



Шильников Е.В.

Моделирование течений  
вязкого газа на основе КГД  
системы уравнений на  
неортогональных индексных  
сетках

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Шильников Е.В. Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 33. 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-33>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В.Келдыша  
Российской академии наук**

**Е.В.Шильников**

**Моделирование течений вязкого газа  
на основе КГД системы уравнений  
на неортогональных индексных сетках**

**Москва — 2014**

## **Шильников Е.В.**

Моделирование течений вязкого газа на основе КГД системы уравнений на неортогональных индексных сетках

На основе метода конечных объемов построена разностная схема для квазигазодинамической системы уравнений в 3D постановке на произвольной неортогональной структурированной индексной сетке. Работоспособность построенного алгоритма проверена на решении ряда тестовых задач.

**Ключевые слова:** КГД система уравнений, явная схема, контрольный объем, неортогональная сетка, стационарные и нестационарные течения.

## **Evgeny Vladimirovich Shilnikov**

Viscous gas flow simulation based on QGD equations system on non-orthogonal index grids.

Basing on finite volumes method the difference scheme is constructed for Quasi Gas Dynamic equations system in 3D formulation on arbitrary non-orthogonal structured index grid. The algorithm efficiency was verified on a set of test problems.

**Key words:** QGD equations system, explicit scheme, control volume, non-orthogonal grid, stationary and non-stationary flows.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 12-01-00769-а и 12-01-00556-а.

## **Оглавление**

|   |    |
|---|----|
| КГД система уравнений.....                          | 3  |
| Построение разностной аппроксимации.....            | 6  |
| Решение задачи об обтекании цилиндра.....           | 9  |
| Решение задачи об обтекании усеченной пирамиды..... | 16 |
| Заключение.....                                     | 19 |
| Список литературы.....                              | 20 |

В настоящее время усиливается тенденция к использованию вычислительных систем, базирующихся на существенно многоядерных процессорах нетрадиционной архитектуры. Однако трудности эффективного использования таких систем значительно возрастают даже по сравнению с непростыми проблемами использования традиционных суперкомпьютеров кластерного типа. Проблема связана с необходимостью использования для высокопроизводительных параллельных вычислений алгоритмов, хорошо адаптирующихся к быстро меняющейся архитектуре современных вычислительных систем. Опыт показывает, что такие алгоритмы не в ущерб эффективности должны быть логически простыми и прозрачными. В этом смысле очень привлекательными оказываются явные схемы, которые легко адаптируются к различной архитектуре вычислительных систем. Кинетические или Больцмановские схемы [1 – 5] в настоящее время широко применяются в вычислительной газовой динамике и являются эффективным подходом к моделированию задач механики сплошной среды. Это направление является одним из наиболее актуальных в современных высокопроизводительных вычислениях. В данной работе описывается явная разностная схема, основанная на квазигазодинамической (КГД) системе уравнений [5, 6].

## КГД система уравнений

В соответствии с [5] КГД система уравнений для трехмерного течения идеального политропного вязкого теплопроводного газа, записанная в общепринятых обозначениях в консервативной форме, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \text{Div} \mathbf{W} = 0 \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{U} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T$  – вектор консервативных переменных,  $E = \rho(\varepsilon + \mathbf{u}^2/2)$  – полная энергия, под обозначением  $\text{Div} \mathbf{W}$  подразумевается вектор, состоящий из дивергенций строк вектора потоков консервативных переменных  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} -\mathbf{j}_m \\ \Pi - \mathbf{j}_m \otimes \mathbf{u} - p\mathbf{I} \\ \Pi \mathbf{u} - \mathbf{q} - \mathbf{j}_m (E + p)/\rho \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Поток массы задается как

$$j_{mi} = \rho(u_i - w_i), \quad w_i = \frac{\tau}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \rho u_j u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} p \right). \quad (3)$$

Тензор вязких напряжений  $\Pi$ , тепловой поток  $q$  и соотношения, замыкающие систему, определяются следующими соотношениями:

$$\Pi_{ij} = \Pi_{ij}^{NS} + \tau \rho u_i \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} p \right) + \tau \delta_{ij} \left( u_k \frac{\partial}{\partial x_k} p + \gamma p \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right), \quad (4)$$

$$\Pi_{ij}^{NS} = \mu \left( \frac{\partial}{\partial x_i} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} u_k \right), \quad (5)$$

$$q_i = q_i^{NS} - \tau \rho u_i u_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \varepsilon + p \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{1}{\rho} \right), \quad q_i^{NS} = -\kappa \frac{\partial}{\partial x_i} T, \quad (6)$$

$$p = \rho \varepsilon (\gamma - 1), \quad T = \frac{p}{\rho R}. \quad (7)$$

Динамическая вязкость  $\mu$ , коэффициент теплопроводности  $\kappa$  и релаксационный параметр  $\tau$ , имеющий размерность времени, имеют следующий вид:

$$\mu = \mu_\infty \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^\omega, \quad \kappa = \mu \frac{\gamma R}{(\gamma - 1) Pr}, \quad \tau = \frac{\mu}{\rho Sc}, \quad (8)$$

где  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $Pr$  и  $Sc$  – числа Прандтля и Шмидта соответственно.

Для обеспечения устойчивости счета по явной схеме к релаксационному параметру  $\tau$  в (8) обычно добавляется слагаемое, пропорциональное шагу пространственной сетки

$$\tau = \frac{\mu}{\rho Sc} + \alpha \frac{h}{c}, \quad (9)$$

где  $c$  – локальная скорость звука,  $\alpha$  – числовой параметр порядка единицы, подбираемый экспериментально. Заметим, что при больших числах Рейнольдса и не слишком подробной сетке первое слагаемое в (9) оказывается много меньше второго, и его можно отбросить.

При численном моделировании невязких течений все диссипативные члены в КГД системе являются искусственными регуляризаторами, т.е.  $\tau = \alpha h/c$ ,  $\mu = \tau \cdot \rho \cdot Sc$ . Для вязких течений в уравнениях присутствуют как члены с физической вязкостью, так и искусственные. В случае сверхзвуковых

течений с сильными ударными волнами вязкости может не хватать для устойчивого счета. В этом случае параметр  $\tau$  вычисляется по формуле (9), а к физической вязкости в Навье-Стоксовских членах также добавляется искусственная добавка, пропорциональная шагу сетки, и используется скорректированное значение  $\mu' = \tau \cdot \rho \cdot Sc$ .

В случае сложной структуры течения, когда в нем присутствуют как ударные волны, так и существенные зоны дозвукового течения, особенно с контактными разрывами, излишняя вязкость может отрицательно сказаться на точности расчета. Тогда в дозвуковых областях можно использовать естественную вязкость, а корректировать ее только там, где локальное число Маха достаточно велико. Это можно сделать, например, таким введением  $\mu'$ :

$$\mu' = \mu + \alpha \frac{h}{c} \rho Sc \cdot \Psi(Ma),$$

где  $\Psi(Ma)$  – некоторая функция типа «размазанной»  $\theta$  – функции Римана, как например, на рис. 1.

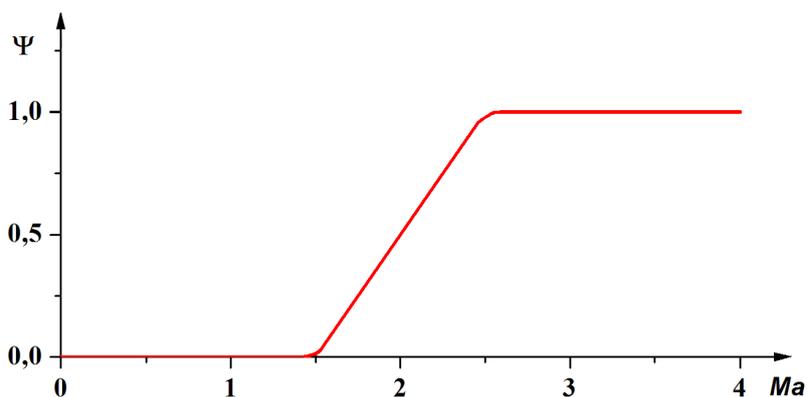


Рис. 1. Пример корректирующей функции  $\Psi$

Положение начала и конца наклонного участка графика определяются конкретной задачей. Коррекция такого типа была предложена и применена в [7].

Разностная аппроксимация КГД системы на ортогональных сетках в декартовых и цилиндрических координатах описана в [5] и не представляет проблем. В областях со сложными границами ортогональные сетки часто оказываются неудобными. В таких случаях обычно используют нерегулярные сетки (треугольные в двумерном случае и тетраэдральные в трехмерном). Их построение также описано в [5]. Но при этом отсутствие регулярности приносит свои сложности, связанные с необходимостью запоминать соседей для каждой ячейки сетки, количество которых может быть разным. В данной работе строится аппроксимация КГД системы уравнений на произвольной неортогональной индексной сетке, состоящей из гексаэдров.

Неортогональность сетки позволяет учитывать сложность границы расчетной области, а регулярность сетки облегчает определение соседей, которых всегда (за исключением граничных ячеек) одинаковое количество и которыми являются все ячейки с индексами, отличающимися на 1 или совпадающими с индексами данной ячейки.

## Построение разностной аппроксимации

Пусть в трехмерной расчетной области задана разностная сетка, состоящая из произвольных выпуклых шестигранников, пронумерованных с помощью трех индексов. Будем строить разностную аппроксимацию таким образом, чтобы на прямоугольной сетке (все шестигранники являются прямоугольными параллелепипедами) наша схема переходила в стандартную аппроксимацию, описанную в [5]. Применим метод конечных объемов. Проинтегрировав систему (1) по объему ячейки сетки  $V$  и используя формулу Гаусса-Остроградского, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mathbf{U} dV - \int_S (\mathbf{W}, \mathbf{n}) dS = 0, \quad (10)$$

где  $S$  – граничная поверхность ячейки  $V$ , а  $\mathbf{n}$  – единичный вектор внешней нормали к этой поверхности. Будем считать все грани плоскими. Тогда на каждой грани  $S_l$  нормаль  $\mathbf{n}_l$  определена однозначно. По теореме о среднем получаем:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{U}}}{\partial t} - \frac{1}{V} \sum_l \int_{S_l} (\mathbf{W}, \mathbf{n}_l) dS = 0, \quad (11)$$

Здесь  $\bar{\mathbf{U}} = V^{-1} \int_V \mathbf{U} dV$ , суммирование ведется по всем граням ячейки. Пусть

все величины в разностной схеме, которую мы строим, отнесены к центрам ячеек. Если все ячейки выпуклы, то таким центром можно считать точку с координатами, равными средним арифметическим координат восьми вершин ячейки. Приведенные выше усредненные по объему ячейки значения переменных  $\bar{\mathbf{U}}$  будем считать искомыми значениями в центрах ячеек. В дальнейших выкладках черту над переменными будем опускать. Аппроксимируя производную по времени с первым порядком по явной схеме на шаге  $\Delta t$ , получаем соотношение для газодинамических величин на следующем временном слое:

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{U} + \frac{\Delta t}{V} \sum_{l=1}^6 \int_{S_l} (\mathbf{W}, \mathbf{n}_l) dS. \quad (12)$$

Для вычисления потоков консервативных переменных через грани ячейки будем считать значения этих переменных и их производных постоянными на каждой грани и отнесенными к их центрам. Значения самих переменных считаем равными полусумме соответствующих значений в соседних ячейках, прилежащих к этой грани. Для вычисления производных построим контрольный объем, связанный с гранью. Рассмотрим грань с вершинами в точках 1, 2, 3, 4, являющуюся границей между ячейками с центрами в точках 5 и 6 (рис. 2). В качестве контрольного объема возьмем октаэдр с вершинами в перечисленных точках.

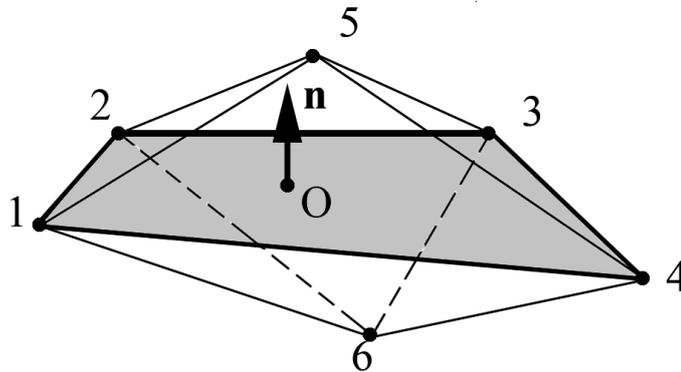


Рис. 2. Контрольный объем для грани 1234

Вычислим необходимые нам геометрические величины. Векторное произведение  $\mathbf{N} = \overline{24} \times \overline{13}$  диагоналей рассматриваемой грани 1234 – это вектор, перпендикулярный этой грани, а его модуль равен ее удвоенной площади. Таким образом, площадь грани и единичная нормаль к ней равны соответственно  $S_{1234} = \frac{1}{2} |\mathbf{N}|$  и  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{2S_{1234}}$ . С учетом постоянства потоков на грани ячейки поверхностный интеграл в правой части (12) принимает вид

$$\int_S (\mathbf{W}, \mathbf{n}) dS = \frac{1}{2} (\mathbf{W}, \mathbf{N}). \quad (13)$$

Объем октаэдра равен смешанному произведению  $V_8 = \frac{1}{6} (\overline{13}, \overline{24}, \overline{56})$ .

Площадь его боковой грани 125 равна  $S_{125} = \frac{1}{2} |\overline{15} \times \overline{12}|$ , единичная нормаль к ней

$\mathbf{n}_{125} = \frac{\overline{15} \times \overline{12}}{2S_{125}}$ . Для остальных граней – аналогично.

Рассмотрим вектор-функцию  $\mathbf{A} = (f(x, y, z), 0, 0)$ , заданную в нашем октаэдре. Применив к ней формулу Гаусса – Остроградского, получим

$$\int_{V_8} \text{div} \mathbf{A} dV = \int_{\partial V_8} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) dS = \sum_{m=1}^8 n_{mx} \int_{S_m} f dS. \quad (14)$$

Будем теперь считать функцию  $f(x, y, z)$  заданной во всех вершинах октаэдра и линейной на каждой ее грани. Тогда последний интеграл в (14) легко вычисляется. Для каждой грани  $m$  он равен произведению площади этой грани  $S_m$  на среднее арифметическое значений функции в ее вершинах  $\bar{f}_m$ . С другой стороны, применив к объемному интегралу в (14) теорему о среднем, имеем  $\int_{V_8} \text{div} \mathbf{A} dV = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot V_8$ , где  $\frac{\partial f}{\partial x}$  – некоторое среднее значение производной функции  $f(x, y, z)$  внутри октаэдра. Отнеся это значение к центру грани 1234, получим выражение для производной по  $x$  на гранях ячейки расчетной сетки, необходимое нам для вычисления потоков:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{V_8} \sum_{m=1}^8 n_{mx} \cdot S_m \cdot f_m. \quad (15)$$

Вычислим, например, слагаемое, соответствующее грани 125:

$$n_{125x} \cdot S_{125} \cdot f_{125} = \frac{f_1 + f_2 + f_5}{3} \cdot \frac{(y_5 - y_1)(z_2 - z_1) - (z_5 - z_1)(y_2 - y_1)}{2} \quad (16)$$

Сложив аналогичные выражения, соответствующие всем восьми граням октаэдра и проведя алгебраические преобразования, получим значение производной функции  $f(x, y, z)$  по переменной  $x$  в центре грани 1234:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{V_8} \sum_{n=1}^6 \alpha_n^x \cdot f_n, \quad (17)$$

где суммирование ведется по вершинам октаэдра, а коэффициенты  $\alpha_n^x$  вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \alpha_1^x &= \frac{1}{6} [(y_5 - y_6)(z_2 - z_4) - (z_5 - z_6)(y_2 - y_4)], \\ \alpha_2^x &= \frac{1}{6} [(y_5 - y_6)(z_3 - z_1) - (z_5 - z_6)(y_3 - y_1)], \\ \alpha_6^x &= \frac{1}{6} [(y_1 - y_3)(z_2 - z_4) - (z_1 - z_3)(y_2 - y_4)], \\ \alpha_3^x &= -\alpha_1^x, \quad \alpha_4^x = -\alpha_2^x, \quad \alpha_5^x = -\alpha_6^x \end{aligned} \quad (18)$$

Производные по  $y$  и по  $z$  вычисляются аналогично. Коэффициенты  $\alpha_n^y$  получаются из  $\alpha_n^x$  заменой  $z$  на  $x$ , а  $y$  на  $z$ , а коэффициенты  $\alpha_n^z$  – заменой  $y$  на  $x$ , а  $z$  на  $y$ .

Поскольку в нашей схеме вязкость, а с ней и параметр  $\tau$ , вычисляются в центрах граней, то в качестве шага сетки  $h$  в формуле (9) естественно взять расстояние между центрами соседних ячеек (точками 5 и 6).

В завершение выпишем компоненты вектора  $\mathbf{N}$ , перпендикулярного к грани 1234 и объем октаэдра через координаты его вершин.

$$\mathbf{N} = \overline{24} \times \overline{13} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \end{vmatrix} = 2(\vec{i}S_x + \vec{j}S_y + \vec{k}S_z), \quad (19)$$

где  $S_x$ ,  $S_y$ ,  $S_z$  – площади проекций грани 1234 на плоскости  $yz$ ,  $zx$  и  $xy$  соответственно. Тогда объем октаэдра равен

$$V_8 = \frac{1}{3} |S_x(x_5 - x_6) + S_y(y_5 - y_6) + S_z(z_5 - z_6)|. \quad (20)$$

## Решение задачи об обтекании цилиндра

В качестве первого примера выбрана задача о поперечном обтекании бесконечного кругового цилиндра потоком вязкого газа. В случае ламинарного течения эта задача является двумерной. Решение ее при помощи трехмерной программы позволяет проверить, не будет ли разностная схема нарушать двумерный характер течения. Кроме того, в такой постановке легче проводить сравнения с известными результатами.

Введем безразмерные переменные. В качестве базовых значений выберем радиус цилиндра  $R_0$ , плотность  $\rho_0$  и скорость  $u_0$  в набегающем потоке. Для остальных переменных естественным образом положим

$$t_0 = R_0/u_0, \quad \rho_0 = \rho_0 u_0^2, \quad \varepsilon_0 = u_0^2, \quad T_0 = u_0^2/R, \quad \mu_0 = \mu(T_0).$$

При таком обезразмеривании вид уравнений (1) – (6) останется прежним. Единственное изменение – появление множителя  $1/\text{Re}$  у всех членов, содержащих вязкость  $\mu$ , где  $\text{Re} = \frac{\rho_0 u_0 R_0}{\mu_0}$  – число Рейнольдса, определяющее

структуру течения. Еще одним определяющим параметром является число Маха в набегающем потоке  $Ma_\infty$ . Оно определяет давление газа в набегающем

потоке  $p_\infty = \frac{1}{\gamma Ma_\infty^2}$ . Уравнение состояния и выражения для вязкости и теплопроводности приобретают следующий вид:

$$T = \frac{p}{\rho}, \quad \mu = \mu_\infty \varepsilon^\omega, \quad \kappa = \frac{\gamma \mu}{(\gamma - 1) \text{Pr Re}}.$$

Показатель степени  $\omega$  во всех расчетах брался равным 0.5, а показатель адиабаты  $\gamma = 1.4$ .

В качестве расчетной области берется круговой цилиндр, соосный с обтекаемым телом и имеющий радиус равный  $R_{\max}$  и образующую равную  $R_0$  (рис. 3).

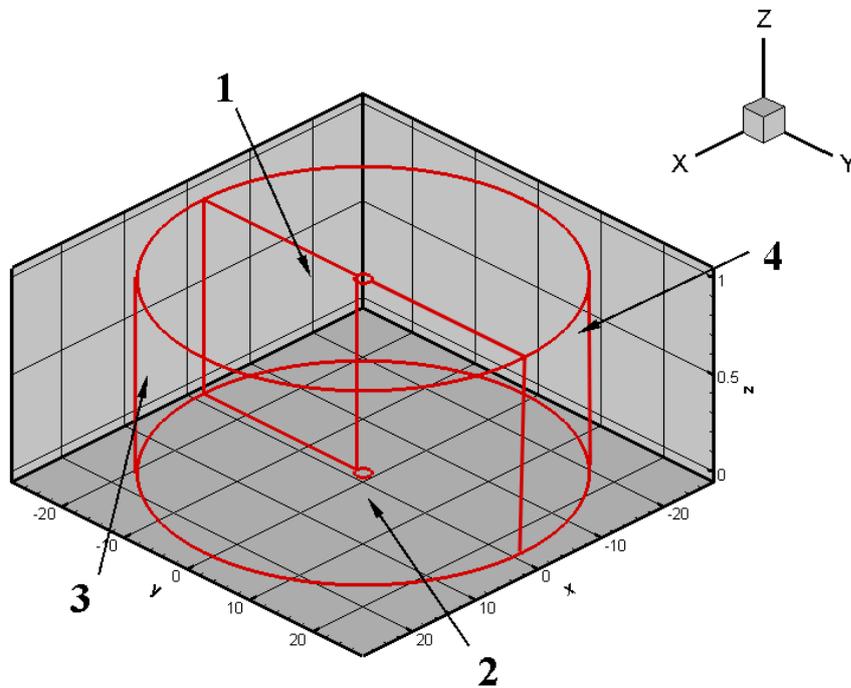


Рис. 3. Расчетная область в задаче об обтекании цилиндра

Граничные условия ставятся следующим образом. На основаниях цилиндра 1 и 2 осевая компонента скорости  $u_z$  и производные по  $z$  всех остальных переменных задаются равными нулю. Условия на входе и на выходе различаются для случаев сверхзвукового и дозвукового обтекания. При  $Ma_\infty > 1$  на наветренной части боковой поверхности 3 задаются параметры набегающего потока:

$$u_x = 1, \quad u_y = 0, \quad u_z = 0, \quad \rho = 1, \quad p = p_\infty,$$

а на подветренной 4 – условия сноса (равенство нулю всех нормальных производных):

$$\frac{\partial u_x}{\partial n} = \frac{\partial u_y}{\partial n} = \frac{\partial u_z}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

При моделировании дозвуковых течений ( $Ma_\infty < 1$ ) в соответствии с [5] условия для давления на входе и выходе меняются местами.

На поверхности обтекаемого тела ставятся условия прилипания и адиабатичности стенки:

$$u_x = u_y = u_z = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0.$$

Разностную сетку строим в соответствии с геометрией задачи. Поскольку от переменной  $z$  ничего не зависит, зададим равномерную сетку  $z_k = R_0 k / Nz$ ,  $k = 0, \dots, Nz$ . В каждой плоскости  $z = z_k$  строим радиально-кольцевую сетку, сгущающуюся к обтекаемому телу. Для этого зададим последовательность  $1 = r_0 < r_1 < \dots < r_{Nj} = R_{\max}$  и равномерную сетку по углу  $\varphi_i = 2\pi i / Ni$ ,  $i = 0, \dots, Ni$ . Тогда  $x_{ijk} = r_j \cos \varphi_i$ ,  $y_{ijk} = r_j \sin \varphi_i$ . В наших расчетах бралось  $Nz = 4$ ,  $Ni = 360$ . Первый шаг сетки по радиусу  $r_1 - r_0 = 0.0244$  (в 1.4 раза больше, чем шаг вдоль окружности поперечного сечения цилиндра). Последующие шаги увеличивались пропорционально радиусу. При этом количество шагов по радиусу определялось размером расчетной области  $R_{\max}$ .

Первый расчет был проведен для случая сверхзвукового обтекания  $M_\infty = 2$ ,  $Re = 10000$ . Радиус расчетной области был взят равным  $R_{\max} = 14$ , соответственно,  $Nj = 109$ . Максимальный шаг по радиусу (около внешней границы области) составил  $\Delta r \approx 0.33$ . Расчет проводился до установления с  $\alpha = 0.4$ . Результаты сравнивались с данными [8]. Результаты сравнения приведены в табл. 1.

Таблица 1

## Сравнение полученных результатов с данными [8]

|            | $p_s$ | $\rho_s$ | $L$   | $p_2$  | $\rho_2$ | $u_2$ |
|------------|-------|----------|-------|--------|----------|-------|
| Данные [8] | 1.007 | 3.134    | 1.331 | 0.8036 | 2.667    | 0.375 |
| Расчет     | 0.995 | 3.066    | 1.22  | 0.79   | 2.614    | 0.364 |

Поскольку в [8] рассматриваются течения невязкого газа, то сравнивать имеет смысл только те параметры течения, на которые вязкость газа оказывает минимальное влияние. В первую очередь это давление  $p_s$  и плотность  $\rho_s$  в точке торможения, точнее, на линии  $x = -1$ ,  $y = 0$ , а также положение головной ударной волны и значения газодинамических величин за ней.

Видно, что для выбранной не слишком подробной сетки параметры торможения совпадают достаточно хорошо. С положением ударной волны ситуация сложнее. Поскольку в расчетах она получается «размытой», то ее положение сложно определить однозначно. В таблице 1 расстояние  $L$  между телом и ударной волной определяется по точке, где давление, плотность и скорость одновременно оказываются максимально близкими к теоретическим значениям за ударной волной ( $p_2, \rho_2, u_2$ ). Если определять это расстояние по точке, где перечисленные величины имеют максимальные градиенты, то получим  $L \approx 1.53$ , а если по точке, где скорость газа равна локальной скорости звука, то  $L \approx 1.48$ . Заметим, что в этой области размер ячеек сетки по радиусу составляет  $\Delta r \approx 0.06$ . Толщину получаемой ударной волны можно уменьшить за счет уменьшения коэффициента  $\alpha$ , однако уже при  $\alpha = 0.3$  появляются немоности в области перед ударной волной.

На рис. 4 изображены линии тока в сечении, перпендикулярном оси цилиндра. В качестве фона представлено распределения давления в газе. На этом же рисунке красными точками показано положение ударной волны, предсказанное в [8]. Трехмерная картина распределения плотности газа в установившемся течении приведена на рис. 5.

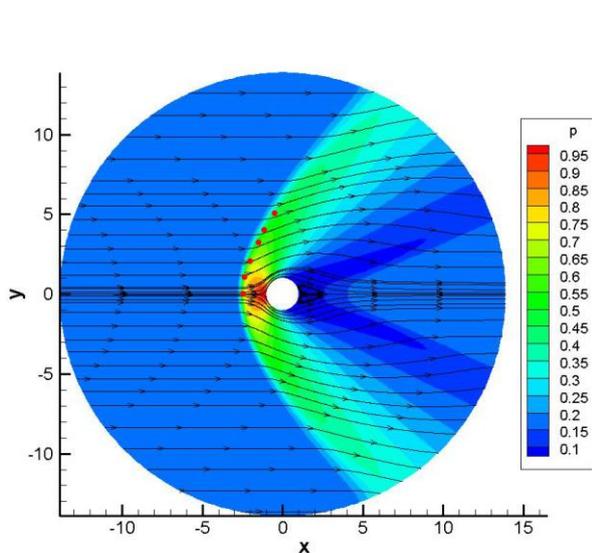


Рис. 4. Картина течения в сечении  $z = const, M_\infty = 2$

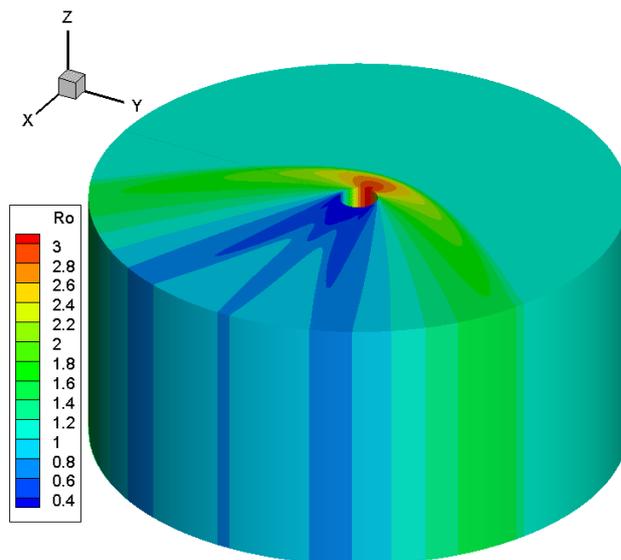


Рис. 5. Распределение плотности в расчетной области,  $M_\infty = 2$

В соответствии с [9] шаг по времени выбирался, исходя из условия

$$\Delta t = \beta \cdot \min_i \frac{h_i}{c_i + |\mathbf{u}_i|}. \quad (21)$$

Здесь  $c_i$  и  $\mathbf{u}_i$  – локальная скорость звука и скорость газа и  $i$ -ой ячейке, в качестве шага  $h_i$  брался квадратный корень из площади сечения данной ячейки

плоскостью  $xu$ . Расчеты показали, что устойчивость обеспечивается только при числе Куранта  $\beta=0.2$ . Допустимое число Куранта удается существенно увеличить, применив метод релаксации потоков [10]. Так задав параметр релаксации потоков  $\tau_f=0.04$ , удается вести устойчивый счет при числе Куранта  $\beta=0.87$ .

Следующий расчет был проведен для случая дозвукового обтекания  $M_\infty=0.2$ ,  $Re=60$ . При таком числе Рейнольдса в следе за цилиндром должна образовываться вихревая дорожка. Для того, чтобы получить эту дорожку, расчетная область была увеличена и ее радиус был взят равным  $R_{max}=26$ . Этому соответствует  $Nj=109$ . Максимальный шаг по радиусу на такой сетке составил  $\Delta r \approx 0.6$ .

Расчет велся до образования квазистационарной вихревой дорожки. На рис. 6 представлена зависимость от времени вертикальной компоненты скорости в точке, расположенной на оси симметрии на расстоянии  $10R_0$  за цилиндром.

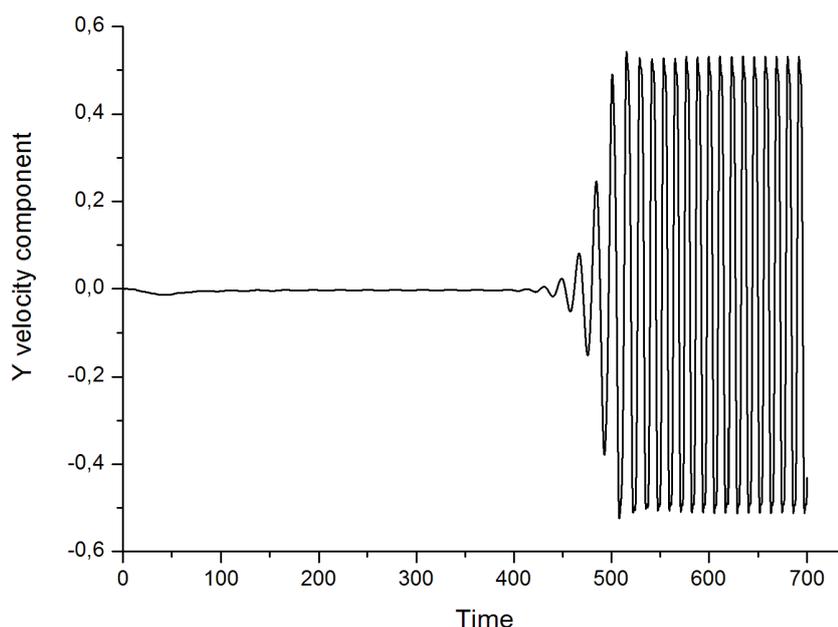


Рис. 6. Переход течения в колебательный режим

Сначала образовалась симметричная картина течения с двумя вихрями за обтекаемым телом. Достаточно долгое время эти вихри увеличивались, оставаясь симметричными. В момент времени  $t \approx 400$  симметрия начала нарушаться и затем вихри начали отрываться от стенок цилиндра, и образовалась вихревая дорожка.

В дозвуковом течении ударные волны отсутствуют, поэтому коэффициент  $\alpha$  удалось уменьшить до значения  $\alpha=0.2$ .

Последовательные стадии развития течения изображены на рис. 7.

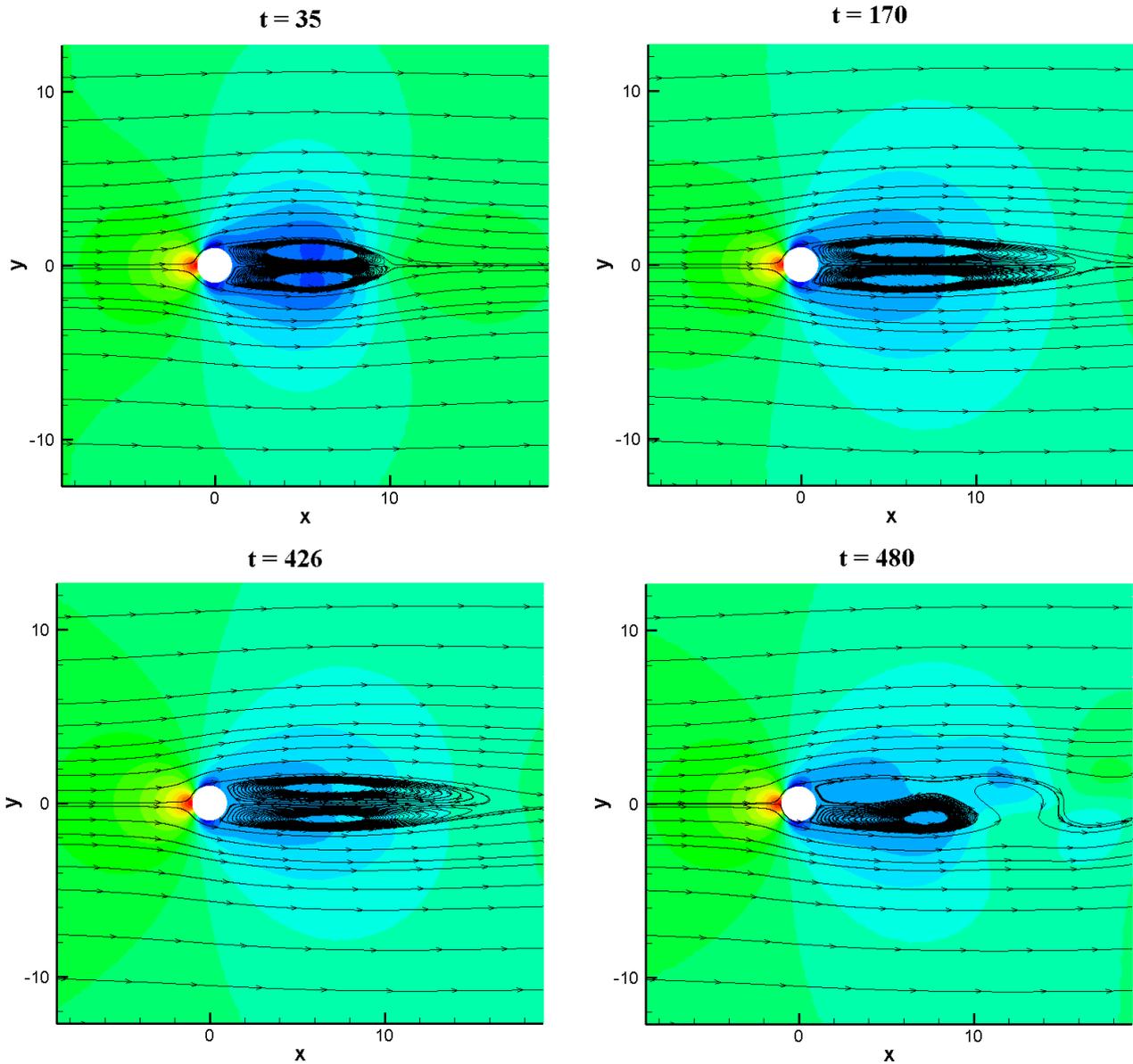


Рис. 7. Процесс образования вихревой дорожки,  $M_\infty = 0.2$

В [11] приведена уточненная формула Релея, описывающая эмпирическую зависимость частоты возникающих в потоке колебаний от числа Рейнольдса в диапазоне  $40 \leq \text{Re}_D \leq 150$ , где  $\text{Re}_D$  – число Рейнольдса, вычисленное по диаметру цилиндра:

$$Sh = a(1 - b/\text{Re}_D). \quad (22)$$

Здесь  $a = 0.212$ ,  $b = 21.2$ , число Струхала  $Sh = D/(Tu_0)$ ,  $T$  – период колебаний. В нашем расчете  $\text{Re}_D = 120$ , значит возникшие колебания должны

удовлетворять формуле (22). В соответствии с ней  $Sh_{Ray} = 0.1745$ . Интервал между пиками на рис. 6 составил  $T = 11.53$ , что соответствует  $Sh_{exp} = 0.1736$ . Таким образом, мы получили хорошее совпадение с формулой Релея.

На рис. 8 изображены мгновенные линии тока в сечении  $z = const$  на развитой стадии течения.

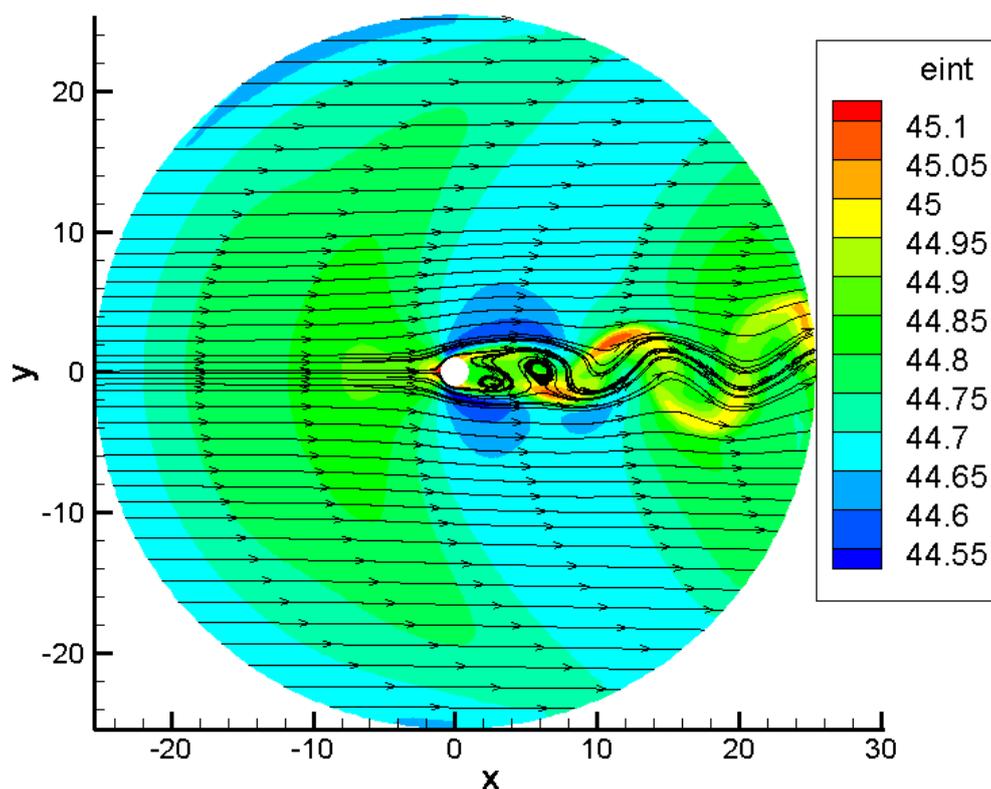


Рис. 8. Мгновенные линии тока на фоне распределения удельной внутренней энергии,  $M_\infty = 0.2$

В дорожке за цилиндром различимы только два вихря. Следующие за ними вихри не удастся разрешить, поскольку разбегающаяся сетка оказывается слишком грубой для них вдали от обтекаемого тела.

В описанном расчете процесс перехода течения в колебательный режим был очень длительным, поскольку произошел только за счет ошибок округления. Этот процесс можно ускорить, внося в поток небольшое асимметричное возмущение. Это можно сделать, например, таким образом. В момент времени, когда два симметричных вихря уже сформировались ( $t \approx 70$ ) уменьшить коэффициент  $\alpha$  до  $\alpha = 0.15$ . Вследствие недостаточной устойчивости в потоке возникает асимметрия. Если дать ей достаточно развиться, но не настолько, чтобы решение развалилось, то вернув  $\alpha = 0.2$ , мы быстро выйдем на колебательный режим. Расчеты показали, что интервал времени, в котором расчет надо вести с  $\alpha = 0.15$  должен быть в пределах 20 – 30 безразмерных единиц времени. В результате к моменту  $t \approx 200$  течение уже

выходит на устойчивый колебательный режим. При этом период колебаний оказывается тем же самым.

Устойчивость счета обеспечивалась при  $\beta=0.25$ . Применение метода релаксации потоков и в этом случае позволило увеличить число Куранта до  $\beta=0.8$ . При дозвуковом обтекании (в отличие от сверхзвукового) течение не выходит на стационар, а значит, введение релаксации может повлиять на точность решения задачи. Сравнение результатов показало, однако, что этого не произошло. Характеристики течения практически не изменились. В частности число Струхалия  $Sh_{\text{exp}}=0.1751$  оказалось даже чуть ближе к предсказанному значению.

### Решение задачи об обтекании усеченной пирамиды

В качестве следующего теста выбрана задача о сверхзвуковом обтекании потоком вязкого газа усеченной пирамиды. Определяющие характер течения безразмерные параметры брались следующими:  $M_{\infty}=2$ ,  $Re=10000$ . Сама пирамида и расчетная область изображены на рис. 9. Наветренная и подветренная грани – прямоугольники и лежат в плоскостях  $x=2.4$  и  $x=4$  (плоскость  $x=0$  – входная граница расчетной области). Размеры наветренной грани (по  $y$  и  $z$  соответственно)  $0.8 \times 1.28$ , а подветренной –  $1 \times 1.6$ . Передняя грань лежит в плоскости  $y=0$ , а плоскость  $z=0$  является плоскостью симметрии.

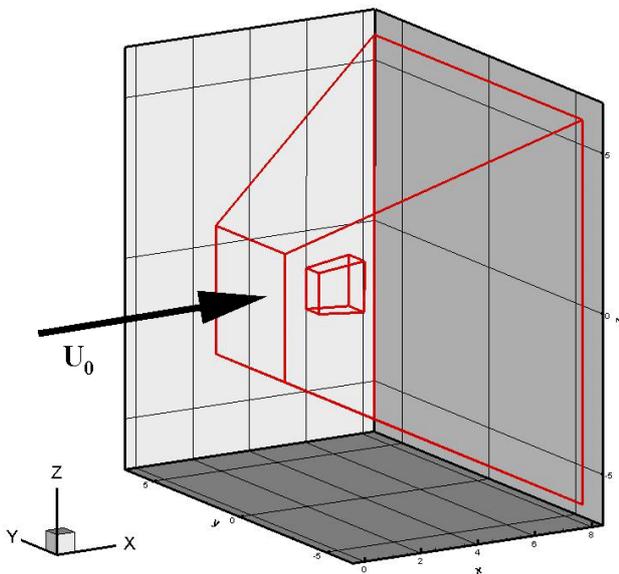


Рис. 9. Расчетная область в задаче об обтекании усеченной пирамиды

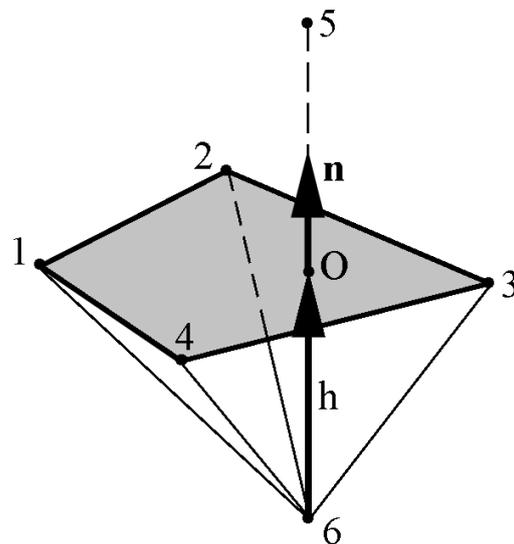


Рис. 10. Контрольный объем для грани, лежащей на стенке

Граничные условия ставятся аналогично тому, как это делалось в предыдущей задаче. На подветренной границе ( $x=8$ ) задаются условия сноса, а на всех остальных границах расчетной области – значения параметров газа в

набегающем потоке. На поверхности обтекаемого тела, как и в предыдущей задаче, ставятся условия прилипания и адиабатичности стенки.

Разностная сетка вводилась так, чтобы границы обтекаемого тела состояли из граней расчетных ячеек:

$$x_{ijk} = \frac{8i}{Nx}, \quad y_{ijk} = \left( \frac{j}{Ny} - \frac{1}{2} \right) (4 + x_{ijk}), \quad z_{ijk} = \left( \frac{k}{Nz} - \frac{1}{2} \right) (4 + x_{ijk}).$$

Расчеты проводились для  $Nx=100$ ,  $Ny=Nz=80$ .

Предыдущая задача, хотя и решалась в 3D постановке, в сущности, была двумерной. Кроме того, используемая разностная сетка, хотя и не была ортогональной, но в некотором смысле была к ней близка. Так линии, соединяющие центры соседних ячеек сетки, ортогональны грани между этими ячейками. Это свойство сетки вместе с отсутствием углов на границе тела позволило без проблем аппроксимировать граничное условие на твердой стенке путем введения фиктивных ячеек просто продолжением расчетной сетки на один слой внутрь тела.

В новой задаче обтекаемое тело имеет углы, а значит, при таком подходе в угловую фиктивную ячейку надо переносить значения из двух или трех соседних ячеек по-разному для потоков по разным направлениям. Кроме того, для более точного вычисления потоков предпочтительно, чтобы фиктивная ячейка была симметрична основной ячейке относительно их общей грани. Это не позволяет использовать в качестве фиктивных ячейки основной сетки, находящиеся внутри тела. С другой стороны нулевая скорость и нулевые нормальные производные от термодинамических величин на стенке сильно упрощают вид потоков через грань, принадлежащую поверхности тела. Так легко проверить, что нормальные потоки массы и энергии через такую грань равны нулю,  $(\mathbf{W}_\rho, \mathbf{n}) = (\mathbf{W}_E, \mathbf{n}) = 0$ , а потоки импульса принимают вид

$$(\mathbf{W}_i, \mathbf{n}) = \mu \left( \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial n} \right) - p n_i + n_i \frac{\partial u_n}{\partial n} \left( \tau \mu - \frac{2}{3} \mu \right), \quad i = \{x, y, z\}. \quad (23)$$

Теперь фиктивная ячейка нам не нужна, а для построения контрольного объема нам требуется только точка 5, лежащая внутри тела и симметричная центру ячейки 6 относительно грани 1234 (см. рис. 10). В точке 5 считаем значения термодинамических величин равными, а компоненты скорости – противоположными соответствующим значениям в точке 6. Единичная нормаль к этой грани равна  $\mathbf{n} = \frac{2\bar{4} \times \bar{1}\bar{3}}{|2\bar{4} \times \bar{1}\bar{3}|}$ , а высота  $h = (\mathbf{n}, \bar{6}\bar{1})$ .

В формуле (23) присутствуют производные только от компонент скорости. Поскольку на грани 1234 все скорости равны нулю, то при вычислении

производных  $\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$  по формуле (17) в сумме остаются только слагаемые, соответствующие точкам 5 и 6. Заметим, что в выражения для коэффициентов  $\alpha_5$  и  $\alpha_6$  в (18) координаты точки 5 не входят, а значит, они нам не нужны. Производные по нормали от всех компонент скорости вычисляются просто:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{u_6}{h}.$$

Расчет проводился до установления, которое было достигнуто при безразмерном времени  $t=93$ . Течение считалось установившимся, когда невязка по всем компонентам скорости становилась меньше, чем  $10^{-7}$ . Расчеты проводились с коэффициентом  $\alpha=0.4$ . Максимальное число Куранта, обеспечивающее устойчивость при решении этой задачи, оказалось равным  $\beta=0.35$ , а с применением метода релаксации потоков  $\beta=0.85$ .

На рис. 11 изоповерхности плотности в установившемся течении в половине расчетной области. Хорошо видна отошедшая ударная волна перед обтекаемым телом и область разрежения за ним. За телом образовалась зона сложного трехмерного вихревого течения, которую можно увидеть на рис. 12. Фоном на этом рисунке служит распределение плотности. Установившееся течение оказалось практически симметричным относительно плоскости  $z=0$ . Вблизи плоскости симметрии за телом наблюдается сгущение линий тока. На рис. 12 симметрия видна не очень хорошо из-за погрешностей в рисовании линий тока и сложности изображения пространственных линий на плоскости. Гораздо лучше эта симметрия видна в сечениях.

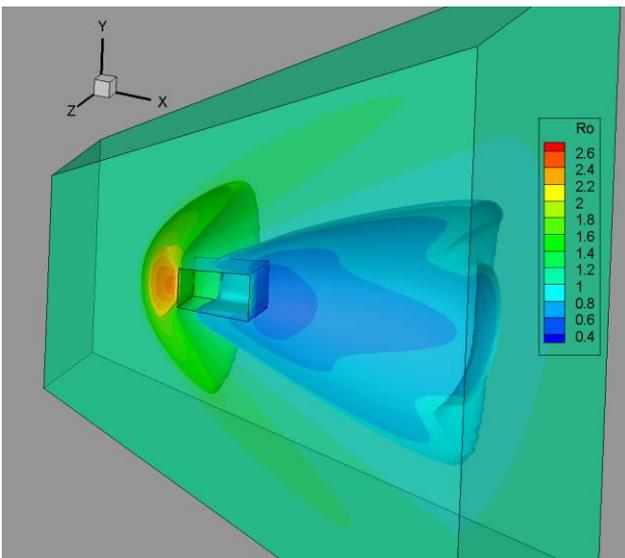


Рис. 11. Изоповерхности плотности в половине расчетной области  $z < 0$

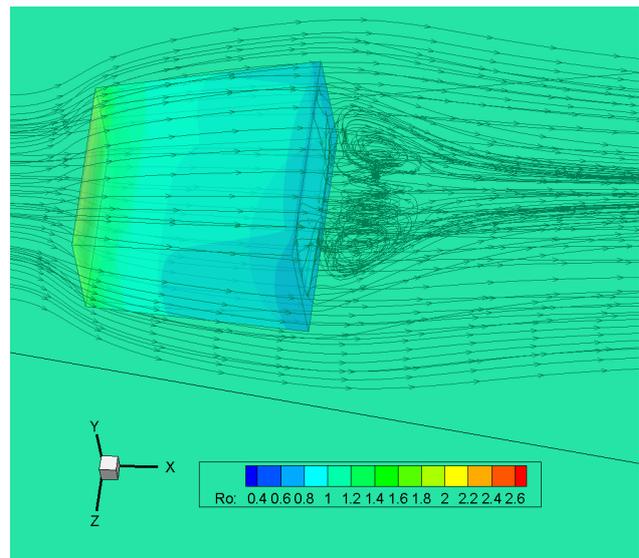


Рис. 12. Объемные линии тока вблизи обтекаемого тела

Распределения плотности и давления, а также линии тока в различных сечениях в установившемся течении представлены на рис. 13 – 14. Полученные в результате расчетов картины течения представляются вполне разумными и совпадающими с ожидаемыми.

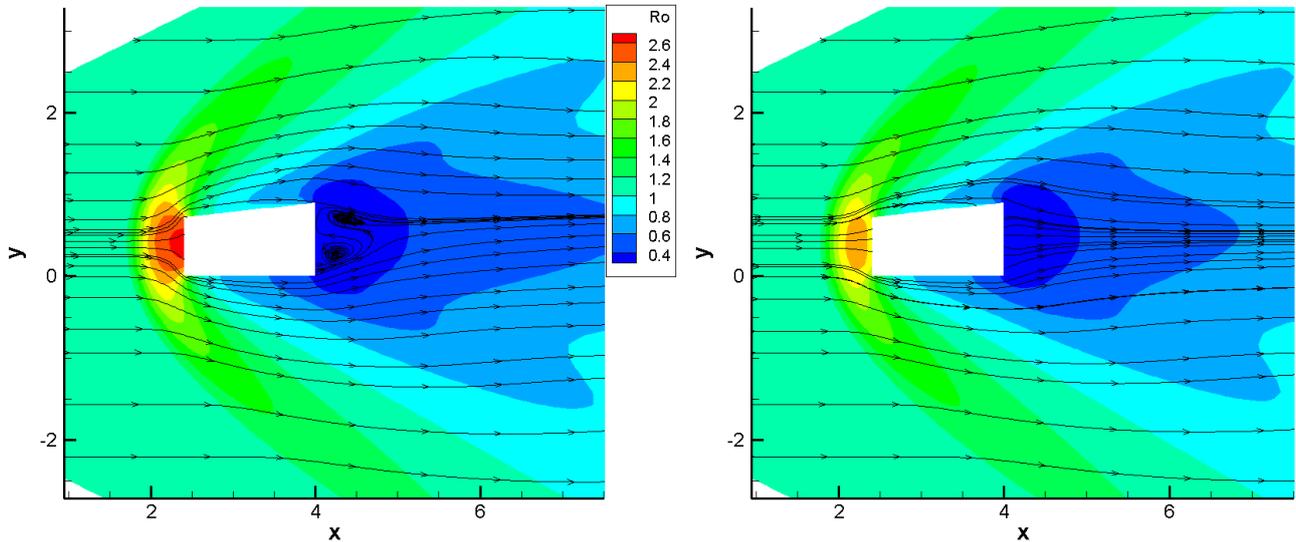


Рис. 13. Линии тока в сечениях  $z=0$  (слева) и  $z=0.6$  (справа) на фоне распределения плотности

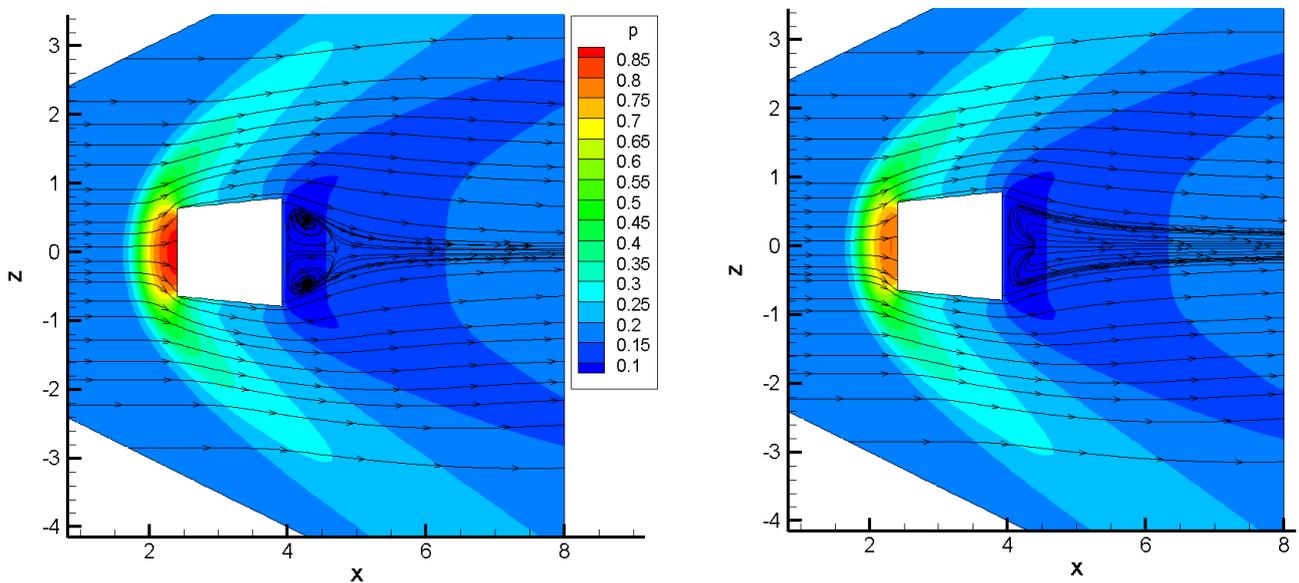


Рис. 14. Линии тока в сечениях  $y=0.5$  (слева) и  $y=0.7$  (справа) на фоне распределения давления

## Заключение

Построенная в работе разностная схема для КГД-системы уравнений на неортогональной регулярной индексной сетке показала свою эффективность и

адекватность на решении ряда тестовых задач. Простота и однородность алгоритма, основанного на явной схеме, позволяет в дальнейшем легко адаптировать его для расчетов на многопроцессорных вычислительных системах с разной архитектурой и моделировать практические задачи со сложной геометрией.

## Список литературы

- 1 Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. – М.: Макс Пресс. 2004. 328 с.
- 2 Perthame, B.: The kinetic approach to the system of conservation laws. Recent advances in partial differential equations. Res. Appl. Math. Masson, – Paris. 30, 1992.
- 3 Tsutahara M, Takaoka N., Kataoka N. Lattice gas and Lattice Boltzmann methods. – New methods of computational fluid dynamics. – Tokyo: Corona Publish. 1999 (in Japanese).
- 4 Succi S. The lattice Boltzmann equations for fluid dynamics and beyond. – Oxford: Clarendon press. 2001.
- 5 Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир. 2007. 351 с.
- 6 Шеретов Ю.В. Математическое моделирование течений жидкости и газа на основе квазигидродинамических и квазигазодинамических уравнений. – Тверь, Тверской Гос. Ун-т, 2000. 400 с.
- 7 Широков И.А., Елизарова Т.Г. Прямое численное моделирование ламинарно-турбулентного перехода в слое вязкого сжимаемого газа // Прикладная математика и информатика. № 42, М.: Изд-во факультета ВМК МГУ, 2013. С. 30-53.
- 8 Любимов А.Н., Русанов В.В. Течения газа около тупых тел. Ч. II. Таблицы газодинамических функций. – М.: Наука. 1970. 379 с.
- 9 Елизарова Т.Г., Шильников Е.В. Анализ вычислительных свойств квазигазодинамического алгоритма на примере решения уравнений Эйлера // Ж. вычисл. мат. и матем. физ. 2009, т. 49, № 11, сс. 1953–1969.
- 10 А.А. Давыдов, Б.Н. Четверушкин, Е.В. Шильников. Моделирование течений несжимаемой жидкости и слабосжимаемого газа на многоядерных гибридных вычислительных системах. Ж. вычисл. мат. и матем. физ. 2010, т. 50, № 12. С. 2275–2284.
- 11 Roushan P., Wu X.L. Universal wake structures of Karman vortex streets in two-dimensional flows // Physics of Fluids. 2005, 17, P. 073601.