



Легкоступов М.С.

К вопросу о гравитационной  
неустойчивости  
протопланетного диска  
Солнца. Часть II.  
Дисперсионные уравнения

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Легкоступов М.С. К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть II. Дисперсионные уравнения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 35. 33 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-35>

**Ордена Ленина  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М.В. Келдыша  
Российской академии наук**

**М.С. Легкоступов**

**К вопросу  
о гравитационной неустойчивости  
протопланетного диска Солнца.  
Часть II. Дисперсионные уравнения**

**Москва — 2014**

УДК 523-52:523.4-52: 523.21-54

**Легкоступов М.С.**

**К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть II. Дисперсионные уравнения**

Рассмотрена аналитическая модель описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции, предложенная в 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами. Получена двумерная система уравнений, которая описывает эволюцию протопланетного диска на ее начальной стадии. Проведена линейаризация уравнений протопланетного диска для его экваториальной плоскости. На основе линейаризованных уравнений получены приближенные дисперсионные уравнения для среды диска, находящейся в окрестности его экваториальной плоскости.

**Ключевые слова:** протопланетный диск, гравитационная неустойчивость, собственное гравитационное поле, дисперсионное уравнение

**Michail Semenovich Legkostupov**

**On the issue of gravitational instability of the Sun protoplanetary disk. Part II. The dispersion equations**

Here it is considered the analytical model for the description of the Sun protoplanetary disk in the initial stage of its evolution proposed in 2006 by A.V. Zabrodin, M.S. Legkostupov, K.V. Manukovskiy et al. The two-dimensional system of equations, which describes the evolution of the protoplanetary disk in its initial stage was created. Linearization of equations of the protoplanetary disk to its Equatorial plane was done. On the basis of the linearized equations there were obtained approximate dispersion equations for the medium of the protoplanetary disk, located in the vicinity of its Equatorial plane.

**Key words:** protoplanetary disk, gravitational instability, own gravitational field, dispersion equation

Работа выполнена по Программе фундаментальных исследований Президиума РАН № 28.

## Введение

Работа «К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца» написана в трех частях и оформлена в виде трех препринтов: «К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть I. Постановка задачи», «К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть II. Дисперсионные уравнения» и «К вопросу о гравитационной неустойчивости протопланетного диска Солнца. Часть III. Развитие и обоснование модели». В препринте, часть II ссылки на номера формул и рисунков из препринта, часть I даются с дополнительным индексом одна звездочка (\*). Например, запись «формула (16\*)» следует читать: «формула (16), препринт, часть I».

В настоящем препринте представлен вывод дисперсионных уравнений на основе поставленной в предыдущем препринте (часть I) физико-математической задачи для протопланетного диска Солнца в начальной стадии его эволюции.

### 1. Аналитическая модель протопланетного диска в приближении Роша

В 2006 году А.В. Забродиным, М.С. Легкоступовым, К.В. Мануковским с соавторами была предложена аналитическая модель протопланетного диска Солнца в приближении Роша, в которой масса протопланетного диска ( $M_d$ ) много меньше массы Солнца ( $M_S$ ) [1, 2, 3]. С выводом основных уравнений этой модели можно познакомиться в работах [2, 3]. В этой же работе мы остановимся только на основных предпосылках модели, которые важны для понимания результатов проведенных исследований. Система уравнений (16\*) – (25\*) значительно упрощается при следующих предположениях:

- 1) рассматривается стационарное равновесное состояние газовой среды с центральным источником гравитационного поля;
- 2) если  $M_d \ll M_S$ , то собственным гравитационным полем диска можно пренебречь;
- 3) газовая среда протопланетного диска подчиняется политропному уравнению состояния  $P(\rho) = K\rho^\gamma$ , где  $K$  – константа,  $\gamma$  – показатель адиабаты;
- 4) угловая скорость вращения газовой среды протопланетного диска есть функция только координаты  $r$ ;
- 5) угловая скорость вращения среды протопланетного диска близка к кеплеровскому закону вращения.

Предпосылки 1 – 3 не нуждаются в доказательствах. Предпосылка 4 имеет строгое обоснование, например, в работе [4]. Угловая скорость вращения среды протопланетного диска обычно берется в виде кеплеровского закона вращения, так как именно этому закону подчиняется частица, находящаяся в стационарном равновесном движении вокруг Солнца. Отсюда и следует предпосылка 5.

При введенных предположениях, как показано в работах [1, 2], система уравнений (16\*) – (25\*) имеет аналитическое решение, которое в цилиндрической системе координат имеет вид:

$$K \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = GM_S \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{1}{r_{ex}} \right) + GM_S \frac{1/r_{ex} - 1/r_{in}}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \left( \frac{1}{r_{ex}^{1+\alpha}} - \frac{1}{r^{1+\alpha}} \right), \quad (1.1)$$

$$\Omega^2 = \frac{(1+\alpha)(1/r_{ex} - 1/r_{in}) GM_S}{1/r_{ex}^{1+\alpha} - 1/r_{in}^{1+\alpha}} \frac{GM_S}{r^{3+\alpha}}, \quad (1.2)$$

где

$\Omega$  – угловая частота вращения среды диска.

Далее будут использованы следующие значения констант в уравнениях (1.1), (1.2).

Показатель адиабаты:  $\gamma = 1.43$  [5].

Гравитационная постоянная:  $G = 6.673 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 / (\text{г} \cdot \text{сек}^2)$ .

Масса Солнца:  $M_S = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ г}$  ([6], стр. 973).

Внутренний радиус протопланетного диска

Солнца:  $r_{in} = 0.449 \cdot 10^{13} \text{ см}$ .

Внешний радиус протопланетного диска

Солнца:  $r_{ex} = 0.591 \cdot 10^{15} \text{ см}$ ,

Константа (постоянная) в уравнении состояния газовой среды:  $K = 9.7446 \cdot 10^{13} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\text{г}^{\gamma-1} \cdot \text{сек}^2)$  [7].

Молекулярный вес газовой среды:  $\mu = 2.53$  [5].

Константу  $K$  невозможно определить независимым путем. Если предположить, что коллапс протосолнечной туманности происходит в соответствии с политропным законом (что, безусловно, не соответствует действительности), то константа  $K \cong 2.4761 \cdot 10^{16} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\text{г}^{\gamma-1} \cdot \text{сек}^2)$ . Это значение дает слишком высокие температуры в протопланетном диске [7]. Если константу  $K$  определить, исходя из современных представлений о характеристиках протопланетного диска, то она получается приблизительно равной  $K = 9.7446 \cdot 10^{13} \text{ см}^{3\gamma-1} / (\text{г}^{\gamma-1} \cdot \text{сек}^2)$  [7]. Это значение константы  $K$  и принято в дальнейших расчетах.

Так как в первом приближении параметры протопланетного диска будут описываться аналитической моделью в приближении Роша, то использование этой модели позволяет уйти от неопределенности в отношении параметров протопланетного диска. Используя уравнения (1.1), (1.2), можно получить важные для нашего исследования характеристики диска, в том числе зависимости характеристик от массы диска.

Для анализа гравитационной неустойчивости возьмем протопланетные диски трех масс [7]:  $M_d \approx 7.168 \cdot 10^{-3} M_s$ ,  $M_d \approx 0.096 \cdot M_s$ ,  $M_d \approx 0.667 \cdot M_s$ , где  $M_s$  - масса Солнца.

На рис. 1, 2, 3 представлены изолинии плотности протопланетного диска в аналитической модели в приближении Роша соответственно для  $\alpha = 0.002$  ( $M_d \approx 7.168 \cdot 10^{-3} M_s$ );  $\alpha = 0.005$  ( $M_d \approx 0.096 \cdot M_s$ ) и  $\alpha = 0.01$  ( $M_d \approx 0.667 \cdot M_s$ ) [7].

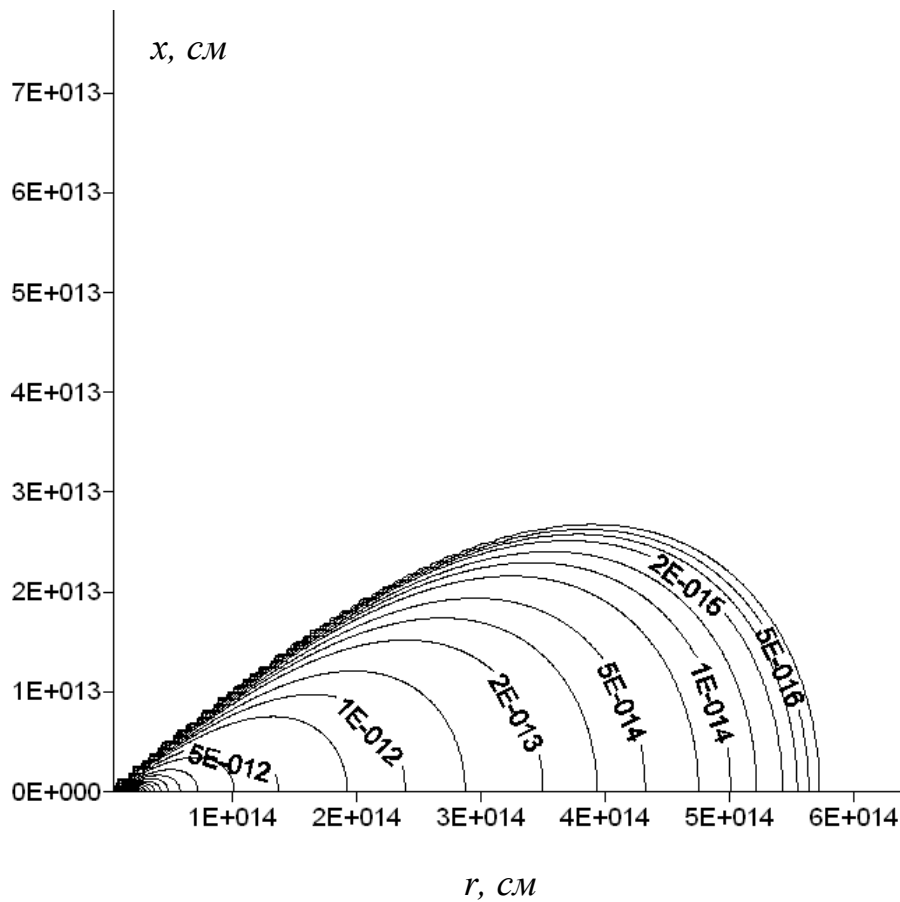


Рис. 1. Изолинии плотности протопланетного диска для  $\alpha = 0.002$ ,  $M_d \approx 7.168 \cdot 10^{-3} M_s$ .

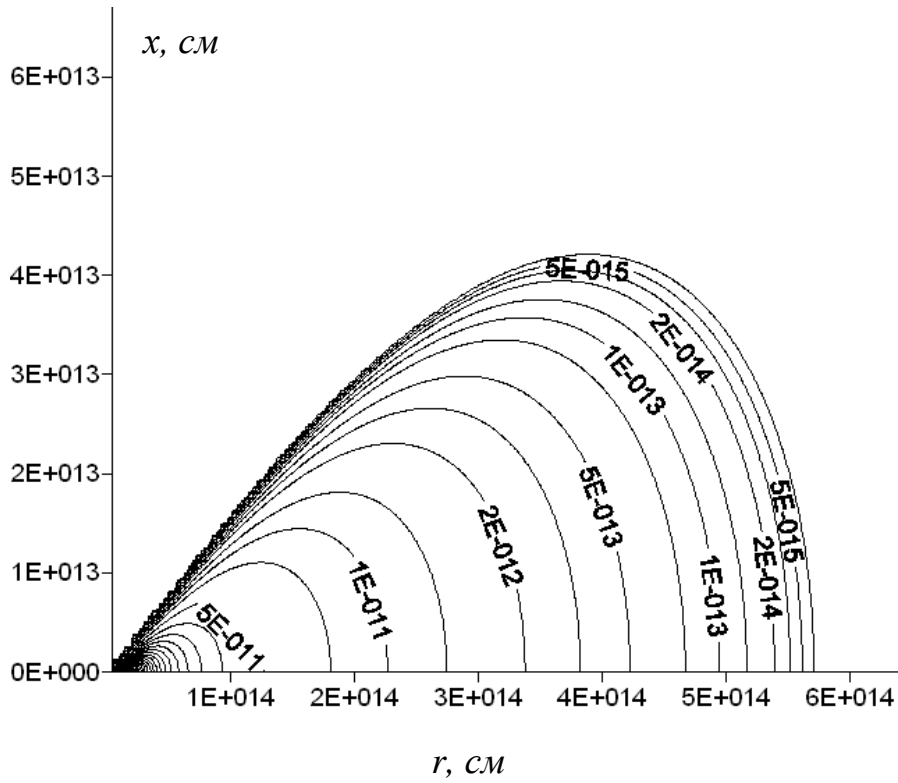


Рис. 2. Изолинии плотности протопланетного диска для  $\alpha = 0.005$ ,  $M_d \approx 0.096 \cdot M_s$ .

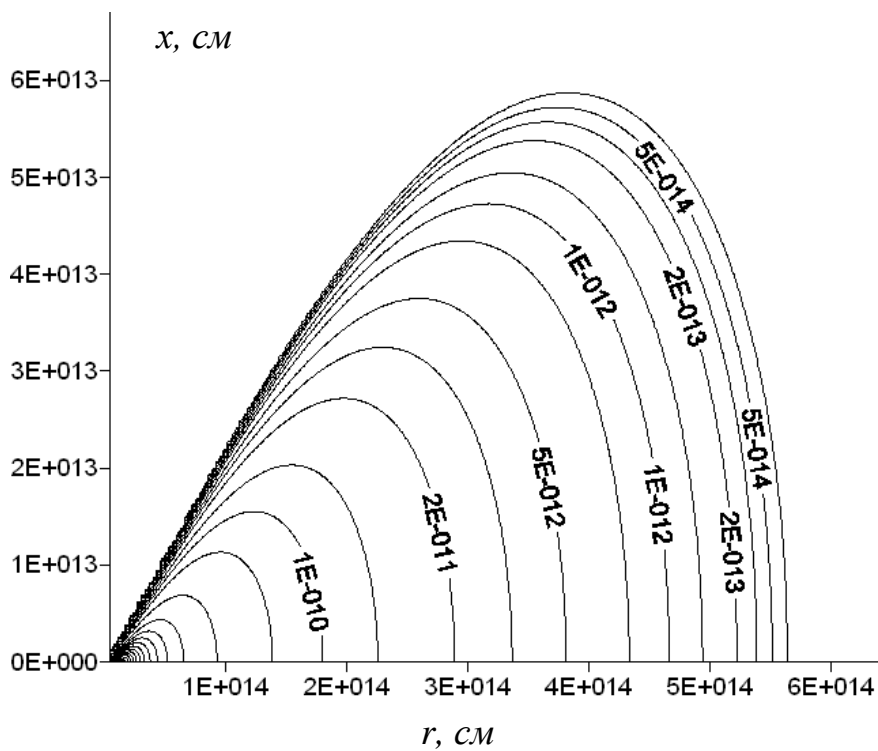


Рис. 3. Изолинии плотности протопланетного диска для  $\alpha = 0.01$ ,  $M_d \approx 0.667 \cdot M_s$ .

Из рис. 1, 2, 3 видно, что плотность достигает максимальной величины в экваториальной плоскости диска, но при стремлении к его границам она уменьшается и на самой границе становится равной нулю. Форма диска на этих графиках соответствует изолинии  $\rho \approx 0$  г/см<sup>3</sup>.

Распределения плотности ( $RO$ ) среды диска в его экваториальной плоскости в зависимости от приведенного радиуса ( $R$ ) показаны на рис. 4 соответственно для  $\alpha=0.002$ ,  $\alpha=0.005$ ,  $\alpha=0.01$ , где  $RO=4\pi_{ex}^3\rho/M_S$ ,  $R=r/r_{ex}$  суть безразмерные переменные.

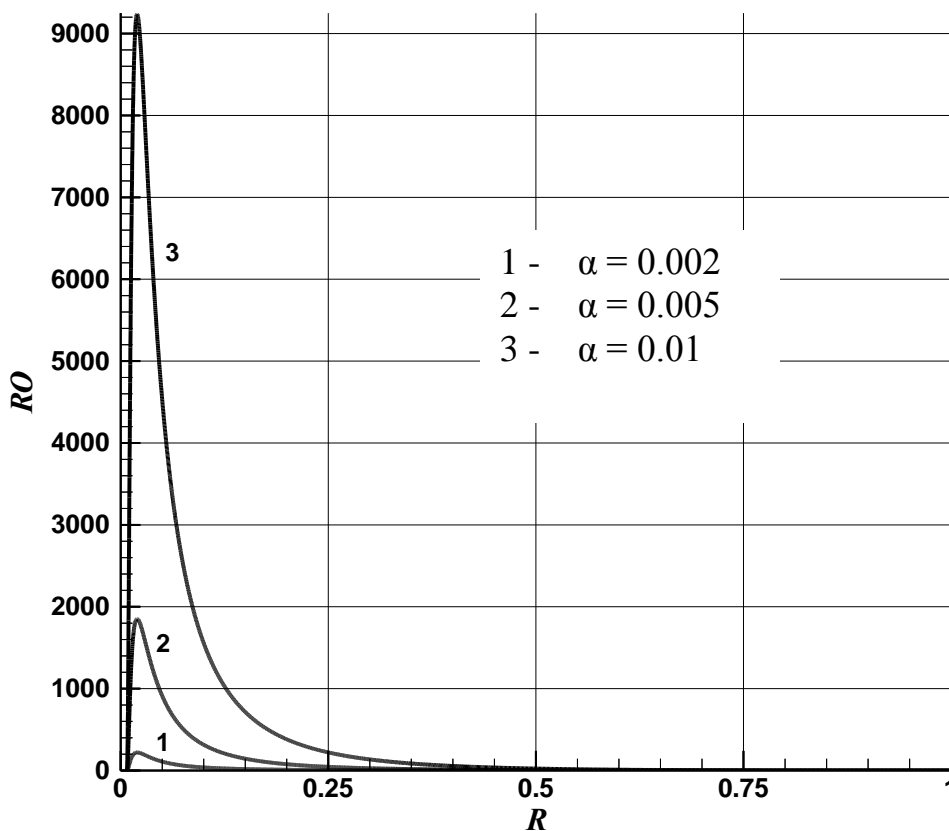


Рис. 4. Распределение плотности ( $RO$ ) в зависимости от радиуса ( $R$ ) в экваториальной плоскости протопланетного диска.

На рис. 5 показаны зависимости угловой скорости вращения ( $OMEGA$ ) среды диска от приведенного радиуса ( $R$ ) соответственно для  $\alpha=0.002$ ,  $\alpha=0.005$ ,  $\alpha=0.01$ , где  $OMEGA=r_{ex}^{3/2}\Omega/(GM_S)^{1/2}$ ,  $R=r/r_{ex}$  суть безразмерные переменные. Так как параметр  $\alpha$  мал, то в данном масштабе все три кривые сливаются в одну линию, которая представляет собой закон Кеплера.



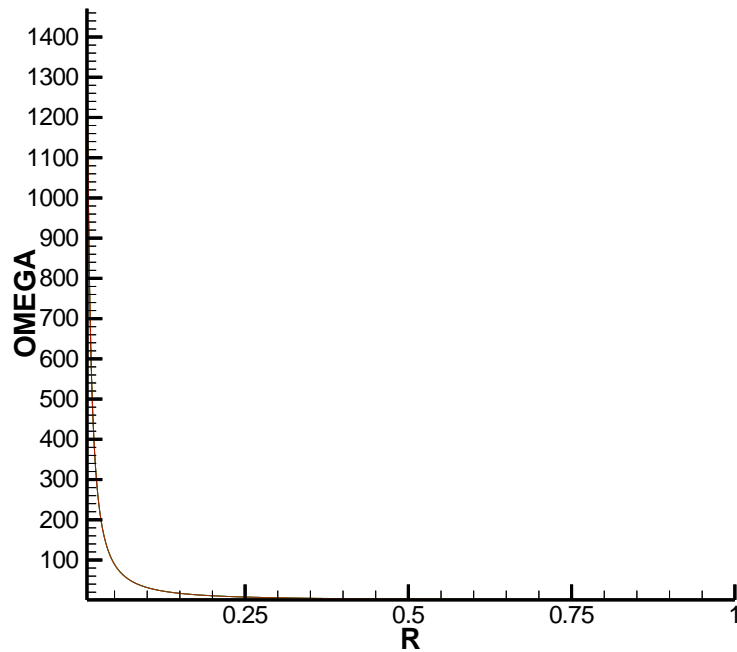


Рис. 5. Зависимость угловой частоты вращения ( $OMEGA$ ) среды протопланетного диска в зависимости от радиуса ( $R$ ).

Зависимости температуры ( $T$ ) среды диска от радиуса ( $r$ ) соответственно для  $\alpha = 0.001$ ,  $\alpha = 0.003$ ,  $\alpha = 0.005$ ,  $\alpha = 0.007$  представлены на рис. 6.

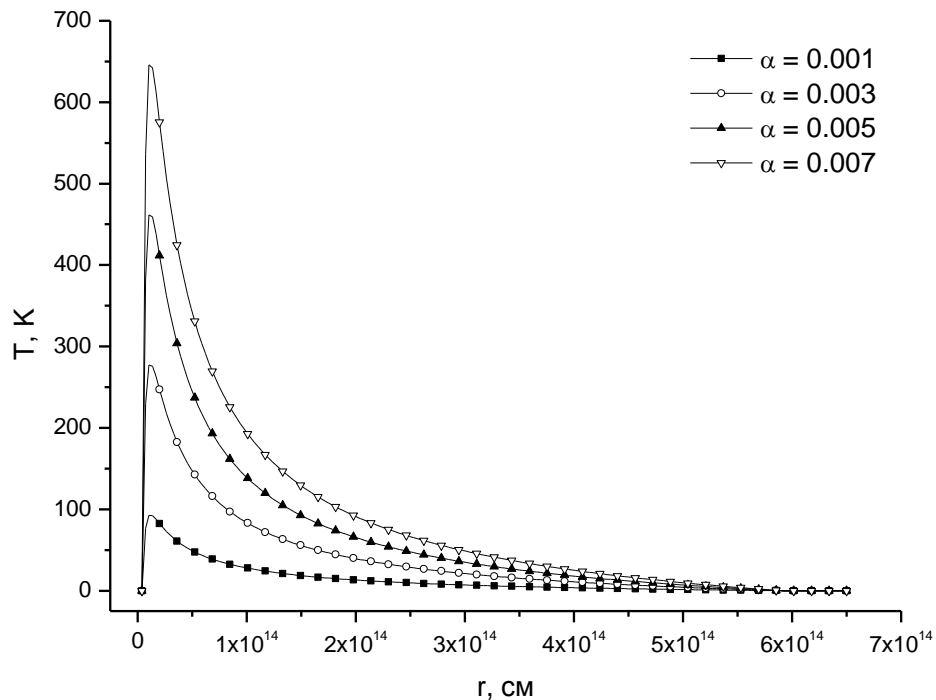


Рис. 6. Зависимости температуры среды ( $T$ ) от радиуса ( $r$ ) в экваториальной плоскости протопланетного диска.

Из представленных рисунков видно, что плотность, давление и температура возрастают при увеличении массы диска.

Итак, в аналитической модели в приближении Роша получены все характеристики, необходимые для описания протопланетного диска Солнца.

При исследованиях диска на гравитационную неустойчивость целесообразно в первую очередь провести оценки по критерию Джинса (формула (3\*)). Действительно, если по критерию Джинса протопланетный диск устойчив, то на этом фактически можно и закончить исследования, так как последующие поправки только увеличивают его устойчивость.

Как известно [8], критерий Джинса получен для однородной среды. В отличие от этого случая протопланетный диск в аналитической модели, как видно из рис. 1, 2, 3, существенно неоднороден по плотности, и его максимальная плотность находится в экваториальной плоскости (см. рис. 1, 2, 3, 4). Поэтому возможная гравитационная неустойчивость должна развиваться из района экваториальной плоскости.

Для оценки гравитационной неустойчивости применим представленный в предыдущем препринте (часть I) критерий Джинса (3) локально в точках экваториальной плоскости [10]. На рис. 7, 8, 9 представлены зависимости  $\lambda_j$  от радиуса. На этих же рисунках приведены прямые  $\lambda = r$ , которые соответствуют возможным длинам волн радиальных возмущений в диске, исходя из его радиальных размеров.

Таким образом, из сравнения этих двух зависимостей  $\lambda_j(r)$  и  $\lambda(r)$  можно легко сделать вывод о подверженности протопланетного диска гравитационной неустойчивости в тех его областях, где выполняется условие  $\lambda_j < \lambda$ , т.е. где критическая длина волны Джинса оказывается меньше радиуса.

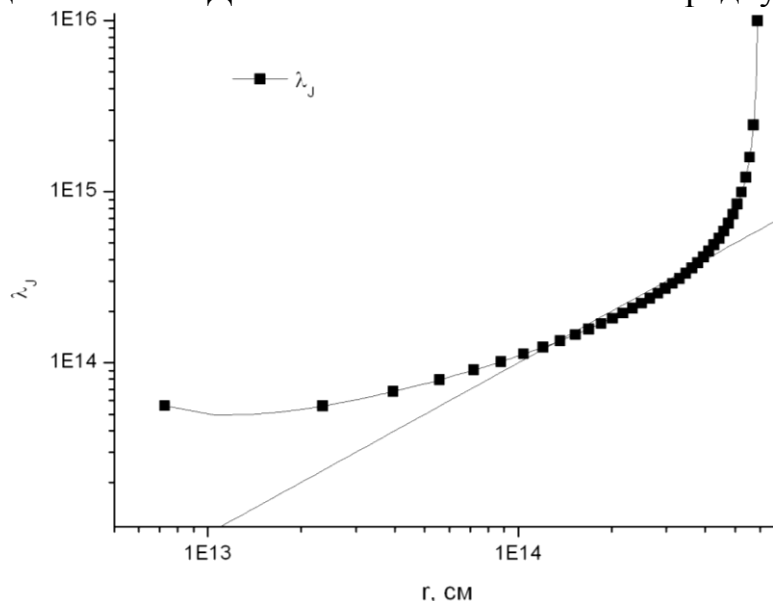


Рис. 7. Распределение критической длины волны Джинса для  $\alpha = 0.002$ ,  $M_d \approx 7.168 \cdot 10^{-3} M_s$ .

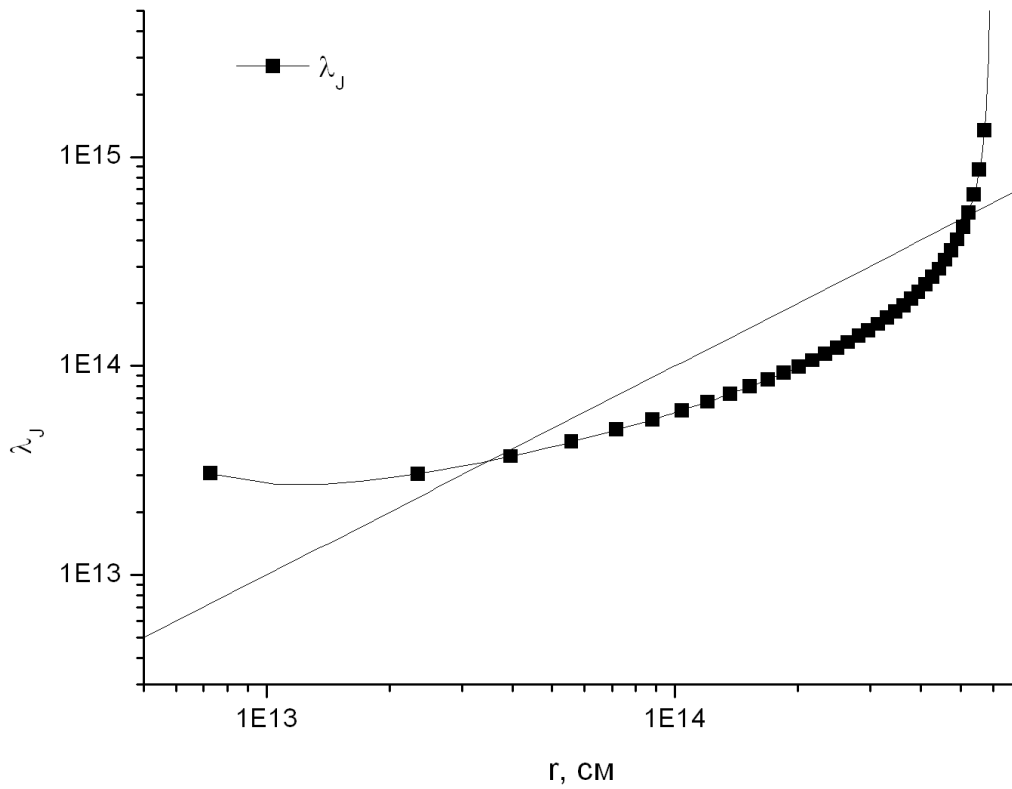


Рис. 8. Распределение критической длины волны Джинса для  $\alpha = 0.005$ ,  $M_d \approx 0.096 \cdot M_s$ .

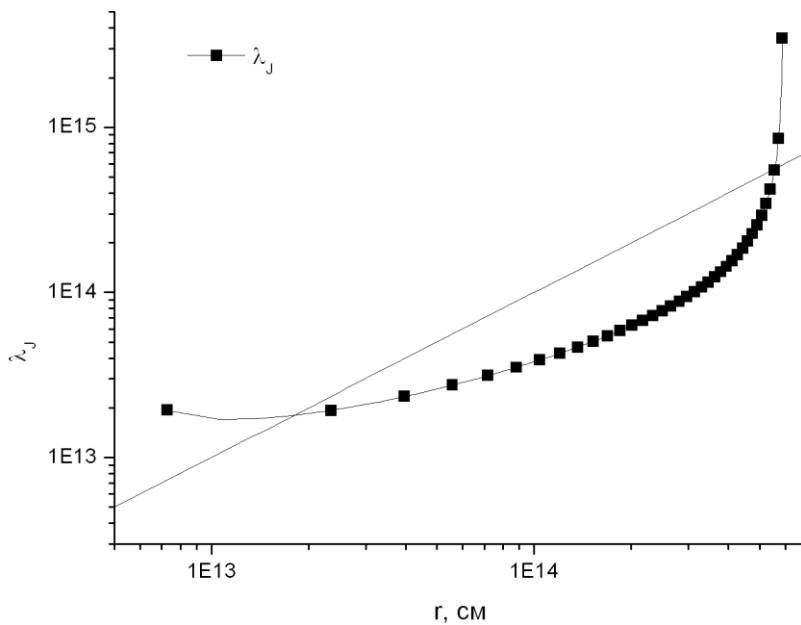


Рис. 9. Распределение критической длины волны Джинса для  $\alpha = 0.01$ ,  $M_d \approx 0.667 \cdot M_s$ .

Из графиков, приведенных на рис. 7, 8, 9, видна одна характерная особенность протопланетного диска: в диске существуют области, прилегающие к его границам, где критическая длина волны Джинса заведомо больше его характерных радиальных размеров, т.е. эти области сами по себе гравитационно устойчивы. Это легко понять. Возьмем критерий Джинса, представленный в виде:

$$\lambda_J^2 = c^2 \frac{\pi}{G\rho}. \quad (1.3)$$

Скорость звука можно записать как:

$$c^2 = \gamma \frac{P}{\rho} = \gamma \frac{K\rho^\gamma}{\rho} = \gamma K \rho^{\gamma-1}. \quad (1.4)$$

Отсюда находим:

$$\lambda_J^2 = c^2 \frac{\pi}{G\rho} = \frac{\gamma K \pi}{G\rho^{2-\gamma}}. \quad (1.5)$$

Из выражение (1.5) видно, что при приближении к границам диска (в этом случае  $\rho \rightarrow 0$ )  $\lambda_J \rightarrow \infty$ , т.е существуют области, прилегающие к его границам, которые гравитационно устойчивы. С другой стороны, из графиков, приведенных на рис. 7, 8, 9, отчетливо видно, что для всех трех рассмотренных случаев существуют внутренние области, где  $\lambda > \lambda_J$ , т.е. эти области могут быть гравитационно неустойчивы. С ростом массы протопланетного диска размеры гравитационно неустойчивых областей увеличиваются.

Таким образом, для изучения гравитационной устойчивости протопланетного диска необходимо продолжить исследования в более точной постановке.

## **2. Система уравнений для описания среды в экваториальной плоскости протопланетного диска**

Поскольку гравитационная неустойчивость протопланетного диска зарождается в экваториальной плоскости, то целесообразно исследовать именно эту область диска.

Введем субстанциональную производную ([9], стр. 173):

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (2.1)$$

Тогда уравнения (16\*) - (20\*) запишутся в более компактном виде:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\rho v}{r}, \quad (2.2)$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (2.3)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (2.4)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{vw}{r}, \quad (2.5)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho c^2 \frac{v}{r} = 0, \quad (2.6)$$

$$p = (\gamma - 1) \varepsilon \rho. \quad (2.7)$$

Экваториальная плоскость протопланетного диска соответствует  $x = 0$ .

В этой плоскости в силу симметрии выполняются следующие соотношения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad u = 0. \quad (2.8)$$

Используя эти соотношения, преобразуем систему уравнений (2.2) – (2.6):

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) = -\frac{\rho v}{r}, \quad (2.9)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{w^2}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad (2.10)$$

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{vw}{r}, \quad (2.11)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho c^2 \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \rho c^2 \frac{v}{r} = 0. \quad (2.12)$$

Как было сказано выше, вещество диска подчиняется политропному уравнению состояния  $P(\rho) = K\rho^\gamma$ . При сделанных предположениях уравнение (2.12) (закон сохранения энергии) и уравнение (2.9) (закон сохранения массы) совпадают. Таким образом, в нашем случае остаются три уравнения: (2.9), (2.10), (2.11).

К этим уравнениям следует добавить уравнение Пуассона для среды в экваториальной плоскости протопланетного диска:

$$\Delta\varphi(x, r, t) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho(x, r, t). \quad (2.13)$$

Можно показать, что задача протопланетного диска в приближении Роша имеет стационарное решение, соответствующее равновесному состоянию вращающегося диска.

Примем следующие предпосылки, которые в какой-то мере аналогичны предпосылкам, сделанным Джинсом в случае однородной изотропной среды:

- допустим, что существует стационарное равновесное состояние протопланетного диска и в том случае, когда учитывается собственное гравитационное поле диска;
- допустим, что зависимость плотности вещества диска от радиуса в этом состоянии подобна соответствующим зависимостям задачи протопланетного диска в приближении Роша и в первом приближении соответствует этим зависимостям.

### 3. Линеаризация системы уравнений, описывающих среду в экваториальной плоскости протопланетного диска

Проведем линеаризацию уравнений (2.9) – (2.11), а также уравнения Пуассона (2.13) относительно выбранного нами стационарного равновесного состояния протопланетного диска.

Допустим, что в некоторый момент времени система, до этого находившаяся в равновесном состоянии, каким-либо способом выведена из этого состояния. Тогда в последующие моменты времени она будет описываться функциями  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $\varphi$ , которые могут быть представлены в виде:

$$\rho = \rho_n + \rho_\Delta, \quad v = v_\Delta, \quad p = p_n + p_\Delta, \quad \varphi = \varphi_n + \varphi_\Delta, \quad (3.1)$$

где индексом «н» обозначено начальное состояние, относительно которого происходит разложение.

Подставляя соотношения (3.1) в уравнения (2.9) – (2.11), (2.13) и используя выражение (2.1) для субстанциональной производной, получаем:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \left( \frac{\partial \rho_n}{\partial r} + \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) + (\rho_n + \rho_\Delta) \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_\Delta}{r}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} - \frac{1}{\rho_n} \left( \frac{\rho_\Delta}{\rho_n} \right) \left( \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} + \frac{\partial p_n}{\partial r} \right) = \frac{2w_n w_\Delta}{r} + \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial (w_n + w_\Delta)}{\partial r} = -\frac{v_\Delta w_n}{r}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_{\Delta}}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_{\Delta}. \quad (3.5)$$

В этих уравнениях сохранены члены, содержащие произведения вида  $\rho_{\Delta} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r}$ ,  $v_{\Delta} \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial r}$  и т.д., так как в зависимости от вида возмущений соответствующие производные от параметров возмущений по координате  $r$  могут быть не малы, например, возмущения прямоугольного профиля. В этом случае члены, содержащие указанные произведения, могут быть сравнимы с величинами первого порядка малости.

Сделаем некоторые замечания по поводу системы уравнений (16\*) – (20\*) и системы (3.2) – (3.5). Система уравнений (16\*) – (20\*) описывает общее состояние протопланетного диска, включая его основное состояние и возникающие в нем возмущения. Поэтому при численных расчетах, которые производятся с помощью этой системы уравнений, одна из основных задач заключается в том, чтобы численный метод мог «держать» основное равновесное состояние диска [10, 11, 12]. Если этого не происходит, то в возмущенном состоянии численный метод неминуемо будет давать ошибки. Система уравнений (3.2) – (3.5), в отличие от системы (16\*) – (20\*), описывает только возмущения, которые происходят на фоне основного состояния среды диска. Основное состояние в этой системе уравнений не рассчитывается – оно задается с помощью физических характеристик основного состояния  $(p_n, \rho_n, w_n)$ , которые входят в эти уравнения как заданные функции от радиуса. Если оценки о равновесности основного состояния сделаны некорректно, как это было в случае исследований Джинса, то система уравнений этого просто «не заметит». Это обстоятельство в какой-то мере объясняет «природу» парадокса Джинса. Описанная особенность системы уравнений (3.2) – (3.5) будет использована в наших дальнейших исследованиях.

#### 4. Дисперсионные уравнения

Покажем, что из системы уравнений (3.2) – (3.5) путем несложных предельных переходов могут быть выведены основные дисперсионные уравнения, которые были получены в работах [8, 13, 14].

При предельном переходе от уравнений протопланетного диска к уравнениям однородной бесконечной среды следует из рассматриваемой системы исключить Солнце, а в уравнениях (3.2) – (3.5) производные  $\frac{\partial \rho_n}{\partial r}$ ,

$\frac{\partial p_n}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi_{\Delta}}{\partial x^2}$  положить равными нулю.

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = \frac{\partial p_n}{\partial r} = \frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2} = 0. \quad (4.1)$$

#### 4.1. Бесконечная однородная изотропная среда

Допустим, что нам необходимо сделать предельный переход к бесконечной однородной и изотропной среде. Тогда, кроме исключения из системы Солнца и введения в уравнения (3.2) – (3.5) равенств (4.1), следует приравнять нулю угловую скорость вращения:

$$\Omega_n = 0. \quad (4.2)$$

Учитывая в уравнениях (3.2) – (3.5) равенства (4.1), (4.2) и сохраняя члены только первого порядка малости, получаем:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_\Delta}{r}, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} = \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r}. \quad (4.4)$$

Данная задача отличается от классического рассмотрения Джинса только тем, что в ней исследование проводится в цилиндрических координатах и возмущения являются радиальными и осесимметричными вместо плоской волны.

Преобразуем уравнение (4.4) так, чтобы член в правой его части был равен  $\nabla^2 \varphi_\Delta$ . Для этого приведем уравнение (4.4) к виду:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\Delta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (\varphi_\Delta)}{\partial r} \right). \quad (4.5)$$

Запишем уравнение (4.3) как:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r v_\Delta)}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t}. \quad (4.6)$$

Подставляем выражение (4.6) в уравнение (4.5):

$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = \rho_n \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (\varphi_\Delta)}{\partial r} \right). \quad (4.7)$$

Уравнение Пуассона в данной постановке записывается как:

$$\frac{\partial}{r \partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_\Delta. \quad (4.8)$$

Подставляем соотношение (4.8) в уравнение (4.7):



$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_n \rho_\Delta. \quad (4.9)$$

Проведем линейризацию уравнения состояния  $p = K\rho^\gamma$ , чтобы получить зависимость  $p_\Delta(\rho_\Delta)$ :

$$p_n + p_\Delta = K\rho_n^\gamma \left(1 + \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}\right)^\gamma = K\rho_n^\gamma \left(1 + \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}\right) = K\rho_n^\gamma + K\rho_n^\gamma \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}.$$

Отсюда

$$p_\Delta = K\rho_n^\gamma \gamma \frac{\rho_\Delta}{\rho_n} = K\rho_n^{\gamma-1} \gamma \rho_\Delta. \quad (4.10)$$

Находим скорость звука из соотношения:

$$C_n^2 = \frac{\gamma \cdot p_n}{\rho_n} = \frac{\gamma \cdot K \cdot \rho_n^\gamma}{\rho_n} = \gamma \cdot K \cdot \rho_n^{\gamma-1}. \quad (4.11)$$

С учетом этого выражения соотношение (4.10) запишется в виде:

$$p_\Delta = K\rho_n^{\gamma-1} \gamma \rho_\Delta = C_n^2 \rho_\Delta. \quad (4.12)$$

Используя выражение (4.12), проведем преобразование уравнения (4.9):

$$-\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} + \frac{C_n^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_n \rho_\Delta. \quad (4.13)$$

В рассматриваемой постановке будем искать решения, когда возмущения плотности являются радиальными. Найдем частное решение уравнения (4.13). Допустим, что радиальная волна возмущения плотности описывается выражением:

$$\rho_\Delta = \rho_{\Delta,o} f(r) e^{i\alpha t} e^{ikr}, \quad (4.14)$$

где

$\rho_{\Delta,o}$  – постоянная величина,

$f(r)$  – функция от радиуса, которая находится из условия, что дисперсионное уравнение является действительным выражением, т.е. не содержит мнимой части,

$\omega, k$  – константы.

В этих предположениях выражение (4.14) приводится к виду:

$$\rho_\Delta = \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{i\alpha t} e^{ikr}. \quad (4.15)$$

Подставляя выражение (4.15) в уравнение (4.13), находим дисперсионное уравнение (в локальном приближении  $\Delta r \ll r_o$ ):

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n - \frac{C_n^2}{4r_o^2}. \quad (4.16)$$

В случае плоских возмущений дисперсионное уравнение (2), представленное в предыдущем препринте (часть I), не содержит третьего члена, который присутствует в правой части уравнения (4.16). Появление в нашем случае дополнительного члена в дисперсионном уравнении, вероятно, означает, что радиальные возмущения данного типа обладают большим диапазоном устойчивости.

Оценки показывают, что слагаемое  $\frac{C_n^2}{4r^2}$  мало по сравнению с  $C_n^2 k^2$ , если  $\frac{\lambda^2}{16\pi^2 r^2} \ll 1$ , где  $\lambda$  – длина волны возмущений. В этом случае уравнение (4.16) совпадает с дисперсионным уравнением (2\*).

Формально в данной постановке можно устремить температуру невозмущенной среды к абсолютному нулю (приближение «холодного» газа). В этом пределе в уравнении (4.9) можно пренебречь членом, содержащим давление. Тогда получаем следующее дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = -4\pi G \rho_n = -\omega_J^2, \quad (4.17)$$

которое описывает главную неустойчивость гравитирующей среды и полностью совпадает с дисперсионным уравнением, полученным Джинсом, где  $\omega_J$  – джинсовская частота (частота Джинса).

#### 4.2. Бесконечная однородная среда, вращающаяся как твердое тело

Перейдем к рассмотрению однородной бесконечной среды, которая вращается как твердое тело. В этом случае угловая частота вращения постоянна для любой частицы среды и не зависит от радиуса. Для начального невозмущенного состояния остаются в силе все предположения, которые были сделаны для бесконечной однородной и изотропной среды, кроме ее изотропности. В этой задаче  $w_n \neq 0$ , и линеаризованные уравнения могут быть представлены в виде:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \rho_n \frac{\partial v_\Delta}{\partial r} = -\frac{\rho_n v_\Delta}{r}, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + \frac{1}{\rho_n} \frac{\partial p_\Delta}{\partial r} = \frac{2w_n w_\Delta}{r} + \frac{\partial \phi_\Delta}{\partial r}, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial w_n}{\partial r} = -\frac{v_\Delta w_n}{r}, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_{\Delta}}{\partial r}\right)=-4\pi G\rho_{\Delta}. \quad (4.21)$$

Далее в этой системе уравнений проводим преобразования, аналогичные тем, которые были проведены для случая бесконечной однородной и изотропной среды с целью преобразовать  $\frac{\partial\varphi_{\Delta}}{\partial r}$  в  $\nabla^2\varphi_{\Delta}$ . В итоге получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial t}+\rho_{\text{H}}\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r}=-\frac{\rho_{\text{H}}v_{\Delta}}{r}, \quad (4.22)$$

$$-\frac{\partial^2\rho_{\Delta}}{\partial t^2}+\frac{\rho_{\text{H}}}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{1}{\rho_{\text{H}}}\frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r}\right)=\frac{2\rho_{\text{H}}w_{\text{H}}}{r}\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial r}+\frac{2\Omega_{\text{H}}\rho_{\text{H}}}{r}w_{\Delta}-4\pi G\rho_{\text{H}}\rho_{\Delta}, \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t}+v_{\Delta}\Omega_{\text{H}}=-\frac{v_{\Delta}w_{\text{H}}}{r}, \quad (4.24)$$

где

$$w_{\text{H}}=\Omega_{\text{H}}r. \quad (4.25)$$

Используя выражения (4.25) и (4.12), эту систему уравнений преобразуем к виду:

$$\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial t}+\rho_{\text{H}}\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r}=-\frac{\rho_{\text{H}}v_{\Delta}}{r}, \quad (4.26)$$

$$-\frac{\partial^2\rho_{\Delta}}{\partial t^2}+\frac{C_{\text{H}}^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial r}\right)=\frac{2\rho_{\text{H}}\Omega_{\text{H}}}{r}w_{\Delta}+2\rho_{\text{H}}\Omega_{\text{H}}\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial r}-4\pi G\rho_{\text{H}}\rho_{\Delta}, \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t}=-2v_{\Delta}\Omega_{\text{H}}. \quad (4.28)$$

Возьмем возмущение плотности и линейной скорости вращения в виде, который позволяет получить дисперсионное уравнение в форме действительного выражения:

$$\rho_{\Delta}=\rho_{\Delta,o}r^{\frac{1}{2}}e^{i\alpha t}e^{ikr}, \quad (4.29)$$

$$w_{\Delta}=w_{\Delta,o}e^{i\alpha t}e^{ikr}. \quad (4.30)$$

Подставляя эти выражения в систему уравнений и исключая из нее скорость ( $v_{\Delta}$ ), получаем:

$$\rho_{\Delta} i\omega + w_{\Delta} \left( \rho_n \frac{\omega}{2\Omega_n} k - \frac{\rho_n}{r} \frac{i\omega}{2\Omega_n} \right) = 0, \quad (4.31)$$

$$-\rho_{\Delta} (i\omega)^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_n \Omega_n}{r} w_{\Delta} + 2\rho_n \Omega_n w_{\Delta} i k - 4\pi G \rho_n \rho_{\Delta}. \quad (4.32)$$

Исключая возмущение линейной скорости вращения ( $w_{\Delta}$ ) из этих двух уравнений, находим дисперсионное уравнение (в локальном приближении  $\Delta r \ll r_o$ ):

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 + 4\Omega_n^2 - 4\pi G \rho_n - \frac{C_n^2}{4r_o^2}. \quad (4.33)$$

Дисперсионное уравнение (4.33) отличается от уравнения, полученного Чандрасекхаром [13], последним слагаемым в правой части. Последним членом в уравнении (4.33) можно пренебречь, если  $\frac{\lambda^2}{16\pi^2 r^2} \ll 1$ .

При температуре, стремящейся к абсолютному нулю, (приближение «холодного» газа) дисперсионное уравнение переходит в уравнение

$$\omega^2 = 4\Omega_n^2 - 4\pi G \rho_n, \quad (4.34)$$

которое полностью совпадает с уравнением, полученным Чандрасекхаром.

В данной постановке полученные дисперсионные уравнения характеризуют возмущения, распространяющиеся перпендикулярно оси вращения среды. Нетрудно получить дисперсионное уравнение для плоских возмущений, которые распространяются параллельно оси вращения. В этом случае они совпадают с дисперсионными уравнениями Джинса (1\*), (2\*), которые были получены для бесконечной однородной изотропной среды.

Из дисперсионного уравнения (4.34) следует важный вывод: если

$$\frac{4\Omega_n^2}{4\pi G \rho_n} \equiv \frac{4\Omega_n^2}{\omega_J^2} > 1, \quad (4.35)$$

то радиальные возмущения, распространяющиеся перпендикулярно оси вращения среды, подавляются и среда становится гравитационно устойчивой в этом направлении.

### 4.3. Бесконечная однородная среда при неоднородном вращении

Допустим, что закон вращения бесконечной однородной среды является дифференциальным. В этом случае система уравнений (3.2) – (3.5) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_{\text{н}} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_{\text{н}} v_{\Delta}}{r}, \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial t} + \frac{1}{\rho_{\text{н}}} \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} = \frac{2w_{\text{н}} w_{\Delta}}{r} + \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial r} = -\frac{v_{\Delta} w_{\text{н}}}{r}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi_{\Delta}}{\partial r} \right) = -4\pi G \rho_{\Delta}, \quad (4.39)$$

где

$$w_{\text{н}} = \Omega_{\text{н}}(r) \cdot r.$$

Используя метод преобразования для этой системы, описанный в предыдущих разделах, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial t} + \rho_{\text{н}} \frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r} = -\frac{\rho_{\text{н}} v_{\Delta}}{r}, \quad (4.40)$$

$$-\frac{\partial^2 \rho_{\Delta}}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p_{\Delta}}{\partial r} \right) = \frac{2\rho_{\text{н}}}{r} \frac{\partial}{\partial r} (w_{\text{н}} w_{\Delta}) - 4\pi G \rho_{\text{н}} \rho_{\Delta}, \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial w_{\Delta}}{\partial t} + v_{\Delta} \frac{\partial w_{\text{н}}}{\partial r} = -\frac{v_{\Delta} w_{\text{н}}}{r}. \quad (4.42)$$

Анализ этой системы уравнений показывает, что рассматриваемая среда в каждой точке пространства в зависимости от радиуса имеет определенную угловую скорость, отличную от других точек, и главная гравитационная неустойчивость включает при этом угловую скорость вращения и тоже зависит от радиуса. В этом случае, в отличие от однородного вращения среды,  $\omega$  и  $k$  суть функции от радиуса и представление решения системы (4.40) – (4.42) на всех интервалах значений радиуса и времени в виде  $e^{i\alpha t} e^{ikr}$  с постоянными значениями  $\omega$  и  $k$ , вообще говоря, не имеет места. Однако в некотором локальном приближении решение в виде  $e^{i\alpha t} e^{ikr}$  с постоянными значениями  $\omega$  и  $k$  может существовать.

Будем искать решения системы (4.40) - (4.42) в виде:

$$\rho_{\Delta} = f(r) e^{i\alpha t}, \quad (4.43)$$

$$v_{\Delta} = A(r) e^{i\alpha t}, \quad (4.44)$$

$$w_{\Delta} = B(r)e^{i\omega t}, \quad (4.45)$$

где

$\omega$  – константа.

Подставляя решение (4.43) в уравнение (4.40) и интегрируя его, получаем:

$$v_{\Delta}(r, t) = \frac{r_0 v_{\Delta}(r_0, t)}{r} - \frac{i\omega}{\rho_n} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r x \rho_{\Delta} dx. \quad (4.46)$$

Рассматривая точку  $r_0$  как начальную координату возмущения, можно положить  $v_{\Delta}(r_0, t) = 0$ , и тогда выражение (4.46) запишется в более простом виде:

$$v_{\Delta}(r, t) = -\frac{i\omega}{\rho_n} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r x \rho_{\Delta} dx. \quad (4.47)$$

Подставляем выражение (4.45) в уравнение (4.42), находим:

$$B(r) = -\frac{1}{i\omega} A(r) \left( r \frac{\partial \Omega_n}{\partial r} + 2\Omega_n \right). \quad (4.48)$$

Используя выражения (4.43), (4.47) и (4.48), преобразуем уравнение (4.41):

$$f(r) \left( \omega^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2 \right) + \frac{C_n^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial (f(r))}{\partial r} \right) = + \frac{1}{r} \left( \int_{r_0}^r x f(x) dx \right) \frac{\partial \chi^2}{\partial r}, \quad (4.49)$$

где

$\chi^2 = 4\Omega_n^2 + r \frac{d\Omega_n^2}{dr}$  есть квадрат эпициклической частоты.

Можно показать, что существует частное решение уравнения (4.49)

$$f(r) = \rho_{\Delta,0} r^{\frac{1}{2}} e^{ikr}, \quad (4.50)$$

которое приводит к действительному дисперсионному уравнению.

Подставляя выражение (4.50) в уравнение (4.49), получаем:

$$f(r) \left( \omega^2 - C_n^2 k^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2 + C_n^2 \frac{1}{4r^2} \right) = + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \left( \int_{r_0}^r x f(x) dx \right). \quad (4.51)$$

Если  $\Omega_n$  есть постоянная частота вращения среды, то  $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$ , и уравнение

(4.51) переходит в уравнение (4.33).

Проведем рассмотрение уравнения (4.51) в некотором локальном приближении в окрестности точки  $r_0$ . Для этого представим квадрат эпициклической частоты в виде разложения в окрестности точки  $r_0$ .

$$\chi^2 = \chi_o^2 + \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o} (r - r_o) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial r^2} \right|_{r=r_o} (r - r_o)^2 . \quad (4.52)$$

Допустим, что задается не волна возмущения, а локальное возмущение на отрезке  $r_o \leq r \leq r_1$ .

В этом случае всегда можно выбрать интервал, такой, что

$$\chi_o^2 \gg \left| \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o} \right| (r_1 - r_o) \quad (4.53)$$

и

$$(r_1 - r_o) \ll \frac{\chi_o^2}{\left| \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o} \right|} . \quad (4.54)$$

Следует подчеркнуть, что интервал  $r_o \leq r \leq r_1$  не обязательно должен получиться малым – все зависит от изменения квадрата эпициклической частоты с расстоянием.

Тогда, если выполнено неравенство (4.53), то на интервале  $[r_o, r_1]$

$$\chi^2 \approx \chi_o^2 . \quad (4.55)$$

Отсюда на интервале  $[r_o, r_1]$

$$\left| \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_o} \right| \approx 0 . \quad (4.56)$$

В данном локальном приближении уравнение (4.51) запишется в виде дисперсионного уравнения:

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2 - C_n^2 \frac{1}{4r_o^2} . \quad (4.57)$$

При температуре, стремящейся к абсолютному нулю (приближение «холодного» газа), это дисперсионное уравнение переходит в уравнение:

$$\omega^2 = \chi^2 - 4\pi G \rho_n . \quad (4.58)$$

В случае когда угловая частота вращения есть постоянная величина, не зависящая от радиуса, дисперсионное уравнение (4.58) преобразуется в дисперсионное уравнение Чандрасекхара (4.34), а уравнение (4.57) переходит в

дисперсионное уравнение, которое отличается от соответствующего дисперсионного уравнения Чандрасекхара последним членом.

В работе [14] при решении данной задачи было получено дисперсионное уравнение в окрестности точки  $r_o$  (локальное приближение); записанное в переменных, принятых в настоящей работе, оно имеет вид:

$$\omega^2 = C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \frac{2\Omega_n}{r} (\Omega_n r^2)' + \frac{C_n^2}{4r_o^2}, \quad (4.59)$$

где

$$\frac{2\Omega_n}{r} (\Omega_n r^2)' = \chi^2 \text{ есть квадрат эпициклической частоты.}$$

Видно, что уравнение (4.59) отличается от уравнения (4.57) знаком последнего члена.

Эта же задача была рассмотрена в работе [15], и в ней было получено следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 \approx C_n^2 k^2 - 4\pi G \rho_n + \chi^2. \quad (4.60)$$

Это дисперсионное уравнение отличается от уравнений (4.59) и (4.57) отсутствием четвертого слагаемого в правой части.

Необходимо понять причину наблюдаемых расхождений. Исходная система уравнений для данного приближения, с которой проводятся исследования в работах [14], [15] и в настоящем исследовании, является одинаковой. Метод преобразования системы уравнений, который принят в работе [14], отличается от метода, используемого в работе [15], а последний совпадает с методом данной работы. Однако можно показать, что результаты преобразования системы на промежуточной стадии, когда система уравнений сводится к одному уравнению, в общем одинаковы. В работе [14] исходная система уравнений преобразована в следующее уравнение:

$$(\omega^2 + 4\pi G \rho_n - \chi^2) \frac{1}{r} \int_{r_o}^r x f(x) dx + C_n^2 \frac{\partial f(r)}{\partial r} = 0. \quad (4.61)$$

Умножим это уравнение на  $r$  и продифференцируем:

$$\begin{aligned} (\omega^2 + 4\pi G \rho_n - 2\Omega_n (r \frac{\partial \Omega_n}{\partial r} + 2\Omega_n)) r f(r) + C_n^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) - \\ - \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \int_{r_o}^r x f(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Разделив это уравнение на  $r$ , приходим к уравнению, полученному в работе [15] и в данных исследованиях:



$$(\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2)f(r) + C_n^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f(r)}{\partial r} \right) = \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \frac{1}{r} \int_{r_0}^r x f(x) dx. \quad (4.63)$$

Таким образом, результаты на этой стадии исследований, полученные в работах [14], [15] и в данных исследованиях, совпадают.

Далее в работе [15] правой частью уравнения (4.63) пренебрегают, что далеко не всегда верно. Окончательное уравнение в работе [15] представлено в виде:

$$C_n^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial s}{\partial r} \right) + s(\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2) = 0, \quad (4.64)$$

где

$$s = \frac{\rho_\Delta}{\rho_n}.$$

Решение этого уравнения в случае ограниченного цилиндра авторы [15] дают в виде стоячей волны:

$$s = BJ_0(qr) \cdot \exp i\omega t. \quad (4.65)$$

Авторы же работы [14] точно преобразовывают уравнение (4.61) и получают уравнение:

$$\frac{d^2}{dr^2} F(r) - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} F(r) + \frac{1}{C_n^2} (\omega^2 + 4\pi G\rho_n - \chi^2) F(r) = 0, \quad (4.66)$$

где

$$F(r) = \int_{r_0}^r x f(x) dx.$$

В дальнейшем в работе [14] рассматривается локальное приближение в окрестности точки  $r_0$ .

Таким образом, анализ показывает, что вид дисперсионного уравнения зависит от выбранного приближения и от вида задаваемого возмущения.

#### 4.4. Дисперсионное уравнение для среды в экваториальной плоскости протопланетного диска

В случае протопланетного диска исследование системы уравнений (3.2) – (3.5) становится значительно более сложным. Во-первых, невозмущенная плотность в протопланетном диске изменяется в зависимости от радиуса. Во-вторых, в уравнении Пуассона вторая производная в экваториальной плоскости  $\frac{\partial^2 \varphi_\Delta}{\partial x^2}$  в общем случае не равна нулю.

Для проведения дальнейшего исследования системы уравнений (3.2) – (3.5) воспользуемся результатами работы [15], в которой показано, что для плоского

вращающегося диска в дисперсионные уравнения должна быть внесена поправка, учитывающая конечную толщину диска. В этом случае в правую часть уравнения Пуассона (4.8) внесем поправку в виде коэффициента:

$$\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_{\Delta}}{\partial r}\right)=-4\pi G\rho_{\Delta}K_f, \quad (4.67)$$

где

$$K_f=\left(1+\frac{2}{kh}\right)^{-1}, \quad (4.68)$$

$$k=\frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{– волновое число,}$$

$h$  – толщина диска.

Оценим введенный в уравнение (4.67) коэффициент  $K_f$  для рассматриваемых нами протопланетных дисков. Для диска массой  $M_d \approx 0.667 \cdot M_s$  ( $\alpha=0.01$ ) и при длинах волн, которые соответствуют межпланетным расстояниям,  $K_f \geq 0.7$ , т.е.  $K_f$  близок к единице. С другой стороны, как показано в подразделе 4.3, вид дисперсионного уравнения зависит от задаваемого возмущения. Можно задать для протопланетного диска возмущение такое, что  $\frac{\partial^2\varphi_{\Delta}}{\partial x^2}=0$ , и получить для этого типа возмущений дисперсионное уравнение, которое будет соответствовать  $K_f=1$ . В силу сделанных замечаний дальнейшие преобразования будем проводить с уравнением Пуассона (4.8), а при необходимости вводить в уравнения соответствующие коэффициенты.

Проведем преобразование уравнений (3.2) – (3.5). В настоящей работе рассматриваются крупномасштабные возмущения без резких изменений в зависимости от расстояний, возмущения типа синусоидальных возмущений. В этом случае можно показать, что члены, содержащие произведения  $\rho_{\Delta}\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r}$ ,  $v_{\Delta}\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial r}$  и т.д., будут иметь второй порядок малости. В силу этого для упрощения задачи в системе уравнений (3.2) – (3.5) сохраним только члены первого порядка малости:

$$\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial t}+v_{\Delta}\left(\frac{\partial\rho_{\Delta}}{\partial r}\right)+\rho_{\Delta}\frac{\partial v_{\Delta}}{\partial r}=-\frac{\rho_{\Delta}v_{\Delta}}{r}, \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial^2 \rho_\Delta}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial \rho_H}{\partial r} \right) \frac{\partial v_\Delta}{\partial t} + \\
& + \frac{\rho_H}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_H^2}{\rho_H} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) - \\
& - \frac{\rho_H}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{1}{\rho_H} \left( \frac{\rho_\Delta}{\rho_H} \right) \left( \frac{\partial p_H}{\partial r} \right) \right) = \frac{\rho_H}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2w_H w_\Delta) - 4\pi G \rho_H \rho_\Delta,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} + v_\Delta \frac{\partial w_H}{\partial r} = -\frac{v_\Delta w_H}{r}. \tag{4.71}$$

Проведем дальнейшее преобразование этой системы уравнений. Уравнение (4.69), (4.71) можно записать, соответственно, в виде:

$$\frac{\partial \rho_\Delta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho_H v_\Delta) = 0, \tag{4.72}$$

$$\frac{\partial w_\Delta}{\partial t} = -\frac{\chi^2}{2\Omega_H} v_\Delta. \tag{4.73}$$

Будем искать решения системы уравнений (4.69) - (4.71) в виде:

$$\rho_\Delta = f(r) e^{i\omega t}, \tag{4.74}$$

$$v_\Delta = A(r) e^{i\omega t}, \tag{4.75}$$

$$w_\Delta = B(r) e^{i\omega t}, \tag{4.76}$$

где

$\omega$  – константа.

Следует сделать замечание, что в общем случае частота  $\omega$  может не быть константой, а изменяться в зависимости от расстояния  $r$ .

Подставляем выражения (4.74) - (4.76) в уравнения (4.72) и (4.73):

$$\frac{\partial}{\partial r} (\rho_H r v_\Delta) = -i\omega r \rho_\Delta, \tag{4.77}$$

$$w_\Delta = -\frac{\chi^2}{2\Omega_H i\omega} v_\Delta. \tag{4.78}$$

Проинтегрируем уравнение (4.77) по координате:

$$v_{\Delta}(r) = \frac{r_o \cdot \rho_H(r_o) \cdot v_{\Delta}(r_o)}{r \cdot \rho_H(r)} - \frac{i\omega}{r \cdot \rho_H(r)} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx, \quad (4.79)$$

где

$r_o$  – координата начала возмущения плотности.

В этом случае можно положить

$$v_{\Delta}(r_o) = 0.$$

Тогда выражение (4.79) принимает вид:

$$v_{\Delta}(r) = -\frac{i\omega}{r \cdot \rho_H(r)} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx. \quad (4.80)$$

Подставляем выражение (4.80) в соотношение (4.78)

$$w_{\Delta} = \frac{\chi^2}{r \cdot \rho_H(r) 2\Omega_H} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx. \quad (4.81)$$

Уравнение (4.69) может быть записано также как

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_{\Delta}) = -\frac{1}{\rho_H} i\omega \rho_{\Delta} - \frac{1}{\rho_H} v_{\Delta} \left( \frac{\partial \rho_H}{\partial r} \right). \quad (4.82)$$

Это уравнение потребуется для преобразования уравнения (4.70).

Приступаем к преобразованию уравнения (4.70). Используя выражения (4.78) и (4.82), преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} \frac{2\rho_H}{r} \frac{\partial}{\partial r} (w_H w_{\Delta}) &= \frac{\rho_H}{r} \frac{\partial}{\partial r} (2r\Omega_H w_{\Delta}) = \\ \rho_H \left( \chi^2 \frac{\rho_{\Delta}}{\rho_H} + \frac{1}{i\omega} v_{\Delta} \left( \chi^2 \frac{1}{\rho_H} \left( \frac{\partial \rho_H}{\partial r} \right) - \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \right) &= \\ = \chi^2 \rho_{\Delta} + \frac{1}{i\omega} v_{\Delta} \left( \chi^2 \left( \frac{\partial \rho_H}{\partial r} \right) - \rho_H \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (4.83)$$

Используя выражения (4.74) - (4.76) и (4.83), преобразуем уравнение (4.70) к виду:

$$\begin{aligned}
& -(i\omega)^2 \rho_\Delta - i\omega v_\Delta \frac{\partial \rho_n}{\partial r} + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) - \\
& - \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_n^2 \rho_\Delta}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) = \\
& = \chi^2 \rho_\Delta + \frac{1}{i\omega} v_\Delta \left( \chi^2 \left( \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) - 4\pi G \rho_n \rho_\Delta
\end{aligned} \tag{4.84}$$

Подставляем в это уравнение выражение (4.80)

$$\begin{aligned}
& \omega^2 \rho_\Delta - \chi^2 \rho_\Delta + 4\pi G \rho_n \rho_\Delta + \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_n^2}{\rho_n} \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = \\
& = \frac{\rho_n}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_n^2 \rho_\Delta}{\rho_n^2} \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right) + \omega^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \left( \frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \int_{r_0}^r x \rho_\Delta dx \right) - \\
& - \frac{1}{r \cdot \rho_n(r)} \left( \chi^2 \frac{\partial \rho_n}{\partial r} - \rho_n \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \int_{r_0}^r x \rho_\Delta dx.
\end{aligned} \tag{4.85}$$

Нетрудно видеть, что, полагая в этом уравнении  $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$ , приходим к уравнению (4.49), полученному по методу Бела и Шацмана [14]. Если в уравнении (4.85) принять  $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$ , то это уравнение переходит в уравнение (4.33), которое с точностью последнего члена совпадает с уравнением, полученным Чандрасекхаром в работе [13]. И, наконец, если предположить, что  $\frac{\partial \rho_n}{\partial r} = 0$ ,  $\frac{\partial \chi^2}{\partial r} = 0$  и  $\Omega_n = 0$ , то уравнение (4.85) преобразуется в уравнение, впервые полученное Джинсом.

По существу уравнение (4.85) есть дисперсионное уравнение. Приближенное решение этого уравнения наиболее просто может быть получено в локальном приближении в окрестности точки  $r_0$ . В уравнении (4.85)  $\chi$  и  $\rho_n$  суть функции от радиуса ( $r$ ). Проведем разложение этих величин в окрестности точки  $r_0$ .

$$\rho_n = \rho_{n,0} + \left. \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \rho_n}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2, \tag{4.86}$$

$$\chi^2 = \chi_0^2 + \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right|_{r=r_0} (r - r_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \chi^2}{\partial r^2} \right|_{r=r_0} (r - r_0)^2. \tag{4.87}$$

Допустим, что возмущение плотности задается на отрезке  $r_o \leq r \leq r_l$ . Всегда можно выбрать интервал, такой, что

$$\rho_{n,o} \gg \left| \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right|_{r=r_o} (r_l - r_o), \quad (4.88)$$

$$(r_l - r_o) \ll \frac{\rho_{n,o}}{\left| \frac{\partial \rho_n}{\partial r} \right|_{r=r_o}}. \quad (4.89)$$

Тогда, если выполнено неравенство (4.88), то на интервале  $[r_o, r_l]$

$$\rho_n \approx \rho_{n,o}. \quad (4.90)$$

Отсюда на этом интервале  $[r_o, r_l]$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial r} \approx 0. \quad (4.91)$$

Аналогичные соотношения могут быть написаны и для  $\chi^2$ .

Выбирая из двух интервалов по  $r$ , которые соответствуют величинам  $\rho_n$  и  $\chi^2$ , наименьший, будем иметь также на  $\min [r_o, r_l]$ :

$$\chi^2 \approx \chi_o^2, \quad (4.92)$$

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial r} \approx 0. \quad (4.93)$$

В данном локальном приближении правая часть уравнения (4.85) будет равна нулю. В левой части уравнения (4.85)  $\rho_n$ ,  $\chi^2$  и  $C_n^2$  берутся в точке  $r_o$ .

Уравнение (4.85) в этом случае запишется в виде:

$$(\omega^2 - \chi^2(r_o) + 4\pi G \rho_n(r_o)) \rho_\Delta + \frac{C_n^2(r_o)}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \rho_\Delta}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.94)$$

Существует частное решение уравнения (4.94) в виде:

$$\rho_\Delta = f(r) e^{i\alpha r} = \rho_{\Delta,o} r^{-\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\alpha r}, \quad (4.95)$$

где

$\rho_{\Delta,o}$  – постоянная.

Действительно, подставим это решение в уравнение (4.94):

$$\begin{aligned}
& (\omega^2 - \chi^2(r_o) + 4\pi G\rho_h(r_o))\rho_{\Delta,o} r^{\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\alpha t} - C_h^2(r_o)k^2 \rho_{\Delta,o} r^{\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\alpha t} + \\
& + C_h^2(r_o) \frac{1}{4} r^{-2} \rho_{\Delta,o} r^{\frac{1}{2}} e^{ikr} e^{i\alpha t} = 0.
\end{aligned} \tag{4.96}$$

Отсюда получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\omega^2 \approx C_h^2 k^2 - 4\pi G\rho_h + \chi^2 - C_h^2 \frac{1}{4r_o^2}. \tag{4.97}$$

Как нетрудно видеть, это дисперсионное уравнение в своих главных членах согласуется при предельных переходах с соответствующими уравнениями работ Бела и Шацмана [14], Чандрасекхара [13], Джинса [8], Генкина и Сафронова [15].

Итак, решение системы уравнений (4.69) - (4.71) получено в виде:

$$\rho_{\Delta} = f(r)e^{i\alpha t}, \tag{4.98}$$

$$v_{\Delta}(r) = -\frac{i\omega}{r \cdot \rho_h(r)} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx, \tag{4.99}$$

$$w_{\Delta} = \frac{\chi^2}{r \cdot \rho_h(r) 2\Omega_h} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx, \tag{4.100}$$

$$\begin{aligned}
& \omega^2 \rho_{\Delta} - \chi^2 \rho_{\Delta} + 4\pi G\rho_h \rho_{\Delta} + \frac{\rho_h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_h^2}{\rho_h} \frac{\partial \rho_{\Delta}}{\partial r} \right) = \\
& = \frac{\rho_h}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{C_h^2 \rho_{\Delta}}{\rho_h^2} \frac{\partial \rho_h}{\partial r} \right) + \omega^2 \frac{\partial \rho_h}{\partial r} \left( \frac{1}{r \cdot \rho_h(r)} \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx \right) - \\
& - \frac{1}{r \cdot \rho_h(r)} \left( \chi^2 \frac{\partial \rho_h}{\partial r} - \rho_h \frac{\partial \chi^2}{\partial r} \right) \int_{r_o}^r x \rho_{\Delta} dx.
\end{aligned} \tag{4.101}$$

Уравнение (4.101) в локальном приближении ( $\Delta r \ll r$ ) приводится к следующему уравнению:

$$\omega^2 \approx C_h^2 k^2 - 4\pi G\rho_h + \chi^2 - C_h^2 \frac{1}{4r_o^2}, \tag{4.102}$$

где

$\omega$  – постоянная.

### **Заключение.**

В настоящем препринте получены приближенные дисперсионные уравнения для протопланетного диска на начальной стадии его эволюции, которые в своих предельных приближениях совпадают с результатами работ Джинса [8], Чандрасекхара [13], Бела и Шацмана [14], Сафронова [15, 16], Фридмана и Поляченко [17, 18].

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Т. Жукову, К.В. Брушлинскому, И.С. Меньшову, Г.В. Долголевой, Л.А. Плинер за интерес к работе и полезные обсуждения. Автор также выражает искреннюю признательность М.С. Гавреевой за помощь в оформлении препринта.

## **Оглавление**

|   |    |
|---|----|
| Введение .....  | 3  |
| 1. Аналитическая модель протопланетного диска в приближении Роша .....                                      | 3  |
| 2. Система уравнений для описания среды в экваториальной плоскости протопланетного диска .....              | 11 |
| 3. Линеаризация системы уравнений, описывающих среду в экваториальной плоскости протопланетного диска ..... | 13 |
| 4. Дисперсионные уравнения .....  | 14 |
| Заключение.....   | 31 |
| Библиографический список.....   | 32 |



### Библиографический список

1. Забродин А.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А., Забродина Е.В., Мануковский К.В. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца на начальной ее стадии [Текст]: Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (итоговый). Программа № 25 фундаментальных исследований Президиума РАН. М., 2006. 47 с. Инв. № 8-3-06.
2. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2006. № 70. 44 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2006-70>
3. Забродин А.В., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Мануковский К.В., Плинер Л.А. Некоторые модели описания протопланетного диска Солнца на начальной стадии его эволюции // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. (Под ред. Э.М. Галимова). М.: «Либроком». 2008. С. 297 – 316.
4. Абакумов М.В., Мухин С.И., Попов Ю.П., Четчин В.М. Стационарные дисковые структуры около гравитирующих компактных объектов // Астр. ж. 1996. Т. 73. №3. С. 407 – 418.
5. Макалкин А.Б., Дорофеева В.А. Строение протопланетного аккреционного диска вокруг Солнца на стадии Т Тельца // Астр. вест. Исследования Солнечной системы. 1995. Т. 29. № 2. С. 99.
6. Таблицы физических величин: Справочник. / Под редакцией академика И.К. Кикоина. М.: «Атомиздат». 1976.
7. Забродин А.В., Легкоступов М.С., Плинер Л.А., Забродина Е.В., Мануковский К.В. Влияние начальных условий на характеристики и эволюцию протопланетного диска [Текст]: Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (итоговый). Программа № 18 фундаментальных исследований Президиума РАН. М., 2007. 40 с. Инв. № 8-4-07.
8. Jeans J. H. Astronomy and cosmogony. Cambridge. 1929.
9. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.М., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: «Наука». 1976.
10. Жуков В.Т., Брушлинский К.В., Меньшов И.С., Легкоступов М.С., Плинер Л.А., Забродина Е.А. Численное моделирование эволюции протопланетного диска Солнца [Текст]: Отчет ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (итоговый). Программа № 24 фундаментальных исследований Президиума РАН. М., 2010. 19 с. Инв. № 8-2-10.
11. Brushlinskii K.V., Pliner L.A., Zabrodina E.A., Menshov I.S., Zhukov V.T., G.V. Dolgoleva G.V., Legkostupov M.S. Gravitational instability in the proto-planet disk // III International conference BIOSPHERE ORIGIN AND EVOLUTION. Abstracts. Rithymno. Crete. Greece. October 16 – 20. 2011. P. 31 – 33.
12. Брушлинский К.В., Долголева Г.В., Жуков В.Т., Забродина Е.А., Легкоступов М.С., Меньшов И.С., Плинер Л.А. К вопросу об эволюции

- протопланетного диска Солнца // Проблемы зарождения и эволюции биосферы. Научный сборник под ред. академика Э.М. Галимова. М.: «Красанд». 2013. С. 33 – 46.
13. Chandrasekhar S. The gravitational instability of an infinite homogeneous medium when Coriolis acceleration is acting // *Vistas in Astronomy*. 1958. V. 1. P. 344.
  14. Bel N., Schatzman E. On the gravitational instability of a medium in nonuniform Rotation // *Rev. Mod. Phys.* 1958. V. 30. P. 1015 – 1023.
  15. Генкин И.Л., Сафронов В.С. Неустойчивость вращающихся гравитирующих систем с радиальными возмущениями // *Астр. ж.* 1975, Т. 52. Вып. 2. С. 306 – 315.
  16. Сафронов В.С. О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией // *ДАН СССР*. 1960. Т. 130. № 1. С. 53 – 56.
  17. Поляченко В.Л., Фридман А.М. О законе планетных расстояний // *Астр. ж.* 1972. Т. 49. № 1. С. 157.
  18. Поляченко В.Л., Фридман А.М.. Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. М.: «Наука». 1976.