



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 6 за 2014 г.



Круковский А.Ю., Новиков В.Г.,
Цыгвинцев И.П.

Численные алгоритмы для
решения трехмерных
нестационарных задач
магнитной гидродинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 6. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-6>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

**А.Ю.Круковский, В.Г.Новиков,
И.П.Цыгвинцев**

**Численные алгоритмы для решения
трехмерных нестационарных задач
магнитной гидродинамики**

Москва — 2014

Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П.

Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики

В данной работе дано описание математической модели и алгоритмов для решения трехмерных задач магнитной гидродинамики. Для решения соответствующих дифференциальных уравнений предложена неявная разностная схема. Разработаны численные алгоритмы решения системы разностных уравнений.

Ключевые слова: неявная разностная схема, численный алгоритм

Krukovskiy A.Yu., Novikov V.G., Tsygvintsev I.P.

Numerical algorithms for the simulation of 3-D nonstationary MHD – problems

The mathematical model and algorithms for the numerical simulation of 3-D MHD – problems are represented in the paper. The implicit difference scheme for the numerical simulation of the generation process is proposed. The algorithms of the scheme implementation are constructed.

Key words: implicit difference scheme, numerical algorithm

Оглавление

Введение	3
Физическая постановка задачи.	3
Уравнения динамики.....	3
Уравнения энергии.....	5
Уравнения электромагнитного поля	6
Система разностных уравнений.....	7
Сохранение полной энергии.....	11
Алгоритм решения системы разностных уравнений «комбинированным методом»	13
Решения уравнений динамики и Максвелла	13
Решение уравнений энергии.....	16
Алгоритм решения системы разностных уравнений методом «разделения по физическим процессам»	17
Примеры расчетов	18
Список литературы.....	19

Введение

В данной работе построены алгоритмы для решения уравнений магнитной гидродинамики (МГД) в широком диапазоне параметров вещества и электромагнитного поля.

Построенный в данной работе алгоритм решения разностных уравнений является двухэтапным. Сначала решается система нелинейных уравнений в переменных Лагранжа, затем лагранжева сетка корректируется и, наконец, выполняется пересчет рассчитанных величин на новую разностную сетку.

Поскольку полностью консервативные разностные схемы (ПКРС) позволяют существенно сократить время расчетов на ЭВМ за счет выбора разностных сеток с относительно небольшим числом ячеек и обеспечивают адекватность дискретной модели изучаемым физическим процессам [1], а неявность схемы не требует ограничений на временной шаг, не связанный с точностью расчета, в данной работе в качестве базовой рассматривается неявная ПКРС в лагранжевых переменных.

Разработанные в данной работе алгоритмы решения разностных уравнений построены по принципу локального расщепления физических процессов. Для двумерных задач МГД аналогичные алгоритмы рассмотрены в [2]. Системы разностных уравнений разбиваются на группы, в каждой из которых организуется свой итерационный процесс. Локальные итерационные процессы связаны в общий итерационный цикл, сходимость которого контролируется по точности выполнения общего баланса энергии и точности распределения полной энергии по ее отдельным видам.

При пересчете рассчитанных величин на новую разностную сетку сохраняется полная консервативность, то есть после каждого изменения разностной сетки сохраняются масса, импульс, кинетическая, внутренняя, магнитная и полная энергии [3].

Физическая постановка задачи

В данном разделе описана модель течения замагниченной плазмы. Рассматривается трехмерная система уравнений МГД в двухтемпературном приближении. Скорость, магнитное и электрическое поля имеют полную конфигурацию.

Уравнения динамики

Состояние вещества и электромагнитного поля зависят от времени и пространственных координат x, y, z . Вещество предполагается вязким.

Расчетная область $D \in R^3(x, y, z)$ представляет собой в общем случае трехмерное пространство, ограниченное некой поверхностью.

Движение вещества описывается уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{du}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial z}, \\
\rho \frac{dw}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_y)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y^2)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial z}, \\
\rho \frac{dv}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_x B_z)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_y B_z)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial z}.
\end{aligned} \quad (1)$$

Лагранжева форма записи динамических уравнений получается непосредственной заменой производных по пространству на производные в плоскости лагранжевых переменных $R^3(\alpha, \beta, \gamma)$. Будем предполагать, что в любой момент времени определено отображение:

$$\begin{aligned}
x &= x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma), \\
(\alpha, \beta, \gamma) &\in G, \quad (x, y, z) \in D,
\end{aligned}$$

G — единичный куб, D — криволинейная кусочно-гладкая поверхность (область, занятая веществом), выполнено соотношение

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)} > 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in G.$$

$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma)}$ — якобиан перехода от эйлеровых переменных к лагранжевым.

Изменения координат частиц определяются соотношениями

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = w; \quad \frac{dz}{dt} = v. \quad (2)$$

Уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Для решения динамических уравнений необходимо задать граничные и начальные условия.

На границе можно задать внешнее давление $p_{zp}(t)$ или распределение скорости $\bar{U}_{zp}(t)$.

В начальный момент времени должны быть заданы начальные распределения плотности и скорости.

Уравнения энергии

Гидродинамическое давление, входящее в (1), равно сумме парциальных давлений:

$$P = P_e + P_i.$$

Распределение по пространству и изменение со временем температур электронов и ионов в области описывается уравнениями для внутренних энергий компонент:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\varepsilon_e}{dt} &= -\rho P_e \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial(W_e)_x}{\partial x} - \frac{\partial(W_e)_y}{\partial y} - \frac{\partial(W_e)_z}{\partial z} + Q_{ei} + G_{джс} + G_e, \\ \rho \frac{d\varepsilon_i}{dt} &= -\rho P_i \frac{\partial(1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial(W_i)_x}{\partial x} - \frac{\partial(W_i)_y}{\partial y} - \frac{\partial(W_i)_z}{\partial z} - Q_{ei} + G_i. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $G_{e,i}$ — источники (стоки) электронной и ионной энергии, $G_{джс}$ — массовая плотность энергии джоулева нагрева:

$$G_{джс} = \frac{1}{4\pi} (E_x \tilde{J}_x + E_y \tilde{J}_y + E_z \tilde{J}_z). \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{J}_x &= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_x + vB_y - wB_z); \\ \tilde{J}_y &= \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_y - vB_x + uB_z); \\ \tilde{J}_z &= \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (E_z - uB_y + wB_x). \end{aligned} \quad (7)$$

$\varepsilon_{e,i}$ — внутренние энергии электронной и ионной компоненты, отнесенные к единице массы, $W_{ei} = (W_{eix}, W_{eiy}, W_{eiz})$ — электронный и ионный потоки тепла через поперечное сечение области.

Потоки тепла связаны с градиентом температур соотношениями:

$$\begin{aligned}
(W_{e,i})_x &= -(\chi_{e,i})_{xx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{xy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{xz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z}, \\
(W_{e,i})_y &= -(\chi_{e,i})_{yx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{yy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{yz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z}, \\
(W_{e,i})_z &= -(\chi_{e,i})_{zx} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial x} - (\chi_{e,i})_{zy} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial y} - (\chi_{e,i})_{zz} \frac{\partial T_{e,i}}{\partial z},
\end{aligned} \tag{8}$$

где

$$(\chi_{e,i})_{\alpha\alpha} = (\chi_{e,i})_{\parallel} \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right)^2 + (\chi_{e,i})_{\perp} \left(1 - \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right) \right)^2, \quad \alpha = x, y, z,$$

$$(\chi_{e,i})_{\alpha\beta} = (\chi_{e,i})_{\beta\alpha} = \left[(\chi_{e,i})_{\parallel} - (\chi_{e,i})_{\perp} \right] \frac{B_{\alpha} B_{\beta}}{B^2}, \quad \alpha = x, y, z; \beta = x, y, z; \alpha \neq \beta.$$

Для уравнений энергии рассматриваются следующие граничные условия: на границе могут задаваться потоки тепла или распределения температур.

В начальный момент в области должно быть задано распределение температур T_e и T_i .

Уравнения электромагнитного поля

Уравнения электромагнитного поля с учетом тока смещения имеют вид:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_x}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \left(B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right), \\
\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_y}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \left(B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_y \frac{\partial w}{\partial y} + B_z \frac{\partial w}{\partial z} \right), \\
\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) &= \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial v}{\partial y} + B_z \frac{\partial v}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

$$E_{\alpha} = \frac{1}{4\pi\sigma_{\perp}} \tilde{J}_{\alpha} + \frac{\sigma_{\perp} - \sigma_{\parallel}}{4\pi\sigma_{\perp}\sigma_{\parallel}} \frac{B_{\alpha}}{B^2} (j, B), \quad \alpha = x, y, z,$$

$$(j, B) = \tilde{J}_x B_x + \tilde{J}_y B_y + \tilde{J}_z B_z.$$

Граничные условия для уравнений поля формируются следующим образом: на границе задается распределение либо магнитного, либо электрического поля.

Для решения уравнений Максвелла в начальный момент времени t_0 необходимо знать начальное распределение магнитного поля. Уравнения МГД (1)–(9) аппроксимированы на лагранжевой разностной сетке полностью консервативной разностной схемой.

Система разностных уравнений

Произведем дискретизацию переменных следующим образом. В кубе $G(\alpha, \beta, \gamma)$ вводится равномерная кубическая сетка:

$$\bar{\omega}_h < \alpha_i = ih_\alpha, \quad i = \overline{1, NM}, \quad h_\alpha = 1/(NM - 1),$$

$$\beta_j = jh_\beta, \quad j = \overline{1, NL}, \quad h_\beta = 1/(NL - 1),$$

$$\gamma_k = kh_\gamma, \quad k = \overline{1, NN}, \quad h_\gamma = 1/(NN - 1).$$

Обозначим через ω множество ячеек сетки ω_h , Ω — множество узлов. Соответственно введем пространства сеточных функций, определенных в ячейках H_ω и в узлах H_Ω . Для записи сеточных функций $f \in H_\Omega$ используем индексы $(i, j, k): f_{i,j,k} = f \in H_\Omega$.

Функции $\varphi \in H_\omega$ будем отмечать индексами $(m, l, n): \varphi \in H_\omega$. Сетка в области H получается отображением:

$$x_{ijk} = x(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}),$$

$$y_{ijk} = y(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}),$$

$$z_{ijk} = z(\alpha_{ijk}, \beta_{ijk}, \gamma_{ijk}),$$

и состоит из шестигранников. Ячейка ω_{mln} своими вершинами имеет

$$(x, y, z)_{ijk}, (x, y, z)_{i+1jk}, (x, y, z)_{ij+1k}, (x, y, z)_{i+1j+1k},$$

$$(x, y, z)_{ijk+1}, (x, y, z)_{i+1jk+1}, (x, y, z)_{ij+1k+1}, (x, y, z)_{i+1j+1k+1}.$$

Уравнения (1)–(9) аппроксимируются на сетке $H_{\omega h}$ полностью консервативной неявной разностной схемой:

$$x_t = u^{(0.5)}; \quad y_t = w^{(0.5)}; \quad z_t = v^{(0.5)}; \quad (10)$$

$$\Delta m = \rho V = \hat{\rho} \hat{V}; \quad (11)$$

$$P = (P_e) + (P_i) + q; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
M_* u_t &= \sum_{P \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_P}{\partial x} \right) \left(\hat{P}_P + \frac{B_P \hat{B}_P}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{P \in III_2} B_{x_P}^{(0.5)} B_{xyz}, \\
M_* w_t &= \sum_{P \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_P}{\partial y} \right) \left(\hat{P}_P + \frac{B_P \hat{B}_P}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{P \in III_2} B_{y_P}^{(0.5)} B_{xyz}, \\
M_* v_t &= \sum_{P \in III_2} \left(\frac{\partial \hat{V}_P}{\partial z} \right) \left(\hat{P}_P + \frac{B_P \hat{B}_P}{8\pi} \right) - \frac{1}{4\pi} \sum_{P \in III_2} B_{z_P}^{(0.5)} B_{xyz};
\end{aligned} \tag{13}$$

$$B_{xyz} = \sum_{\alpha=x,y,z} \frac{\partial \hat{V}_P}{\partial \alpha} \hat{B}_{\alpha_P}, \quad M_* = \frac{1}{8} \sum_{P \in III_2} \Delta m_P;$$

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_e)_t &= -\hat{P}_e \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \hat{Q}_{ei} + \hat{G}_e + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in III_3} \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{W}_{e,\alpha g} \hat{S}_{ag}, \\
(\varepsilon_i)_t &= -(\hat{P}_i + \hat{q}) \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + \hat{Q}_{ei} + \frac{1}{\Delta m} \sum_{g \in III_3} \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{W}_{i,\alpha g} \hat{S}_{ag}.
\end{aligned} \tag{14}$$

$S_g = (S_{xg}, S_{yg}, S_{zg})$, $g = \overline{1,6}$ — площади граней, прилегающих к ячейке (m, l, n) .

$$\begin{aligned}
(VB_x)_t &= \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in III_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} u_r^{(0.5)} + \sum_{r \in III_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial z_r} \right) \hat{E}_{y_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial y_r} \right) \hat{E}_{z_r} \right], \\
(VB_y)_t &= \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in III_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} w_r^{(0.5)} + \sum_{r \in III_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_r} \right) \hat{E}_{z_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial z_r} \right) \hat{E}_{x_r} \right], \\
(VB_z)_t &= \sum_{\alpha=x,y,z} \hat{B}_\alpha \sum_{r \in III_1} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \alpha_r} v_r^{(0.5)} + \sum_{r \in III_1} \left[\left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial y_r} \right) \hat{E}_{x_r} - \left(\frac{\partial \hat{V}}{\partial x_r} \right) \hat{E}_{y_r} \right],
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\hat{E}_\alpha = \frac{1}{4\pi \hat{\sigma}_\perp} \tilde{J}_\alpha + \frac{\hat{\sigma}_\perp - \hat{\sigma}_\parallel}{4\pi \hat{\sigma}_\perp \hat{\sigma}_\parallel} \frac{\hat{B}_\alpha}{\hat{B}^2} B^{***}, \quad \alpha = x, y, z,$$

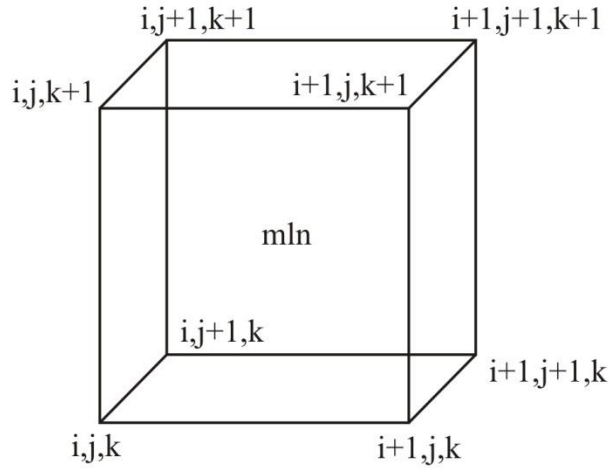
$$B^{***} = \hat{B}_x \tilde{J}_x + \hat{B}_y \tilde{J}_y + \hat{B}_z \tilde{J}_z.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_x &= -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{p \in \mathcal{M}_2} \left[\frac{\partial V_p}{\partial y} \hat{B}_{z_p} - \frac{\partial V_p}{\partial z} \hat{B}_{y_p} \right] - \frac{1}{c^2} (E_x + vB_y - wB_z)_t, \\
\tilde{J}_y &= -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{p \in \mathcal{M}_2} \left[\frac{\partial V_p}{\partial z} \hat{B}_{x_p} - \frac{\partial V_p}{\partial x} \hat{B}_{z_p} \right] - \frac{1}{c^2} (E_y - vB_x + uB_z)_t, \\
\tilde{J}_z &= -\frac{1}{\hat{V}} \sum_{p \in \mathcal{M}_2} \left[\frac{\partial V_p}{\partial x} \hat{B}_{y_p} - \frac{\partial V_p}{\partial y} \hat{B}_{x_p} \right] - \frac{1}{c^2} (E_z - uB_y + wB_x)_t.
\end{aligned} \tag{16}$$

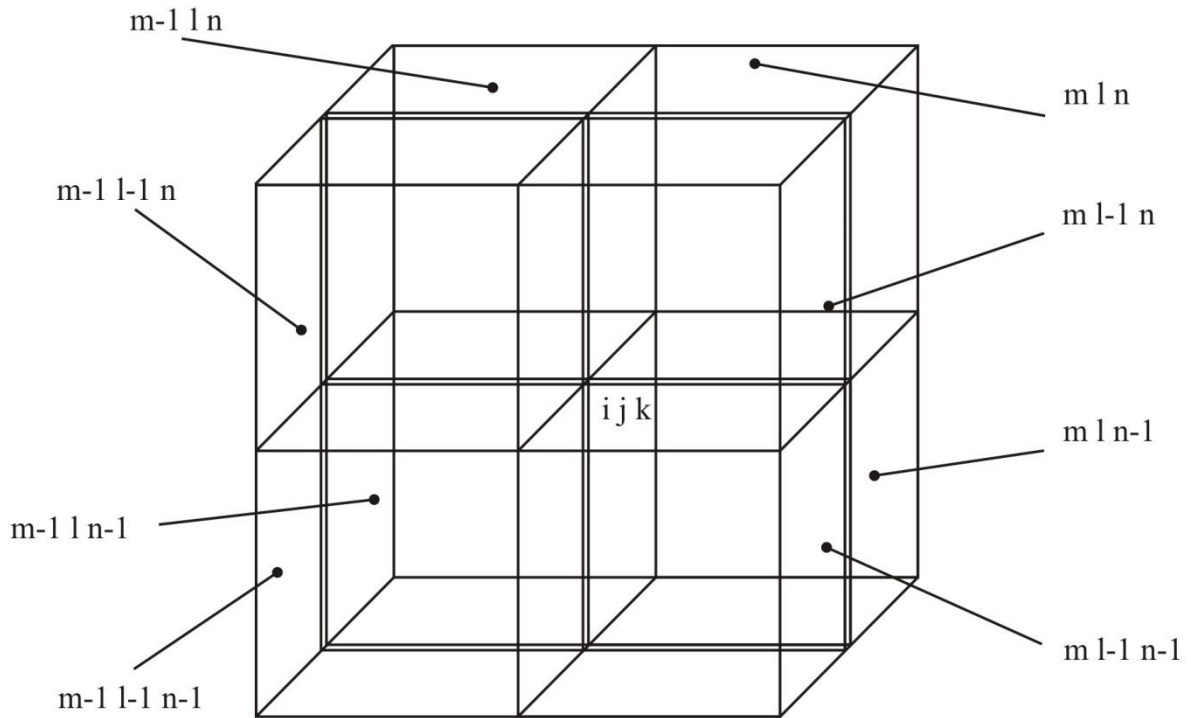
Джоулев нагрев:

$$\begin{aligned}
\hat{G}_{дж} &= \\
&= \frac{1}{128\pi^2} \left[\frac{1}{\sigma_{\perp}} \sum_{r \in \mathcal{M}_1} (\tilde{J}_{x_r}^2 + \tilde{J}_{y_r}^2 + \tilde{J}_{z_r}^2) + \left(\frac{\hat{\sigma}_{\perp} - \hat{\sigma}_{\parallel}}{\hat{\sigma}_{\perp} \hat{\sigma}_{\parallel}} \right) \sum_{r \in \mathcal{M}_1} \frac{\hat{B}_{x_r} \tilde{J}_{x_r} + \hat{B}_{y_r} \tilde{J}_{y_r} + \hat{B}_{z_r} \tilde{J}_{z_r}}{\hat{B}_r^2} \right].
\end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения системы записаны на разностных шаблонах \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 .



\mathcal{M}_1 (шаблон 1) — шаблон ячейки.



\mathcal{W}_2 — шаблон узла.

\mathcal{W}_3 — шаблон граней, прилегающих к ячейке (m, l, n) .

При записи системы уравнений (10) – (17) использованы безындексные представления сеточных функций [1].

Сеточные функции $x, y, z, u, w, v, \vec{E}$ определены в узлах разностной сетки, сеточные функции $\rho, p_{ei}, q, V, T_{ei}, \vec{B}, G_e, Q_{ei}, \chi_{ei}, \sigma$ — в ячейках (q — давление искусственной вязкости; V — объем ячейки), а сеточные функции $\vec{W}_{e,i}, S$ — на гранях ячеек.

Граничные значения давления, температур и магнитного поля будем считать отнесенными к граням граничных ячеек.

Давление искусственной вязкости q вводится в разностную схему для обеспечения сквозного счета течений с возможными разрывами. Оно берется в виде комбинации линейной и квадратичной вязкости и отлично от нуля только в области волн сжатия [4].

Под f_* поднимается значение (проекция) сеточной функции: $f_* \in H_\omega$, если $f \in H_\Omega$, и $f_* \in H_\Omega$, если $f \in H_\omega$. При проектировании из одного пространства в другое используются интерполяции, аналогичные [4].

На границах могут быть заданы следующие условия: для уравнений движения задается давление, или условие непротекания («жесткая стенка»), или распределение скорости, для уравнений Максвелла задается магнитная индукция или распределение электрического поля.

Для уравнений энергии на границах задается распределение температуры или потоков тепла.

Сохранение полной энергии

Разностная схема (10)–(17) полностью консервативна, т.е. из разностных уравнений движения, энергии и поля вытекает закон сохранения полной энергии системы. Введем следующие сеточные функционалы:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kin} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{NM-1} \sum_{l=1}^{NL-1} \sum_{n=1}^{NN-1} \Delta m_{mln} (u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2) (i=m, j=1, k=n), \\ u_{mln} &= \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} u_r, \quad w_{mln} = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} w_r, \quad v_{mln} = \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} v_r. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \sum_{mln} \Delta m_{mln} \left(\varepsilon_{e_{mln}} + \varepsilon_{i_{mln}} + \frac{u_{mln}^2 + w_{mln}^2 + v_{mln}^2}{2} + \frac{B_{x_{mln}}^2 + B_{y_{mln}}^2 + B_{z_{mln}}^2}{8\pi\rho_{mln}} \right); \\ u_{mln}^2 &= \frac{1}{8} \sum_{r \in III_1} u_r^2, \quad \text{аналогично для } w, v. \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим:

$i, j, k \in G$ — граничные узлы,

p' — приграничные, p'' — фиктивные ячейки расчетной области.

$$\sum_{p \in III_2} = \sum_{p' \in III_2} + \sum_{p'' \in III_2};$$

$$\begin{aligned} \mu'_{ijk} &= \frac{1}{8M_{ijk}} \sum_{p' \in III_2} \Delta m_{p'}, \quad \mu''_{ijk} = \frac{1}{8M_{ijk}} \sum_{p'' \in III_2} \Delta m_{p''} = 1 - \mu'_{ijk}, \\ \eta'_{ijk} &= \frac{1}{8\hat{V}_{ijk}} \sum_{p' \in III_2} \hat{V}_{p'}, \quad \eta''_{ijk} = 1 - \eta'_{ijk}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
\hat{E}_{tot} - E_{tot} = & -\Delta t \sum_{mln} \left(\hat{G}_{e_{mln}} + \hat{G}_{i_{mln}} \right) \hat{V}_{mln} + \\
& + \Delta t \sum_{ijk \in G} \left[\begin{aligned}
& -u_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) \\
& -w_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) \\
& -v_{ijk}^{(0.5)} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \left(\hat{P}_p + \frac{\hat{B}_p B_p}{8\pi} \right) \\
& + \frac{u_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) B_{x_p}^{(0.5)} \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{B}_{x_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{B}_{y_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{B}_{z_p} \right) \\
& + \frac{w_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) B_{y_p}^{(0.5)} \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{B}_{x_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{B}_{y_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{B}_{z_p} \right) \\
& + \frac{v_{ijk}^{(0.5)}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \mu_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \mu_{ijk}' \right) B_{z_p}^{(0.5)} \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{B}_{x_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{B}_{y_p} + \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{B}_{z_p} \right) \\
& + \frac{\hat{E}_{x_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \eta_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \eta_{ijk}' \right) \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{B}_{z_p}^{(0.5)} - \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{B}_{y_p}^{(0.5)} \right) \\
& + \frac{\hat{E}_{y_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \eta_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \eta_{ijk}' \right) \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial z_{ijk}} \right) \hat{B}_{x_p}^{(0.5)} - \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{B}_{z_p}^{(0.5)} \right) \\
& + \frac{\hat{E}_{z_{ijk}}}{4\pi} \left(\sum_{p' \in III_2} \eta_{ijk}'' - \sum_{p'' \in III_2} \eta_{ijk}' \right) \left(\left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial x_{ijk}} \right) \hat{B}_{y_p}^{(0.5)} - \left(\frac{\partial \hat{V}_p}{\partial y_{ijk}} \right) \hat{B}_{x_p}^{(0.5)} \right)
\end{aligned} \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, в результате тождественных преобразований из системы разностных уравнений (10)–(17) следует, что изменение полной энергии определяется:

- работой внешних сил давления и магнитного поля;
- притоком (оттоком) тепла через границу области;
- притоком магнитной энергии через внешнюю границу;
- вносом (выносом) энергии источниками (стоками).

Алгоритм решения системы разностных уравнений «комбинированным методом»

Пусть значения разностных функций заданы на n -ом временном слое. Тогда, чтобы определить значения этих функций на $(n+1)$ -ом временном слое, необходимо решить систему разностных уравнений (10)–(17). Разностные уравнения представляют собой систему нелинейных алгебраических уравнений, для решения которых используется итерационный метод с раздельным расчетом групп уравнений, выделяемых по характеру физических процессов.

Структура алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются приближенные значения скорости, плотности, температуры магнитного поля на $(n+1)$ -ом временном слое.

2. При фиксированном значении температуры решаются уравнения движения и Максвелла и находятся приближенные значения скорости, плотности и параметров электромагнитного поля.

3. При фиксированных значениях скорости, плотности и компонент электромагнитного поля решается система уравнений энергии и находятся приближенные значения электронной и ионной температуры на $(n+1)$ -ом слое.

4. Проверяется выполнение закона сохранения энергии (21). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{n+1} считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный выше процесс.

5. Производится (если нужно) коррекция лагранжевой сетки и выполняется пересчет всех величин на новую разностную сетку. Алгоритм пересчета подробно описан в [3], [5].

Уравнение состояния является уравнением-связкой между уравнениями «первой группы» (уравнения динамики и электромагнитного поля) и «второй группы» (уравнения энергии).

Решения уравнений динамики и Максвелла

Разностные уравнения движения и электромагнитного поля решаются с разделением по физическим процессам: сначала рассчитывается движение вещества в предположении в замороженности магнитного поля (бездиссипативные процессы), затем учитывается конечная проводимость – диффузия магнитного поля. Уравнения решаются методом Ньютона с редукцией неизвестных величин [6]. Вначале, при переходе от итерации « s » к итерации « $s+1$ », мы полагаем, что все переменные, входящие в уравнения движения, (в том числе и B) зависят только от компонент скорости $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}$ («основных» переменных в уравнениях первой группы). Предполагается также, что давление вещества в ячейках изменяется локально-баротропно, т.е. температура фиксирована. Таким образом, уравнения динамики решаются

относительно u, w, v . Отмечая верхним индексом номер итерации, запишем для каждой функции в уравнениях движения формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой:

$$u_{ijk}^{s+1} = u_{ijk}^s + \delta u_{ijk},$$

$$w_{ijk}^{s+1} = w_{ijk}^s + \delta w_{ijk},$$

$$v_{ijk}^{s+1} = v_{ijk}^s + \delta v_{ijk},$$

$$x_{ijk}^{s+1} = x_{ijk}^s + \delta x_{ijk} = x_{ijk}^s + \frac{\partial x_{ijk}}{\partial u_{ijk}} \delta u_{ijk},$$

$$y_{ijk}^{s+1} = y_{ijk}^s + \delta y_{ijk} = y_{ijk}^s + \frac{\partial y_{ijk}}{\partial w_{ijk}} \delta w_{ijk},$$

$$z_{ijk}^{s+1} = z_{ijk}^s + \delta z_{ijk} = z_{ijk}^s + \frac{\partial z_{ijk}}{\partial v_{ijk}} \delta v_{ijk},$$

$$\Phi_{mln}^{s+1} = \Phi_{mln}^s + \delta \Phi_{mln} = \Phi_{mln}^s + \sum_{r \in \Pi_1} \left(\frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial u_r} \delta u_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial w_r} \delta w_r + \frac{\partial \Phi_{mln}}{\partial v_r} \delta v_r \right),$$

где Φ_{mln} — функции в ячейке $P_{mln}, q_{mln}, B_{mln}$.

Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения движения системы (10) – (17) и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений компонент скорости $\delta u_{ijk}, \delta w_{ijk}, \delta v_{ijk}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(1)}, \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(2)}, \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(a_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta u_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + b_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta w_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + c_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} \delta v_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= F_{ijk}^{(3)}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$i = \overline{1, NM}, j = \overline{1, NL}, k = \overline{1, NN}.$$

Здесь $a_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, b_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, c_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}, F_{ijk}^{(1,2,3)}$ — числовые множители. Система уравнений (22) имеет матрицу блочной структуры.

Для решения уравнений (22) можно использовать эффективные итерационные методы [5].

После нахождения приращения скорости на $(s+1)$ -ой итерации определяются величины $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}, V_{mln}, \rho_{mln}, P_{mln}, q_{mln}$, а также промежуточное значение B :

$$\bar{B}_{mln} = B(\rho_{mln}^{s+1}, \bar{E}_{ijk}^s).$$

Следующим шагом является решение системы уравнений, описывающих электрическое и магнитное поля. Здесь учитывается конечная проводимость среды. При вычислении коэффициента электропроводности берется промежуточное значение индукции магнитного поля:

$$\delta_{mln}^{s+1} = \delta_{mln}(\rho_{mln}^{s+1}, \bar{B}_{mln}, T_{mln}^s)$$

(температурная зависимость учитывается по предыдущей итерации), тогда система разностных уравнений относительно B^{s+1}, E^{s+1} будет линейной. Учитывая, что в некоторых подобластях течения плазмы ее проводимость может оказаться близкой к нулю (почти вакуумная область), целесообразно решать систему уравнений поля, исключив из нее магнитную индукцию, в результате чего получается система линейных уравнений относительно E_x, E_y, E_z :

$$\begin{aligned} \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{b}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{c}_{1ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(1)}, \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{b}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{c}_{2ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(2)}, \\ \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{a}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_x)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{b}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_y)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} + \bar{c}_{3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)} (\hat{E}_z)_{i+k_1, j+k_2, k+k_3} \right) &= \bar{F}_{ijk}^{(3)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\bar{B}_{mln}^{s+1} = B(\rho_{mln}^{s+1}, \bar{E}_{ijk}^{s+1}), i = \overline{1, NM}, j = \overline{1, NL}, k = \overline{1, NN}.$$

Здесь $\bar{a}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{b}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{c}_{1,2,3ijk}^{(k_1 k_2 k_3)}$, $\bar{F}_{ijk}^{(1,2,3)}$ — числовые множители.

Система линейных уравнений (23) имеет блочную структуру. После нахождения электрических полей имеем:

$$\bar{B}_{mln}^{s+1} = B(\rho_{mln}^{s+1}, \bar{E}_{ijk}^{s+1}).$$

Система уравнений движения и поля считается решенной, если приращения скоростей на итерации удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned}
|\delta u_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |u_{ijk}| + u_{\min}, \\
|\delta w_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |w_{ijk}| + w_{\min}, \\
|\delta v_{ijk}| &\leq \varepsilon_\mu |v_{ijk}| + v_{\min}.
\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь ε_μ — относительная, а $u_{\min}, v_{\min}, w_{\min}$ — абсолютные погрешности скорости.

Решение уравнений энергии

При решении уравнений энергии полагаем, что все функции, входящие в эти уравнения, зависят только от температур электронной и ионной компонент плазмы. Уравнения энергии также решаются методом Ньютона. Запишем для функций в уравнениях энергии формулу перехода от s -ой итерации к $(s+1)$ -ой итерации:

$$\begin{aligned}
(T_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (T_{e,i})_{mln}^s + \delta(T_{e,i})_{mln}, \\
(P_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (P_{e,i})_{mln}^s + \delta(P_{e,i})_{mln} = (P_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial P_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right)_{mln} \delta(T_{e,i})_{mln}, \\
(Q_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (Q_{e,i})_{mln}^s + \left(\frac{\partial Q_{e,i}}{\partial T_e} \right)_{mln} \delta(T_e)_{mln} + \left(\frac{\partial Q_{e,i}}{\partial T_i} \right)_{mln} \delta(T_i)_{mln}, \\
(\chi_{e,i})_{mln}^{s+1} &= (\chi_{e,i})_{mln}^s + \sum_{q \in III_4} \left(\frac{\partial \chi_{e,i}}{\partial T_{e,i}} \right) \delta(T_{e,i})_{mln}.
\end{aligned} \tag{25}$$

III_4 — шаблон, состоящий из грани и прилегающих к ней ячеек.

Подставляя значения функций на $(s+1)$ -ой итерации в уравнения энергии и пренебрегая квадратами приращений функций, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно приращений температур $\delta(T_e)_{mln}, \delta(T_i)_{mln}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{\bar{a}}_{1mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_e)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) + \bar{\bar{b}}_{1mln}^{(0,0,0)} (\delta T_i)_{mln} &= \bar{\bar{F}}_{mln}^{(1)}, \\
\bar{\bar{c}}_{1mln}^{(0,0,0)} (\delta T_e)_{mln} + \sum_{k_1=-1}^1 \sum_{k_2=-1}^1 \sum_{k_3=-1}^1 \left(\bar{\bar{d}}_{1mln}^{(k_1 k_2 k_3)} (\delta T_i)_{m+k_1, l+k_2, n+k_3} \right) &= \bar{\bar{F}}_{mln}^{(2)},
\end{aligned} \tag{26}$$

Здесь $\bar{\bar{a}}_{1mln}^{(k_1 k_2 k_3)}, \bar{\bar{b}}_{1mln}^{(0,0,0)}, \bar{\bar{c}}_{1mln}^{(0,0,0)}, \bar{\bar{d}}_{1mln}^{(k_1 k_2 k_3)}, \bar{\bar{F}}_{mln}^{(1,2)}$ — числовые множители.

Аналогичные уравнения на границе получаются в соответствии с типом граничных условий. Например, при заданной температуре все приращения температур на границе тождественно равны 0.

Система разностных уравнений (26) решается аналогично системам (23) и (22).

Уравнения энергии считаются решенными, если приращения температур на итерации удовлетворяют условиям

$$\left| \delta(T_{ei})_{mln} \right| \leq \varepsilon_T (T_{ei})_{mln} + T_{\min}, \quad m = \overline{1, NM-1}, l = \overline{1, NL-1}, N = \overline{1, NN-1}. \quad (27)$$

Алгоритм решения системы разностных уравнений методом «разделения по физическим процессам»

Решаем систему уравнений (10)–(17). Структура данного алгоритма состоит в следующем.

1. Задаются приближенные значения скорости, плотности, температуры и магнитного поля на $(n+1)$ -ом временном слое.

2. При фиксированных значениях температуры и электромагнитного поля решаются уравнения движения и находятся приближенные значения скорости и плотности.

3. При фиксированных значениях скорости, плотности и температуры решаются уравнения Максвелла и находятся приближенные значения параметров электромагнитного поля.

4. При фиксированных значениях скорости, плотности и компонент электромагнитного поля решается система уравнений энергии и находятся приближенные значения электронной и ионной температуры на $(n+1)$ слое.

5. Проверяется выполнение закона сохранения энергии (21). Если он выполнен с требуемой точностью, то значения функций на момент времени t^{n+1} считаются найденными. В противном случае необходимо вернуться к выполнению пункта 2 и снова повторить описанный выше процесс.

6. Производится (если нужно) коррекция лагранжевой сетки и выполняется пересчет всех величин на новую разностную сетку.

Отличие реализации метода «разделения по физическим процессам» от «комбинированного» состоит в следующем.

1. При решении уравнений движения в систему уравнений (10)–(17) подставляются функции $u_{ijk}, w_{ijk}, v_{ijk}, x_{ijk}, y_{ijk}, z_{ijk}, P_{mln}, g_{mln}$ с $(s+1)$ -ой итерации, а функции B, x, y, z_{men} — с s -ой итерации.

2. Полученная в результате этого система уравнений (22') решается до выполнения условия (24). (После каждой итерации по движению не решаются уравнения Максвелла).

3. После решения системы уравнений (22') решается линейная система уравнений Максвелла (23).

Примеры расчетов

Эффективность описанных выше алгоритмов проверялась на решении следующих тестовых задач. В начальный момент времени покоящееся вещество занимает область: $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Начальная плотность и температура равны соответственно $\rho_0 = 1$, $T_0 = 1$. Вещество — идеальный газ с уравнением состояния $p = \rho T$, $\varepsilon = \frac{3}{2}T$, нетеплопроводный. Оно помещено в однородное магнитное поле $B = (B_x, B_y, B_z)$, которое является почти «вмороженным»: $\delta = 10^{20}$. На границе области задан вектор скорости \vec{u} : $(\vec{u}, \vec{n}) = \pm 10^{-2}$. В данной постановке акустические колебания в среде должны распространяться со скоростью, много большей скорости выдвигания (вдвигания) поршня, поэтому в любой момент времени распределение плотности газа и магнитного поля почти однородно.

Задача решалась для различных значений величин $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$: $0 \leq B_{x,y,z} \leq 1000$.

Расчеты показали, что при выполнении условия $p > B^2/8\pi$ оба метода работают с шагом по времени $\Delta t \approx 1$.

За счет того, что метод «разделения по физическим процессам» много проще «комбинированного» метода, каждый временной шаг этого метода на 40-50% дешевле, чем в «комбинированном» методе. Кроме того, метод «разделения по физическим процессам» гибче «комбинированного» метода, в него легче вносить изменения.

Если же хотя бы в одной ячейке $B^2/8\pi > p$, то, тогда как «комбинированный» метод по-прежнему считает с $\Delta t \approx 1$, для метода «разделения по физическим процессам» существуют ограничения на временной шаг [8]:

$$\Delta t < \frac{\bar{c} h_{\min}}{\sqrt{\frac{B^2}{8\pi\rho} + (\gamma - 2)\frac{p}{\rho}}}, \quad (28)$$

где $\gamma = \frac{5}{3}$ — показатель адиабаты Пуассона, \bar{c} — константа, независящая от параметров вещества и поля, и разностной сетки (в расчетах колебалась от 0.1 до 0.12).

$$h_{\min} = \min (h_x, h_y, h_z),$$

$$h_x = \min_{ijk} \left\{ \left| x_{i+1 j+1 k+1} - x_{ijk} \right|, \left| x_{i+1 j k+1} - x_{ij+1k} \right|, \left| x_{i+1 j k} - x_{ij+1k+1} \right| \right\},$$

$$h_y = \min_{ijk} \left\{ \left| y_{i+1 j+1 k+1} - y_{ijk} \right|, \left| y_{i+1 j k+1} - y_{ij+1k} \right|, \left| y_{i+1 j k} - y_{ij+1k+1} \right| \right\},$$

$$h_z = \min_{ijk} \left\{ \left| z_{i+1 j+1 k+1} - z_{ijk} \right|, \left| z_{i+1 j k+1} - z_{ij+1k} \right|, \left| z_{i+1 j k} - z_{ij+1k+1} \right| \right\}.$$

При $h_{\min} = 10^{-2}$, $B = 1000$ для метода «разделения по физическим процессам» $\Delta t \approx 10^{-5}$, что делает расчеты практически невозможными.

Таким образом, в задачах, где на протяжении всего расчета во всей расчетной области выполняется условие $p \geq B^2 / 8\pi$, целесообразнее пользоваться методом «разделения по физическим процессам». В противном случае целесообразнее использовать более универсальный «комбинированный» метод.

Заметим, что при наличии явных схем, ограничение на временной шаг еще более жесткое, чем (28), и в ситуации, когда в какой-нибудь части расчетной области в определенный момент времени $p \ll B^2 / 8\pi$ (что при решении широкого класса задач заранее неизвестно), пользоваться явными схемами представляется нецелесообразным.

Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
2. Гасилов В.А., Гуськов С.Ю., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Двухэтапная разностная схема для численного решения задач магнитной газовой динамики. М., 1998, Препринт ФИАН, № 51.
3. Круковский А.Ю. Полностью консервативные разностные схемы в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчёта трёхмерных уравнений магнитной гидродинамики. // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 25. 13 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-25>
4. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Оточин А.А. Комплекс программ РАЗРЯД. Решение задач магнитной гидродинамики в R-Z геометрии в двухтемпературном приближении М., 1990, Препринт ИПМ № 150.
5. Круковский А.Ю., Попов И.В. Построение полностью консервативных разностных схем в смешанных эйлерово-лагранжевых переменных для расчёта трёхмерных МГД течений. *Mathematica Montisnigri*. Vol XXIV (2012), 93-107.
6. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Об алгоритмах решения двумерных уравнений магнитной гидродинамики в комплексе программ РАЗРЯД. Препринт ИММ РАН, № 36, М., 1993.

7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.

8. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного решения задач двумерной магнитной гидродинамики. М., 1995. Препринт ИММ РАН, № 6.