ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 19 за 2014 г.

Нуман Эльшейх М.Х., Огун Д.О., Орлов Ю.Н., Плешаков Р.В., Сакбаев В.Ж.

Усреднение случайных полугрупп и неоднозначность квантования гамильтоновых систем

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Усреднение случайных полугрупп и неоднозначность квантования гамильтоновых систем / М.Х.Нуман Эльшейх [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 19. 28 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-19

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

Ордена Ленина

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ им. М.В. Келдыша

М.Х. Нуман Эльшейх, Д.О. Огун, Ю.Н. Орлов,
Р.В. Плешаков, В.Ж. Сакбаев

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛУГРУПП И НЕОДНОЗНАЧНОСТЬ КВАНТОВАНИЯ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Москва, 2014

М.Х. Нуман Эльшейх, Д.О. Огун, Ю.Н. Орлов, Р.В. Плешаков, В.Ж. Сакбаев

Усреднение случайных полугрупп и неоднозначность квантования гамильтоновых систем

Изучается процедура усреднения случайных величин, значениями которых являются однопараметрические унитарные полугруппы операторов. Установлено, что хотя средние значения случайных полугрупп и не являются полугруппами, но эквивалентны по Чернову полугруппе, генератор которой является результатом усреднения генераторов значений случайной полугруппы. Исследуется применение усреднения случайных гамильтонианов к проблеме неоднозначности квантования гамильтоновых систем. С помощью исследуемой процедуры усреднения дано описание широкого класса операторов Шредингера на геометрическом графе.

M. H. Numan Elsheikh, J. O. Ogun, Yu. N. Orlov, R. V. Pleshakov, V. Zh. Sakbaev

Averaging of random semigroups and the ambiguity of quantization of Hamiltonian systems

The properties of mean values of random variable with values in the set of semigroups of unitary operators are investigated. The mean value of random semigroup has no semigroup property. But it is equivalent (in Chernoff sense) to the semigroup with generator which is the result of averaging of generators of values of random semigroup. The problem of ambiguity of quantization of Hamiltonian systems is studied by using of semigroup averaging procedure. In particular the wide class of Shchrodinger operators on the graph is described by using of semigroups averaging procedure.

1. Введение. Случайной величиной будем называть измеримое отображение ξ измеримого пространства с мерой $(E, \mathcal{A}, \mu)$ в некоторое банахово пространство либо линейное топологическое пространство Z. Будут рассмотрены случайные полугруппы (пространство Z представляет собой банахово пространство $C_s(R_+, B(X))$ сильно непрерывных отображений полуоси R_+ в банахово пространство линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X, а значениями случайной величины ξ являются однопараметрические полугруппы).

В частности, будет рассмотрен случай, когда алгебра $\mathcal{A}$ является максимальной алгеброй 2^E всех подмножеств пространства E. Если измеримое пространство E является топологическим пространством с хаусдорфовой топологией и $\varepsilon_0 \in E$, то через $W(E, \varepsilon_0)$ обозначим класс всех неотрицательных нормированных конечно аддитивных мер на измеримом пространстве $(E, 2^E)$, сосредоточенных в произвольной проколотой окрестности точки ε_0 в том смысле, что значение меры из класса $W(E, \varepsilon_0)$ на любой проколотой окрестности точки ε_0 равно единице. Подробнее о классе мер $W(E, \varepsilon_0)$ см. [15,18,23]. Будет установлена связь между обобщенными пределами отображения ξ при $\varepsilon \to \varepsilon_0$ и мерами из класса $W(E, \varepsilon_0)$.

Случайные полугруппы возникают в исследовании работы [15] в результате регуляризации – аппроксимации максимального симметрического оператора, не являющегося генератором полугруппы, последовательностями генераторов. Неоднозначность выбора аппроксимаций и отсутствие сходимости последовательности регуляризованных полугрупп приводят в этом случае к необходимости изучения случайных полугрупп.

Источником интереса к случайным полугруппам является неоднозначность выбора классического гамильтониана, описывающего совокупность траекторий в классическом координатном пространстве (см. [7]). Это – еще один аспект неоднозначности квантования, в дополнение к проблеме упорядочения некоммутирующих операторов [11].

Укажем на применения случайных полугрупп к проблемам квантования. Классическим гамильтонианом будем называть непрерывно диффенцируемую функцию H на фазовом пространстве $Q \times P$ классической системы. Классический гамильтониан будем называть невырожденным, если функция H дважды непрерывно дифференцируема и ее гессиан равномерно отделен от нуля.

Будем говорить, что два классических гамильтониана эквивалентны, если множества соответствующих этим гамильтонианам траекторий в координатном пространстве (то есть проекции траекторий в фазовом пространстве $Q \times P$ на координатное пространство Q) совпадают. В статье [7] показано, что класс эквивалентных невырожденных гамильтонианов достаточно широк, что любые два представителя класса эквивалентных гамильтонианов порождают одинаковые совокупности координатных траекторий, но различные совокупности фазовых траекторий. При этом различные эквивалентные гамильтонианы порождают различные квантовые динамические полугруппы – различные группы унитарных преобразований гильбертова пространства $\mathcal{H} = L_2(Q)$.

Тогда квантование классических систем как отображение множества классических гамильтонианов в множество квантовых гамильтонианов (самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $L_2(Q)$) и, далее, в множество унитарных групп, генерируемых квантовыми гамильтонианами, является случайной полугруппой при условии, что множество K эквивалентных классических гамильтонианов с алгеброй всех подмножеств 2^K снабжено некоторой неотрицательной нормированной мерой, а линейное пространство Z слабо (сильно) непрерывных отображений полуоси $R_+ = [0, +\infty)$ в банахово пространство ограниченных линейных преобразований пространства $L_2(Q)$, в котором лежат все унитарные полугруппы, снабжено топологией слабой (сильной) непрерывности отображений полуоси R^+ в банахово пространство $B(\mathcal{H})$ (см. ниже).

Основные цели работы заключаются в применении понятия случайной полугруппы для описания динамики сложных систем, гамильтониан которых имеет особенности или определен неоднозначно. При этом неоднозначность динамики рассматриваемой системы изучается как проявление системой кватновых свойств, а вероятностные характеристики неоднозначной динамики представляют собой аппарат для описания этих свойств. Устанавливается эквивалентность в определенном смысле математического ожидания случайной полугруппы и полугруппы, порождаемой усредненным гамильтонианом. Последнее означает возможность введения нового определения для суммирования и интегрирования неограниченных операторов – подобно тому, как в теории квадратичных форм для определения суммы операторов исследуется сумма квадратичных форм, в предлагаемом подходе для определения выпуклой оболочки самосопряженных операторов рассматривается выпуклая оболочка генерируемых ими полугрупп.

2. Случайные полугруппы, ассоциированные с задачей Коши. Рассмотрим случайную величину, определенную на измеримом пространстве $(E, 2^E, \mu)$ с мерой $\mu \in W(E)$, принимающую значения в пространстве $Z = C_w(R_+, B(X))$ сильно непрерывных отображений полуоси R_+ в банахово пространство B линейных ограниченных преобразований банахова пространства X (имеющего предсопряженное пространство X_*), то есть случайный процесс со значениями в $B(X)$.

В качестве множества E можно выбрать множество всех генераторов сильно непрерывных полугрупп $G(X)$, действующих в пространстве X, снабженное топологией τ сильной (или слабой) граф-сходимости. Пусть $\varepsilon_0 \in G(X)$ – некоторая предельная точка множества $G(X)$ в топологии τ. Через $W(E)$ обозначим множество всех мер $\mu \in ba(E, 2^E)$ (то есть элементов банахова пространства конечно-аддитивных мер с ограниченной вариацией, определенных на алгебре 2^E), которые неотрицательны, нормированы на единицу и сосредоточены в произвольной проколотой окрестности точки ε_0 множества E.

На пространстве Z определим семейство функционалов, действующих на произвольный элемент $z \in Z$ по правилу $\varphi_{t,A,g}(z) = \langle z(t)A, g\rangle,\ t \in R_+, A \in X, g \in X_*$. Рассмотрим на пространстве Z топологию τ_m, порожденную семейством функционалов $\varphi_{t,A,g},\ t \in R_+, A \in X, g \in X_*$. Тогда пространство Z, снабженное структурой алгебры борелевских подмножеств, является измеримым пространством, а отображение $\xi :\ E \to Z$ является случайной величиной.

Математическим ожиданием случайной величины ξ как отображения пространства с мерой $(E, 2^E, \mu)$ в топологическое пространство Z будем называть интеграл Петтиса

$$M\xi = \int\limits_E \xi_\varepsilon d\mu(\varepsilon).$$

Это означает, что $M\xi$ – такой элемент пространства Z, что для любых $t \in R_+, A \in X, g \in X_*$ выполняется равенство

$$\langle M\xi(t)A, g\rangle = \int\limits_E \langle \xi_\varepsilon(t)A, g\rangle d\mu(\varepsilon). \qquad (1)$$

Поскольку последний интеграл – интеграл Радона от числовой функции по конечно-аддитивной мере, то он корректно определен, а равенство (1) при каждом $t \in R_+$ определяет линейное ограниченное преобразование $M\xi(t) \in B(X)$.

Теорема 1. (Условия существования математического ожидания в пространстве Z.) *Если существует такое плотное в пространстве X множество D, что для каждого $A \in D$ семейство отображений $\xi_\varepsilon(t)A \in C(R_+, X)$, $\varepsilon \in E$ является слабо (сильно) равномерно липшицевым и семейство отображений ξ является равномерно ограниченным, то $M\xi(t) \in C_w(R_+, B(X))$.*

Доказательство. Слабая равномерная липшицевость означает, что для любых $A \in X$ и $g \in X_*$ существует такая константа $L > 0$, что $\sup\limits_{t\in R_+, \varepsilon\in E} |\langle \xi_\varepsilon(t+\Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A, g\rangle| \leq L|\Delta t|$. А сильная – что для любого $A \in X$ существует такая константа $L > 0$, что $\sup\limits_{t\in R_+, \varepsilon\in E} |\|\xi_\varepsilon(t+\Delta t)A - \xi_\varepsilon(t)A\|_X \leq L|\Delta t|$. Равномерная ограниченность случайной полугруппы ξ означает, что $\sup\limits_{\varepsilon\in E,\, t\in R_+} \|\xi_\varepsilon(t)\|_{B(X)} \leq C$ при некотором $C > 0$.

Потому в силу условия равномерной ограниченности при каждом $t \geq 0$ и для любых $A \in X$ и $g \in X_*$ функция $\langle \xi_\varepsilon(t)A, g\rangle$ ограничена на множестве E и, следовательно, интегрируема по мере μ в смысле Радона (см. [15]), а интеграл (1) как функция аргумента g является линейным непрерывным функционалом на пространстве X_*. Следовательно, для любого $A \in X$ определен интеграл Петтиса $\int\limits_{G(X)} \xi_\varepsilon A d\mu(\varepsilon) \in X$, причем отображение $A \to \int\limits_{G(X)} \xi_\varepsilon A d\mu(\varepsilon)$ линейно по A в силу линейности интеграла Петтиса и непрерывно в силу равномерной ограниченности отображения ξ. Поэтому при каждом $t > 0$ определено среднее значение $M\xi(t) = \int\limits_{G(X)} \xi_\varepsilon(t) d\mu(\varepsilon) \in B(X)$. Зависимость от переменной $t \in R_+$ значения $M\xi(t)$ является слабо (сильно) непрерывной и даже слабо (сильно) липшицевой, так как неравенство из условия слабой липшицевости отображения ξ сохраняется при интегрировании.

Согласно теореме 9.2.1 монографии Т. Като (см. [8]) о возмущении генератора сильно непрерывной полугруппы ограниченным по норме оператором справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. (Непрерывная зависимость математического ожидания.) Если при каждом $\varepsilon \in E$ оператор $\mathbf{L}_\varepsilon \in G(X)$ является генератором сжимающей полугруппы в пространстве X, то оператор $\mathbf{L}_{\varepsilon,\mathbf{V}} = \mathbf{L}_\varepsilon + \mathbf{V}$, $\mathbf{V} \in B(X)$ также является генератором сильно непрерывной полугруппы в пространстве X, причем $\|\exp(\mathbf{L}_{\varepsilon,\mathbf{V}}t)\|_{B(X)} \leq \exp(\|\mathbf{V}\|_{B(X)}t)\, \forall\, t \geq 0$ и для любого $T > 0$ справедлива оценка $\sup\limits_{t\in[0,T]} \|\exp(\mathbf{L}_{\varepsilon,\mathbf{V}'}t) - \exp(\mathbf{L}_{\varepsilon,\mathbf{V}''}t)\|_{B(X)} \leq C(T, \|\mathbf{V}'\|_{B(H)})\|\mathbf{V}' - \mathbf{V}''\|_{B(X)}$.

В работах [10, 15] исследована процедура усреднения семейства полугрупп, генераторы которых являются аппроксимациями максимального симметрического оператора в топологии слабой граф-сходимости. Такие аппроксимации как раз и являются определенными выше случайными полугруппами, причем мера на измеримом пространстве $(G(X), 2^{G(X)})$ сосредоточена в произвольной окрестности предельной точки $G(X)$ – максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$, не являющегося генератором полугруппы. На основании теоремы 22.6 статьи [15] справедливо утверждение:

Теорема 2. (Связь усреднения с предельным переходом и сохранение полугруппового свойства при усреднении.) Пусть $S \subset E$ и $s_0 \in E$ – предельная точка множества S. Пусть на множестве S определено однозначное отображение ξ, сопоставляющее каждому элементу $s \in S$ полугруппу $\mathbf{U}_s \in C_w(R_+, B(X))$.

I) Если отображение $\xi: S \to C_w(R_+, B(X))$ имеет предел ξ_0 в точке s_0, то для любой меры класса $W(S, s_0)$ математическое ожидание случайной величины $\xi: (S, 2^S, \mu) \to C_w(R_+, B(X))$ совпадает с пределом ξ_0.

II) Если множество значений отображения $\xi: S \to C_w(R_+, B(X))$ предкомпактно, то для любой меры μ класса W_0 математическое ожидание случайной величины $\xi: (S, 2^S, \mu) \to C_w(R_+, B(X))$ является пределом по ультрафильтру $F_\mu = \mu^{-1}(1)$ отображения ξ в точке s_0. И наоборот, для любой предельной точки $\xi_0 \in C_w(R_+, B(X))$ множества Ξ найдется такая мера $\mu_0 \in W_0$, что ξ_0 является математическим ожиданием случайной величины $\xi: (S, 2^S, \mu_0) \to C_w(R_+, B(X))$.

Таким образом, при выполнении условий теоремы математическое ожидание процесса ξ также является элементом пространства $C_w(R_+, B(X))$, который будем называть усредненным семейством преобразований пространства X.

Замечание 1. Математическое ожидание случайной полугруппы может не быть полугруппой (см. [26]), ибо в примере из этой работы математическое ожидание является однопараметрическим семейством преобразований, описываемых предельным интегродифференциальным уравнением, решения $u(t)$, $t \geq t_0$, которого не обладают свойством инвариантности относительно выбора начального момента времени задачи Коши.

Явным примером нарушения полугруппового свойства при усреднении полугрупп является следующее элементарное наблюдение. Числовые функции e^{it}, $t \geq 0$ и e^{-it}, $t \geq 0$, представляют собой унитарные сильно непрерывные полугруппы преобразований одномерного банахова пространства $X = R$, но их полусумма $\frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}) = \cos(t)$ не является полугруппой преобразований пространства X ибо $\cos(t+s) = \cos(t)\cos(s) - \sin(t)\sin(s)$, а полугрупповое равенство $\cos(t+t) = \cos(t)\cos(s)$ не выполняется.

Итак, математическим ожиданием случайной полугруппы может оказаться операторнозначная функция, не являющаяся полугруппой. Однако даже утратившие полугрупповое свойство операторнозначные функции могут нести информацию о некоторой полугруппе, которая однозначно определяется по операторнозначной функции с помощью итерационной процедуры, применяемой при построении Фейнмановских аппроксимаций полугрупп на основании теоремы Чернова (см. [22]). Следуя работе [25], используем следующее определение.

Определение 1. Будем говорить, что операторнозначная функция $\mathbf{F}$, действующая из некоторой замкнутой правой полуокрестности нуля на числовой оси в банахово пространство $B(X)$ ограниченных линейных операторов, действующих в некотором банаховом пространстве X, эквивалентна по Чернову однопараметрической полугруппе $\mathbf{U}(t)$, $t \geq 0$ линейных ограниченных операторов, действующих в X, если для каждого $T > 0$ и каждого $u \in X$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,T]} \|(\mathbf{U}(t) - (\mathbf{F}(\frac{t}{n}))^n)u\|_X = 0$.

Далее будет показано, что операторнозначная функция, являющаяся математическим ожиданием случайной полугруппы, является эквивалентной по Чернову полугруппе, генератор которой является математическим ожиданием случайного гамильтониана.

3. Приложения усредненных семейств преобразований к квантованию классических гамильтоновых систем.

Исследуем математическое ожидание случайной полугруппы, случайность которой возникает за счет неоднозначности выбора классического гамильтониана (см. [7]), соответствующего семейству траекторий классической системы в координатном пространстве.

Пусть $H = H(q,p)$, $(q,p) \in R^{2d}$, – гамильтониан системы классической механики с фазовым пространством $R^{2d} = R^d \times R^d$ со стандартной симплектической формой и координатным пространством $Q = R^d$. Обозначим через Γ_H множество траекторий гамильтоновой системы с гамильтонианом H в координатном пространстве Q.

Классическим гамильтонианом будем называть дважды нерерывно дифференцируемую функцию на фазовом пространстве R^{2d}, строго выпуклую по переменным $p \in R^d$. Следуя определению работы [7] будем говорить, что гамильтонова система на фазовом пространстве R^{2d} с гамильтонианом H' эквивалентна гамильтоновой системе на том же фазовом пространстве с гамильтонианом H, если $\Gamma_{H'} = \Gamma_H$, то есть каждая траектория системы с гамильтонианом H' в пространстве Q является и траекторией системы с гамильтонианом H и наоборот. Траектории различных эквивалентных гамильтоновых систем с общими начальными данными в фазовом пространстве различны, но их проекции на координатное пространство совпадают. Введенное отношение на множестве гамильтонианов на пространстве R^{2d} действительно является отношением эквивалентности. Примерами эквивалентных гамильтонианов могут служить такие гамильтонианы свободного движения, как $H(q,p) = \frac{p^2}{2}$, $\tilde{H}(q,p) = \frac{p^2}{2} + \frac{p^4}{4}$, $H'(q,p) = \sqrt{1+p^2}$ и т.п.

Пусть M – множество классических гамильтонианов, эквивалентных гамильтониану H. Тогда траектории в координатном пространстве Q, соответствующие гамильтонианам из множества M, неразличимы; тогда как траектории в фазовом пространстве различны. Но квантовые полугруппы, порожденные квантовыми гамильтонианами, соответствующими различным эквивалентным классическим гамильтонианам, различны. В этом, как подчеркивают авторы работы [7], состоит причина неоднозначности квантования классических гамильтоновых систем (даже таких, гамильтонианы которых зависят только от одной переменной p).

Случайной полугруппой является отображение множества M эквивалентных классических гамильтонианов, на котором задана некоторая мера ν, в линейное пространство сильно непрерывных полугрупп, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(R^d)$.

Пусть мера ν – вероятностная мера, сосредоточенная на некотором счетном подмножестве $\{A_n\} \subset M$ и $\mathbf{S} = \int\limits_M \mathbf{A} d\nu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}_n \nu_n$, где $\nu_n = \nu(\{\mathbf{A}_n\})$. Исследуем динамические свойства среднего значения случайной полугруппы $e^{-it\mathbf{A}}$, определяемого интегралом (1) по мере ν: $\mathbf{F}(t) = \int\limits_M e^{-it\mathbf{A}} d\nu = \sum\limits_{n \in \mathbf{N}} e^{-it\mathbf{A}_n} \nu_n$, $t \geq 0$. Среднее значение случайной полугруппы может не быть полугруппой. Но, как показывает следующая теорема, среднее значение случайной полугруппы порождает полугруппу, эквивалентную ему по Чернову, генератором которой служит среднее значение гамильтониана.

Теорема 3. *Пусть $\{\mathbf{A}_n\}$ – последовательность самосопряженных опе-*

раторов в гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\nu_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел, сумма ряда из которых равна единице. Пусть существует такое число $m \in \mathbf{N}$ такое, что при всех $n \geq 0$ операторы $\mathbf{A}_n$ ограничены и ряд $\sum\limits_{k=m}^{\infty} \nu_k \|\mathbf{A}_k\|$ сходится. Пусть существует линейное подпространство $D \subset H$, являющееся существенной областью определения каждого из операторов $\mathbf{A}_n$, $n \in \overline{1,m}$ и $\mathbf{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k \mathbf{A}_k$, $n \in \overline{1,m}$.

Тогда среднее значение случайной полугруппы $\mathbf{F}(t) = \int\limits_M e^{-it\mathbf{A}} d\nu = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{A}_n}\nu_n$, $t \geq 0$, эквивалентно по Чернову унитарной группе $\mathbf{U}_G(t) = e^{-it\mathbf{S}}$, $t \in R$, где $\mathbf{S} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_k \mathbf{A}_k$.

Доказательство. Согласно условиям теоремы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu_k \mathbf{A}_k$ сходится в топологии операторной нормы к оператору $\mathbf{S}$ и D является существенной областью определения операторов $S_m = \sum\limits_{k=1}^{m} \nu_k \mathbf{A}_k$ при всех $m \in \mathbf{N}$ и, следовательно, оператора S.

Проверим, что для функции $\mathbf{F}$ выполняются все условия теоремы Чернова.

Так как $e^{-it\mathbf{A}_n}|_{t=0} = \mathbf{I}$ при всех $n \in \mathbf{N}$ и $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}} \nu_k = 1$, то $\mathbf{F}(0) = \mathbf{I}$.

Пусть $u \in H$. В силу сильной непрерывности полугрупп $\mathbf{U}_n(t) = e^{-it\mathbf{A}_n}$, $t \in R$ функции $\mathbf{U}_n(t)u$, $t \in R$, непрерывны при каждом $n \in \mathbf{N}$ и равномерно ограничены постоянной $\|u\|_H$. Так как мера $\mathcal{P}$ имеет ограниченную вариацию, то ряд $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{A}_n} u\nu_n$ сходится равномерно по $t \in R$ по признаку Вейерштрасса к непрерывной функции. Следовательно, оператор-функция $\mathbf{F}(t)$, $t \in R$, сильно непрерывна.

Так как $\|e^{-it\mathbf{A}_n}\|_{B(H)} = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$, то $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(H)} \leq \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \|e^{-it\mathbf{H}_n}\|_{B(H)}\nu_n = \sum\limits_{n\in\mathbf{N}} \nu_n = 1$, то выполняется неравенство $\|\mathbf{F}(t)\|_{B(H)} \leq 1$.

Покажем, что при любом $u \in D$ функция $\mathbf{F}(t)u = \sum\limits_{k\in\mathbf{N}} \nu_k \mathbf{U}_k(t)u$ является непрерывно дифференцируемой на $[0, +\infty)$, и найдем предельное значение производной $\mathbf{F}'(+0)u$.

Пусть $u \in D$, тогда для любого $k \in \mathbf{N}$ функция $v_k(t,u) = e^{-it\mathbf{A}_k}u$, $t \in R$ является непрерывно дифференцируемой. Кроме того, ряд $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}} \nu_k \frac{d}{dt} v_k(t)$ сходится равномерно на $[0,T]$ при любом $t>0$ так как $\sum\limits_{k\in\mathbf{N}}\nu_k\|\frac{d}{dt}v_k(t)\| = \sum\limits_{k\in\mathbf{N}}\nu_k\|\mathbf{A}_k v_k(t)\| = \sum\limits_{k\in\mathbf{N}}\nu_k\|\mathbf{A}_k u\| \leq \sum\limits_{k=1}^{m}\nu_k\|\mathbf{A}_k u\| + \sum\limits_{k=m}^{+\infty}\|\mathbf{A}_k\|\|u\| < +\infty$. Следовательно, при любом $u\in D$ функция $\mathbf{F}(t)u$, $t>0$, непрерывно дифференцируема на промежутке $[0,+\infty)$, причем ее производная имеет предел при $t\to +0$ равный $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}}\nu_n\frac{d}{dt}u_n(+0) = \mathbf{S}u$.

Следовательно, функция $\mathbf{F}(t)$, $t\geq 0$, удовлетворяет всем условиям теоремы Чернова и, следовательно, $\lim\limits_{m\to+\infty}\|(\mathbf{F}(\frac{t}{n})^n - e^{-it\mathbf{S}}]u\|_H = 0$, то есть функция $\mathbf{F}$ эквивалентна по Чернову полугруппе $\mathbf{U}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Общая область определения D операторов $\mathbf{A}_n$ в теореме 3 является существенной областью определения этих операторов, а не просто плотным подмножеством пространства H, ибо по информации на области D восстанавливается однозначно унитарная полугруппа, то есть самосопряженный оператор, а не симмертический оператор, имеющий множество различных самосопряженных расширений.

Замечание 3. Утверждение теоремы представляет интерес и в случае конечного ряда. Оно является аддитивным аналогом теоремы Троттера и обретает следующий вид.

Последнее условие теоремы – существование существенной области определения, общей для членов операторного ряда и его частичных сумм – является достаточно сложным и труднопроверяемым. Следующее утверждение задает условие, достаточное для выполнения этого условия теоремы.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{A}_1,...,\mathbf{A}_m$ – квантовые гамильтонианы и пусть $\sum\limits_{j=1}^{m}p_j = 1$, $p_j>0$. Тогда если квадратичная форма оператора $\mathbf{A}_1$ мажорирует квадратичные формы операторов $\mathbf{A}_k$, $k=2,...,m$ (см. [8]), то область определения $D(\mathbf{A}_1)$ является существенной областью определения остальных операторов и среднего гамильтониана $\bar{\mathbf{A}} = \sum\limits_{j=1}^{m}p_j\mathbf{A}_j$, а среднее значение полугрупп является эквивалентным по Чернову полугруппе, генерируемой средним гамильтонианом.*

Замечание 4. Отказаться от условия неотрицательности чисел μ_n и заменить его на условие даже абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_n$ в рамках предлагаемого нами доказательства не представляется возможным, ибо тогда условие ограниченности нормы оператора $F(t)$ при малых значениях

t может не выполняться. Действительно, существуют неограниченные самосопряженные операторы $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ в гильбертовом пространстве H такие, что если $\mu_1+\mu_2=1$, то для любого $t>0$ и любого $\delta>0$ найдется такой единичный вектор $u\in H$, что выполняется неравенство $\|(\mu_1 e^{-it\mathbf{A}_1}+\mu_2 e^{-it\mathbf{A}_2})u\|_H \geq |\mu_1|+|\mu_2|-\delta$. В качестве операторов $\mathbf{A}_{1,2}$ можно выбрать коммутирующие операторы с ортонормированным базисом из собственных векторов $\{e_k\}$, отвечающих собственным значениям $\{\lambda_k^{(1,2)}\}$ соответственно. Поэтому $(\mu_1 e^{-it\mathbf{A}_1}+\mu_2 e^{-it\mathbf{A}_2})e_k = (\mu_1 e^{-it\lambda_k^{(1)}}+\mu_2 e^{-it\lambda_k^{(2)}})e_k$ и, следовательно, $\|(\mu_1 e^{-it\mathbf{A}_1}+\mu_2 e^{-it\mathbf{A}_2})e_k\|_H = |\mu_1+\mu_2 e^{-it(\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)})}|$. Собственные значения $\{\lambda_k^{(1,2)}\}$ могут быть выбраны так, что множество чисел $\lambda_k^{(2)}-\lambda_k^{(1)},\ k\in\mathbf{N}$, плотно в $\mathbf{R}$. Отсюда следует, что функция $\mathbf{F}(t)=\mu_1 e^{-it\mathbf{A}_1}+\mu_2 e^{-it\mathbf{A}_2}$ не удовлетворяет условию $\|\mathbf{F}(t)\|\leq e^{at}$, $t\in(0,\delta)$ теоремы Чернова.

Примером усреднения семейства полугрупп служит степенная регуляризация порядка q максимального симметрического оператора ([15]). Пусть $\mathbf{L}$ – максимальный симметрический, но не самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Пусть $\{\mathbf{L}_n\}$ – последовательность самосопряженных операторов в пространстве H, обладающая следующими свойствами:

1) линейное многообразие

$$D = D(\mathbf{L}^q)\bigcap_{n\in\mathbf{N}} D(\mathbf{L}_n)$$

плотно в пространстве H;

2) для любого $n\in\mathbf{N}$ существует такой линейный оператор $\mathbf{Q}_n$ из H в H с областью определения $D(\mathbf{Q}_n)=D(\mathbf{L}^{q-1})$, который отображает линейное многообразие $D(\mathbf{L}^q)\subset D(\mathbf{Q}_n)$ в линейное многообразие $D(\mathbf{L}_n)$ и при любом $u\in D(\mathbf{L}^q)$ удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{Q}_n u-u\|_H+\|\mathbf{L}_n\mathbf{Q}_n u-\mathbf{Q}_n\mathbf{L}u\|_H \leq b_n(\|\mathbf{L}^q u\|_H+\|u\|_H),$$

где последовательность $\{b_n\}$ – бесконечно малая.

Такие последовательности $\{\mathbf{L}_n\}$ будем, следуя работе [15], называть степенными регуляризациями симметрического оператора $\mathbf{L}$.

Предложение 2. *Пусть максимальный симметрический оператор* $\mathbf{L}$ *обладает степенной регуляризацией порядка* $q\in\mathbf{N}$. *Пусть на множестве* $\mathbf{N}$ *выбрана некоторая неотрицательная нормированная чисто конечно аддитивная мера* μ. *Тогда если индексы* (n_-,n_+) *оператора* $\mathbf{L}$ *удовлетворяют условию* $n_+=0$, *то последовательность полугрупп* $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t\geq 0$, *сходится в сильной операторной топологии к изометрической полугруппе*

$e^{-it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, *равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство* $e^{-it\mathbf{L}} = \int\limits_{\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n)$, $t \geq 0$. *А если* $n_- = 0$, *то последовательность полугрупп* $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t \geq 0$, *сходится в слабой операторной топологии к сжимающей полугруппе* $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$, *равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство* $e^{-it\mathbf{L}^*} = \int\limits_{\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n)$, $t \geq 0$.

Пример 2. *Последовательность гамильтонианов, сходящаяся в топологии сильной граф-сходимости к предельному гамильтониану.*

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{L}$ – *максимальный симметрический оператор в гильбертовом пространстве* H. *Пусть на множестве* $\mathbf{N}$ *выбрана некоторая неотрицательная нормированная чисто конечно аддитивная мера* μ. *Пусть последовательность самосопряженных операторов* $\{\mathbf{L}_n\}$ *такова, что ее сильный граф-предел* Γ *содержит график* $\Gamma_{\mathbf{L}}$ *оператора* $\mathbf{L}$ *(совпадает с ним). Тогда если индексы* (n_-, n_+) *оператора* $\mathbf{L}$ *удовлетворяют условию* $n_+ = 0$, *то последовательность полугрупп* $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t \geq 0$, *сходится в сильной операторной топологии к изометрической полугруппе* $e^{-it\mathbf{L}}$, $t \geq 0$, *равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство* $e^{-it\mathbf{L}} = \int\limits_{\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n)$, $t \geq 0$. *А если* $n_- = 0$, *то последовательность полугрупп* $e^{-it\mathbf{L}_n}$, $t \geq 0$, *сходится в слабой операторной топологии к сжимающей полугруппе* $e^{-it\mathbf{L}^*}$, $t \geq 0$, *равномерно на каждом отрезке; при этом справедливо равенство* $e^{-it\mathbf{L}^*} = \int\limits_{\mathbf{N}} e^{-it\mathbf{L}_n} d\mu(n)$, $t \geq 0$.

Замечание 5. Если последовательность самосопряженных операторов $\{\mathbf{L}_n\}$ такова, что ее сильный граф-предел Γ содержит график $\Gamma_{\mathbf{L}}$ максимального симметрического оператора $\mathbf{L}$ (совпадает с ним), то это не означает, что общая область определения $D = \bigcap\limits_{n\in\mathbf{N}} D(\mathbf{L}_n)$ плотна в пространстве H, многообразие D может быть даже тривиальным.

Таким образом, средние значения случайных полугрупп могут быть полугруппами. Известны примеры, когда средние значения случайных сильно непрерывных полугрупп не являются полугруппами, но являются сильно непрерывными операторнозначными функциями.

4. Формулы Фейнмана, порождаемые усреднениями полугрупп. В настоящем разделе рассмотрим формулы Фейнмана для оператора Шредингера на графе. Граф Γ с одной вершиной мы определяем как объединение n экземпляров полупрямых $\Gamma_j = [0, +\infty)$, $j = 0, ..., n$, с общим началом Q, называемым вершиной графа. Предполагается, что на Γ задана Борелевская мера, определяемая требованием, чтобы её сужение на каждую полупрямую Γ_j совпадало со стандартной мерой Лебега, тогда $L_2(\Gamma) = \oplus L_2(\Gamma_j)$. Пусть $C_{0,0}^{\infty}(\Gamma)$ – векторное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на Γ с компактными носителями, не содержащими точки Q, и $\mathbf{L}_0 = \oplus \mathbf{L}_0^j$ – линейный оператор, определяемый на $C_0^{\infty}(\Gamma)$, соотношением $\mathbf{L}_0 u = \{\oplus \mathbf{L}_0^j u_j\}$, $\mathbf{L}_0^j u_j = \frac{1}{m_j}\Delta_j u_j + iB_j(x)\frac{\partial u_j}{\partial x} + i\frac{\partial(B_j(x)u_j)}{\partial x} + C_j(x)u_j$. Здесь $\{u_j, j = 1,...,n\}$ – сужения функции u на полупрямые Γ_j. Предполагается, что при всех j числа m_j больше нуля, а функции $B_j(x)$, $C_j(x)$ принадлежат пространству $C^1(\Gamma_j, R)$. Через $b_j = B_j(0)$ обозначим предельное значение вдоль Γ_j функции B в точке Q.

Оператор $\mathbf{L}_0$ с областью определения $D(\mathbf{L}_0) = C_{0,0}^{\infty}(\Gamma) \subset L_2(\Gamma)$, плотно определен и симметричен. Областью определения $D(\mathbf{L}_0^*)$ сопряженного оператора $\mathbf{L}_0^*$ является линейное подпространство $D(\mathbf{L}_0^*) = \oplus_{j=1}^n W_2^2(\Gamma_j)$ $:= W_2^2(\Gamma) \subset H$. Сужения всякой функции $u \in W_2^2(\Gamma)$ на полупрямые Γ_j, $j = 1,...,n$ обладают граничными значениями в вершине, которые обозначим через $u_j(0)$, где символ $u(0)$ означает $u(0) = \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) & \dots & u_n(0) \end{pmatrix}^T \in \mathbb{C}^n$. Это то же верно для первых производных этих сужений, для них используем аналогичные обозначения.

Теорема фон Неймана (см. [8], [14]) предоставляет описание множества самосопряженных расширений симметрического оператора посредством множества изометричных отображений дефектных подпространств симметрического оператора $\mathbf{L}_0$. Нами получено явное описание множества самосопряженных расширений оператора $\mathbf{L}_0$ в терминах условий на линейные подпространства в пространстве граничных значений $G = D(\mathbf{L}_0^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)} = \{(u(0), u'(0))\} = \mathbb{C}^{2n}$.

Теорема 4. Оператор $\mathbf{L}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда его область определения $D(\mathbf{L})$ состоит из функций пространства $W_2^2(\Gamma)$, граничные значения которых удовлетворяют равенству $A_1 u'(0) + A_0 u(0) = 0$, где A_0, A_1 – квадратные матрицы порядка n такие, что ранг матрицы $(A_1|A_0)$ равен n и матрица $A_0 A_1^*$ удовлетворяет равенству $A_0 M^{-1} A_1^* = A_1 M^{-1}(A_0^* + 2i\ \Xi M^{-1}\ A_1^*)$, где через M и Ξ обозначены диагональные матрицы, матричные элементы которых заданы по формуле $\left(\frac{1}{m_i}\delta_{ij}\right)_{n\times n}$, $\left(b_i\delta_{ij}\right)_{n\times n}$ $i, j = 1,...,n$ соответственно.

Доказательство. Пусть $m \neq 0$, $B(x) \neq 0$ и $C(x) \neq 0$. Обозначим

через $\left\{\begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} = \Phi_{2n\times n} h_{n\times 1}\right\}$ множество решений системы линейных уравнений
$$A_1 u'(0) + A_0 u(0) = 0, \tag{2}$$
где $\Phi_{2n\times n}$– фундаментальная матрица и $h_{n\times 1}$ – матрица независимых констант. Подставляя каждое из решений фундаментальной системы уравнения $A_1 u'(0) + A_0 u(0) = 0$, задающие область определения, получим следующую связь фундаментальной матрицы с матрицей системы уравнений (2)
$$\Phi^T \begin{pmatrix} A_0^T \\ A_1^T \end{pmatrix}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{3}$$
Если $u \in D(\mathbf{L})$ и область определения оператора $\mathbf{L}$ задана системой уравнений (2), то для любого $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$ справедливо равенство
$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}_0^* v\big)_H = \Big\langle h, \Phi^T \begin{pmatrix} -2i\Xi & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \begin{pmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{v}'(0) \end{pmatrix}_{2n\times 1} \Big\rangle.$$
Каждый элемент $v \in D(\mathbf{L}^*)$ удовлетворяет условию
$$\big(\mathbf{L}u, v\big)_H - \big(u, \mathbf{L}^* v\big)_H = 0; \tag{4}$$
и, наоборот, любой элемент $v \in D(\mathbf{L}_0^*)$, удовлетворяющий условию (4), входит в область определения оператора $D(\mathbf{L}^*)$.

Пусть $\overline{V} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \\ \bar{v}_1' & \dots & \bar{v}_n' \end{pmatrix}_{2n\times n}$ – базис в линейном подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, тогда каждый столбец матрицы $\overline{V}$ удовлетворяет (4), и, следовательно,
$$\Phi^T \begin{pmatrix} -2i\Xi & M \\ -M & 0 \end{pmatrix}_{2n\times 2n} \overline{V}_{2n\times n} = 0_{n\times n}. \tag{5}$$
Из (3) и (5) следует, что в качестве матрицы V может быть выбрана следующая
$$V = \begin{pmatrix} -M^{-1}A_1^* \\ M^{-1}A_0^* + 2iM^{-1}\Xi M^{-1}A_1^* \end{pmatrix}.$$
Оператор $\mathbf{L}$ самосопряженный тогда и только тогда, когда $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$, поэтому если V – матрица из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L}^*)/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то $D(\mathbf{L}) = D(\mathbf{L}^*)$ тогда и только тогда, когда матрица V является также и матрицей из столбцов базисных векторов в подпространстве $D(\mathbf{L})/\overline{D(\mathbf{L}_0)}$, то есть любой её столбец удовлетворяет системе уравнений (2). А это равносильно системе равенств

$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -M^{-1}A_1^* \\ M^{-1}A_0^* + 2iM^{-1}\Xi M^{-1}A_1^* \end{pmatrix} = 0$, что и доказывает теорему 4.

В частности, если $m=1$, $B(x)=0$ и $C(x)=0$, то оператор $\mathbf{L}$ с областью определения $D(\mathbf{L}) = \{u \in W_2^2(\Gamma) : u'(0) = Au(0)\}$ самосопряжен тогда и только тогда, когда матрица A удовлетворяет равенству $A = A^*$.

Более подробное исследование операторов Шредингера на графах и разветвленных многообразиях проведено в работе [24]. В работе [20] дано описание унитарных групп, порождаемых оператором Шредингера на графе, с помощью формул Фейнмана. Ниже предложен альтернативный подход для построения фейнмановских аппроксимаций унитарных групп, основанный на описанной теоремой 3 процедуре усреднения.

Применим теорему об эквивалентности по Чернову усреднения семейство полугруп и полугруппы с усредненным гамильтонианом к оператору Шредингера $\mathbf{L}$ на графе Γ. Пусть Δ – оператор Лапласа на графе с областью определения $D(\Delta) \subset W_2^2(\Gamma)$, определяемой условиями Кирхгоффа $u_1(+0) = ... = u_n(+0)$; $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x} u_j(+0) = 0$. Тогда оператор Δ самосопряжен и порождает в пространстве H унитарную группу $\mathbf{U}_1(t) = e^{-it\Delta}$, $t \in R$. Пусть ∇_B – оператор в пространстве $L_2(\Gamma) = H$ с областью определения $D(\nabla_B) \subset W_2^1(\Gamma)$, определяемой условиями непрерывности $u_1(+0) = ... = u_n(+0)$. Тогда оператор ∇_B самосопряжен и порождает в пространстве H унитарную группу $\mathbf{U}_2(t) = e^{-it\nabla_B}$, $t \in R$. Пусть $\mathbf{V}$ – ограниченный линейный оператор в пространстве $L_2(\Gamma) = H$ – оператор умножения на непрерывную ограниченную функцию V. Тогда оператор $\mathbf{V}$ самосопряжен и порождает в пространстве H унитарную группу $\mathbf{U}_3(t) = e^{-it\mathbf{V}}$, $t \in R$.

Предложение 4. *Пусть коэффициенты $B(x)$, $x \in \Gamma$, удовлетворяют условию $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j = 0$. Пусть $\mathbf{H}_1 = \Delta$, где Δ – оператор Лапласа на графе Γ; $\mathbf{H}_2 = \nabla_B$ – оператор, заданый на линейном многообразии $D(\nabla_B)$ дифференциальным выражением $i(B\frac{d}{dx}\cdot) + i\frac{d}{dx}(B\cdot)$; и $\mathbf{H}_3 = \mathbf{V}$ – оператор умножения на ограниченную измеримую вещественную функцию V на графе Γ. Пусть $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ и $p_j > 0$ при всех $j = 1, 2, 3$. Тогда операторнозначная функция $\mathbf{F}(t) = p_1 e^{-i\frac{t}{p_1}\mathbf{H}_1} + p_2 e^{-i\frac{t}{p_2}\mathbf{H}_2} + p_3 e^{-i\frac{t}{p_3}\mathbf{H}_3}$ эквивалентна по Чернову полугруппе, генерируемой гамильтонианом $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3$ с областью определения $D(\Delta)$.*

Утверждение предложения 4 следует из теоремы 3.

5. Случайные плотности распределения и случайные меры. Пусть множество E с предельной точкой ε_0 и класс мер $W(E)$ те же, что определены выше во введении (стр. 3) и разделе 2 (стр. 5). Пусть пространство Z представляет собой банахово пространство $L_1(R)$, а отображение $\varphi: \ E \to Z$ каждому $\varepsilon \in E$ сопоставляет плотность распределения f_ε одномерной случайной величины ξ_ε, то есть неотрицательный нормированный элемент банахова пространства Z.

Отображение φ является случайной плотностью распределения, если оно является измеримым отображением пространства с мерой в банахово пространство плотностей распределения $L_1(R)$.

Исследуем сначала модельный случай, когда множество E конечно (состоит из m элементов), а мера μ на множестве E задается набором из m неотрицательных чисел $p_1, ..., p_m$.

Теорема 5. *Пусть $m \in \mathbf{N}$ и m случайных величин имеют плотности распределения $f_1, ..., f_m$ и обладают конечными математическими ожиданиями $M_1, ..., M_m$ и дисперсиями $D_1, ..., D_m$. Пусть на множестве $1, ..., m$ задана вероятностная мера μ, то есть набор чисел $p_1, .., p_m$, таких, что $p_j \geq 0$, $j \in 1, ..., m$, и $p_1 + ... + p_m = 1$. Пусть $D(\langle f \rangle_\mu)$ – дисперсия случайной величины с усредненной плотностью распределения $\langle f \rangle_\mu = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j f_j$, а $\langle D(f_\varepsilon) \rangle_\mu = \sum\limits_{j=1}^{m} p_j D(f_j)$ – усредненная дисперсия. Тогда справедливо неравенство*

$$D(\langle f \rangle_\mu) \geq \langle D(f_\varepsilon) \rangle_\mu.$$

Доказательство. При каждом $k \in \mathbf{N}$ математическое ожидание и дисперсия случайной величины с плотностью распределения f_k определяются равенствами

$$M_k = \int\limits_R x f_k(x) dx$$

$$D_k = \int\limits_R (x - M_k)^2 f_k(x) dx$$

соответственно. В силу линейности операции усреднения плотности математическое ожидание случайной величины с усредненной плотностью распределения $\bar{f}$ равно усредненному математическому ожиданию $\bar{M} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k M_k$.

Дисперсия случайной величины с усредненной плотностью распределения $\bar{f}$ равна $D(\bar{f}) = \int\limits_R (x-\bar{M})^2 \bar{f}(x)dx$, а усредненная дисперсия – $\bar{D} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k D_k$. Следовательно, $D(\bar{f}) = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k \int\limits_R (x-\bar{M})^2 f_k(x)dx$ и $\bar{D} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k \int\limits_R (x-M_k)^2 f_k(x)dx$, поэтому $D(\bar{f}) - \bar{D} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k \int\limits_R [(x-\bar{M})^2 - (x-M_k)^2] f_k(x)dx$. Следовательно, $D(\bar{f}) - \bar{D} = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k [2(M_k - \bar{M}) \int\limits_R x f_k(x)dx + \bar{M}^2 - M_k^2] = \sum\limits_{k=1}^{m} p_k (M_k - \bar{M})^2$. Теорема доказана.

Заметим, что дисперсия случайной величины с усредненной плотностью равна сумме средней дисперсии и дисперсии случайного математического ожидания.

Обозначим через m_L меру Лебега на числовой прямой R, а через $\mathcal{A}_L$ – алгебру измеримых по Лебегу множеств. Пусть $(E, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой. Через $\mathcal{M}_\mu$ обозначим множество таких функций $f \in L_1(R, R_+)$ с единичной L_1-нормой, что функция $x^2 f_\varepsilon(x)$, $(x, \varepsilon) \in R \times E$, измерима относительно алгебры $\mathcal{A}_L \otimes \mathcal{A}$ и интегрируема по мере $\mathrm{m}_L \otimes \mu$ в смысле Радона.

Лемма 1. Пусть $(E, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой. Тогда случайная плотность распределения $\xi : E \to \mathcal{M}_\mu$ имеет математическое ожидание $M\xi = \int\limits_E f_\varepsilon d\mu(\varepsilon) \equiv \langle f \rangle_\mu$, которое также является плотностью распределения с конечной дисперсией.

Утверждение следует из теоремы Фубини (см. [6], теорема 3.11.9). Для этого случая справедливо обобщение теоремы 5.

Теорема 5'. Пусть $(E, \mathcal{A}, \mu)$ – измеримое пространство с мерой, $f : E \to \mathcal{M}_\mu$ – случайная плотность распределения. Тогда при μ-почти всех $\varepsilon \in E$ определена дисперсия $D(f_\varepsilon)$ случайной величины с усредненной плотностью распределения $\langle f \rangle_\mu = M(f)$. Тогда справедливо неравенство

$$D(\langle f \rangle_\mu) \geq \langle D(f_\varepsilon) \rangle_\mu.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 5.

В качестве практического примера применения развиваемой теории рассмотрим нестационарный маркированный случайный процесс. Пусть события наступают в случайные дискретные моменты времени, как это происходит, например, в биржевой торговле. Тогда каждое событие характеризуется двумя значениями – собственно значением случайной величины и моментом времени, когда это событие произошло. Такие процессы называются маркированными, маркировкой в данном случае является момент времени. Потоком событий называется последовательность этих событий во времени. Интенсивность потока – это среднее число событий в единицу времени (например, для биржевого ряда это тик/мин). Практическую важность представляет описание статистик таких процессов в терминах промежутков времени, а также прогнозирование статистик на некоторый горизонт. Проблема состоит в том, что сами статистики вычисляются по тому (случайному) количеству данных, которое попало в определенный временной промежуток, и зависят непосредственно от этого количества, а не от промежутка времени. Ответ же часто требуется дать именно в терминах времени – например, каково ожидаемое среднее значение цены того или иного финансового инструмента, торгуемого на бирже, в следующий час торгов безотносительно того, сколько событий произойдет за этот час. Следовательно, стандартные выборочные статистики, определяемые заданными функциями от значений случайных величин по выборке некоторого фиксированного количества событий, требуется переопределить в терминах промежутков времени.

Предположим, что наблюдаемый процесс ординарный (в каждый момент времени происходит не более одного события), описывается нестационарным распределением Пуассона [28] и события независимы. Таковыми, например, можно считать приросты дистинктивных тиковых цен на бирже. Введем величину $p_k(t, t+\tau)$ как вероятность того, что за промежуток времени $\Delta_t(\tau) = [t, t+\tau]$ произойдет ровно k событий. Тогда интенсивность потока $\mu(t, t+\tau)$ на промежутке $\Delta_t(\tau)$ определяется формулой

$$\mu(t, t+\tau) = \frac{1}{\tau} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t, t+\tau), \tag{6}$$

а вероятность $p_k(t, t+\tau)$ имеет вид

$$p_k(t, t+\tau) = \frac{(\Lambda(t,\tau))^k}{k!}; \quad \Lambda(t,\tau) = \tau\mu(t, t+\tau). \tag{7}$$

Величина $\Lambda(t,\tau)$ называется параметром потока. В стационарном случае $\mu =$ const и $\Lambda(t,\tau) = \mu\tau$ – это среднее число событий за время τ. Следовательно, параметр потока равен среднему числу событий на промежутке $\Delta_t(\tau)$.

На практике величину $\Lambda(t,\tau)$ оценивают непосредственно по наблюдениям. Для определенности будем считать единицу агрегирования минутой.

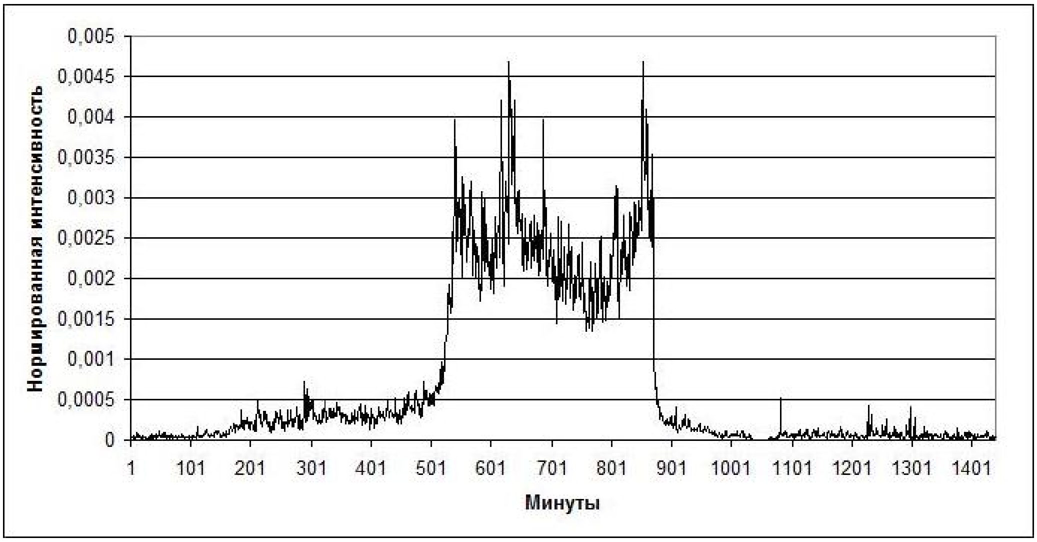

Рис. 1. Средний профиль минутной интенсивности потока $\Lambda(t,1)$ в течение суток

Тогда параметр потока на промежутке времени любой длины в минутных единицах определяется через величину $\Lambda(t,1)$. В условиях естественной суточной периодичности, характерной для многих рядов, связанных с торговыми операциями, оценку параметра потока получают усреднением суточных профилей активности. Пример такого среднего профиля по типовым месячным данным индекса RTS приведен на рис. 1. Среднее число событий, на которое нормирован профиль, равно приблизительно 100 тыс. тиков. Минуты отсчитываются от нуля часов.

Трактуя средний профиль интенсивности как параметр потока, можно построить модель интенсивности событий согласно формулам (6, 7).

Сам тиковый ряд цен также нестационарный. Пример выборочных распределений для ряда двух встык-выборок длины 10 тыс. тиков каждая приведен на рис. 2.Будем обозначать выборочную плотность функции распределения (ВПФР), построенную по выборке заданной длины (т.е. по количеству событий N), через $F_N(x,n)$, а ВПФР, построенную по тому количеству событий, которое произошло за промежуток времени $[t-T,t]$, если это количество событий отлично от нуля, обозначим $F_T(x,t)$. Событием, например, является отдельная торговая сделка на фондовом рынке, x обозначает значение цены.

В данном примере расстояние между распределениями $F_N(x,n)$ и $F_N(x,n+N)$ в норме L1 равно 0,14, тогда как интегральная точность стационарной оценки вероятностей по выборке указанной выше длины равна 0,045, что можно определить по стандартному критерию Стьюдента. Поэтому для стационарного ряда расстояние между распределениями не должно превосходить удвоенную точность оценки вероятностей, т.е. величину 0,09. На этом уровне значимости выборки в примере рис. 2 нестационарны.

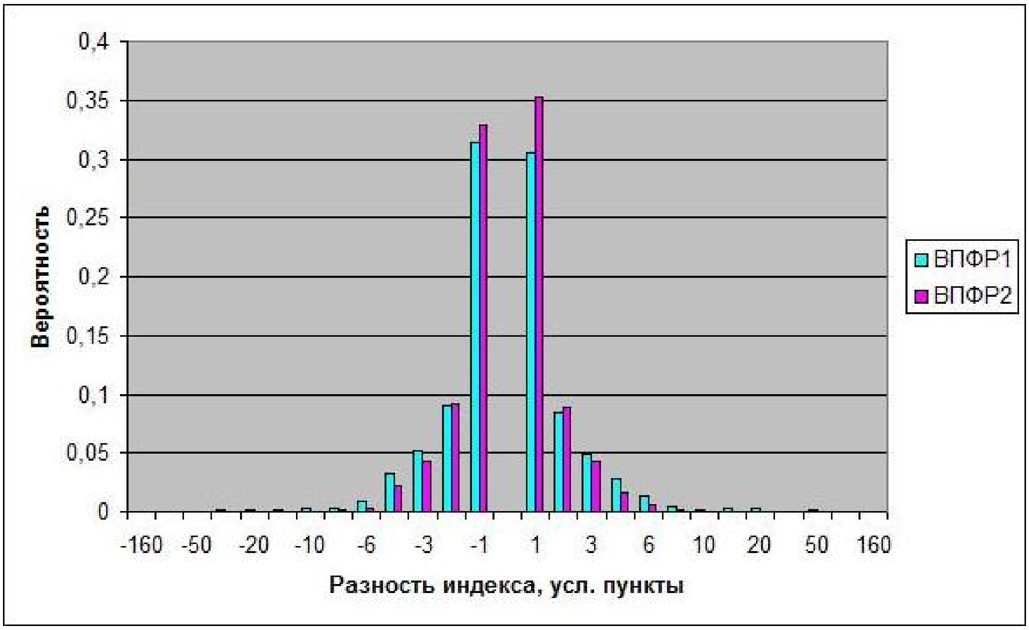

Рис. 2. Выборочные встык-распределения приростов тикового ряда длиной 10 тыс. тиков

В каждый момент времени t имеется, таким образом, свое распределение приростов цен $F_N(x, n(t))$ по выборке длины N. Если зафиксировать момент времени и менять длину выборки от этого момента в прошлое, то будут получаться выборочные распределения, которые можно трактовать как реализации случайного процесса по генерации таких распределений – именно, случайной величиной является промежуток времени, в течение которого набирается выборка заданной длины N. Характерные примеры распределений в зависимости от длины выборки приведены на рис. 3.

Поставим вопрос о том, как пересчитать выборочное среднее в терминах времени, учитывая, что временной ряд $\{x_n\}$ имеет маркировку $n(t)$. Плотностью функции распределения $f_T(x, t)$ на промежутке времени $[t - T, t]$ естественно считать ВПФР $F_N(x, n)$, усредненную по ненулевому числу событий за этот промежуток времени:

$$f_T(x, t) = \frac{1}{1 - p_0(t - T, t)} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t - T, t) F_k(x, n(t)). \qquad (8)$$

На практике формула (8) применяется следующим образом. В каждый момент времени строятся наборы выборочных плотностей $F_k(x, n(t))$ для $k = 1, 2, \dots k_{max}$, где k_{max} есть максимальная длина выборки, принимаемая

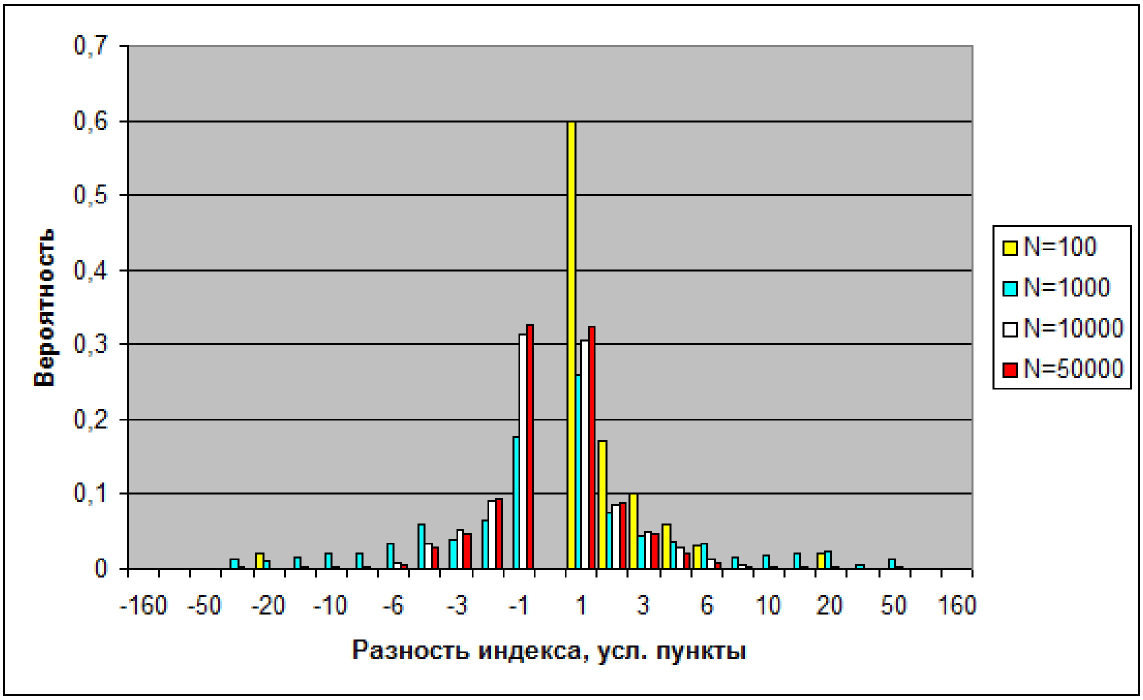

Рис. 3. Выборочные распределения приростов тикового ряда
в зависимости от длины выборки

во внимание, т.е. максимальное число событий, произошедшее за интересующий исследователя промежуток времени T. Эти распределения имеют вид, показанный на рис. 3. Затем они взвешиваются по оцененному среднему профилю вероятности реализации каждого распределения за тот же промежуток времени. Пример функции $\Lambda(t, 1)$ интенсивности потока событий для T $= 1$ показан выше на рис. 1. Для произвольного целочисленного (в выбранных единицах) промежутка времени параметр потока определяется формулой

$$\Lambda(t, T) = \sum_{k=1}^{T} \Lambda(t - k + 1, 1). \tag{9}$$

В заданный момент времени параметр потока определяется по формуле (9) и данным по интенсивности событий для этого момента, приведенным на рис. 1. Для каждого t и промежутка T эта величина определяет плотность усредняющей меры, т.е. вероятность в (7). Типовой результат усреднения выборочных распределений показан на рис. 4. Это и есть плотность усредненного распределения $f_T(x, t)$.

Пусть теперь $\bar{b}_N(n)$ есть среднее значение величины $b(x_n)$, вычисленное

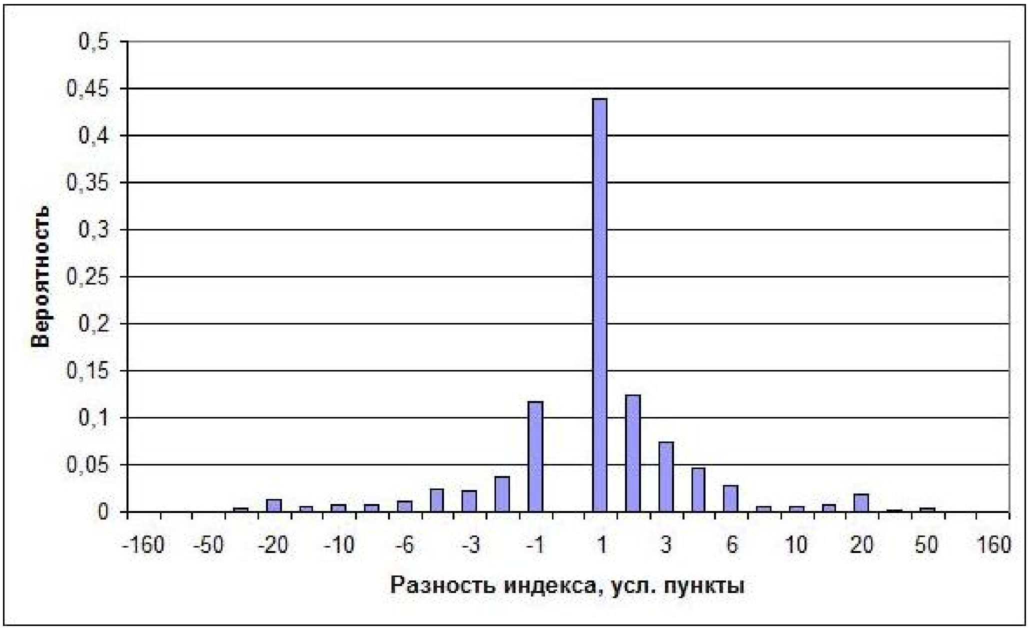

Рис. 4. ВПФР приростов тикового ряда в терминах времени для $T = 10$

по выборке длины N, отсчитанной назад от события с номером n:

$$\bar{b}_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^{n} b_k(x). \tag{10}$$

Временной средней $\tilde{b}_N(n)$ на промежутке длины T, отсчитанном назад от момента времени t, будем называть выборочную среднюю, взвешенную по нестационарному распределению (8):

$$\tilde{b}_N(n) = \frac{1}{1 - p_0(t-T,t)} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)\bar{b}_k(n(t)). \tag{11}$$

Поскольку вероятность того, что на промежутке времени длины T состоялось ровно $k \geq 1$ событий, равна $p_k(t-T,t)$, то этой же вероятности равна вероятность того, что временное среднее величины $b(x_n)$ равно $\bar{b}_k(t)$. Следовательно, формула (11) может быть интерпретирована как среднее по времени значение величины $b(x_n)$, определяемое по выборке ненулевой длины.

В частности, если положить $b(x_n) = x_n$, то среднее выборочное значение маркированного ряда на промежутке времени $[t-T,t]$ выражается через среднее значение $\bar{b}_N(n(t))$, построенное по выборке длины N в момент t, по формуле

$$\tilde{b}_T(t) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)\bar{b}_k(n(t))}{1-p_0(t-T,t)} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)(\frac{1}{k}\sum\limits_{j=n(t)-k+1}^{n(t)} x_j)}{1-p_0(t-T,t)}. \tag{12}$$

Иными словами, справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. Среднее значение $\langle a\xi + b\rangle_{\bar{\mu}}$ линейной функции $a\xi + b$ от случайной величины ξ по усредненной случайной мере $\bar{\mu} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\mu_k$ равно среднему значению математических ожиданий линейной функции $a\xi + b$ по исходным случайным мерам $\langle\overline{a\xi + b}\rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\langle a\xi + b\rangle_{\mu_k}$.

Утверждение следует из линейности интеграла и перестановочности операций суммирования и интегрирования.

Для нелинейных функционалов, например, для высших моментов распределения это свойство не имеет места. Более того, если статистика $b(x_n)$ зависит еще и от $n(t)$, как, например, для дисперсии, то временное среднее для таких функций определяется неоднозначно в следующем смысле. С одной стороны, в соответствии с (10), временная выборочная дисперсия $\tilde{\sigma}^2(t,T)$ в момент времени t по промежутку длительности T, содержащему не менее одного события, определяется через событийную дисперсию $\sigma^2(n(t),k)$ формулой

$$\tilde{\sigma}_I^2(t,T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)\sigma^2(n(t),k)}{1-p_0(t-T,t)}. \tag{13}$$

С другой стороны, дисперсию по временному промежутку можно определить по временной плотности (8), что дает

$$\tilde{\sigma}_{II}^2(t,T) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)\bar{b}_k(n(t))}{1-p_0(t-T,t)} - \left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t-T,t)\bar{a}_k(n(t))}{1-p_0(t-T,t)}\right)^2, \tag{14}$$

где $a(x_n) = x_n$, $b(x_n) = x_n^2$. В случае эквидистантного временного ряда оба выражения – (13) и (14) – совпадают с обычным выражением для выборочной дисперсии. Практически важной является оценка (см. теорему 5 выше)

$$\tilde{\sigma}_{II}^2(t,T) \geq \tilde{\sigma}_I^2(t,T), \tag{15}$$

которая позволяет оценить снизу временную выборочную дисперсию нестационарного маркированного случайного процесса через выборочное среднее значение шаговых выборочных дисперсий.

Какое из приведенных двух выражений – (13) или (14) – более адекватно для описания свойств ряда, решается опытным путем из сравнения с фактической дисперсией ряда на выбранном временном отрезке. Пример аппроксимации дисперсии рассматриваемого ряда для промежутка времени 1 мин приведен на рис. 5.

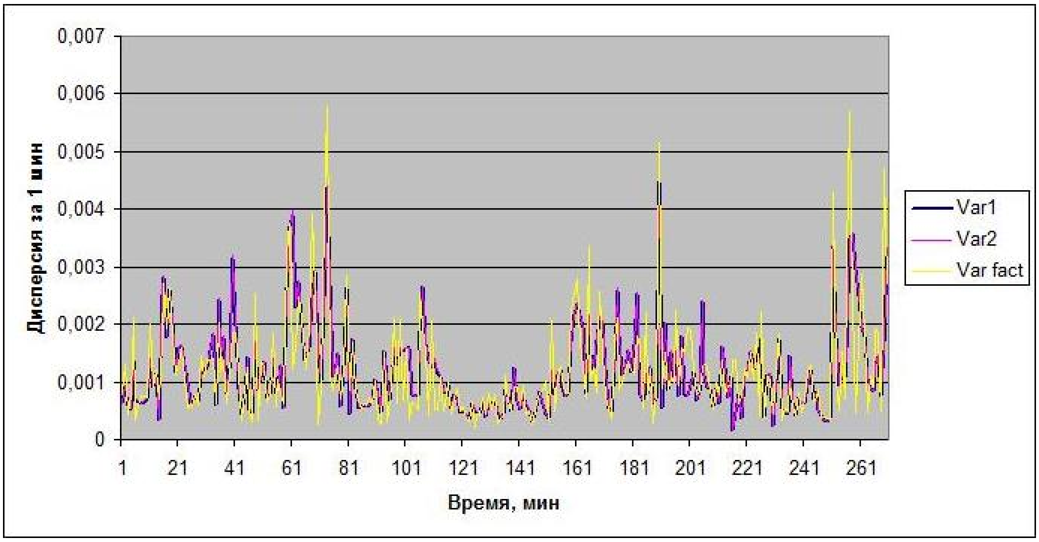

Рис. 5. Сравнение фактической дисперсии по выборкам за промежуток времени 1 мин с двумя вариантами ее аппроксимации

В одни моменты времени на рис. 5 относительная ошибка аппроксимации $(\frac{Var}{Varfact} - 1)$ меньше для $Var1$ (формула (13)), в другие – для $Var2$. Тем не менее интересно отметить, что для рассматриваемого примера индекса RTS для всех без исключения месячных промежутков времени, для которых строились свои параметры потока, оказалось, что фактически вычисляемая дисперсия за любой промежуток времени лучше аппроксимируется формулой (13). В частности, на промежутках в месяц среднеквадратичное относительное среднеквадратичное отклонение аппроксимации дисперсии по модели (13) от факта, т.е. $\langle(\frac{Var}{Varfact} - 1)^2\rangle$, менялось в течение года от 0,45% до 2,87%, а для модели (14) в каждый месяц было несколько выше и менялось от 0,72% до 3, 11%. В среднем по данным за год по модели (13) ошибка аппроксимации составила 1,4%, тогда как по модели (14) она оказалась равной 1,6%. Хотя расхождение не особенно велико в обоих случаях, все же модель (13) в относительном смысле на 15% точнее в среднеквадратичном, что является существенным при выборе аппроксимации.

Таким образом, предложены новые методы определения математического ожидания векторнозначных случайных величин, основанные на усреднении нелинейных функций от случайных величин. Так, математическое ожидание случайной величины, значениями которой являются неограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, определено с помощью усреднения экспоненциальной функции от случайных гамильтонианов (см. теорема 3 и предложения 2, 3) благодаря применению черновких итераций к усредненой оператор-функции и введению отношения эквивалентности на пространстве оператор-функций (см. определение 1). Предложенная процедура усреднения гамильтонианов применена к изучению квантовой динамики на геометрическом графе. Установлены неравенства, связывающие перестановочность операции вычисления математического ожидания случайной функции распределения и дисперсии, соответствующей функции распределения. Приведены примеры применения предложенных методов к исследованию свойств нестационарных случайных процессов.

Список литературы

[1] Арсеньев А.А. О существовании инвариантных мер на пространстве решений эволюционного уравнения // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 1976. № 73. 23 с.

[2] Богачев В.И., Крылов Н.В., Рекнер М., Эллиптические и параболические уравнения для мер // УМН. 2009. – Т. 64:6 – С. 5-116.

[3] Боголюбов Н.Н. О некоторых статистических методах в математической физике. – Киев: Изд-во АН СССР. 1945.

[4] Вершик А.М., Ладыженская О.А. Об эволюции мер, определяемой уравнениями Навье-Стокса, и о разрешимости задачи Коши для статистического уравнения Хопфа // ДАН СССР. 1976. Т. 226:1. С. 26-29.

[5] Вишик М.И., Чепыжев В.В. О траекторных аттракторах систем реакции-диффузии с малой диффузией // Мат. Сборник. 2009. Т. 200:4. С. 3-30.

[6] Данфорд Н., Шварц Д. Теория операторов. Т. 1. – М.: УРСС, 2004.

[7] Додонов В.В., Манько В.И., Скаржинский В.Д. Неоднозначности вариационного описания классических систем и проблема квантования // Труды ФИАН. 1982. Т. 152. С. 37-89.

[8] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972.

[9] Олейник О.А. Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений // УМН. 1957. Т. 12:3. С. 3-73.

[10] Огун Д.О., Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж. О преобразовании пространства начальных данных для задачи Коши с особенностями решения типа взрыва // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2012, № 87. 31 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-87

[11] Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. – М: МФТИ, 2004.

[12] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Скорость сходимости фейнмановских аппроксимаций полугрупп, порождаемых гамильтонианом осциллятора // ТМФ. 2012. Т. 172:1. С. 122-137.

[13] Панов Е.Ю. О статистических решенияхзадачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. Моделирование. 2002. Т. 14:3. С. 17-26.

[14] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Функциональный анализ. Т. 1. – М.: Мир. 1977.

[15] Сакбаев В.Ж. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения с вырождением и усреднение аппроксимирующих ее регуляризаций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2012. Т. 43. С. 3-174.

[16] Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Диффузия и квантовая динамика частиц с массой, зависящей от координаты // Доклады РАН. 2012. Т. 445:1. С. 20-24.

[17] Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН. 2013. Т. 451:2. С. 141-145.

[18] Сакбаев В.Ж. О многозначных отображениях, задаваемых регуляризацией уравнения Шредингера с вырождением // Журнал Выч. Мат. и Матем. Физ. 2006. Т. 46. С. 682-698.

[19] Сакбаев В.Ж. Об усреднении квантовых динамических полугрупп // ТМФ. 2010. Т. 164:3. С. 455-463.

[20] *В.Ж.Сакбаев, О.Г.Смолянов*, Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН, Т. 451, № 2, 2013, С. 141-145.

[21] *В.Ж.Сакбаев, О.Г.Смолянов*, Диффузия и квантовая динамика на графах // Доклады РАН, Т. 451, № 2, 2013, С. 141-145.

[22] Chernoff P. Note on product formulas for operator semigroups // J. Funct. Anal. 1968. V. 84. P. 238-242.

[23] Hewitt E, Iosida K. Finitely additive measures // Trans. Amer. Math. Soc. 1952. V. 72. P. 46-66.

[24] Numan El'sheikh M.H. JAMP. 2013.

[25] Smolyanov O.G., Weizsacker H. v., Wittih O. Chernoff's theorem and discrete time approximations of Brownian motion on manifoulds // Potential Anal. 2007. V. 26. P. 1-29.

[26] Tartar L. Memory effects and homogenization // Archive for Rational Mechanics and Analysis. V. 111. P. 121-133.