^{-11}$	$1.66 \cdot 10^{-11}$
$\tau = 5 \cdot 10^{-6}$	$4.47 \cdot 10^{-9}$	$4.47 \cdot 10^{-9}$	$4.47 \cdot 10^{-9}$	$4.47 \cdot 10^{-9}$	$4.47 \cdot 10^{-9}$	—

Таблицы 4.4.7-4.4.10 демонстрируют очень слабую зависимость результатов расчетов от используемого размера ячейки Δt .

§ 5. Обсуждение полученных результатов

Для сравнения результатов, полученных при помощи (4,2)-метода (таблицы 4.1.1-4.1.6) и одностадийной комплексной схемы Розенброка (таблица 4.2.1-4.2.6), рассмотрим два случая. Первый из них – это решение задач с малым чис-

лом жесткости. В этом случае лучший результат показывает (4,2)-метод по причине того, что (4,2)-метод обладает четвертым порядком точности, в то время как комплексная схема Розенброка - только вторым.

Второй случай – решение жестких задач. Если допустимо использование малых шагов интегрирования, то предпочтительнее выбрать (4,2)-метод. При необходимости использования более крупных шагов следует применять комплексную схему Розенброка. Она является L2-устойчивой схемой, в то время как (4,2)-метод L-устойчив.

Для оценки возможности применения явного метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности рассмотрим результаты, приведенные в таблицах 4.3.1-4.3.6. При решении мягких задач (тест 1, вариант 2; тесты 3,4,5 при параметре $\alpha=1$, $\alpha=10$) с использованием больших τ (относительно рассматриваемого диапазона шагов интегрирования) ошибка численного решения является довольно малой величиной. Но при применении метода Рунге-Кутты к жестким или осциллирующим задачам (тест 1, варианты 1,3,4,5; тест 2; тесты 3,4,5 при параметре $\alpha=100$, $\alpha=1000$) наблюдается резкое возрастание ошибки численного решения даже при использовании средних шагов интегрирования τ из рассматриваемого диапазона. Поэтому явный четырехстадийный метод Рунге-Кутты не является приемлемым методом для решения жестких задач.

Далее обсудим выбор метода, используемого в качестве вспомогательного для метода конечных суперэлементов. В данной работе выбор совершался между явным методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности и (4,2)-методом. Результаты расчетов представлены в таблицах 4.4.1-4.4.6. Метод Рунге-Кутты на малых шагах применительно к задачам умеренной жесткости показывает лучшие результаты, чем (4,2)-метод, но его применение требует больше машинного времени. Это связано с тем, что при реализации метода Рунге-Кутты четвертого порядка для получения численного значения искомой функции на новом временном слое требуются четыре вычисления правой части решаемой задачи, а при реализации (4,2)-метода – всего два.

Однако при увеличении числа жесткости и шага интегрирования задачи результаты (4,2)-метода приближаются к результатам метода Рунге-Кутты, и разница между ними становится незначительной (тест 1, вариант 4,5; тест 2; тесты 3,4,5 при параметре $\alpha=1000$). На задачах с высоким уровнем жесткости метод Рунге-Кутты будет вести себя некорректно, в то время как (4,2)-метод благодаря L-устойчивости будет давать удовлетворительные результаты. Исходя из этих рассуждений (4,2) – метод выбран в качестве вспомогательного метода для метода конечных суперэлементов.

Проведение расчетов, результаты которых представлены в таблицах 4.4.7-4.4.10, предполагало определение оптимального соотношения между шагом интегрирования и размером ячейки метода конечных суперэлементов. Однако при таких малых шагах точность вычислений напрямую зависит от размера шага интегрирования, поэтому зависимость ошибки метода от размера ячейки в исследуемом диапазоне не была установлена.

§6. Применение метода конечных суперэлементов для нелинейных задач

Метод конечных суперэлементов для линейных задач представляет собой довольно простой в реализации и оптимальный по получаемым результатам алгоритм. Попробуем обобщить метод конечных суперэлементов на нелинейные задачи.

Пусть исходная задача поставлена следующим образом:

$$\begin{cases} u_t = F(u), 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (6.1)$$

Для применения метода конечных суперэлементов проведем линеаризацию в окрестности вектора u_0 :

$$F(u) \cong A(u - u_0) + F(u_0) = Au + F_0,$$

где A – матрица Якоби поставленной задачи при $u = u_0$, $F_0 = F(u_0) - Au_0$.

Тогда вместо исходной задачи требуется решить вспомогательную:

$$\begin{cases} u_t = Au + F_0, 0 < t < T, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Точное решение задачи (6.2) имеет следующий вид:

$$u = -A^{-1}F_0 + (u_0 + A^{-1}F_0)e^{At},$$

поэтому сначала используем метод конечных суперэлементов для нахождения e^{At} , а далее находим уже сам вектор решения задачи (6.2). Для ответа на вопрос, соответствует ли решение вспомогательной задачи (6.2) решению поставленной нелинейной задачи (6.1), построим алгоритм контроля точности метода конечных суперэлементов для нелинейных задач.

Перед переходом на каждый новый временной шаг метода будем проверять относительную ошибку нормы невязки метода на текущем численном решении. Должно быть выполнено следующее условие:

$$\frac{\|Ay + F_0 - F(y)\|}{\|F(y)\| + \varepsilon_0} \leq \varepsilon, \quad (6.3)$$

где y – найденный вектор приближенного решения задачи (6.2) в текущий момент времени, ε – некая наперед заданная точность вычислений, $\varepsilon_0 \geq 0$ – малая постоянная. При выполнении условия (6.3) происходит переход на следующий временной шаг. Если же условие (6.3) не выполнено, то происходят очередная линеаризация задачи (6.1) и переход к новой временной ячейке Δt .

6.1. Тестирование нелинейного метода конечных суперэлементов

Рассмотрим тестовый пример, иллюстрирующий работу метода конечных

суперэлементов применительно к нелинейным системам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Тест 6

$$\begin{cases} u_1'(t) = \alpha u_1^2(t) u_2(t), \\ u_2'(t) = -\alpha u_1(t) u_2^2(t), \\ u_1(0) = u_2(0) = 1. \end{cases}$$

Точное решение данного тестового примера имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1(t) = e^{\alpha t}, \\ u_2(t) = e^{-\alpha t}. \end{cases}$$

Жесткость поставленной задачи зависит от выбора параметра α . Поэтому рассмотрим относительные ошибки численного решения, полученного методом конечных суперэлементов для нелинейных задач, в зависимости от параметра α , шага метода τ , а также выбранного размера ячейки Δt (представлены в таблицах 6.1 – 6.4).

В качестве вспомогательного метода для метода конечных суперэлементов использован (4,2)-метод.

Заданная точность линеаризации $\varepsilon = 10^{-3}$, время исследования $t_0 = 1$.

Перед некоторыми таблицами представлен график компонент вектора точного решения в зависимости от времени.

В каждой ячейке таблицы в первой строке указана относительная ошибка метода конечных суперэлементов, во второй – средний размер реально используемой методом ячейки.

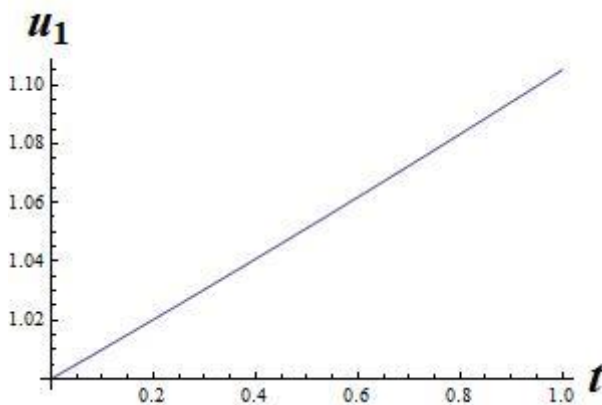


Рис. 6.1. $u_1(t)$ при $\alpha = 0.1$

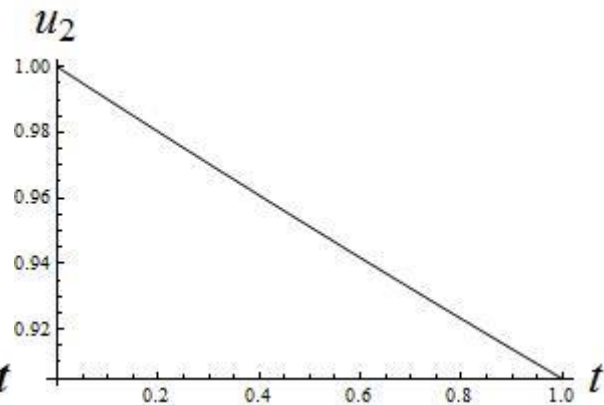


Рис. 6.2. $u_2(t)$ при $\alpha = 0.1$

Таблица 6.1

$\alpha = 0.1$	$\tau = 1 \cdot 10^{-1}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-2}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-5}$
----------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------	--------------------------

$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$3.32 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.65 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.66 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.33 \cdot 10^{-6}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	–	$3.37 \cdot 10^{-8}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-8}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.37 \cdot 10^{-8}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-8}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	–	–	$3.33 \cdot 10^{-10}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.34 \cdot 10^{-10}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-10}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$

По полученным результатам, представленным в таблице 6.1, можно сделать вывод о том, что при решении мягких задач ошибка метода конечных суперэлементов обусловлена выбранным размером ячейки; повторная линейаризация внутри самой ячейки не происходит.

Таблица 6.2

$\alpha = 1$	$\tau = 1 \cdot 10^{-1}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-2}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-5}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$2.92 \cdot 10^{-3}$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$5.22 \cdot 10^{-4}$ $4.00 \cdot 10^{-2}$	$3.38 \cdot 10^{-4}$ $3.25 \cdot 10^{-2}$	$3.33 \cdot 10^{-4}$ $3.20 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-4}$ $3.20 \cdot 10^{-2}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	–	$3.32 \cdot 10^{-5}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.28 \cdot 10^{-5}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.32 \cdot 10^{-5}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.28 \cdot 10^{-5}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	–	–	$3.33 \cdot 10^{-7}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.33 \cdot 10^{-7}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$

По первой строке таблицы 6.2 видно, что при использовании ячейки большего размера по сравнению с выбранной величиной шага погрешность метода обусловлена выбранной константой ε в оценке нормы невязки приближенного решения, поэтому выбор очень малого шага τ по сравнению с используемым размером ячейки Δt не является целесообразным. Это объясняется тем, что накопление ошибки линейаризации происходит независимо от выбранного шага, что влечет за собой переход на новую временную ячейку.

Таблица 6.3

$\alpha = 10$	$\tau = 1 \cdot 10^{-1}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-2}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-5}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	$2.40 \cdot 10^7$ $1.00 \cdot 10^{-1}$	$1.01 \cdot 10^{-2}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.58 \cdot 10^{-3}$ $4.00 \cdot 10^{-3}$	$2.67 \cdot 10^{-3}$ $3.30 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$ $3.22 \cdot 10^{-3}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	–	$1.01 \cdot 10^{-2}$ $1.00 \cdot 10^{-2}$	$3.59 \cdot 10^{-3}$ $4.00 \cdot 10^{-3}$	$2.65 \cdot 10^{-3}$ $3.30 \cdot 10^{-3}$	$2.55 \cdot 10^{-3}$ $3.22 \cdot 10^{-3}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	–	–	$3.06 \cdot 10^{-4}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.06 \cdot 10^{-4}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$	$3.06 \cdot 10^{-4}$ $1.00 \cdot 10^{-3}$

По данным таблицы 6.3 можно сделать вывод о том, что при решении задач средней жесткости при помощи конечных суперэлементов с использованием малого размера ячейки погрешность метода обусловлена размером ячейки, а выбранная величина шага имеет лишь косвенное значение. И наоборот, при

больших размерах ячейки погрешность метода напрямую зависит от величины используемого шага.

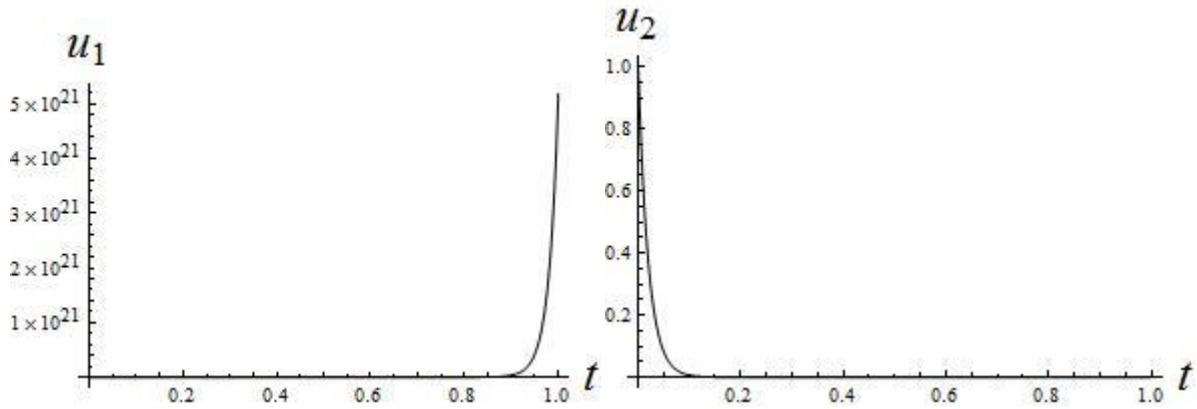


Рис. 6.3. $u_1(t)$ при $\alpha = 50$

Рис. 6.4. $u_2(t)$ при $\alpha = 50$

Таблица 6.4

$\alpha = 50$	$\tau = 1 \cdot 10^{-1}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-2}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-3}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-4}$	$\tau = 1 \cdot 10^{-5}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-1}$	1.00	$9.99 \cdot 10^{-1}$	$3.67 \cdot 10^{-2}$	$6.87 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-3}$
	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$4.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-2}$	—	$9.99 \cdot 10^{-1}$	$3.67 \cdot 10^{-2}$	$6.87 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-3}$
	—	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$
$\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$	—	—	$3.67 \cdot 10^{-2}$	$6.87 \cdot 10^{-3}$	$4.24 \cdot 10^{-3}$
	—	—	$1.00 \cdot 10^{-3}$	$7.00 \cdot 10^{-4}$	$6.50 \cdot 10^{-4}$

Из таблицы 6.4 видно, что применение крупных шагов τ внутри ячейки в случае жестких задач нежелательно.

6.2. Решение дифференциального уравнения Ван-дер-Поля

Одним из классических примеров нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, относящихся к жесткому типу при большом значении некоторого параметра μ , является уравнение Ван-дер-Поля [15]. Это уравнение играет важную роль в прикладных задачах, так как к нему сводятся дифференциальные уравнения, описывающие динамику развития колебаний в различных колебательных системах, например, автогенераторах на электронных лампах, биполярных и полевых транзисторах. Рассмотрим результаты, которые дает метод конечных суперэлементов применительно к этой задаче.

Уравнение Ван-дер-Поля выглядит следующим образом:

$$u'' + \mu(u^2 - 1)u' + u = 0. \quad (6.4)$$

Перепишем его в виде системы обыкновенных дифференциальных урав-

нений:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = \mu(1-u_1^2)u_2 - u_1. \end{cases} \quad (6.5)$$

При исследовании численного решения задачи (6.5) выясняется, что период решения поставленной задачи возрастает с ростом μ . Это усложняет численный анализ уравнения Ван-дер-Поля. Поэтому масштабируем решение, используя замену $\tilde{t} = \frac{t}{\mu}$, $z_1(\tilde{t}) = u_1(t)$, $z_2(\tilde{t}) = \mu u_2(t)$ [15]. В уравнениях для удобства заменим z на u , \tilde{t} на t и получим конечный вид задачи Ван-дер-Поля:

$$\begin{cases} u_1' = u_2, \\ u_2' = \mu^2((1-u_1^2)u_2 - u_1), \\ u_1(0) = u_{10}, \\ u_2(0) = u_{20}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Время исследования работы системы (6.6) $t = 20$.

Жесткость задачи (6.6) увеличивается с ростом параметра μ . Следовательно, для ее численного анализа следует выбирать специализированные алгоритмы. В данной работе в качестве такого алгоритма выбран метод конечных суперэлементов для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и (4,2)-метод.

Рассмотрим результаты (представленные графически ниже) работы программ при различных значениях μ^2 , размеров ячейки (в случае использования метода конечных суперэлементов) Δt и шага τ методов, а также оценим реальный размер ячейки δt , используемый программой, реализующей метод конечных суперэлементов.

Для сравнения получаемых двумя методами численных результатов введем ошибку δ метода конечных суперэлементов относительно (4,2)-метода

следующим образом: $\delta = \frac{\max_j \|y_j - \tilde{y}_j\|_\infty}{\max_i \|y_i\|}$, где y_i – вектор численного решения, полученный (4,2)-методом на i -ом шаге алгоритма, \tilde{y}_i – вектор численного решения, полученный на i -ом шаге при помощи метода конечных суперэлементов.

Из физического смысла уравнения Ван-дер-Поля очевидно, что его решение имеет периодический характер. Поэтому введем еще один тип исследуемой

ошибки: $\delta = \frac{\|\tilde{y}_j - y_j\|}{\max_i \|\tilde{y}_i\|}$, где \tilde{y}_i – вектор численного решения на первом периоде колебаний (выбран из-за наименьшего уровня накопления численной ошибки), y_j – вектор численного решения на всех последующих периодах.

Ниже приведена серия задач с различными значениями μ^2 , описаны вход-

ные параметры и приведены графические представления решения задачи (6.6) (фазовые траектории численного решения). Константа контроля точности линеаризации $\varepsilon = 10^{-3}$.

Задача 1.

$$\mu^2 = 100, \Delta t = 10^{-2}, \tau = 10^{-3}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 2.4 \cdot 10^{-3}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)–метода $\delta = 1.02 \cdot 10^{-3}$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 2.67 \cdot 10^{-1}$, для (4,2)–метода $\tilde{\delta} = 1.65 \cdot 10^{-1}$.

Решения приведены на рис. 6.5, 6.6.

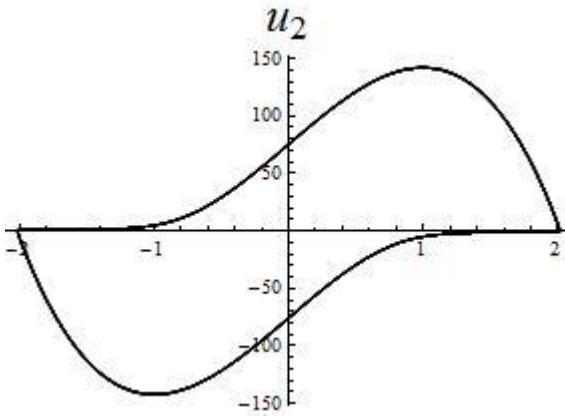


Рис. 6.5. Метод конечных суперэлементов

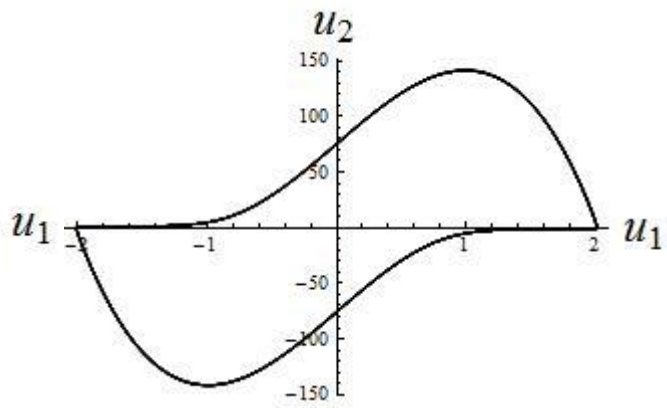


Рис. 6.6. (4,2)-метод

Задача 2.

$$\mu^2 = 1000, \Delta t = 10^{-3}, \tau = 10^{-4}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 6.87 \cdot 10^{-4}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)–метода $\delta = 6.71 \cdot 10^{-1}$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 4.66 \cdot 10^{-3}$, для (4,2)–метода $\tilde{\delta} = 3.36 \cdot 10^{-1}$.

Решения приведены на рис. 6.7, 6.8.

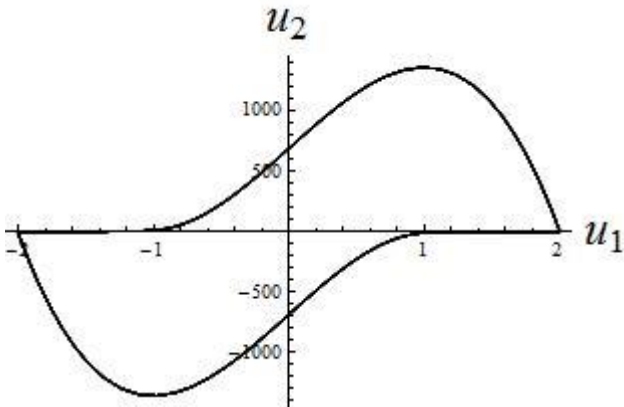


Рис. 6.7. Метод конечных суперэлементов

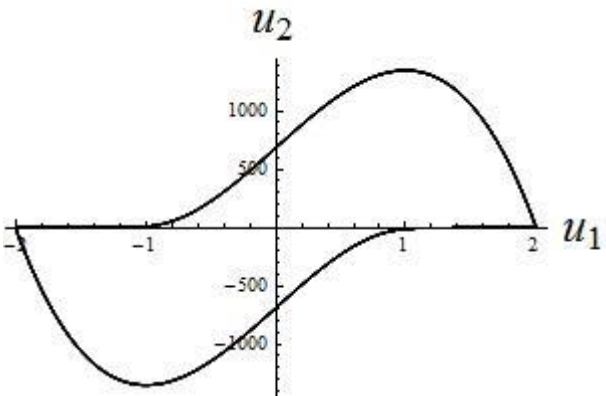


Рис. 6.8. (4,2)-метод

Задача 3.

$$\mu^2 = 10000, \Delta t = 10^{-3}, \tau = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 2.39 \cdot 10^{-4}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)-метода $\delta = 1.12$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 1.02$, для (4,2)-метода $\tilde{\delta} = 1.04$.

Решения приведены на рис. 6.9, 6.10.

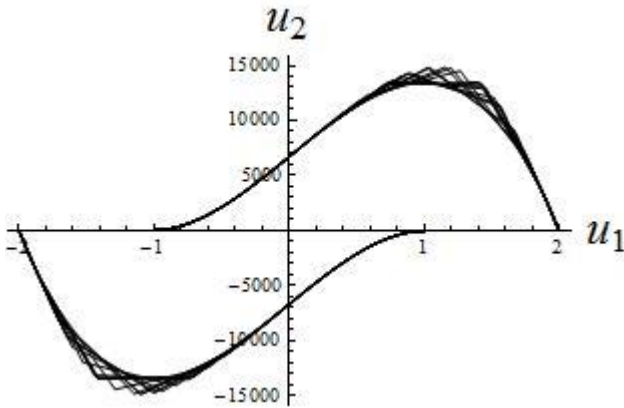


Рис. 6.9. Метод конечных суперэлементов

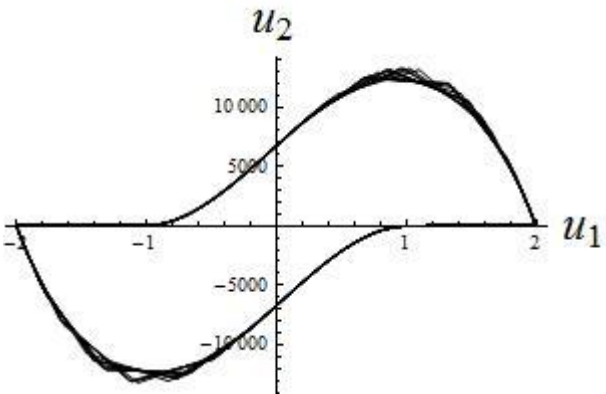


Рис. 6.10. (4,2)-метод

Задача 4.

$$\mu^2 = 15000, \Delta t = 10^{-3}, \tau = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 1.95 \cdot 10^{-4}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)-метода $\delta = 1.24$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 1.03$, для (4,2)-метода $\tilde{\delta} = 1.00$.

Решения приведены на рис. 6.11, 6.12.

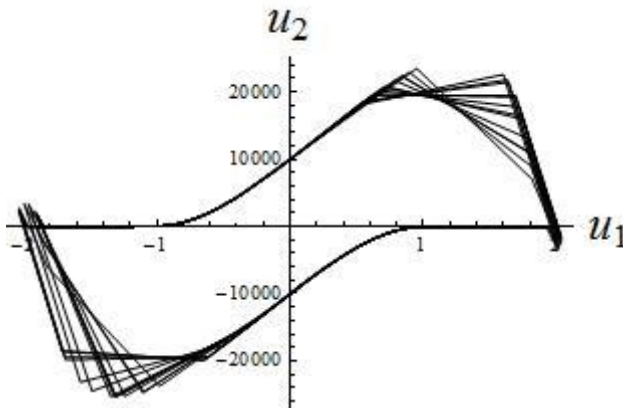


Рис. 6.11. Метод конечных суперэлементов

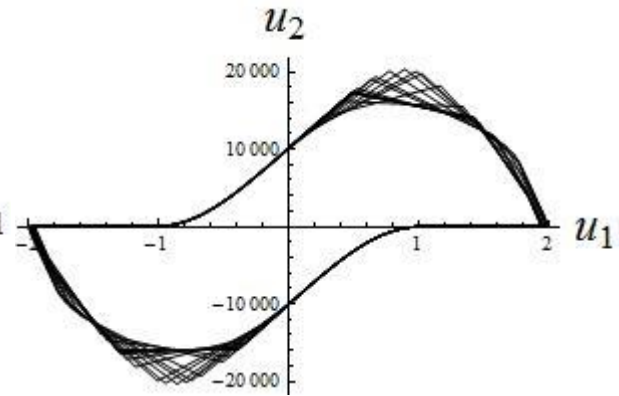


Рис. 6.12. (4,2)-метод

Задача 5.

$$\mu^2 = 17500, \Delta t = 10^{-3}, \tau = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 1.75 \cdot 10^{-4}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)-метода $\delta = 1.08$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 1.03$, для (4,2)-метода $\tilde{\delta} = 1.10$.

Решения приведены на рис. 6.13, 6.14.

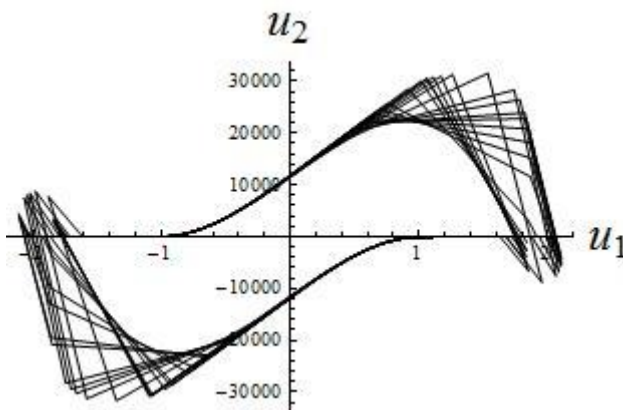


Рис. 6.13. Метод конечных суперэлементов

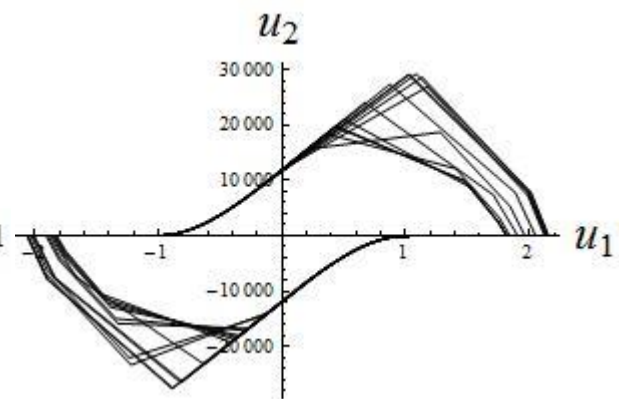


Рис. 6.14. (4,2)-метод

Задача 6.

$$\mu^2 = 20000, \Delta t = 10^{-3}, \tau = 5 \cdot 10^{-5}.$$

Реально используемый методом конечных суперэлементов размер ячейки $\delta t = 6.24 \cdot 10^{-4}$.

Ошибка метода конечных суперэлементов относительно (4,2)-метода $\delta = 1.52 \cdot 10^1$.

Ошибка периодичности $\tilde{\delta}$: для метода конечных суперэлементов $\tilde{\delta} = 2.67 \cdot 10^4$, для (4,2)-метода $\tilde{\delta} = 1.00$.

Решения приведены на рис. 6.15, 6.16.

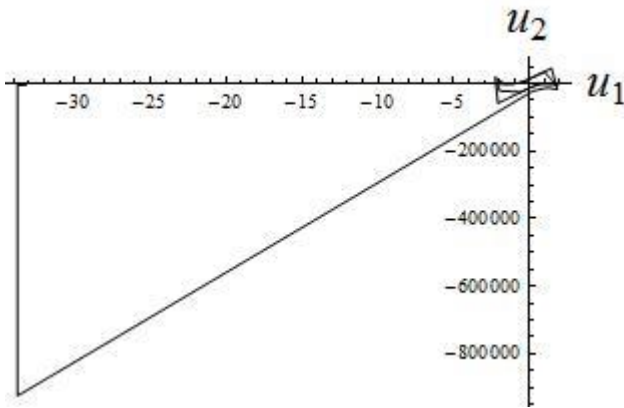


Рис. 6.15. Метод конечных суперэлементов

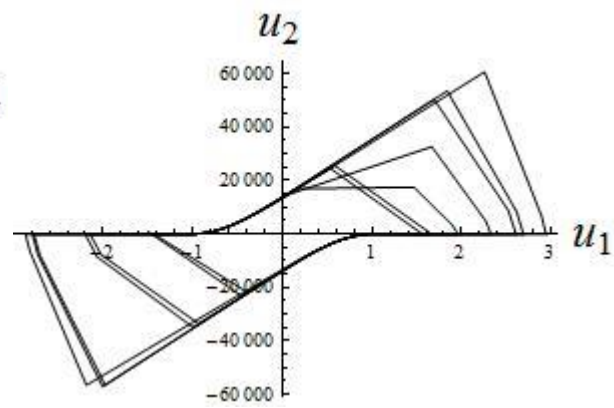


Рис. 6.16. (4,2)-метод

На основании полученных при численном решении результатов можно сделать следующий вывод: метод конечных суперэлементов (в его использованном варианте) для нелинейных задач работает корректно лишь при решении задач умеренной жесткости. Это объясняется тем, что при каждой очередной итерации в методе конечных суперэлементов при выходе ошибки предыдущей линеаризации за установленный предел происходит очередная линеаризация поставленной нелинейной задачи. Но при большом числе жесткости системы обыкновенных дифференциальных уравнений его решение имеет резко изменяющийся характер. Поэтому даже при выполнении линеаризации на каждой итерации метода конечных суперэлементов ее погрешность превышает допустимую, что влечет за собой и ошибку численного решения. Следовательно, при решении нелинейных задач с большой жесткостью желательно применять (4,2)-метод.

Заключение

1. При решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений с большим числом жесткости оптимальным выбором является одностадийная комплексная схема Розенброка.

2. МКСЭ является «точным» методом решения линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в том смысле, что если решение вспомогательных задач метода является точным, то и итоговое решение задачи точно. При нахождении соответствующих решений численно в качестве вспомогательного метода следует применять (4,2)-метод по причине его высокой точности.

3. Предложенная реализация метода конечных суперэлементов для нелинейных задач корректно работает на задачах умеренной жесткости, для реше-

ния задач высокой жесткости необходимо применять альтернативные методы.

Литература

1. *М. П. Галанин, Е. Б. Савенков.* Методы численного анализа математических моделей. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010. – 591 с.
2. *Н. Н. Калиткин.* Численные методы. М.: Наука, 1978. – 512 с.
3. *О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин, Н. Н. Калиткин.* Тесты для вычислительного практикума по обыкновенным дифференциальным уравнениям. // Вычислительные методы и программирование. – 2002. – Т.3. – С.11-19.
4. *Е. А. Новиков.* Исследование (m,2)-методов решения жестких систем. // Вычислительные технологии. – 2007. – Т.12, №5. – С.103-115.
5. *Н. Н. Калиткин.* Полуявные схемы для задач большой жесткости. ЭНТП, Серия Б, Т.VII-1, ч.1. М.: Янус-К, 2008, С.153-171.
6. *А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, Н. Н. Калиткин, А. Б. Корягина.* Схемы Розенброка с комплексными коэффициентами для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2006. – Т.46, № 8. – С.1392-1414.
7. *А. Б. Альшин, Е. А. Альшина, А. Г. Лимонов.* Двухстадийные комплексные схемы Розенброка для жестких систем // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2009. – Т.49, №2. – С.270-287.
8. *П. Д. Ширков.* Оптимально затухающие схемы с комплексными коэффициентами для жестких систем ОДУ // Математическое моделирование. – 1992. – Т.4, № 8. – С.47-57.
9. *Н. Н. Калиткин, С. Л. Панченко.* Оптимальные схемы для жестких неавтономных систем // Математическое моделирование. – 1999. Т.11, № 6. – С.52-81.
10. *Р. П. Федоренко* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Моск. физ.-техн. ин-та, 1994. – 528 с.
11. *М. П. Галанин, Д. С. Милютин, Е. Б. Савенков.* Разработка, исследование и применение метода конечных суперэлементов для решения бигармонического уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2005. № 59. 26 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2005-59>
12. *М. П. Галанин, Е. Б. Савенков.* Метод конечных суперэлементов для задачи о скоростном скин-слое // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2004. № 3. 32 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2004-4>
13. *М. П. Галанин, Е. Б. Савенков.* К обоснованию метода конечных суперэлементов. // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2003. – Т.43, № 5. – С.713-729.
14. *А. А. Самарский, А. В. Гулин.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
15. *Хайрер Э., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.