



Дородницын В.А., Капцов Е.И.

Инвариантные разностные
схемы для обыкновенных
дифференциальных
уравнений второго порядка,
обладающих симметриями

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Дородницын В.А., Капцов Е.И. Инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 16. 42 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-16>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Росси й с к о й а к а д е м и и н а у к

В.А. Дородницын, Е.И. Капцов

**Инвариантные разностные схемы для
обыкновенных дифференциальных
уравнений второго порядка,
обладающих симметриями**

Москва — 2014

Дородницын В.А., Капцов Е.И.

Инвариантные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, обладающих симметриями.

Дается обзор серии публикаций (указанных во введении), в которых исследовались групповые свойства, первые интегралы и интегрируемость разностных уравнений и сеток, аппроксимирующих обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, обладающих симметриями. Обзор дополняется новым примером таких уравнений. Кроме того, показывается, что среди параметрических семейств инвариантных разностных схем присутствуют *точные схемы*, то есть схемы, общее решение которых совпадает с соответствующим множеством решений дифференциальных уравнений в узлах сетки, плотность которых может быть произвольной. Тем самым показывается, что для рассматриваемых задач существует своеобразный *математический дуализм*: для одного и того же физического процесса существует две математических модели, - непрерывная и дискретная; первая описывается непрерывными кривыми, вторая - точками на тех же кривых.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, симметрия, группа преобразований, инвариантные разностные схемы, точное решение.

V.A. Dorodnitsyn, E.I. Kaptsov

Invariant difference schemes for second order ordinary differential equations possessing symmetries

A review of earlier publications referenced in an introduction of the paper is presented. There were developed and investigated invariant difference schemes for second order ordinary differential equations possessing symmetries in mentioned publications. Besides, a new example of such a scheme was added. It was also shown that for each case of invariant schemes there exists an exact scheme, which general solution coincides with a general solution of an appropriate differential equation in the lattice nodes with arbitrary density. Therefore a specific mathematical dualism is indicated: for the same physical process there exist two identical continuous and discrete mathematical models. The first model is described by continuous curves, whereas the second one is determined by lattice nodes on the same continuous curves.

Key words: ordinary differential equations, symmetry, transformation group, invariant difference scheme, exact solution.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта №12-01-00940-а).

Введение

Инвариантность дифференциальных уравнений относительно непрерывной группы преобразований является, безусловно, фундаментальным свойством математических моделей физики. Знание симметрии дает значительную информацию об исследуемой системе дифференциальных уравнений (см. [1]-[3]): допускаемая группа переводит решение уравнения в его же решение, позволяет находить инвариантные решения и понижать порядок обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ); инвариантность дифференциальных уравнений является необходимым условием применения теоремы Э.Нетер (см.[4]) для получения законов сохранения (первых интегралов для ОДУ) лагранжевых систем и первых интегралов для гамильтоновых систем.

При конструировании разностных уравнений и сеток инвариантность относительно групп Ли преобразований играет столь же большую роль, что и сохранение других качественных характеристик исходных дифференциальных уравнений. В работах [5]-[8] были выявлены связи допускаемых преобразований с геометрией сеток, что послужило основой для построения серии разностных моделей, в которых полностью сохранена симметрия исходных дифференциальных уравнений (см.[9,10]).

В групповой классификации обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка (см., например, [9]) С.Ли были выделены все уравнения, обладающие нетривиальной симметрией. Аналогичная групповая классификация всех обыкновенных разностных уравнений и сеток была проведена в [7], где перечислены все классы разностных моделей, обладающих нетривиальными симметриями. В работах [6],[8],[10]-[12] разработан лагранжев формализм, позволяющий строить консервативные разностные модели. В работах [13]-[15] разработан гамильтонов формализм, в рамках которого также дается способ строить схемы, обладающие первыми интегралами.

В настоящей работе строится новый пример инвариантной разностной модели, завершающий список [11],[12] интегрируемых уравнений с тремя симметриями. Кроме того, показывается, что среди инвариантных разностных схем присутствуют *точные схемы*, то есть схемы, общее решение которых совпадает с соответствующим множеством решений дифференциальных уравнений в узлах сетки, плотность которых может быть произвольной. Иначе говоря, точные схемы представляют собой дискретное представление ОДУ второго порядка с симметриями. Тем самым показано, что для рассматриваемых задач существует своеобразный математический дуализм: для одного и того же физического процесса (одномерного движения частицы в поле неко-

торых потенциалов) существует две эквивалентные математических модели, - непрерывная и дискретная, первая описывается непрерывными кривыми, вторая - точками на этих же кривых.

Точные разностные схемы для ОДУ первого порядка рассматривались в [16]. Точная разностная модель для системы ОДУ, описывающей кеплеровское движение, получена и протестирована в [17].

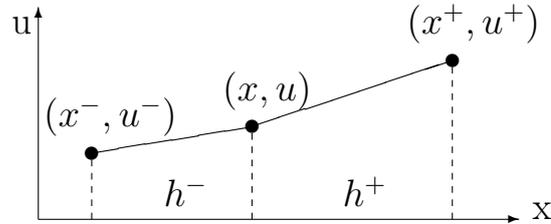
Таблица 1.

Группа	Базис инфинитезимальных операторов	ОДУ
G_1	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$	$y'' = F(y, y')$
G_2 a)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = F(y')$
G_2 b)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \frac{1}{x} F(y')$
G_3 a)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 2 \frac{y' + Cy' \sqrt{y'} + y'^2}{y - x}$
G_3 b)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = y^{-3}$
G_3 c)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x + y) \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = \exp(-y')$
G_3 d)	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2$	$y'' = y'^{\frac{k-2}{k-1}}$
G_8	$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, X_3 = x \frac{\partial}{\partial y}, X_4 = x \frac{\partial}{\partial x}, X_5 = y \frac{\partial}{\partial x},$ $X_6 = y \frac{\partial}{\partial y}, X_7 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, X_8 = xy \frac{\partial}{\partial x} + x^2 \frac{\partial}{\partial y}$	$y'' = 0$

1. Разностные модели ОДУ второго порядка, обладающие симметриями и первыми интегралами

Построение разностной схемы для простейшего линейного уравнения 2-го порядка не представляет собой проблемы. Поэтому рассмотрим примеры нелинейных ОДУ и соответствующих разностных схем.

Рассмотрим трехточечную разностную схему для ОДУ второго порядка. Мы не используем переменный индекс для точек разностных уравнений, поскольку для анализа трехточечного разностного уравнения реально необходимо лишь три значения координат и соответствующих функций: $f = f(x, u)$, $f^+ = f(x^+, u^+)$, $f^- = f(x^-, u^-)$ (см. фигуру).



В многомерном случае ситуация аналогична, - необходимы лишь точки *разностного шаблона*, на котором аппроксимируется уравнение. Мы также будем использовать следующие обозначения для разностных производных вправо и влево соответственно:

$$u_x = \frac{u^+ - u}{h^+}, \quad u_{\bar{x}} = \frac{u - u^-}{h^-}.$$

Для отличия разностных производных от непрерывных, последние будем обозначать как u' , u'' , ...

Разностную модель для ОДУ второго порядка мы будем представлять в виде *двух* конечно-разностных уравнений:

$$F(x, x^-, x^+, u, u^-, u^+) = 0; \tag{1}$$

$$\Omega(x, x^-, x^+, u, u^-, u^+) = 0,$$

второе из которых представляет собой уравнение для сетки. Это второе уравнение обычно не дописывают, а структуру сетки подразумевают или равномерной, или неравномерной, с заданными шагами сетки

$$h^+ = x^+ - x, \quad h^- = x - x^-,$$

где h^+, h^- - шаги сетки право и влево от данной точки x . В нашем подходе явная запись уравнения сетки имеет принципиальное значение. Именно это позволяет получать разностные схемы, допускающие полную симметрию соответствующего ОДУ.

Первое уравнение в системе (1) представляет собой разностное уравнение второго порядка, которое в континуальном пределе ($h \rightarrow 0$) дает ОДУ второго порядка. Второе уравнение, уравнение для сетки, не обязано давать ОДУ второго порядка при стремлении шага сетки к нулю. Например, можно рассматривать равномерную разностную сетку в виде уравнения $h^+ = h^-$, которое "исчезает" в континуальном пределе: $0 = 0$. Геометрически это означает превращение разностного шаблона в точку, не имеющую ни размерности, ни геометрической структуры. Это порождает определенные трудности в разностном моделировании, - уравнение, генерирующее разностную сетку, отсутствует в дифференциальной модели, - его "неоткуда взять". Однако, как мы увидим, можно выписать некоторое общее семейство уравнений для разностных сеток, сохраняющих группу исходного дифференциального уравнения. Из этого семейства надлежит выбрать такое уравнение, которое соответствует поставленным целям. Такой целью может быть, например, максимальная простота структуры сетки, адаптация к специфике семейства решений и т.д.

Рассмотрим *непрерывную* группу преобразований, генерируемую алгеброй Ли инфинитезимальных операторов вида

$$X = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (2)$$

Соответствующие непрерывные преобразования определяются коэффициентами $\xi(x, u)$, $\eta(x, u)$. Эти преобразования действуют во всем пространстве (а не только в узлах сетки) и являются обычными *точечными* преобразованиями, так как коэффициенты ξ и η операторов (2) зависят только от (x, u) и не зависят от соседних точек (x^+, u^+) и (x^-, u^-) . Векторное поле (ξ, η) определено в каждой точке пространства (x, u) , в том числе и в соседних узловых точках сетки. Поэтому продолжение оператора (2) на все точки разностного шаблона геометрически очевидно:

$$\begin{aligned} X^* = & \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi(x^+, u^+) \frac{\partial}{\partial x^+} + \xi(x^-, u^-) \frac{\partial}{\partial x^-} + \\ & + \eta(x, u) \frac{\partial}{\partial u} + \eta(x^+, u^+) \frac{\partial}{\partial u^+} + \eta(x^-, u^-) \frac{\partial}{\partial u^-}. \end{aligned} \quad (3)$$

Основная идея развиваемого подхода заключается в точном сохранении группы преобразований в конечно-разностных моделях, аппроксимирующих

данные непрерывные уравнения. Именно это позволяет в полной мере воспользоваться следствиями допускаемой симметрии, указанными выше.

Известно (см.[2]), что ОДУ второго порядка могут быть получены как уравнения Эйлера некоторого вариационного функционала. В случае инвариантности функционала соответствующее уравнение Эйлера наследует симметрию и имеет столько независимых интегралов, сколько независимых симметрий имеется у вариационного функционала, - в этом и заключается теорема Нетер для обыкновенных дифференциальных уравнений (см.[4]).

В разностных вариационных задачах ситуация усложняется [6], [8], [11], [12], [18]. Прежде всего, разностный функционал с функцией Лагранжа $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+)$, определенной на двух точках разностного шаблона, надо рассматривать вместе с сеткой в виде следующей системы

$$L = \sum_{\Omega} \mathcal{L}(x, x^+, u, u^+) h^+, \quad (4)$$

$$\Omega(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0. \quad (5)$$

Инвариантность функционала вместе с сеткой нетрудно записать с помощью действия соответствующего инфинитезимального оператора группы:

$$X^* \mathcal{L} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) = 0, \quad (6)$$

$$X^* \Omega(x, u, u^+, u^-, \dots, h^+, h^-) = 0. \quad (7)$$

Разностный аналог теоремы Нетер (см. [6], [8]) основан на следующем операторном тождестве, которое также надо рассматривать на сетке (5):

$$\begin{aligned} & \xi \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \xi^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^+} + \eta \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \eta^+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^+} + \mathcal{L} D_{+h}(\xi) \equiv \\ & \equiv \xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) + \\ & + D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi^+ = \xi(x^+, u^+)$, $\eta^+ = \eta(x^+, u^+)$, а левая часть тождества представляет собой подробную запись уравнения (6).

Аналогичные тождества справедливы и для многомерных случаев (см.[10], [18]). Тождество (8) при $h \rightarrow 0$ обращается в соответствующее тождество

Нетер (см. [3]), однако при конечном h оно имеет существенно более сложную структуру, которая исчезает в континуальном пределе. Это тождество выделяет следующие разностные объекты. Прежде всего, в отличие от непрерывного случая, выделяется не уравнение Эйлера, а некоторое другое уравнение, названное *квазиэкстремальным* или локально-экстремальным:

$$\xi \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) \right) + \eta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} \right) = 0. \quad (9)$$

Во-вторых, это уравнение зависит от конкретной подгруппы, так как содержит коэффициенты генератора группы ξ, η в явном виде. Обращение в нуль левой части тождества означает инвариантность функционала (4). Обращение в нуль правой части тождества (8) позволяет выписать (см. [6], [8]) первый интеграл

$$D_{+h} \left(h^- \eta \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} + h^- \xi \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} + \xi \mathcal{L}^- \right) |_{(5),(9)} = 0, \quad (10)$$

справедливый на решениях соответствующего квазиэкстремального уравнения.

Таким образом, в случае разностных уравнений ситуация существенно усложняется: разным подгруппам соответствуют разные квазиэкстремальные уравнения, для каждого из которых есть "свой" закон сохранения, соответствующий инвариантности разностного функционала относительно подгруппы с данными ξ, η .

Следующее утверждение дает достаточные условия существования у одного уравнения полного набора законов сохранения (см. [6], [8], [11], [12]).

Теорема: Пусть на сетке (5) функционал (4) допускает r -параметрическую группу преобразований. Пусть существует решение системы разностных уравнений (глобальная экстремаль):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial x} - D_{+h}(\mathcal{L}^-) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} + \frac{h^-}{h^+} \frac{\partial \mathcal{L}^-}{\partial u} = 0;$$

Тогда на решениях системы (11) справедливы r законов сохранения вида (10).

Это утверждение можно рассматривать как разностный аналог теоремы Нетер. Ее применение мы продемонстрируем на примерах. Начнем с наиболее простого нелинейного ОДУ из списка Ли, обладающего тремя симметриями.

2. Пример 1

Рассмотрим конечно-разностную модель обыкновенного дифференциального уравнения из списка С.Ли

$$u'' = \frac{1}{u^3}. \quad (12)$$

Уравнение (12) можно рассматривать как уравнение Эйлера инвариантного функционала с функцией Лагранжа $(\frac{1}{u^2} - (u')^2)$. Оно допускает трехпараметрическую группу преобразований с операторами:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \quad X_2 = 2x \frac{\partial}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial u}; \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u}; \quad (13)$$

В соответствии с теоремой Нетер у уравнения (12) есть три первых интеграла:

$$\begin{aligned} J_1 &= (u')^2 + \frac{1}{u^2} = A^0, & J_2 &= \frac{x}{u^2} - (u - u'x)u' = B^0, \\ J_3 &= \frac{x^2}{u^2} + (u - xu')^2 = C^0. \end{aligned} \quad (14)$$

Из трех интегралов первые два получаются из инвариантности указанного лагранжиана, а третий - из его "дивергентной инвариантности" (см., например, [3]). В этой ситуации теорема Нетер гарантирует функциональную независимость лишь двух интегралов. Однако наличие и двух независимых интегралов в (14) позволяет выписать общее решение уравнения (12)

$$A_0 u^2 = (A_0 x + B_0)^2 + 1. \quad (15)$$

Инвариантная разностная схема может быть построена на основе следующей функции Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+} \right)^2. \quad (16)$$

С помощью методов, описанных в предыдущем разделе, получается следующая разностная схема:

$$\begin{cases} \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{1}{u^2 u^-}, \\ \frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \end{cases} \quad (17)$$

где ε — параметр, задающий плотность сетки.

В соответствии с Теоремой предыдущего раздела разностная система (21) обладает тремя разностными интегралами:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{u_x}{h}{}^2 + \frac{1}{uu^+} = A, \\
 2) \quad & \frac{2x + h^+}{2} \frac{u_x}{h}{}^2 + \frac{2x + h^+}{2uu^+} - \frac{u + u^+}{2} \frac{u_x}{h} = B, \\
 3) \quad & \frac{x(x + h^+)}{uu^+} + \left(\frac{u + u^+}{2} - \frac{2x + h^+}{2} \frac{u_x}{h} \right)^2 = C,
 \end{aligned} \tag{18}$$

Путем чисто алгебраических действий с интегралами (18) легко получить общее решение схемы (21):

$$Au^2 = (Ax + B)^2 + 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{19}$$

Точное решение (19) схемы отличается от общего решения исходного уравнения (12) на $\frac{\varepsilon^2}{4}$, причем оценка ошибки носит равномерный характер.

Точная разностная схема может быть получена с помощью вспомогательного параметра δ :

$$\mathcal{L} = \frac{\delta}{uu^+} - \left(\frac{u^+ - u}{h^+} \right)^2. \tag{20}$$

В этом случае точная схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h^-} = \frac{\delta}{u^2 u^-}, \\ \frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \end{cases} \tag{21}$$

Точное решение схемы совпадает с общим решением исходного уравнения (12), если принять

$$\delta = 2 \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}. \tag{22}$$

3. Метод возмущения инвариантного лагранжиана

Прежде, чем рассмотреть дальнейшие примеры построения инвариантных консервативных схем, мы проделаем некоторые вычисления более общего характера.

Мы рассмотрим случаи, когда у исходного ОДУ имеется три симметрии, но лишь две из них допускаются вариационным функционалом и порождают первые интегралы. В непрерывном случае двух интегралов достаточно для интегрирования одного уравнения. В разностной модели, состоящей из двух уравнений, нам требуется четыре интеграла.

Для нахождения дополнительных интегралов был предложен метод возмущения инвариантного лагранжиана. Идея заключается в том, что условия инвариантности лагранжиана допускает некоторую свободу в аппроксимации его разностным лагранжианом. Поэтому возможно ввести весовые множители в разностный лагранжиан и рассматривать параметрические семейства инвариантных лагранжианов. Рассмотрим следующее семейство лагранжианов:

$$\mathcal{L} = \alpha G\left(\frac{u_x}{h}\right) + \beta u + (1 - \beta)u_+, \quad \alpha \approx 1, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (23)$$

где α и β - некоторые параметры, $G\left(\frac{u_x}{h}\right)$ - произвольная функция от разностной производной.

Такие лагранжианы допускают алгебру операторов трансляции

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}. \quad (24)$$

Общим уравнением второго порядка, допускающим эту абелеву алгебру, является следующее ОДУ:

$$y'' = F(y'). \quad (25)$$

Каждый разностный лагранжиан с некоторым набором весовых коэффициентов порождает свою систему глобальных экстремалей:

$$\alpha \left[-G'\left(\frac{u_x}{h}\right) + G'\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right) \right] + \beta h_+ + (1 - \beta)h_- = 0 \quad (26)$$

$$\alpha \left[\frac{u_x}{h} G'\left(\frac{u_x}{h}\right) - \frac{u_{\bar{x}}}{h} G'\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right) - G\left(\frac{u_x}{h}\right) + G\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right) \right] - \beta(u - u_-) - (1 - \beta)(u_+ - u) = 0 \quad (27)$$

Рассмотрим один такой лагранжиан с $\alpha_3 = 1$ и $\beta_3 = 0.5$ как базисный, а остальные, - как его возмущения. Каждый лагранжиан в семействе допускает $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ и дивергентно инвариантен по отношению к $X_2 = \frac{\partial}{\partial u}$. Это порождает первые интегралы для глобальных квазиэкстремалей (26),(27):

$$\alpha \left[-u_x \frac{G'(u_x)}{h} + \frac{G(u_x)}{h} \right] + u + (1 - \beta)h_+ \frac{u_x}{h} = A \quad (28)$$

$$\alpha \frac{G'(u_x)}{h} - x - \beta h_+ = B. \quad (29)$$

Выберем три различных набора (α_i, β_i) , которые дадут шесть первых интегралов для шести глобальных экстремальных уравнений. Покажем, что путем выбора констант α_i и β_i и выбора некоторых констант дополнительных интегралов A_i и B_i мы сможем получить совместную систему разностных уравнений и сетки, которая к тому же будет иметь общее решение благодаря наличию достаточного количества первых интегралов.

Возьмем одно уравнение в форме (28) и два уравнения в форме (29). Выберем соответствующие константы $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 0.5$ и $B_2 = B_3 = B$. Рассмотрим разницу двух уравнений с одной и той же константой B как уравнение сетки. В итоге получим

$$\alpha_1 \left[-\frac{u_x}{h} G'(u_x) + \frac{G(u_x)}{h} \right] + u + (1 - \beta_1)h_+ \frac{u_x}{h} = A, \quad (30)$$

$$\frac{G'(u_x)}{h} - x - \frac{1}{2}h_+ = B, \quad (31)$$

$$(1 - \alpha_2)G'(u_x) - \left(\frac{1}{2} - \beta_2 \right) h_+ = 0. \quad (32)$$

Из уравнения (31) и (32) имеем

$$G'(u_x) = \frac{x_+ + x + 2B}{2}, \quad (33)$$

$$x_+ - (1 + \varepsilon)x - \varepsilon B = 0, \quad (34)$$

где мы ввели малый параметр

$$\varepsilon = \frac{2(1 - \alpha_2)}{\alpha_2 - 2\beta_2}. \quad (35)$$

Заметим, что континуальному пределу соответствует $\varepsilon \rightarrow 0$.

Общее решение линейного разностного уравнения (34) легко находится (см., например, [20]):

$$x_n = (x_0 + B)(1 + \varepsilon)^n - B \quad (36)$$

и зависит от константы интегрирования x_0 . Это решение дает разностную сетку, соответствующую $h_- > 0$ и $h_+ > 0$ для $x_0 > -B$ если $\varepsilon > 0$, и для $x_0 < -B$, если $\varepsilon < 0$. Для остальных случаев: $x_0 < -B$, если $\varepsilon > 0$, и для $x_0 > -B$, если $\varepsilon < 0$, формула (36) дает сетку с обратным порядком нумерации точек сетки: $h_- < 0$ и $h_+ < 0$.

С помощью (36),(33), выразим u_x через x :

$$G'_h(u_x) = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (B + x). \quad (37)$$

Обозначим через H функцию, обратную $G'(u_x)$:

$$u_x = H \left[\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (B + x) \right]. \quad (38)$$

Теперь, используя (30) и (38), выпишем общее решение системы (30), (31) и (32) в виде

$$u(x) = A - \alpha_1 G(H) + (x + B)H, \quad (39)$$

где

$$\alpha_1 \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - (1 - \beta_1)\varepsilon = 1. \quad (40)$$

Величина α_1 , фигурирующая в решении (39), должна быть выбрана из требования совместности разностной системы. Именно, x_n и u_n в уравнениях (36) и (39) должны удовлетворять системе (30), (31) и (32). Мы должны потребовать, чтобы u_x в (38) и $u_x = (u_{n+1} - u_n)/(x_{n+1} - x_n)$ совпали. Из этого требования следует, что α_1 должна удовлетворять соотношению

$$\alpha_1 = (1 + \varepsilon)^{n+1} (x_0 + B) \frac{H_{n+1} - H_n}{G(H_{n+1}) - G(H_n)}. \quad (41)$$

Это соотношение, в свою очередь, справедливо если только его правая часть постоянна, то есть не зависит от n . Константы α_i и β_i могут зависеть от ε , и при $\varepsilon \rightarrow 0$ должно быть справедливо: $\alpha_1, \alpha_2 \rightarrow 1$; $\beta_1, \beta_2 \rightarrow 0.5$.

Из уравнения (32) следует, что

$$\frac{h_+}{G'_h(u_x)} = \frac{2(1 - \alpha_2)}{1 - 2\beta_2} \quad (42)$$

Это выражение должно стремиться к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого мы положим

$$\alpha_2 = 1 + \varepsilon^2, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} + \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (43)$$

Уравнение (35) удовлетворено, и мы имеем

$$\frac{h_+}{G'(u_x)_h} = \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 2}. \quad (44)$$

Можно рассматривать (36) и (39) как общее решение следующей трехточечной схемы:

$$\begin{aligned} G'(u_x)_h - G'(u_{\bar{x}})_h - \frac{x_+ - x_-}{2} &= 0, \\ \frac{h_+}{G'(u_x)_h} &= \frac{h_-}{G'(u_{\bar{x}})_h}. \end{aligned} \quad (45)$$

Строго говоря, эта полученная нами система не является системой уравнений глобальных экстремалей, поскольку она не была получена вариацией одного лагранжиана. Константы A , B и ε выбраны из выражений интегралов (30), (31) и (44), которые соответствуют трем разным инвариантным лагранжианам. Система (45) инвариантна относительно группы с операторами (24), поскольку получена из инвариантных лагранжианов.

Итак, ОДУ (25) может быть аппроксимировано разностной системой (45). Если α_1 в (41) постоянна, тогда общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} x_n &= (x_0 + B)(1 + \varepsilon)^n - B, \\ u(x_n) &= A - \alpha_1 G(H_n) + (x_n + B)H_n, \end{aligned} \quad (46)$$

где A , B , ε и x_0 ,- произвольные постоянные.

Мы не доказали, что уравнение (41) справедливо для любой функции $G(u_x)$. Однако в нижеследующих примерах это требование будет удовлетворено. В обоих примерах мы будем иметь дело с трехмерной алгеброй операторов симметрии, однако только два из них допускаются вариационным функционалом.

4. Пример 2

Трехмерная алгебра операторов (см. Табл. 1)

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + ky \frac{\partial}{\partial y}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2, \quad (47)$$

зависящая от параметра k , в качестве инвариантного ОДУ второго порядка имеет следующее уравнение

$$y'' = y'^{\frac{k-2}{k-1}}. \quad (48)$$

Это уравнение является уравнением Эйлера для вариационного функционала с такой, например, функцией Лагранжа:

$$L = \frac{(k-1)^2}{k} (y')^{\frac{k}{k-1}} + y.$$

Такой функционал допускает X_1 и X_2 при любом параметре k

$$X_1 L + LD(\xi_1) = 0, \quad X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x),$$

а также оператор X_3 при частном значении $k = -1$.

При произвольном k имеется два первых интеграла

$$J_1 = \frac{(1-k)}{k} (y')^{\frac{k}{k-1}} + y = A^0, \quad J_2 = (k-1)(y')^{\frac{1}{k-1}} - x = B^0.$$

Исключая y' , нетрудно найти общее решение в виде

$$y = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k-1} \right)^{k-1} (x + B^0)^k + A^0. \quad (49)$$

4.1. Приближенная инвариантная разностная модель

Для получения приближенной разностной модели воспользуемся ранее выполненными выкладками. В данном случае

$$G(u_x) = \frac{(k-1)^2}{k} u_x^{\frac{k}{k-1}}, \quad (50)$$

а разностная схема принимает вид:

$$\begin{cases} (k-1) \left(\frac{(u_x)_h^{\frac{1}{k-1}}}{h} - \frac{(u_{\bar{x}})_h^{\frac{1}{k-1}}}{h} \right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{(u_x)_h^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{h_-}{(u_{\bar{x}})_h^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{2\varepsilon(k-1)}{2+\varepsilon}. \end{cases} \quad (51)$$

Здесь малый параметр ε , как и в Примере 1, определяет плотность сетки.

Решение u_n уравнения (46) приобретает конкретный вид

$$u_n = A + \frac{(x+B)^k \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}}{(k-1)^{k-1} (1+\varepsilon)^k - 1}. \quad (52)$$

Полученное разностное решение аппроксимирует решение (49) ОДУ (48) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

4.2. Точная разностная схема

Сравнение общего решения инвариантной схемы с решением исходного ОДУ позволяет найти коэффициент γ небольшого растяжения, преобразующий инвариантную схему в точную:

$$\begin{cases} \gamma(k-1) \left(\frac{(u_x)_h^{\frac{1}{k-1}}}{h} - \frac{(u_{\bar{x}})_h^{\frac{1}{k-1}}}{h} \right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{\gamma (u_x)_h^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{h_-}{\gamma (u_{\bar{x}})_h^{\frac{1}{k-1}}} = \frac{2\varepsilon(k-1)}{2+\varepsilon}, \end{cases} \quad (53)$$

где

$$\gamma = \left[\frac{2\varepsilon k \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)^k}{(2+\varepsilon)((1+\varepsilon)^k - 1)} \right]^{\frac{1}{k-1}}. \quad (54)$$

5. Пример 3

Рассмотрим пример другой трехмерной алгебры:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + (x+y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (55)$$

Соответствующее инвариантное ОДУ имеет вид:

$$y'' = \exp(-y') \quad (56)$$

и может быть получено вариацией функционала с функцией Лагранжа

$$L = \exp(y') + y. \quad (57)$$

Лагранжиан допускает лишь две симметрии

$$X_1 L + LD(\xi_1) = 0; \quad X_2 L + LD(\xi_2) = 1 = D(x); \quad (58)$$

которые дают следующие первые интегралы уравнения (56)

$$\exp(y')(1 - y') + y = A, \quad \exp(y') - x = B. \quad (59)$$

С помощью двух интегралов строится общее решение уравнения (56)

$$y = (x + B)(\ln(x + B) - 1) + A. \quad (60)$$

5.1. Приближенная инвариантная разностная модель

Теперь рассмотрим разностную схему, следуя общим построениям, приведенным ранее. В данном случае имеем

$$G\left(\frac{u_x}{h}\right) = \exp\left(\frac{u_x}{h}\right), \quad (61)$$

а инвариантная схема имеет следующий вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \exp\left(\frac{u_x}{h}\right) - \exp\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{\exp\left(\frac{u_x}{h}\right)} = \frac{h_-}{\exp\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right)} = \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon}. \end{array} \right. \quad (62)$$

Решение $u(x)$ на сетке (46) будет таким

$$u_n = A + (x_n + B) \ln(x_n + B) + (x_n + B) \left[\ln\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \frac{(1 + \varepsilon) \ln(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \right]. \quad (63)$$

Разностное решение (60) совпадает с решением ОДУ (56) с точностью до $O(\varepsilon^2)$.

5.2. Точная разностная схема

Сравнение общего решения инвариантной схемы с решением исходного ОДУ дает возможность найти коэффициент σ небольшого растяжения, преобразующий инвариантную схему в точную:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \left(\exp\left(\frac{u_x}{h}\right) - \exp\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right) \right) = \frac{x_+ - x_-}{2}, \\ \frac{h_+}{\sigma \exp\left(\frac{u_x}{h}\right)} = \frac{h_-}{\sigma \exp\left(\frac{u_{\bar{x}}}{h}\right)} = \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon}. \end{array} \right. \quad (64)$$

где

$$\sigma = \frac{\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \exp(1)}{(1 + \varepsilon)^{1 + \frac{1}{\varepsilon}}}. \quad (65)$$

6. Пример 4

Рассмотрим теперь новый пример ОДУ, допускающего трехмерную группу преобразований. Обыкновенное дифференциальное уравнение

$$y'' + 2 \frac{y' + Cy' \sqrt{y'} + y'^2}{x - y} = 0, \quad C = \text{const}, \quad (66)$$

допускает трехмерную алгебру операторов

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}; \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}; \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y^2 \frac{\partial}{\partial y}; \quad (67)$$

и является уравнением Эйлера для следующей функции Лагранжа:

$$L = \frac{2\sqrt{y'} + C}{x - y}. \quad (68)$$

Лагранжиан (68) допускает все три вариационные симметрии, последняя из которых — дивергентная:

$$X_3 L + LD(\xi_3) = C = D(Cx). \quad (69)$$

С помощью тождества Нётер получаются следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{y'+1}{\sqrt{y'}} + C \right) = A^0, & J_2 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{xy'+y}{\sqrt{y'}} + Cx \right) = B^0, \\ J_3 &= \frac{1}{x-y} \left(\frac{x^2y'+y^2}{\sqrt{y'}} + Cxy \right) = C^0. \end{aligned}$$

Эти интегралы функционально зависимы и связаны соотношением

$$(J_2)^2 - CJ_2 + 1 = J_1J_3. \quad (70)$$

Исключив y' из интегралов J_1 и J_2 , получим общее решение уравнения (66):

$$y = \frac{1}{A^0(B^0 - A^0x)} + \frac{B^0 - C}{A^0}. \quad (71)$$

6.1. Приближенная инвариантная разностная модель

Поиск инвариантного лагранжиана для этого примера представляет собой непростую задачу. Эта задача была решена в работе [20] (там же имеются подробности построения точной схемы). Подходящий Лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} \sqrt{\frac{u_x}{h}} + \frac{C}{h_+} \ln \left(\frac{x_+ - u}{x - u} \right)$$

Разностный аналог теоремы Нётер гарантирует существование следующих интегралов на глобальной экстремали:

$$J_1 = \frac{\frac{u_x + 1}{h}}{\sqrt{\frac{u_x}{h}(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C}{x_+ - u} = A, \quad (72)$$

$$J_2 = \frac{\frac{u_x x_+ + u}{h}}{\sqrt{\frac{u_x}{h}(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{Cx_+}{x_+ - u} = B, \quad (73)$$

$$J_3 = \frac{\frac{xx_+ u_x + uu_+}{h}}{\sqrt{\frac{u_x}{h}(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{Cx_+ u}{x_+ - u}. \quad (74)$$

Функциональная зависимость (70) в разностном случае уже не имеет места:

$$(J_2)^2 - CJ_2 - J_1J_3 + 1 = \frac{h_+^2 \frac{u_x}{h}}{(x-u)(x_+ - u_+)} + \frac{Ch_+ \sqrt{\frac{u_x}{h}}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}}. \quad (75)$$

Вследствие этого интегралы J_1, J_2 и J_3 порождают новый интеграл

$$\frac{h_+^2 \frac{u_x}{h}}{(x-u)(x_+ - u_+)} + \frac{C h_+ \sqrt{\frac{u_x}{h}}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} = \delta = \text{const}, \quad 0 < \delta \ll 1. \quad (76)$$

Новый интеграл можно существенно упростить:

$$\frac{h_+^2 \frac{u_x}{h}}{(x-u_+)(x_+ - u)} = \frac{h_-^2 \frac{u_{\bar{x}}}{h}}{(x-u_-)(x_- - u)} = \varepsilon, \quad (77)$$

где

$$\varepsilon = \frac{2\delta - C(\text{sgn } C \sqrt{C^2 + 4\delta} - C)}{2(1-\delta) + C(\text{sgn } C \sqrt{C^2 + 4\delta} - C)}, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (78)$$

Уравнение (77) может быть использовано в качестве сетки с плотностью ε . Таким образом, инвариантная разностная схема имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_- \left(\frac{\sqrt{\frac{u_{\bar{x}}}{h}}}{\sqrt{(x-u_-)(x_- - u)}} - \frac{(x_+ - u)}{(x_- - u)} \frac{\sqrt{\frac{u_x}{h}}}{\sqrt{(x-u_+)(x_+ - u)}} \right) = \frac{h_-^2 \frac{u_{\bar{x}}}{h} C \sqrt{1+\varepsilon}}{(x-u_-)(x_- - u)}, \\ \frac{h_+^2 \frac{u_x}{h}}{(x-u_+)(x_+ - u)} = \frac{h_-^2 \frac{u_{\bar{x}}}{h}}{(x-u_-)(x_- - u)} = \varepsilon. \end{array} \right. \quad (79)$$

Используя первые интегралы и сетку, можно получить общее решение:

$$u_n = \frac{\frac{1}{1+\varepsilon} - C \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}}{A(B - A x_n)} + \frac{B - C}{A}. \quad (80)$$

$$x_n = \frac{\left(B - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \right) x_{n-1} + \frac{B}{A} (C - B) - \frac{\varepsilon}{A} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} - C \right)}{A x_{n-1} - \left(B - C + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \right)}. \quad (81)$$

Уравнение (80) сходится к решению (71) с первым порядком точности по ε , т.е. второму порядку по h_+ . Уравнение (81) может быть решено (см. [20]).

6.2. Точная разностная схема

С целью нахождения точной схемы добавим параметр θ в Лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{2\theta \sqrt{\frac{u_x}{h}}}{\sqrt{(x-u)(x_+ - u_+)}} + \frac{C}{h_+} \ln \left(\frac{x_+ - u}{x - u} \right). \quad (82)$$

Повторяя выкладки, проделанные при поиске приближенной инвариантной схемы, получим аналогичные (80), (81) выражения для u_n, x_n :

$$u_n = \frac{\frac{\theta^2}{1+\varepsilon} - C \frac{\theta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1+\varepsilon}}}{A(B - Ax_n)} + \frac{B - C}{A}. \quad (83)$$

$$x_n = \frac{\left(B - \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}}\right) x_{n-1} + \frac{B}{A} (C - B) - \frac{\varepsilon}{A} \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} \left(\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}} - C\right)}{Ax_{n-1} - \left(B - C + \frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon(\varepsilon+1)}}\right)}. \quad (84)$$

Сравнивая (83) с общим решением (71) исходного ОДУ, приходим к условию точности

$$\theta = \frac{\sqrt{1+\varepsilon}}{2} \left(C\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon C^2 + 4}\right). \quad (85)$$

Подставив θ в инвариантную схему, получим окончательно

$$\begin{cases} h_- \left(\frac{\sqrt{\frac{u_{\bar{x}}}{h}}}{\sqrt{(x-u_-)(x-u)}} - \frac{(x_+-u)}{(x-u)} \frac{\sqrt{\frac{u_x}{h}}}{\sqrt{(x-u_+)(x_+u)}} \right) = \frac{2C}{C\sqrt{\varepsilon} \pm \sqrt{\varepsilon C^2 + 4}} \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x-u)}, \\ \frac{h_+^2 u_x}{(x-u_+)(x_+u)} = \frac{h_-^2 u_{\bar{x}}}{(x-u_-)(x-u)} = \varepsilon. \end{cases} \quad (86)$$

Выражения (83), (84) для точной схемы принимают вид:

$$u_n = \frac{1}{A(B - Ax_n)} + \frac{B - C}{A}, \quad x_n = \frac{\left(B + \frac{\sqrt{\varepsilon C^2 + 4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2}\right) x_{n-1} + \frac{B(C-B)-1}{A}}{Ax_{n-1} - \left(B - \frac{\sqrt{\varepsilon C^2 + 4}}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{C}{2}\right)}. \quad (87)$$

Последнее уравнение решено в [20]. Процедура получения решения и само решение достаточно громоздки и здесь не приводятся.

7. Численная реализация инвариантных схем

7.1. Пример 1

Общее решение уравнения

$$u'' = \frac{1}{u^3}. \quad (88)$$

имеет вид:

$$(u(x))^2 = \frac{(Ax + B)^2}{A} + \frac{1}{A}, \quad (89)$$

где A, B — константы интегрирования, и константа A определяется из первого интеграла

$$u'^2 + \frac{1}{u^2} = A. \quad (90)$$

Несложно убедиться, что могут быть взяты любые начальные данные со значениями, лежащими в вещественной области.

Выберем следующие начальные данные:

$$x_0 = -1, \quad u(x_0) = 2 \quad u'(x_0) = -\tan(\pi/6), \quad h_0 = 0.3, \quad (91)$$

где h_0 — начальный шаг сетки.

Для этих начальных данных решение задачи Коши имеет вид:

$$u(x) = 0.0046327359 \sqrt{27179.51543 x^2 - 53243.9443 x + 105950.3603}. \quad (92)$$

Построим график для точной схемы

$$\frac{\frac{u_x - u_{\bar{x}}}{h}}{h^-} = \frac{\varepsilon^2}{2(1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}) u^2 u^-}, \quad (93)$$

$$\frac{h^+}{uu^+} = \frac{h^-}{uu^-} = \varepsilon, \quad (94)$$

где ε — параметр, характеризующий плотность сетки.

Исключая из (94) шаги h^+, h^- и подставляя их в (93), получим:

$$u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{2 u_n \sqrt{1 - \varepsilon^2} - u_{n+1}}, \quad x_{n+1} = x_n + \varepsilon u_n u_{n+1}. \quad (95)$$

Для построения графика нужно задать начальные значения x_0, u_0, u_1 и параметр ε . Значения u_0 и x_0 возьмем такими же, как и для Рунге-Кутты, а значение u_1 можно непосредственно вычислить, используя решение (92) и шаг h_0 :

$$u_1 = u(x_0 + h_0) \doteq 1.83294290. \quad (96)$$

Параметр ε зависит от выбранного значения h_0 . Как видно из (95),

$$\varepsilon = \frac{h_0}{u_0 u_1} \doteq 0.08183561. \quad (97)$$

Ниже приведены Таблицы 2 и 3 для ряда значений функции и соответствующий им график, на котором отмечены эти и другие значения.

7.2. Пример 2

Общее решение уравнения

$$u'' = (u')^{\frac{k-2}{k-1}}, \quad k \neq 0, \frac{1}{2}, 1, 2 \quad (98)$$

имеет вид

$$u(x) = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k-1} \right)^{k-1} (x+B)^k + A, \quad (99)$$

где A, B — константы интегрирования, и константа B соответствует первому интегралу:

$$(k-1)(u')^{\frac{1}{k-1}} - x = B. \quad (100)$$

Как видно из общего решения, для того, чтобы $u(x)$ имело ограниченное значение при отрицательных k , должно быть $x \neq -B$. Поэтому при выборе начальных данных следует учитывать условие:

$$-(k-1)(u'(x_0))^{\frac{1}{k-1}} + x_0 = -B, \quad (101)$$

$$(1-k)(u'(x_0))^{\frac{1}{k-1}} \neq 0, \quad (102)$$

$$u'(x_0) \neq 0. \quad (103)$$

Это видно и из исходного ОДУ.

Выберем следующие начальные данные:

$$k = -2, \quad x_0 = 0, \quad u(x_0) = 0.1 \quad u'(x_0) = \tan(\pi/12), \quad h_0 = 0.1. \quad (104)$$

Аналогично предыдущему примеру, из точной схемы Примера 2 получаем:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{(x_{n+1} - x_n)^k (k-1)^{1-k} ((1+\varepsilon)^k - 1)}{k \varepsilon^k}, \quad (105)$$

$$x_{n+2} = x_{n+1} + (x_{n+1} - x_n)(1 + \varepsilon). \quad (106)$$

Выбранным начальным данным соответствует решение задачи Коши:

$$u(x) = 13.5 (x - 4.653400554)^{-2} - 0.5234374602. \quad (107)$$

Из начальных данных для задачи Коши и метода Рунге-Кутты получается значение u_1 для точной схемы:

$$u_1 = u(x_1) = u(x_0 + h_0) \doteq 0.1276840704. \quad (108)$$

Параметр ε можно посчитать, используя начальные данные задачи Коши, один из дифференциальных интегралов

$$(k - 1)(y')^{\frac{1}{k-1}} - x = B \quad (109)$$

и условие, связывающее первые шаги сетки и константу интегрирования:

$$x_1 = (x_0 + B)(1 + \varepsilon) - B. \quad (110)$$

В результате получается:

$$\varepsilon = -0.02148966091. \quad (111)$$

Ниже приведены Таблицы 4 и 5 для ряда значений функции и соответствующий им график, на котором отмечены эти и другие значения.

7.3. Пример 3

Уравнение

$$u'' = \exp(-u') \quad (112)$$

имеет общее решение

$$u(x) = (x + B)(\ln(x + B) - 1) + A, \quad (113)$$

где A, B — константы интегрирования.

В отличие от предыдущих примеров, как несложно проверить, ограничений на начальные данные для уравнения (113) нет.

Выберем начальные данные:

$$x_0 = 0, \quad u(x_0) = 0.5 \quad u'(x_0) = \tan(\pi/36), \quad h_0 = 0.1, \quad (114)$$

Аналогично предыдущим примерам, из точной схемы имеем:

$$u_{n+1} = u_n + (x_{n+1} - x_n) \left(\ln \frac{(x_{n+1} - x_n)(1 + \varepsilon)^{1 + \frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon} - 1 \right), \quad (115)$$

$$x_{n+2} = (2 + \varepsilon)x_{n+1} - (1 + \varepsilon)x_n. \quad (116)$$

Выбранным начальным данным соответствует решение задачи Коши:

$$u(x) = (x + 1.091429891) \ln(x + 1.091429891) + 0.4045122575 - x. \quad (117)$$

Из начальных данных для задачи Коши и метода Рунге-Кутты получается значение u_1 для точной схемы:

$$u_1 = u(x_1) = u(x_0 + h_0) \doteq 0.5131961775. \quad (118)$$

Как и в предыдущем примере, параметр ε можно посчитать, используя первый интеграл дифференциального уравнения:

$$\exp(y') - x = B \quad (119)$$

В результате получается:

$$\varepsilon = 0.09162292587. \quad (120)$$

Ниже приведены Таблицы 6 и 7 для ряда значений функции и соответствующий им график, на котором отмечены эти и другие значения.

7.4. Пример 4

Уравнение из Примера 4

$$u'' + 2 \frac{u' + Cu' \sqrt{u'} + u'^2}{x - u} = 0, \quad C = const, \quad (121)$$

имеет общее решение вида

$$u(x) = \frac{1}{A(B - Ax)} + \frac{B - C}{A}, \quad (122)$$

где A, B — константы интегрирования, которые соответствуют первым интегралам:

$$A = \frac{u'C + (u')^{3/2} + \sqrt{u'}}{u'(x - u)}, \quad (123)$$

$$B = \frac{x u'C + x (u')^{3/2} + u \sqrt{u'}}{u'(x - u)}. \quad (124)$$

Из общего решения видно, что условиями ограниченности значения $u(x)$ являются: $A \neq 0$ и $Ax \neq B$. Поэтому при выборе начальных данных следует учитывать ограничения:

$$u'(x_0) C + (u'(x_0))^{3/2} + \sqrt{u'(x_0)} \neq 0, \quad (125)$$

$$\frac{x_0 u'(x_0) C + x_0 (u'(x_0))^{3/2} + u(x_0) \sqrt{u'(x_0)}}{u'(x_0) C + (u'(x_0))^{3/2} + \sqrt{u'(x_0)}} \neq x_0. \quad (126)$$

Второе условие равносильно

$$u(x_0) \neq x_0. \quad (127)$$

Из первого условия следует:

$$u'(x_0) \neq 0, \quad (128)$$

$$u'(x_0) \neq \frac{C}{2} \left(C \pm \sqrt{C^2 - 4} \right) - 1. \quad (129)$$

С учетом приведенных выше ограничений выберем следующие начальные данные:

$$C = 1, \quad x_0 = 0.1, \quad u(x_0) = 1 \quad u'(x_0) = \tan(\pi/4), \quad h_0 = 0.05. \quad (130)$$

Аналогично предыдущим примерам, из точной схемы имеем:

$$u_{n+1} = \frac{(1 + \varepsilon) x_n u_n - x_{n+1} (x_n \varepsilon + u_n)}{x_n + \varepsilon u_n - (1 + \varepsilon) x_{n+1}}, \quad (131)$$

$$x_{n+2} = \frac{\sqrt{\varepsilon} (2 x_{n+1} u_{n+1} - (x_{n+1} + u_{n+1}) x_n) \sqrt{\varepsilon C^2 + 4} + C x_n \varepsilon (u_{n+1} - x_{n+1})}{\sqrt{\varepsilon} (x_{n+1} + u_{n+1} - 2 x_n) \sqrt{\varepsilon C^2 + 4} + C \varepsilon (u_{n+1} - x_{n+1})}. \quad (132)$$

При указанных начальных данных им соответствует решение задачи Коши:

$$u(x) = 0.7 - \frac{0.3}{3.(3) x - 1.(3)} \quad (133)$$

Отсюда получаем данные для точной схемы:

$$u_1 = u(x_0 + h_0) \doteq 1.06, \quad (134)$$

$$\varepsilon = \frac{h_0(u_1 - u_0)}{(x_0 - u_1)(u_0 - x_0 - h_0)} \doteq 0.003676470588 \quad (135)$$

Ниже приведены Таблицы 8 и 9 для ряда значений функции и соответствующий им график, на котором отмечены эти и другие значения.

Таблица 2: Пример 1. Точная схема

x	-0.4446729	-0.2219553	-0.02347626	0.156807	0.3234209	0.4798824	0.6290306	0.7732542	0.9146563	1.055183
$u(x)$	1.702181	1.598845	1.516931	1.45227	1.401915	1.363777	1.336387	1.318748	1.310243	1.310583
Схема	1.702181	1.598845	1.516931	1.45227	1.401915	1.363777	1.336387	1.318748	1.310243	1.310583

Таблица 3: Пример 1. Методы Рунге-Кутты 2-ого (РК2) и 4-ого (РК4) порядков

x	-0.7	-0.4	-0.1	0.2	0.5	0.8	1.1	1.4
$u(x)$	1.832943	1.680583	1.547268	1.438304	1.359558	1.316464	1.312539	1.348124
РК2	1.83242	1.679376	1.545249	1.43548	1.356252	1.313487	1.311158	1.349674
РК4	1.832943	1.680584	1.54727	1.438308	1.359564	1.316471	1.312542	1.348119

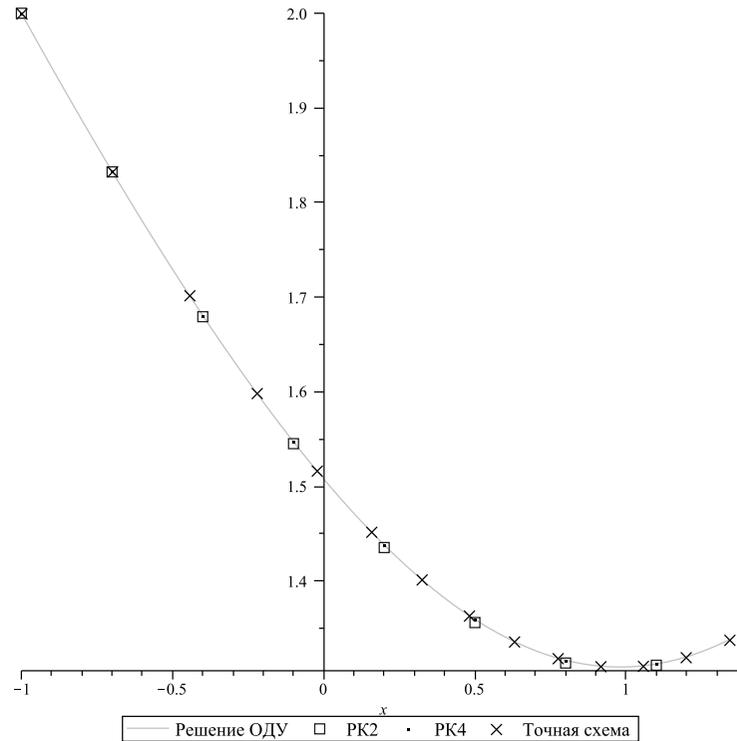


Таблица 4: Пример 2. Точная схема

x	0.197851	0.2935993	0.3872899	0.4789672	0.5686744	0.6564537	0.7423468	0.826394	0.9086351	0.9891088
$u(x)$	0.1565975	0.1867948	0.218333	0.2512717	0.2856731	0.3216021	0.3591265	0.3983172	0.4392482	0.4819968
Схема	0.1565975	0.1867948	0.218333	0.2512717	0.2856731	0.3216021	0.3591265	0.3983172	0.4392482	0.4819968

Таблица 5: Пример 2. Методы Рунге-Кутты 2-ого (РК2) и 4-ого (РК4) порядков

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$u(x)$	0.1276841	0.1572539	0.1888848	0.2227728	0.2591378	0.2982274	0.3403206	0.3857333	0.4348238	0.4880004
РК2	0.1276586	0.1571977	0.1887913	0.2226345	0.2589458	0.2979709	0.3399869	0.385307	0.4342865	0.48733
РК4	0.1276841	0.1572539	0.1888848	0.2227727	0.2591378	0.2982273	0.3403205	0.3857331	0.4348236	0.4880001

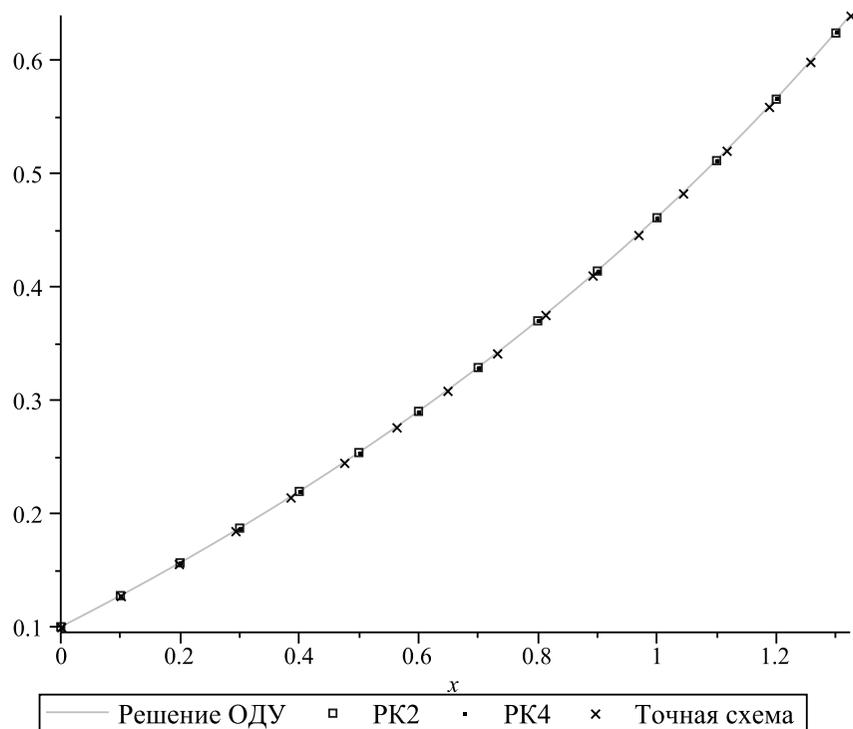


Таблица 6: Пример 3. Точная схема

x	0.2091623	0.3283264	0.4584086	0.6004093	0.7554206	0.9246344	1.109352	1.310994	1.531111	1.771396
$u(x)$	0.5371712	0.5737895	0.6251665	0.6936994	0.7821007	0.8934358	1.031165	1.199191	1.401908	1.644263
Схема	0.5371712	0.5737895	0.6251665	0.6936994	0.7821007	0.8934358	1.031165	1.199191	1.401908	1.644263

Таблица 7: Пример 3. Методы Рунге-Кутты 2-ого (РК2) и 4-ого (РК4) порядков

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$u(x)$	0.5131962	0.5347955	0.564146	0.6006895	0.643943	0.6934843	0.7489412	0.8099831	0.8763146	0.9476696
РК2	0.51333	0.5350282	0.5644511	0.6010471	0.6443375	0.6939035	0.7493755	0.8104247	0.8767572	0.9481083
РК4	0.5131963	0.5347956	0.5641461	0.6006897	0.6439432	0.6934845	0.7489415	0.8099834	0.8763148	0.9476699

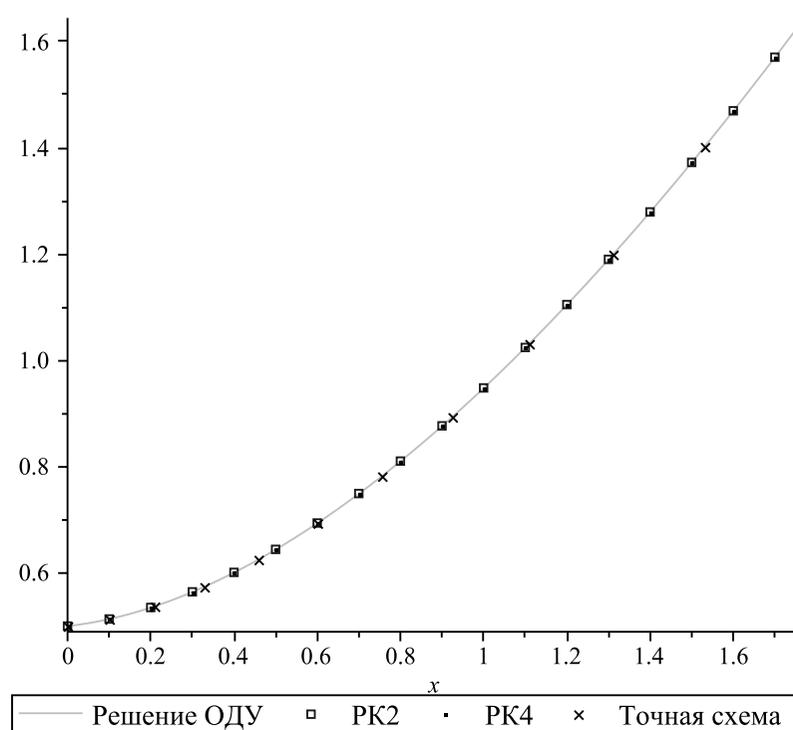
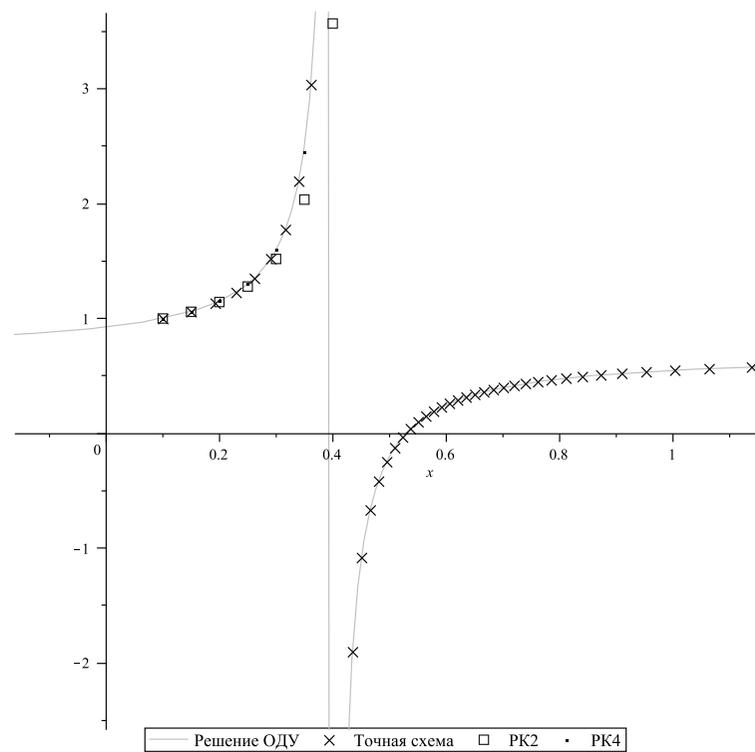


Таблица 8: Пример 4. Точная схема

x	0.1925234	0.2293185	0.2616363	0.290396	0.3162894	0.3398479	0.3614875	0.3815394	0.4002714	0.4179035
$u(x)$	1.133784	1.227298	1.35046	1.521138	1.775132	2.196207	3.036906	5.57526	-330.8683	-4.326955
Схема	1.133784	1.227298	1.35046	1.521138	1.775132	2.196207	3.036906	5.575259	-330.8715	-4.326955

Таблица 9: Пример 4. Методы Рунге-Кутты 2-ого (РК2) и 4-ого (РК4) порядков

x	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4
$u(x)$	1.06	1.15	1.3	1.6	2.5	-inf
РК2	1.058333	1.143506	1.278286	1.518487	2.035068	3.567709
РК4	1.059979	1.149898	1.299514	1.596728	2.447506	9.583446



Заключительные замечания

Итак, в настоящей работе построен новый пример инвариантной разностной модели, завершающий список [11],[12] интегрируемых уравнений с тремя симметриями. Кроме того, показывается, что среди инвариантных разностных схем присутствуют точные схемы, т.е. схемы, общее решение которых совпадает с соответствующим множеством решений дифференциальных уравнений в узлах сетки, плотность которых может быть произвольной. Точные схемы представляют собой дискретное представление ОДУ второго порядка с симметриями. Тем самым показано, что для рассматриваемых задач существует своеобразный математический дуализм: для одного и того же физического процесса (одномерного движения частицы в поле некоторых потенциалов) существует две эквивалентные математических модели, - непрерывная и дискретная; первая описывается непрерывными кривыми, вторая - точками на этих кривых. Полученные разностные (двухточечные) интегралы точных схем справедливы и для решений соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений, связывая две точки любого их решения.

Показано, что вариационные симметрии и первые интегралы играют существенную роль в интегрировании разностных уравнений, более существенную, чем для соответствующих ОДУ, где есть аналитический аппарат интегрирования уравнений, в том числе и нелинейных.

Литература

- [1] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
- [2] Олвер П. Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [3] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.
- [4] Нетер Э. Инвариантные вариационные задачи. Вариационные принципы механики. М.: Физматгиз, 1959.
- [5] Дородницын В.А., Группы преобразований в сеточных пространствах. Современные проблемы матем. Новейшие достижения. т.34.// Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР//, М.: ВИНТИ, 1989.
- [6] Дородницын В.А. Конечно-разностный аналог теоремы Нетер. *Докл. Академии Наук*, 1993, Т. 328, №6, С.678.

- [7] Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P. Lie group classification of second order difference equations.// J. Math.Phys. (2000) **41**(1) , P.480–504.
- [8] Dorodnitsyn V. Noether-type theorems for difference equations. Applied Numerical Mathematics, (2001)**39**, P.307–321.
- [9] Ames W.F., Anderson R.L., Dorodnitsyn V.A., Ferapontov E.V., Gazizov R.K., Ibragimov N.H. and S.R.Svirshchevskii. *CRC Hand-book of Lie Group Analysis of Differential Equations, Volume I: Symmetries, Exact Solutions and Conservation Laws*, CRC Press, 1994.
- [10] Дородницын В.А. Групповые свойства разностных уравнений. М.: Физматлит, 2001.
- [11] Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P. Continuous symmetries of Lagrangians and exact solutions of discrete equations, J. Math.Phys. **45**(1), P.336-359, 2004.
- [12] Dorodnitsyn V., Kozlov R., Winternitz P. Symmetries, Lagrangian formalism and integration of second order ODEs, J. of Nonlinear Math. Phys, v.10, N2, P.41-56, 2003.
- [13] Dorodnitsyn V., Kozlov R. First integrals of difference Hamiltonian equations, J.Phys.A: Math.Theor. 42 (2009).
- [14] Dorodnitsyn V., Kozlov R. Invariance and first integrals of continuous and discrete Hamiltonian equations, Journal of Engineering Math., 2010, Springer, 66, P.253-270.
- [15] Dorodnitsyn V., Kozlov R. Lagrangian and Hamiltonian formalism for discrete equations: symmetries and first integrals. SMS Lecture Notes, Cambridge University Press, P.7-49, 2011.
- [16] Rodrigues M.A. and Winternitz P. Lie symmetries and exact solutions of first-order difference schemes, J.Phys.A:Math.Gen., 37, No 27 (2004), P.6125-6142.
- [17] Kozlov R. Conservative discretizations of the Kepler motion. J. Phys. A, (2007) 40(17),P.4529–4539.
- [18] Dorodnitsyn V. Applications of Lie Groups to Difference Equations, Chapman & Hall/CRC differential and integral equations series, 2011.
- [19] Dorodnitsyn V. On the linearization of second-order differential and difference equations. Sigma, Vol.2 (2006), paper 065, nlin SI/0608038.
- [20] Дородницын В.А., Капцов Е.И. (2013) Дискретизация обыкновенных дифференциальных уравнений, обладающих симметриями. // ЖВ-МиМФ (в печати).

Оглавление

Введение	3
1. Разностные модели ОДУ второго порядка, обладающие симметриями и первыми интегралами	5
2. Пример 1	9
3. Метод возмущения инвариантного лагранжиана	11
4. Пример 2	15
4.1. Приближенная инвариантная разностная модель	15
4.2. Точная разностная схема	16
5. Пример 3	16
5.1. Приближенная инвариантная разностная модель	17
5.2. Точная разностная схема	18
6. Пример 4	18
6.1. Приближенная инвариантная разностная модель	19
6.2. Точная разностная схема	20
7. Численная реализация инвариантных схем	21
7.1. Пример 1	21
7.2. Пример 2	23
7.3. Пример 3	24
7.4. Пример 4	25
Заключительные замечания	31
Литература	31