



Сарычев В.А., Гутник С.А.

Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 39. 36 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-39>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

В.А. Сарычев, С.А. Гутник

**Динамика спутника
под действием гравитационного
и аэродинамического моментов.
Исследование положений равновесия**

Москва — 2014

Сарычев В.А., Гутник С.А.

Динамика спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Исследование положений равновесия

Исследована динамика вращательного движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Предложен метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции и получены условия их существования в зависимости от четырех безразмерных параметров системы. Найдены бифуркационные значения параметров, при которых изменяется число положений равновесия. Проведен детальный численный анализ эволюции областей существования различного числа равновесий в пространстве безразмерных параметров. Рассмотрена взаимосвязь полученных областей существования с областями существования равновесий осесимметричного спутника. Показано, что число положений равновесия спутника в общем случае не превышает 24 и не может быть меньше 8.

Ключевые слова: спутник, гравитационный момент, аэродинамический момент, положения равновесия, точки бифуркации.

Sarychev V.A., Gutnik S.A.

Dynamics of satellite subject to gravitational and aerodynamic torques. Investigation of equilibria

Dynamics of attitude motion of a satellite moving along a circular orbit under influence of gravitational and aerodynamic torques is investigated. A symbolic-numerical method for determining all equilibrium orientations of the satellite in the orbital coordinate system with given aerodynamic torque and given principal central moments of inertia is proposed. Conditions of equilibria existence are obtained depending on four dimensionless parameters of the system. All bifurcational values of parameters at which there is a change of numbers of equilibrium orientations are determined. Evolution of domains in the space of parameters which correspond to various numbers of equilibria are carried out in detail. Relationship with axisymmetrical cases of satellite is considered. It is shown that the number of equilibria of the satellite in general case not be less than 8 and not more than 24.

Key words: satellite, gravitational torque, aerodynamic torque, equilibria, bifurcational points.

1. Уравнения движения

Рассмотрим движение спутника – твердого тела относительно центра масс на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Для записи уравнений движения введем две правые прямоугольные системы координат с началом в центре масс O спутника.

$OXYZ$ – орбитальная система координат. Ось OZ направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего центры масс Земли и спутника; ось OX направлена вдоль вектора линейной скорости центра масс O спутника.

$Oxyz$ – связанная со спутником система координат; Ox, Oy, Oz – главные центральные оси инерции спутника.

Определим ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно орбитальной системы координат с использованием углов Эйлера ψ, ϑ и φ . Направляющие косинусы осей Ox, Oy, Oz в орбитальной системе координат выражаются через углы Эйлера с помощью соотношений [1]:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos(x, X) = \cos\psi \cos\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \sin\varphi, \\
 a_{12} &= \cos(y, X) = -\cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\vartheta \cos\varphi, \\
 a_{13} &= \cos(z, X) = \sin\psi \sin\vartheta, \\
 a_{21} &= \cos(x, Y) = \sin\psi \cos\varphi + \cos\psi \cos\vartheta \sin\varphi, \\
 a_{22} &= \cos(y, Y) = -\sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\vartheta \cos\varphi, \\
 a_{23} &= \cos(z, Y) = -\cos\psi \sin\vartheta, \\
 a_{31} &= \cos(x, Z) = \sin\vartheta \sin\varphi, \\
 a_{32} &= \cos(y, Z) = \sin\vartheta \cos\varphi, \\
 a_{33} &= \cos(z, Z) = \cos\vartheta.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Тогда уравнения движения спутника относительно центра масс запишутся в виде [1, 2]:

$$\begin{aligned}
 A\dot{p} + (C - B)qr - 3\omega_0^2(C - B)a_{32}a_{33} - \omega_0^2(H_2a_{13} - H_3a_{12}) &= 0, \\
 B\dot{q} + (A - C)rp - 3\omega_0^2(A - C)a_{33}a_{31} - \omega_0^2(H_3a_{11} - H_1a_{13}) &= 0, \\
 C\dot{r} + (B - A)pq - 3\omega_0^2(B - A)a_{31}a_{32} - \omega_0^2(H_1a_{12} - H_2a_{11}) &= 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 p &= \dot{\psi}a_{31} + \dot{\vartheta}\cos\varphi + \omega_0a_{21} = \bar{p} + \omega_0a_{21}, \\
 q &= \dot{\psi}a_{32} - \dot{\vartheta}\sin\varphi + \omega_0a_{22} = \bar{q} + \omega_0a_{22}, \\
 r &= \dot{\psi}a_{33} + \dot{\varphi} + \omega_0a_{23} = \bar{r} + \omega_0a_{23}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

В уравнениях (2), (3)

$$H_1 = -\frac{Qa}{\omega_0^2}, \quad H_2 = -\frac{Qb}{\omega_0^2}, \quad H_3 = -\frac{Qc}{\omega_0^2};$$

A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника; p, q, r – проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси Ox, Oy, Oz ; ω_0 – угловая скорость движения центра масс спутника по круговой орбите; Q – действующая на спутник сила сопротивления; a, b, c – координаты центра давления спутника в системе координат $Oxyz$. Точкой обозначено дифференцирование по времени t .

Уравнения (2), (3) получены при следующих предположениях:

1) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника относительно воздуха;

2) влияние атмосферы на поступательное движение спутника пренебрежимо мало;

3) увлечением атмосферы вращающейся Землей пренебрегается.

Предположение 1) достаточно точно выполняется для формы спутника, близкой к сферической.

Для системы (2), (3) справедлив обобщенный интеграл энергии [1]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(A\bar{p}^2 + B\bar{q}^2 + C\bar{r}^2) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(A-C)a_{31}^2 + (B-C)a_{32}^2] + \\ & + \frac{1}{2}\omega_0^2[(B-A)a_{21}^2 + (B-C)a_{23}^2] - \omega_0^2(H_1a_{11} + H_2a_{12} + H_3a_{13}) = const. \end{aligned} \quad (4)$$

2. Положения равновесия спутника

Положив в (2) и (3) $\psi = \psi_0 = const$, $\vartheta = \vartheta_0 = const$, $\varphi = \varphi_0 = const$, получим при $A \neq B \neq C$ уравнения

$$\begin{aligned} (C-B)(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) - H_2a_{13} + H_3a_{12} &= 0, \\ (A-C)(a_{23}a_{21} - 3a_{33}a_{31}) - H_3a_{11} + H_1a_{13} &= 0, \\ (B-A)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) - H_1a_{12} + H_2a_{11} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

позволяющие определить положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В дальнейшем исследовании удобнее использовать эквивалентную систему

$$\begin{aligned}
& Aa_{21}a_{31} + Ba_{22}a_{32} + Ca_{23}a_{33} = 0, \\
& 3(Aa_{11}a_{31} + Ba_{12}a_{32} + Ca_{13}a_{33}) + (H_1a_{31} + H_2a_{32} + H_3a_{33}) = 0, \\
& (Aa_{11}a_{21} + Ba_{12}a_{22} + Ca_{13}a_{23}) - (H_1a_{21} + H_2a_{22} + H_3a_{23}) = 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

которая получается проектированием уравнений (5) на оси орбитальной системы координат. Систему (6) с использованием безразмерных параметров $h_i = H_i / (B - C)$ ($i = 1, 2, 3$), $\nu = (B - A) / (B - C)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \nu a_{21}a_{31} + a_{23}a_{33} = 0, \\
& -3(\nu a_{11}a_{31} + a_{13}a_{33}) + (h_1a_{31} + h_2a_{32} + h_3a_{33}) = 0, \\
& \nu a_{11}a_{21} + a_{13}a_{23} + (h_1a_{21} + h_2a_{22} + h_3a_{23}) = 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

С учетом (1), систему (6) или (7) можно рассматривать как систему трех уравнений с неизвестными $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$. Другой способ замыкания уравнений (6) заключается в добавлении шести условий ортогональности направляющих косинусов (1)

$$\begin{aligned}
& a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1, \quad a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0, \\
& a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1, \quad a_{11}a_{31} + a_{12}a_{32} + a_{13}a_{33} = 0, \\
& a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1, \quad a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

Далее будем исследовать положения равновесия спутника, используя системы (6) и (8).

Уравнения (6) и (8) образуют замкнутую алгебраическую систему уравнений относительно 9 неизвестных направляющих косинусов, определяющих положения равновесия спутника. Для системы уравнений (6) и (8) ставится следующая задача: для заданных A, B, C, H_1, H_2, H_3 требуется определить все девять направляющих косинусов, т.е. все положения равновесия спутника.

Как показано в [1, 2], систему уравнений (6), (8) можно разрешить относительно $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ при $A \neq B \neq C$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{3(I_3 - A)a_{31}}{F}, \quad a_{21} = \frac{3(B - C)a_{32}a_{33}}{F}, \\
a_{12} &= \frac{3(I_3 - B)a_{32}}{F}, \quad a_{22} = \frac{3(C - A)a_{33}a_{31}}{F}, \\
a_{13} &= \frac{3(I_3 - C)a_{33}}{F}, \quad a_{23} = \frac{3(A - B)a_{31}a_{32}}{F}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь $F = H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}$, $I_3 = A a_{31}^2 + B a_{32}^2 + C a_{33}^2$.

Подставляя уравнения (9) во второе и третье уравнение (6) и добавляя третье уравнение (8), получим три уравнения [3-5]

$$\begin{aligned} 9[(B-C)^2 a_{32}^2 a_{33}^2 + (C-A)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + (A-B)^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= (H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33})^2, \\ 3(B-C)(C-A)(A-B) a_{31} a_{32} a_{33} - \\ -[H_1(B-C) a_{32} a_{33} + H_2(C-A) a_{33} a_{31} + H_3(A-B) a_{31} a_{32}] &(H_1 a_{31} + H_2 a_{32} + H_3 a_{33}) = 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

для определения направляющих косинусов a_{31}, a_{32}, a_{33} . После решения системы (10) формулы (9) позволяют определить оставшиеся шесть направляющих косинусов.

Уравнения (9) и (10) после перехода к безразмерным параметрам принимают вид

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{3[\nu a_{32}^2 - (1-\nu) a_{33}^2] a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{21} &= \frac{3 a_{32} a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\ a_{12} &= \frac{-3(\nu a_{31}^2 + a_{33}^2) a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{22} &= \frac{-3(1-\nu) a_{33} a_{31}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, \\ a_{13} &= \frac{3[(1-\nu) a_{31}^2 + a_{32}^2] a_{33}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}, & a_{33} &= \frac{-3\nu a_{31} a_{32}}{h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}}; \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 9[a_{32}^2 a_{33}^2 + (1-\nu)^2 a_{33}^2 a_{31}^2 + \nu^2 a_{31}^2 a_{32}^2] &= (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33})^2 (a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2), \\ 3\nu(1-\nu) a_{31} a_{32} a_{33} - [h_1 a_{32} a_{33} - h_2(1-\nu) a_{33} a_{31} - h_3 \nu a_{31} a_{32}] &\times \\ \times (h_1 a_{31} + h_2 a_{32} + h_3 a_{33}) &= 0, \\ a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 &= 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь правая часть первого уравнения (12) умножается на $a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$.

Учитывая однородность первых двух уравнений (12), вводя переменные $x = \frac{a_{31}}{a_{33}}$, $y = \frac{a_{32}}{a_{33}}$ и разделив обе части первого уравнения (12) на a_{33}^4 , а второго уравнения (12) – на a_{33}^3 , получим алгебраическую систему двух уравнений относительно переменных x и y :

$$\begin{aligned} 9[y^2 + (1-\nu)^2 x^2 + \nu^2 x^2 y^2] &= (h_1 x + h_2 y + h_3)^2 (1 + x^2 + y^2), \\ 3\nu(1-\nu)xy - [h_1 y - h_2(1-\nu)x - h_3 \nu xy](h_1 x + h_2 y + h_3) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, подставляя выражения $a_{31} = \chi a_{33}$, $a_{32} = y a_{33}$ в последнее уравнение системы (12), получим выражение

$$a_{33}^2 = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}. \quad (14)$$

Систему уравнений (13) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 y^2 + a_1 y + a_2 &= 0, \\ b_0 y^4 + b_1 y^3 + b_2 y^2 + b_3 y + b_4 &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= h_2(\nu h_3 x - h_1), \\ a_1 &= \nu h_1 h_3 x^2 - h_1 h_3 + [3\nu(1-\nu) - h_1^2 + (1-\nu)h_2^2 + \nu h_3^2]x, \\ a_2 &= (1-\nu)h_2(h_1 x + h_3)x, \\ b_0 &= h_2^2, \quad b_1 = 2h_2(h_1 x + h_3), \\ b_2 &= (h_2^2 + h_3^2 - 9) + 2h_1 h_3 x + (h_1^2 + h_2^2 - 9\nu^2)x^2, \\ b_3 &= 2h_2(h_1 x + h_3)(1 + x^2), \\ b_4 &= (h_1 x + h_3)^2(1 + x^2) - 9(1-\nu)^2 x^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Результант $R(x)$ уравнений (15) имеет следующий вид:

$$R(x) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{bmatrix}.$$

Уравнение $R(x) = 0$, с использованием символьных функций системы компьютерной алгебры Mathematica, можно представить в виде [5]:

$$\begin{aligned} p_0 x^{12} + p_1 x^{11} + p_2 x^{10} + p_3 x^9 + p_4 x^8 + p_5 x^7 + p_6 x^6 + \\ + p_7 x^5 + p_8 x^4 + p_9 x^3 + p_{10} x^2 + p_{11} x + p_{12} = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$p_0 = h_1^4 h_3^4 v^6,$$

$$p_1 = -2h_1^3 h_3^3 v^5 [2h_1^2 + (1-v)h_2^2 - 2vh_3^2 - 3v(1-v)],$$

$$p_2 = h_1^2 h_3^2 v^4 [6h_1^4 + h_1^2(h_2^2(v^2 - 8v + 7) + h_3^2(v^2 - 16v + 1) + 17v^2 - 16v - 1) + h_2^4(1-v)^2 + h_2^2(1-v) + 3v^2(2h_3^4 - 3h_3^2(v^2 - 1) + 3(1-v)^2)]$$

$$p_3 = -2h_1 h_3 v^3 [2h_1^6 + h_1^4(h_2^2(v^2 - 5v + 4) + 2h_3^2(v^2 - 6v + 1) + 8v^2 - 7v - 1) + h_1^2(h_2^4((2-v))(1-v)^2 + h_2^2(1-v)(h_3^2(3v^2 - 13v + 3) + 9v^3 - 9v^2 + v - 1) - v(2h_3^4(v^2 - 6v + 1) + h_3^2(15v^3 - 8v^2 - 8v + 1) - 3(1-v)^2(2v + 1))) + h_3^2(h_2^4((1-v)^2)(1-2v) - h_2^2 v(1-v)(h_3^2(1-4v) + 9v^3 - 9v^2 + v - 1) + v^3(-2h_3^4 + 9h_3^2 v(1-v) - 9(1-v)^2(3v - 2)))]$$

$$p_4 = v^2 [h_1^8 + h_1^6(h_2^2(v^2 - 4v + 3) + 2h_3^2(3v^2 - 8v + 3) + 5v^2 - 4v - 1) + h_1^4(h_2^4((1-v)^2)(3-2v) + h_2^2(1-v)(h_3^2(14v^2 - 33v + 13) + 2(5v^3 - 6v^2 + 2v - 1)) + v(h_3^4(37v - 16(1+v^2) + h_3^2(-37v^3 + 46v^2 + v - 10) + 3(1-v)^2(v+2))) + h_1^2(h_2^6(1-v)^4 + h_2^4(1-v)^2(2h_3^2(4v^2 - 9v + 4) + (1-v)^2(6v - 1)) - h_2^2 v(1-v)(h_3^4(13v^2 - 33v + 14) + 4h_3^2(9v^3 - 14v^2 + 6v - 1) + 3(1-v)^3(2-3v)) + v^2(2h_3^6(3v^2 - 8v + 3) + h_3^4(54v^3 - 87v^2 + 30v + 3) - 18h_3^2 v(1-v)^2(8v - 7) - 9(1-v)^4)) + h_3^2(h_2^6(v-1)^4 + h_2^4 v(1-v)^2(3v-2)(h_3^2 - 3(1-v)^2) + h_2^2 v^2(1-v)(h_3^4(1-3v) + 2h_3^2(9v^3 - 18v^2 + 14v - 5) - 9(1-v)^3(6v-1)) + v^4(h_3^2 - 9(v-1)^2)(h_3^2 + 3(1-v)^2)]$$

$$\begin{aligned}
p_5 = & -2h_1h_3v \left[2h_1^6(v^2 - v + 1) + h_1^4(h_2^2(6 - 14v + 13v^2 - 5v^3) \right. \\
& - v(2h_3^2(6v^2 - 7v + 6) + 10v^3 - 22v^2 + 5v + 7)) \\
& + h_1^2 \left(h_2^4(1 - v)^2(5v^2 - 10v + 6) \right. \\
& - h_2^2v(1 - v)(h_3^2(17v^2 - 26v + 17) + 11v^3 - 35v^2 + 27v - 3) \\
& + v^2(2h_3^4(6v^2 - 7v + 6) + h_3^2(29v^3 - 79v^2 + 47v + 3) \\
& - 3(1 - v)^2(22v^2 - 22v - 3)) \left. \right) + 2h_2^6(1 - v)^5 \\
& - h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(6v^2 - 10v + 5) + 2(1 - v)^2(9v - 5)) \\
& + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(6v^2 - 8v + 5) + h_3^2(27v^3 - 83v^2 + 75v - 19) \\
& - 6(1 - v)^3(9v - 1)) + v^3(-2h_3^6(v^2 - v + 1) + h_3^4(2 - 22v + 29v^2 \\
& - 9v^3) + 9h_3^2(1 - v)^2(7v^2 - 10v + 2) - 18(1 - v)^4(3v + 1)) \left. \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 = & h_1^8(v^2 + 1) - 2h_1^6(h_2^2(v^3 - 2v^2 + 3v - 2) + v(h_3^2(8v^2 - 6v + 8) + 2v^3 \\
& - 7v^2 + 2v + 3)) + 2h_1^4(h_2^4(1 - v)^2(v^2 - 3v + 3) \\
& - h_2^2v(1 - v)(h_3^2(15v^2 - 20v + 17) + 10v(1 - v)) + v^2(2h_3^4(9v^2 \\
& - 8v + 9) + h_3^2(13v^3 - 65v^2 + 55v - 3) - 3(1 - v)^2(7v^2 - 7v \\
& - 3))) - 2h_1^2(h_2^6(v - 2)(1 - v)^4 \\
& + h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(10v^2 - 17v + 10) + (1 - v)^2(8v - 9)) \\
& + h_2^2v^2(v - 1)(h_3^4(17v^2 - 20v + 15) + 5h_3^2(7v^3 - 27v^2 + 27v - 7) \\
& - 21v(1 - v)^3) + v^3(h_3^6(8v^2 - 6v + 8) + h_3^4(3v^3 - 55v^2 + 65v \\
& - 13) - 27h_3^2(1 - v)^2(2v^2 - 5v + 2) + 9(1 - v)^4(2v + 3))) \\
& + h_2^8(1 - v)^6 + 2h_2^6v(1 - v)^4(h_3^2(2v - 1) + 6(1 - v)^2) \\
& + 2h_2^4v^2(1 - v)^2(h_3^4(3v^2 - 3v + 1) + h_3^2(1 - v)^2(9v - 8) \\
& + 27(1 - v)^4) \\
& + 2h_2^2v^3(1 - v)(h_3^6(2v^2 - v + 1) + 10h_3^4v(1 - v) + 21h_3^2(1 - v)^3 \\
& - 54(1 - v)^5) + v^4(h_3^2 + 3(1 - v))^2(h_3^4(v^2 + 1) - 10h_3^2(1 - v)^2 \\
& + 9(1 - v)^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_7 = & 2h_1h_3[2h_1^6(v^2 - v + 1) + h_1^4(h_2^2(-5v^3 + 13v^2 - 14v + 6) + v(-2h_3^2(6v^2 \\
& - 7v + 6) - 2v^3 + 22v^2 - 29v + 9)) + h_2^2v(v - 1)(h_3^2(17v^2 - 26v \\
& + 17) + 19v^3 - 75v^2 + 83v - 27) + h_1^2(h_2^4(1 - v)^2(5v^2 - 10v + 6) \\
& - v^2(-2h_3^4(6v^2 - 7v + 6) + h_3^2(3v^3 + 47v^2 - 79v + 29) \\
& + 9(1 - v)^2(2v^2 - 10v + 7))) + 2h_2^6(1 - v)^5 - h_2^4(v1 - v)^2(h_3^2(6v^2 \\
& - 10v + 5) + 2(1 - v)^2(5v - 9)) + h_2^2v^2(1 - v)(h_3^4(6v^2 - 8v + 5) \\
& + h_3^2(3v^3 - 27v^2 + 35v - 11) + 6(v - 9)(v - 1)^3) \\
& + v^3(-2h_3^6(v^2 - v + 1) + h_3^4(7v^3 + 5v^2 - 22v + 10) \\
& - 3h_3^2(1 - v)^2(3v^2 + 22v - 22) + 18(v + 3)(1 - v)^4)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_8 = & [h_1^8 + h_1^6(h_2^2(v^2 - 4v + 3) + 2h_3^2(3v^2 - 8v + 3) - 3(v^2 - 4v + 3)) \\
& + h_1^4(h_2^4((1 - v)^2)(3 - 2v) + h_2^2(1 - v)(h_3^2(14v^2 - 33v + 13) \\
& + 2(5v^3 - 14v^2 + 18v - 9)) + v(h_3^4(37v - 16(1 + v^2)) \\
& + 3h_3^2(v^3 + 10v^2 - 29v + 18) - 9(1 - v)^2(5v - 6))) \\
& + h_1^2(h_2^6(1 - v)^4 + h_2^4(1 - v)^2(2h_3^2(4v^2 - 9v + 4) \\
& + 3(1 - v)^2(2v - 3)) - h_2^2v(1 - v)(h_3^4(13v^2 - 33v + 14) \\
& + 4h_3^2(v^3 - 6v^2 + 14v - 9) - 9(v - 6)(1 - v)^3) \\
& + v^2(2h_3^6(3v^2 - 8v + 3) + h_3^4(-10v^3 + v^2 + 46v - 37) \\
& + 18h_3^2(1 - v)^2(7v - 8) - 81(1 - v)^4)) \\
& + h_3^2(h_2^6(1 - v)^4 - h_2^4v(1 - v)^2(h_3^2(2 - 3v) + (v - 6)(1 - v)^2) \\
& - h_2^2v^2(v - 1)(h_3^4(1 - 3v) + 2h_3^2(v^3 - 2v^2 + 6v - 5) \\
& + 3(1 - v)^3(3 - 2v)) + v^4(h_3^2 - (1 - v)^2)(h_3^2 - 3v + 3)^2)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_9 = & 2h_1h_3[2h_1^6 + h_1^4(h_2^2(4 - 5v + v^2) + 2h_3^2(1 - 6v + v^2) - 9(1 - v)) \\
& + h_3^2(h_2^4(1 - v)^2(1 - 2v) + h_2^2v(1 - v)(h_3^2(1 - 4v) \\
& - (1 - v)(9 + v^2) + v^3(-2h_3^4 - 3(1 - v)^2(2 + v) \\
& + h_3^2(v^2 + 7v - 8))) + h_1^2(h_2^4(2 - v)(1 - v)^2 \\
& - h_2^2(1 - v)(h_3^2(3 - 13v + 3v^2) - (1 - v)(9 + v^2)) \\
& + v(9(1 - v)^2(3 - 2v) - 2h_3^4(1 - 6v + v^2) \\
& + h_3^2(15 - 8v(1 + v) + v^3))]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{10} = & h_1^2h_3^2[6h_1^4 + h_1^2(h_2^2(v^2 - 8v + 7) + h_3^2(v^2 - 16v + 1) + 9(v^2 - 1)) \\
& + h_2^4(1 - v)^2 + h_2^2(1 - v)(h_3^2(1 - 7v) + v^3 - v^2 + 9v - 9) \\
& + v^2(6h_3^4 - h_3^2(v^2 + 16v - 17) + 9(1 - v)^2)]
\end{aligned}$$

$$p_{11} = 2h_1^3 h_3^3 \left[2h_1^2 + (1-\nu)h_2^2 - 2\nu h_3^2 - 3\nu(1-\nu) \right],$$

$$p_{12} = h_1^4 h_3^4.$$

Число действительных корней полученного алгебраического уравнения четно и не превышает 12. Подставляя значение действительного корня x_1 алгебраического уравнения (17) в уравнения системы (15), найдем совпадающий корень y_1 этих уравнений. Для каждого решения x_1 и y_1 из уравнения (14) можно определить два значения a_{33} , а затем и соответствующие им величины $a_{31} = x_1 a_{33}$ и $a_{32} = y_1 a_{33}$. Таким образом, каждому действительному корню алгебраического уравнения (17) соответствуют два набора значений a_{31}, a_{32}, a_{33} , которые в силу (11) однозначно определяют остальные направляющие косинусы $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$. Из приведенных соображений следует, что спутник на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов в общем случае ($h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$) может иметь не более 24 положений равновесия.

3. Исследование положений равновесия спутника

Уравнения (15) и (17) совместно с системами (11) и (12) позволяют определить все положения равновесия спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов при заданных значениях параметров.

Для исследования положений равновесия спутника ставится задача нахождения в пространстве параметров областей с одинаковым числом вещественных корней уравнения (17). Разбиение пространства параметров на области с одинаковым числом вещественных корней уравнения определяется дискриминантной гиперповерхностью, которая задается дискриминантом многочлена (17). В символьном виде исследовать систему алгебраических уравнений, которая определяет множество особых точек дискриминантной гиперповерхности, в силу громоздкости выражений коэффициентов многочлена (17) не представляется возможным.

Зависимость числа действительных решений уравнения (17) от значений параметров исследовалась численно с использованием пакета факторизации системы Mathematica 8.0, который позволяет вычислять корни алгебраических уравнений с заданной точностью.

Не нарушая общности, численные исследования можно проводить при условии $B > A > C$, тогда $0 < \nu < 1$. Проекция вектора аэродинамического момента h_1, h_2, h_3 могут принимать любые ненулевые значения.

Коэффициенты уравнения (17) зависят от 4 безразмерных параметров ν, h_1, h_2, h_3 , а в уравнения исходной системы (6) входят 6 параметров H_1, H_2, H_3, A, B, C . При численном исследовании задачи уменьшение числа параметров имеет существенное значение.

Для предельных случаев $\nu=0$ и $\nu=1$ (случаи осесимметричного спутника), как показано в работе [6], границы между областями с постоянным числом равновесий определяются аналитически.

Для осесимметричного случая $\nu=0$ ($A=B$) система стационарных уравнений (7) упрощается, и в результате можно получить уравнения двух окружностей в плоскости (h_1, h_2) , которые определяют границы областей с постоянным числом равновесий спутника:

$$\begin{aligned} h_1^2 + h_2^2 &= (3^{2/3} - h_3^{2/3})^3, \\ h_1^2 + h_2^2 &= (1 - h_3^{2/3})^3. \end{aligned} \quad (18)$$

Для осесимметричного случая $\nu=1$ ($A=C$) система стационарных уравнений (7) упрощается, и в результате можно получить уравнения двух астронид в плоскости (h_1, h_2) , которые определяют границы областей с постоянным числом равновесий спутника:

$$\begin{aligned} h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 3^{2/3}, \\ h_2^{2/3} + (h_1^2 + h_3^2)^{1/3} &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим теперь более подробно свойства алгебраического уравнения (17). Из вида коэффициентов уравнения (17) следует, что число его действительных корней не зависит от знаков параметров h_1, h_2, h_3 . Действительно, в выражения для коэффициентов уравнения (17) при четных степенях x p_{2k} ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$) параметры h_1, h_2, h_3 входят только в четной степени, а коэффициенты при нечетных степенях x p_{2k+1} ($k=1, 2, 3, 4, 5$) представляет собой произведение сомножителей $p_{2k+1} = h_1 h_3 P_{2k+1}$, где множитель P_{2k+1} зависит только от четных степеней параметров h_1, h_2, h_3 . Следовательно, при изменении знаков параметров h_1, h_2, h_3 может изменяться лишь знак произведения $h_1 h_3$ и, тем самым, знак действительных корней уравнения (17). Абсолютное значение и число действительных корней остается при этом неизменным.

Численный анализ числа действительных корней уравнения (17) проводился при положительных значениях h_1, h_2, h_3 и при условии $0 < \nu < 1$. Вычисления проводились в узлах равномерной сетки на плоскости (h_1, h_2) при фиксированных значениях ν и h_3 . Численно определялись граничные точки, в

которых происходит смена числа действительных корней. Фактически вычислялся двумерный срез дискриминантной гиперповерхности, который задается неявно алгебраическим уравнением от двух параметров $g(h_1, h_2) = 0$. Экспериментальным путем было определено, что для получения гладких граничных кривых требуются вычисления с шагом сетки 0.0001. Вычисления с такой точностью становятся очень трудоемкими. Действительно, для размера области 3×3 на плоскости (h_1, h_2) требуется вычисление корней в 10^9 узлах. Поэтому вычисления проводились в два этапа. На первом этапе проводилось вычисление количества действительных корней уравнения (17) в 10^7 узлах с шагом 0.001. На втором этапе число действительных корней вычислялось в окрестностях приближенно вычисленной границы между областями с постоянным числом действительных корней в узлах сетки с шагом 0.0001.

Далее при фиксированных значениях h_2 величина граничных точек h_1 между двумя областями с различным постоянным числом действительных корней определялась с заданной точностью методом деления отрезка пополам, реализованном на языке программирования системы Mathematica в виде пакета. Численные методы решений уравнений, реализованные в системе Mathematica, позволяют вычислять корни алгебраического уравнения при очень малых величинах коэффициентов, не превосходящих 10^{-48} , когда значения параметров h_1 и h_2 принимались равными 10^{-6} .

С учетом того, что уравнение (17) было получено при условии $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$, в окрестности нулевых значений параметров h_1, h_2, h_3 вычисления проводились с повышенной точностью, с шагом, равным 10^{-6} .

Вычисления проводились при значениях $\nu = 0.01$ (в окрестности осесимметричного случая $\nu = 0$), $\nu = 0.1, \nu = 0.2, \nu = 0.3, \nu = 0.4, \nu = 0.5, \nu = 0.6, \nu = 0.7, \nu = 0.8, \nu = 0.9$ и $\nu = 0.99$ (в окрестности осесимметричного случая $\nu = 1$). Результаты вычислений эволюции границ между областями с равным числом действительных корней на плоскости (h_1, h_2) представлены на Рис. 1-47.

Из анализа численных результатов для заданных параметров ν следует, что при увеличении значения параметра h_3 размеры областей с постоянным числом действительных корней становятся меньше, пока не исчезают совсем. Точки в пространстве параметров, начиная со значений которых не существуют области с определенным числом действительных корней, будем называть бифуркационными точками. Результаты вычислений бифуркационных значений параметров, когда значения параметров h_1 и h_2 принимались равными 10^{-6} , представлены в Таблице 1.

Результаты вычислений, представленных на Рис. 1-47, были получены для бифуркационных значений параметра h_3 , указанных в Таблице 1, и для значений h_3 , соответствующих среднему значению расстояния между двумя соседними бифуркационными точками.

Из Таблицы 1 следует, что бифуркационные значения параметра h_3 , при котором исчезают области, где существуют 24 равновесных решения (12 действительных корней), изменяются в соответствии с соотношением $h_3 = 1 - \nu$.

Бифуркационные значения параметра h_3 , при котором исчезают области, где существуют 20 равновесных решений (10 действительных корней), равны 1 при возрастании значения ν вплоть до значения $\nu = 0.6$, после чего уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - \nu)$.

Для областей, где существуют 16 равновесий (8 действительных корней), бифуркационные значения параметра h_3 уменьшаются в соответствии с соотношением $h_3 = 3(1 - \nu)$ при возрастании значения ν вплоть до значения $\nu = 0.6$, после чего остаются равными 1.

Области с числом равновесий, равным 12, уменьшаются при возрастании величины параметра h_3 . Центральная часть этих областей исчезает в окрестности начала координат при $h_3 = 3$. При значениях $h_3 \geq 3$ существуют области маленьких размеров с числом равновесий, равным 12, и расположены они вблизи оси Oh_2 с характерными размерами вдоль осей Oh_1 и Oh_2 , не превосходящими величину 10^{-1} (Рис.16). При возрастании величины h_3 эти области уменьшаются и смещаются вправо вдоль положительной части оси Oh_2 и влево вдоль отрицательной части оси Oh_2 .

Рассмотрим пример в окрестности осесимметричного случая $\nu = 0$ для значения $\nu = 0.01$. В данном случае вычисления проводились при следующих значениях параметра h_3 : $h_3 = 0.01$ (в окрестности нулевого значения, Рис. 2) и $h_3 = 0.99$ (бифуркационная точка, где исчезает область с 24 равновесиями, Рис. 4). Кривые на Рис. 2 и 4 очень схожи с соответствующими кривыми на рисунках для осесимметричного случая $\nu = 0$ (Рис. 1, 3), которые определяются уравнениями (18). Как показано в работе [6], в случае осесимметричного спутника число равновесий может быть только 16, 12 и 8 и, соответственно, существуют только 3 области в пространстве параметров с равным числом положений равновесия. В данном случае мы имеем только два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

Для значений инерционного параметра $\nu = 0.99$, близкого к осесимметричному случаю $\nu = 1$, вычисление границ областей проводилось при следующих значениях h_3 : $h_3 = 0.01$ (бифуркационная точка, где исчезает область с 24 равновесиями, Рис. 46) и $h_3 = 1.0$ (бифуркационная точка, где исчезает область с 16 равновесиями, Рис. 44). Видно, что граничные кривые на этих рисунках (Рис. 44, 46) в пределе, при значениях инерционного параметра стремящемся к 1, приближаются к соответствующим аналитическим кривым для осесимметричного случая $\nu = 1$ (Рис. 45, 47), которые определяются

уравнениями (19). В данном случае мы имеем также два бифуркационных значения параметра h_3 : $h_3 = 1$ и $h_3 = 3$.

В интервале значений инерционного параметра $0.1 \leq \nu \leq 0.9$ было проведено численное исследование эволюции областей с постоянным числом положений равновесия 24, 20, 16, 12 и 8, при этом использовался небольшой шаг по параметру ν , равный 0.1 (Рис. 5–43).

Рассмотрим подробнее характер изменения областей с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8, на примере, когда $\nu = 0.2$ (Рис. 9 – 16).

Анализ численных результатов показывает, что при $\nu = 0.2$ области с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12 и 8, существуют в плоскости (h_1, h_2) при $h_3 < 0.8$ (Рис. 9, 10). Из Рис.10 видно, что при возрастании величины h_3 размеры областей с числом равновесий, равным 24, 20, 16, 12, становятся меньше, чем соответствующие области на Рис. 9. При бифуркационном значении $h_3 = 0.8$ область с числом равновесий, равным 24, исчезает (Рис. 11) и в интервале значений $0.8 < h_3 < 1.0$ существуют только четыре типа областей с числом равновесий, равным 20, 16, 12 и 8. При бифуркационном значении $h_3 = 1.0$ исчезает область с числом равновесий, равным 20 (Рис. 12).

В интервале значений $1.0 < h_3 < 2.4$ существуют только три типа областей с числом равновесий, равным 16, 12 и 8 (Рис. 13).

При бифуркационном значении $h_3 = 2.4$ область с числом равновесий, равным 16, исчезает (Рис.14). В интервале $2.4 < h_3 < 3$ остаются только два типа областей с числом равновесий, равным 12 и 8 (Рис. 15). При $h_3 = 3.0$ области с числом равновесий, равным 12, исчезают в окрестности начала координат и при дальнейшем увеличении значений параметра h_3 существуют области маленьких размеров с числом равновесий, равным 12, и расположены они вблизи оси Oh_2 (Рис.16).

На Рис. 5–8 и 17–43 представлена эволюция областей с постоянным числом равновесий для значений инерционных параметров $\nu = 0.1$, $\nu = 0.3$, $\nu = 0.4$, $\nu = 0.5$, $\nu = 0.6$, $\nu = 0.7$, $\nu = 0.8$, $\nu = 0.9$.

Когда значения параметра аэродинамического момента h_3 превышают 3, при любых значениях параметров h_1 и h_2 существуют 8 равновесных ориентаций спутника, которые соответствуют 4 действительным корням уравнения (17). Этот результат соответствует физическим соображениям, при большой величине аэродинамического момента число равновесий существенно ограничивается направлением и величиной данного момента.

Заключение

В данной работе проведено исследование вращательного движения спутника на круговой орбите под действием гравитационного и аэродинамического моментов. Главное внимание уделено определению положений равновесия спутника в орбитальной системе координат. Предложен символьно-численный метод определения всех положений равновесия спутника в орбитальной системе координат при заданных значениях вектора аэродинамического момента и главных центральных моментов инерции в общем случае, когда $A \neq B \neq C$ и $h_1 \neq 0, h_2 \neq 0, h_3 \neq 0$.

Проведен детальный численный анализ эволюции областей существования различного числа равновесий в плоскости двух параметров (h_1, h_2) при различных фиксированных значениях параметров V и h_3 .

Показано, что число положений равновесия спутника на круговой орбите в общем случае не превышает 24 и не может быть меньше 8.

Полученные результаты могут быть использованы на этапе предварительного проектирования системы управления спутника с использованием гравитационной системы стабилизации.

Литература

1. Сарычев В.А. Вопросы ориентации искусственных спутников. / Итоги науки и техники. Сер. «Исследование космического пространства». М.: ВИНТИ. Т. 11. 1978. 224 с.
2. Sarychev V.A., Mirer S.A. Relative equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2000. Vol.76. № 1. P. 55-68.
3. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A., Duarte E.K. Investigation of equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2007. Vol. 97. № 4. P. 267-287.
4. Sarychev V.A., Mirer S.A., Degtyarev A.A. Equilibria of a satellite subjected to gravitational and aerodynamic torques with pressure center in a principal plane of inertia // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2008. Vol.100. № 4. P. 301-318.
5. Gutnik S.A. Symbolic-numeric investigation of the aerodynamic forces influence on satellite dynamics. // In: Gerdt, V.P., Koepf, W., Mayr, E.W., Vorozhtsov, E.V. (eds.) *CASC 2011. LNCS*. Vol. 6885. P. 192-199.
6. Сарычев В.А., Гутник С.А. Динамика осесимметричного спутника под действием гравитационного и аэродинамического моментов // *Космические исследования*. 2012. Т. 50. № 5. С. 394-402.

Таблица 1.

Бифуркационные значения ν , h_3

ν	h_3 (24/20)	h_3 (20/16)	h_3 (16/12)	h_3 (12/8)
0.01	0.99	1.0	2.97	3.0
0.1	0.90	1.0	2.7	3.0
0.2	0.80	1.0	2.4	3.0
0.3	0.70	1.0	2.1	3.0
0.4	0.60	1.0	1.8	3.0
0.5	0.50	1.0	1.5	3.0
0.6	0.40	1.0	1.2	3.0
0.7	0.30	0.9	1.0	3.0
0.8	0.20	0.6	1.0	3.0
0.9	0.10	0.3	1.0	3.0
0.99	0.01	0.03	1.0	3.0

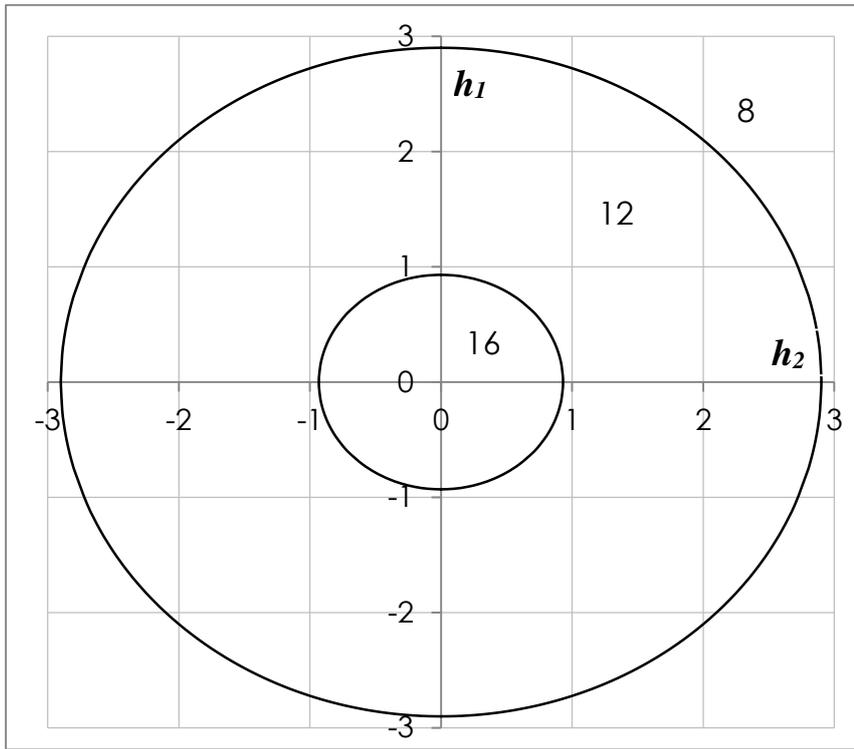


Рис. 1. $v=0.0, h_3 = 0.01$

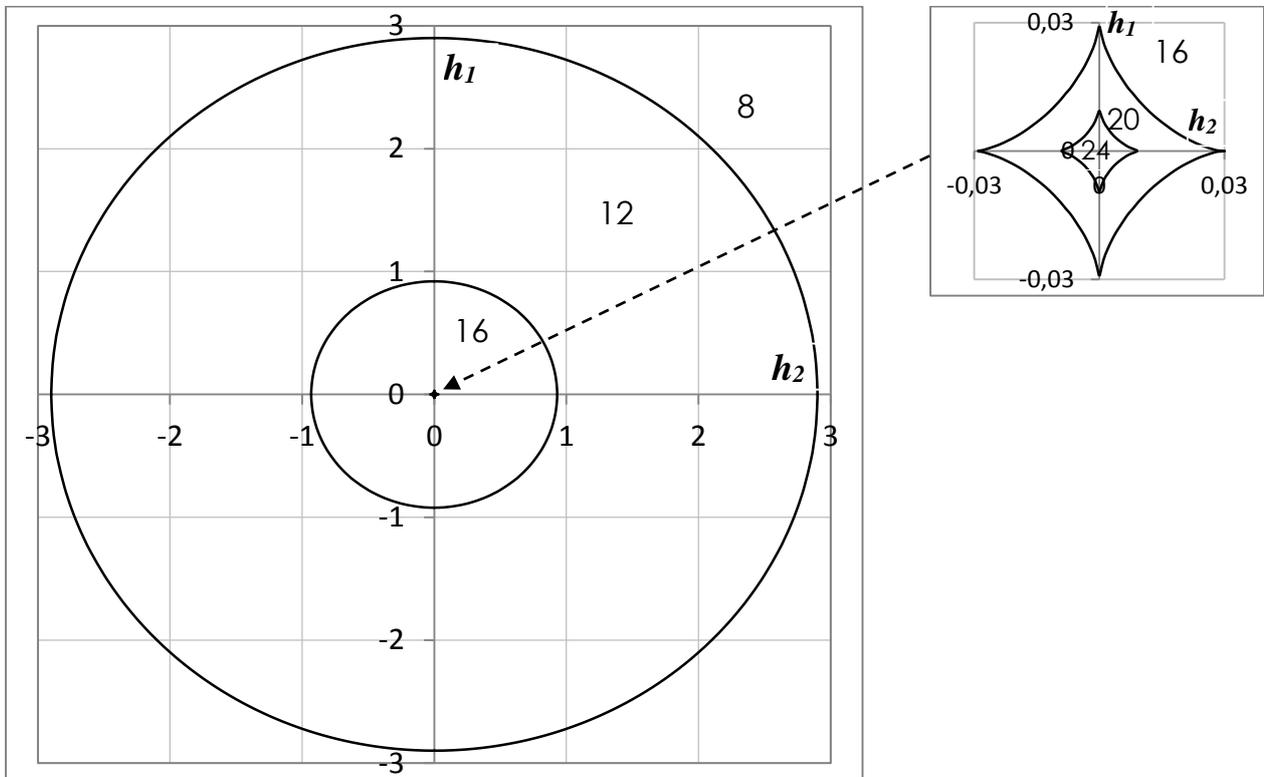
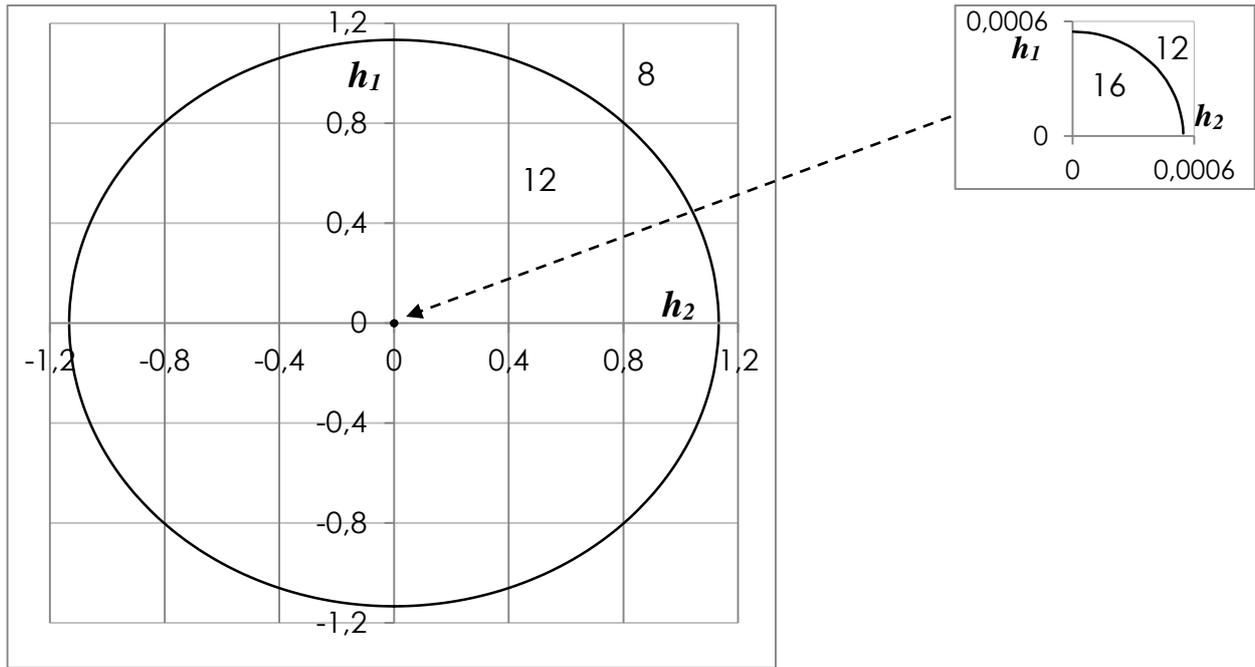
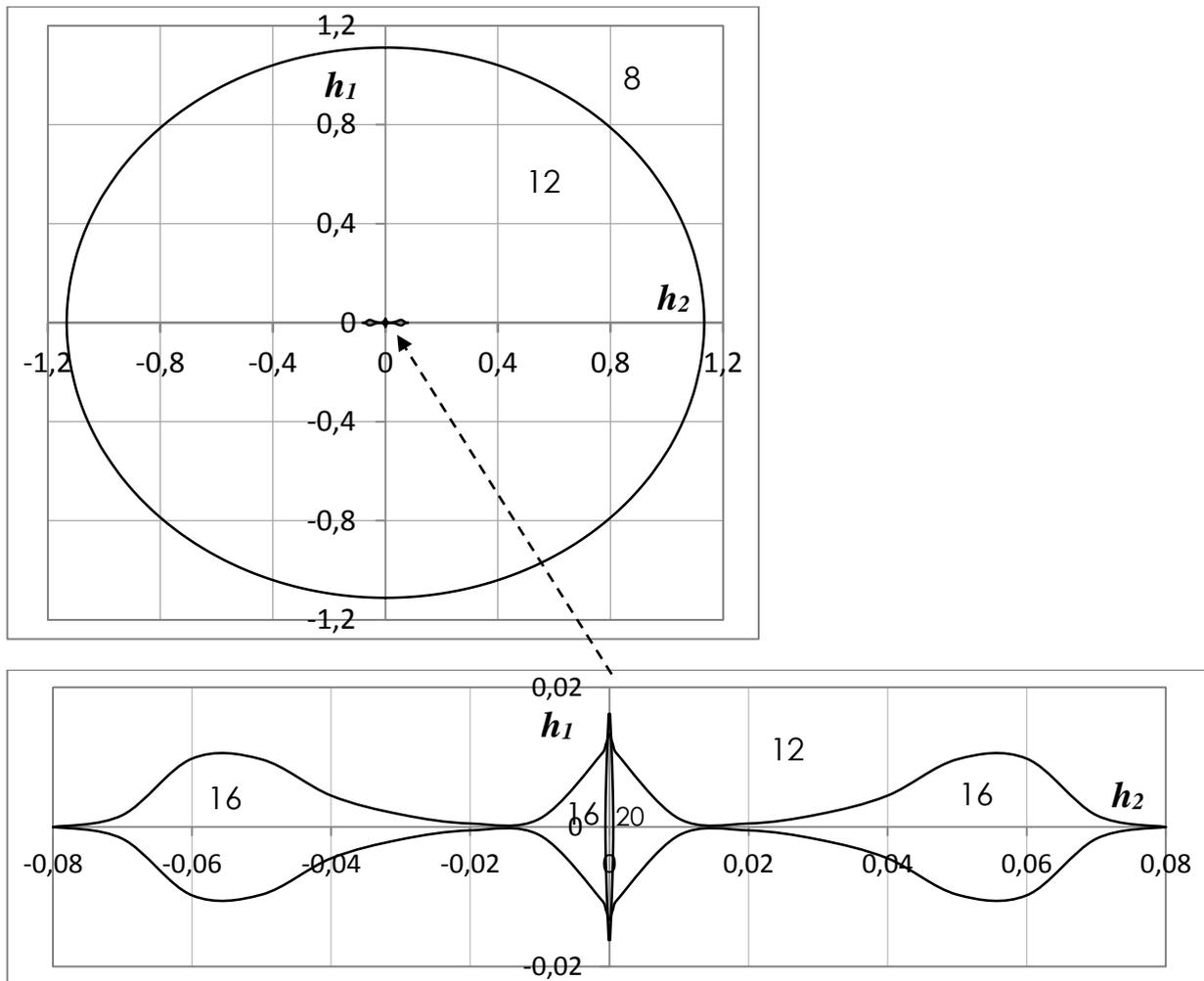


Рис. 2. $v=0.01, h_3 = 0.01$



Puc. 3. $v=0.0, h_3 = 0.99$



Puc. 4. $v=0.01, h_3 = 0.99$

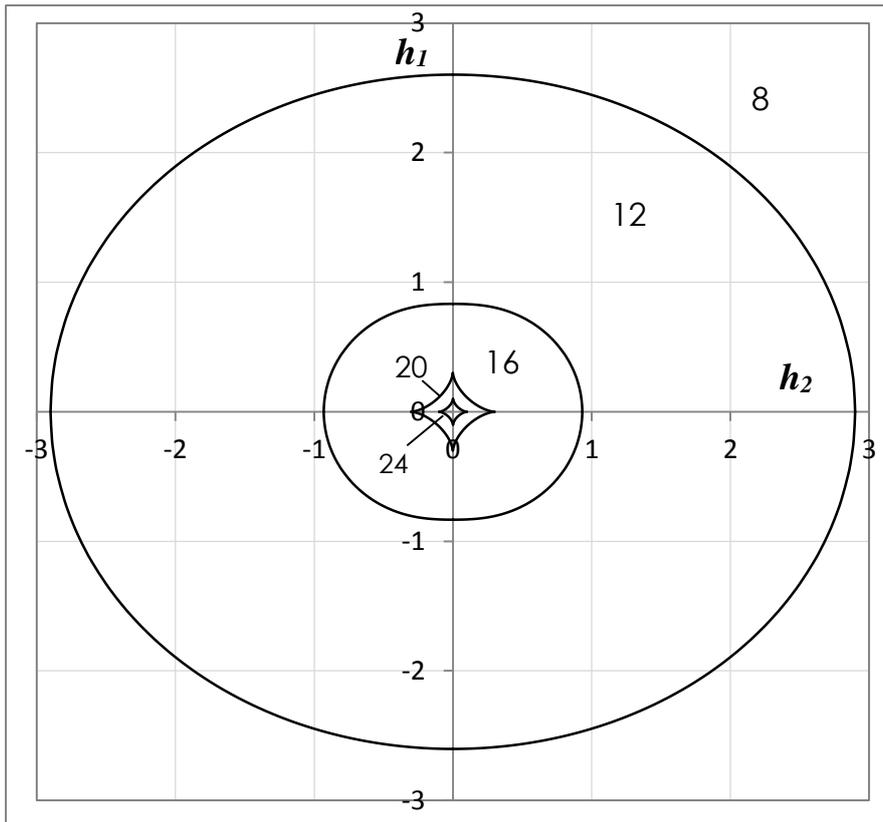


Рис. 5. $\nu=0.1, h_3 = 0.01$

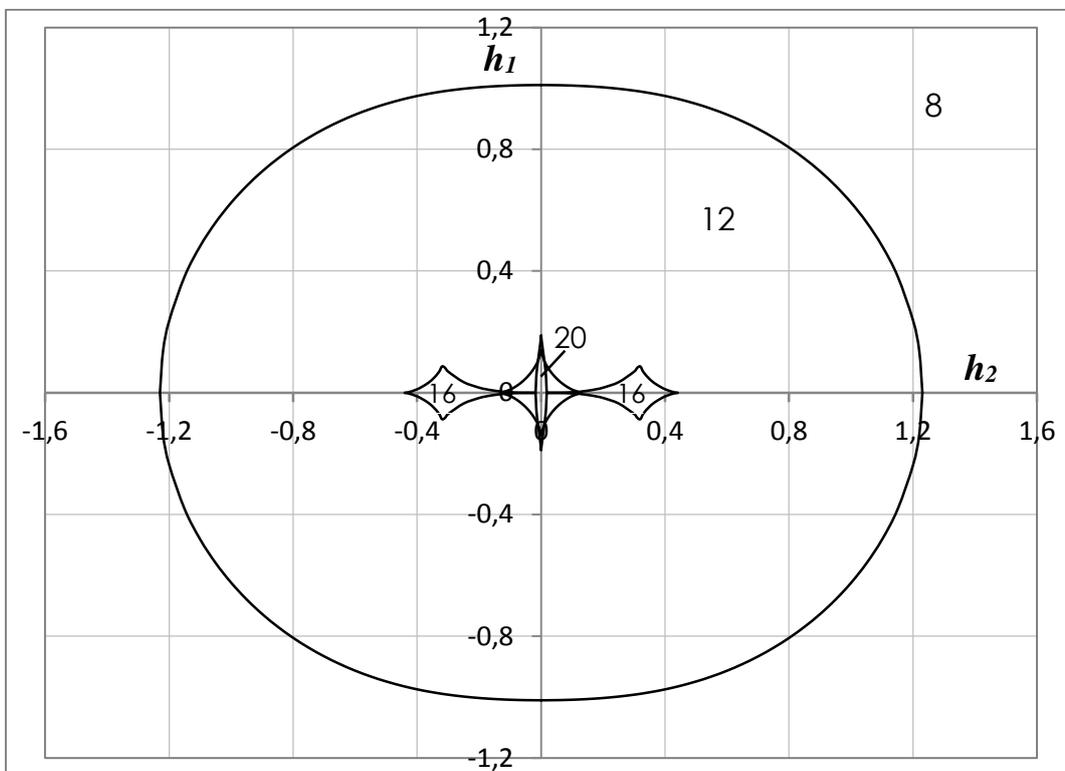
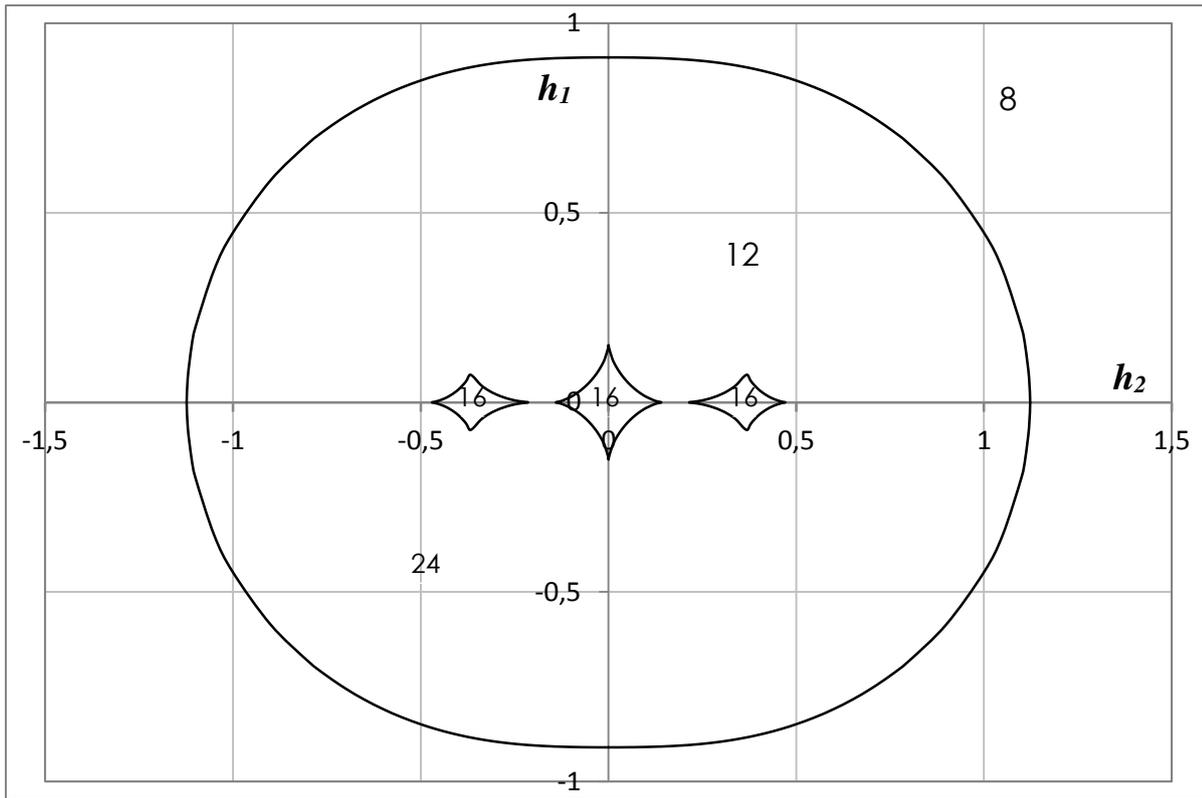
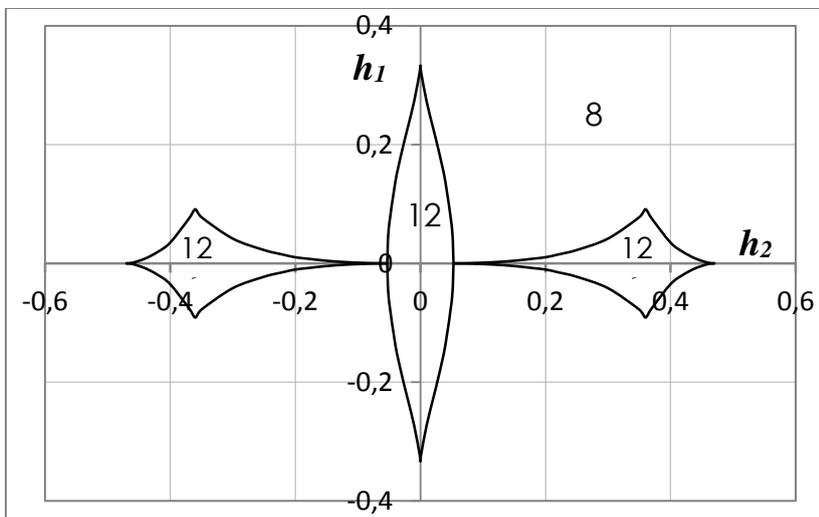


Рис. 6. $\nu=0.1, h_3 = 0.9$



Puc. 7. $v=0.1, h_3 = 1.0$



Puc. 8. $v=0.1, h_3 = 2.7$

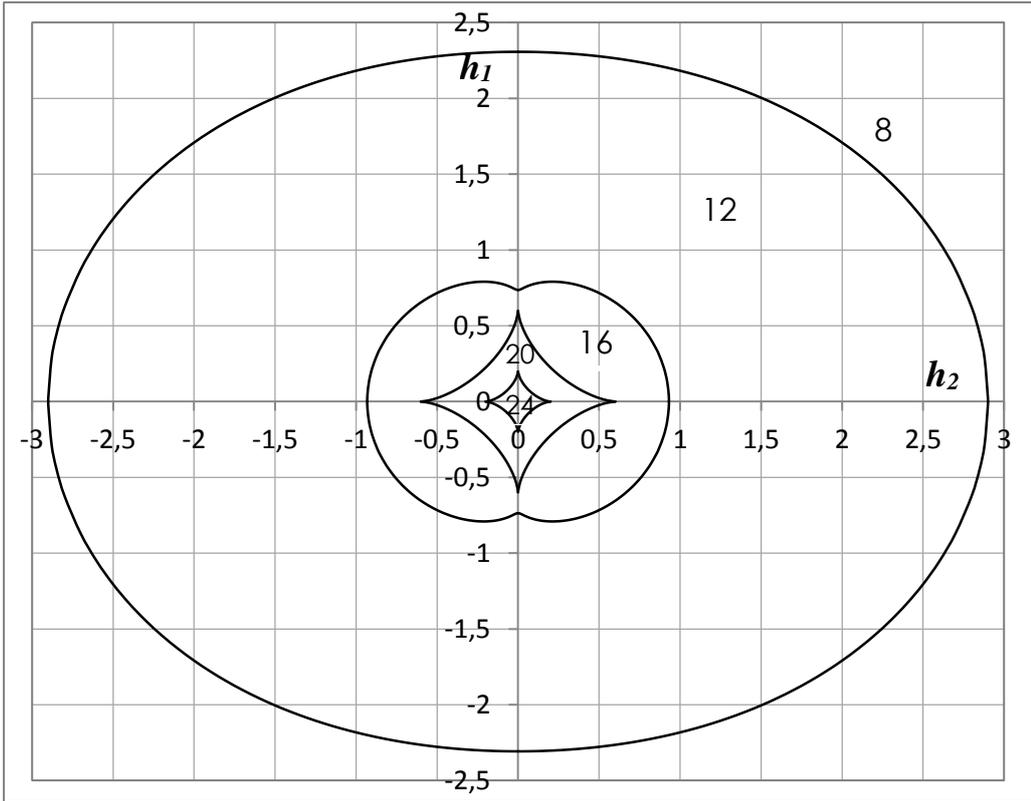


Рис. 9. $\nu=0.2, h_3 = 0.01$

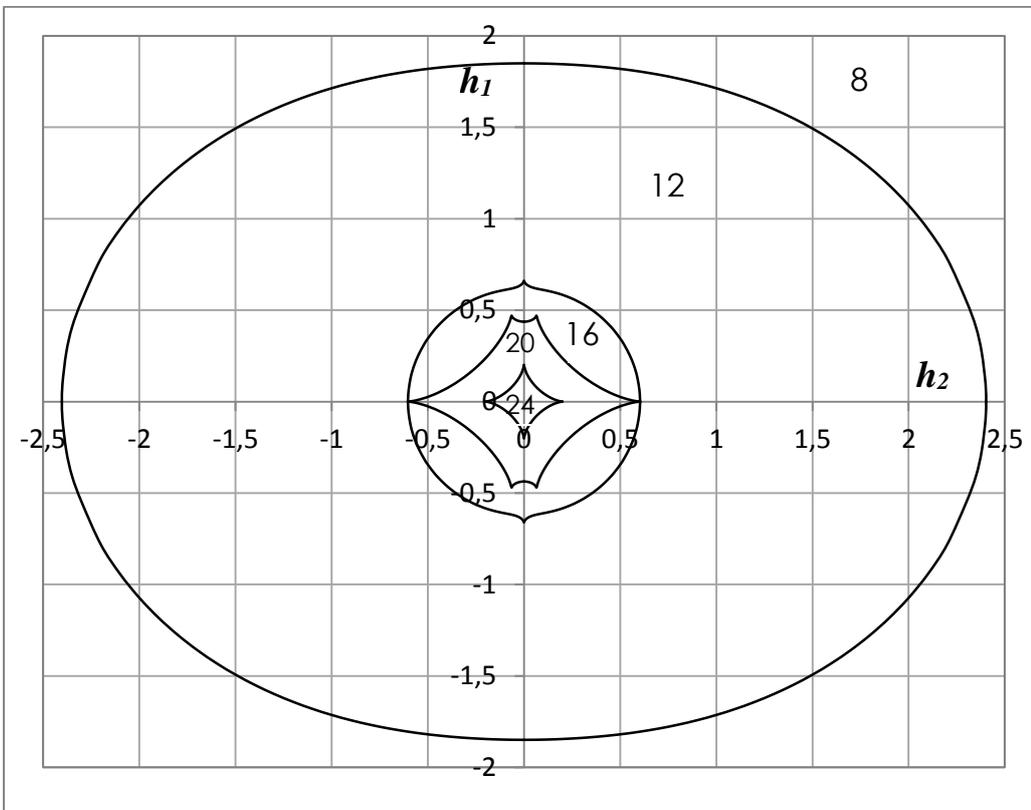


Рис. 10. $\nu=0.2, h_3 = 0.15$

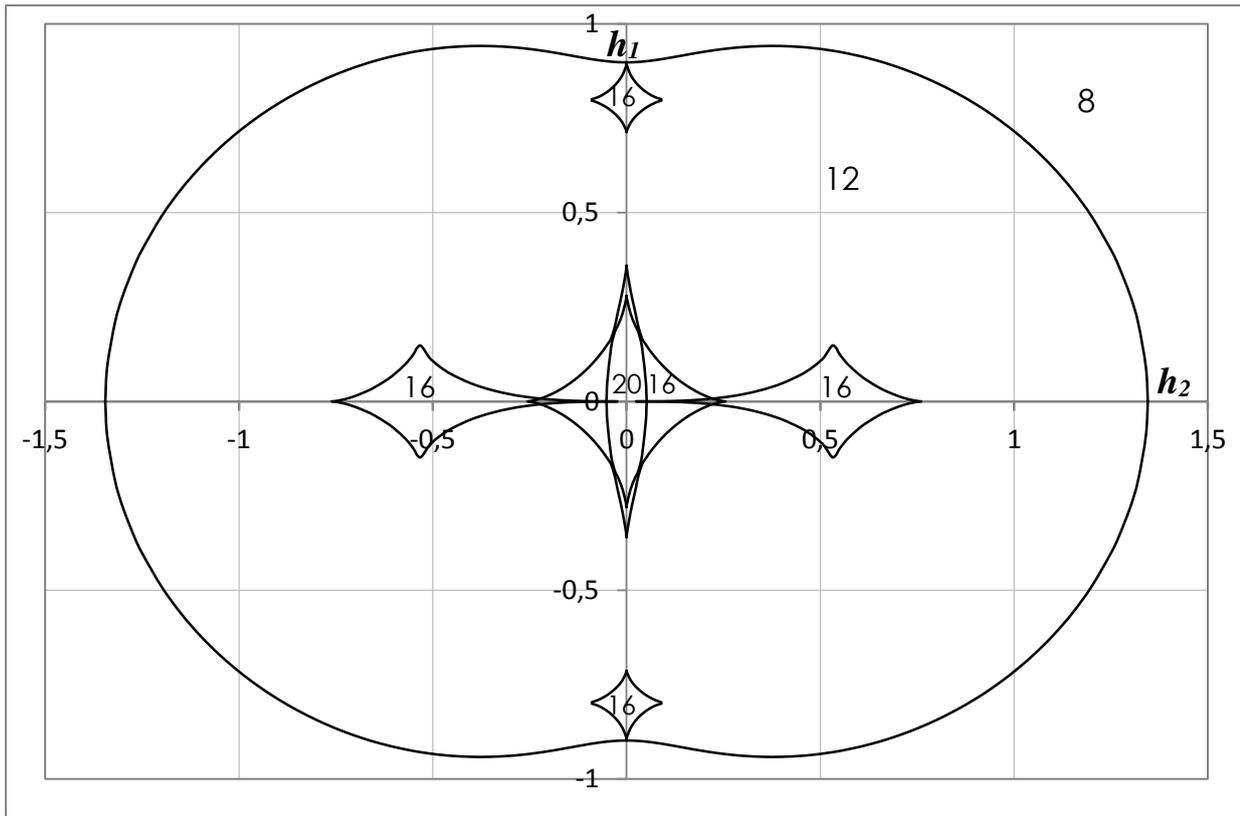


Рис. 11. $v=0.2, h_3 = 0.8$

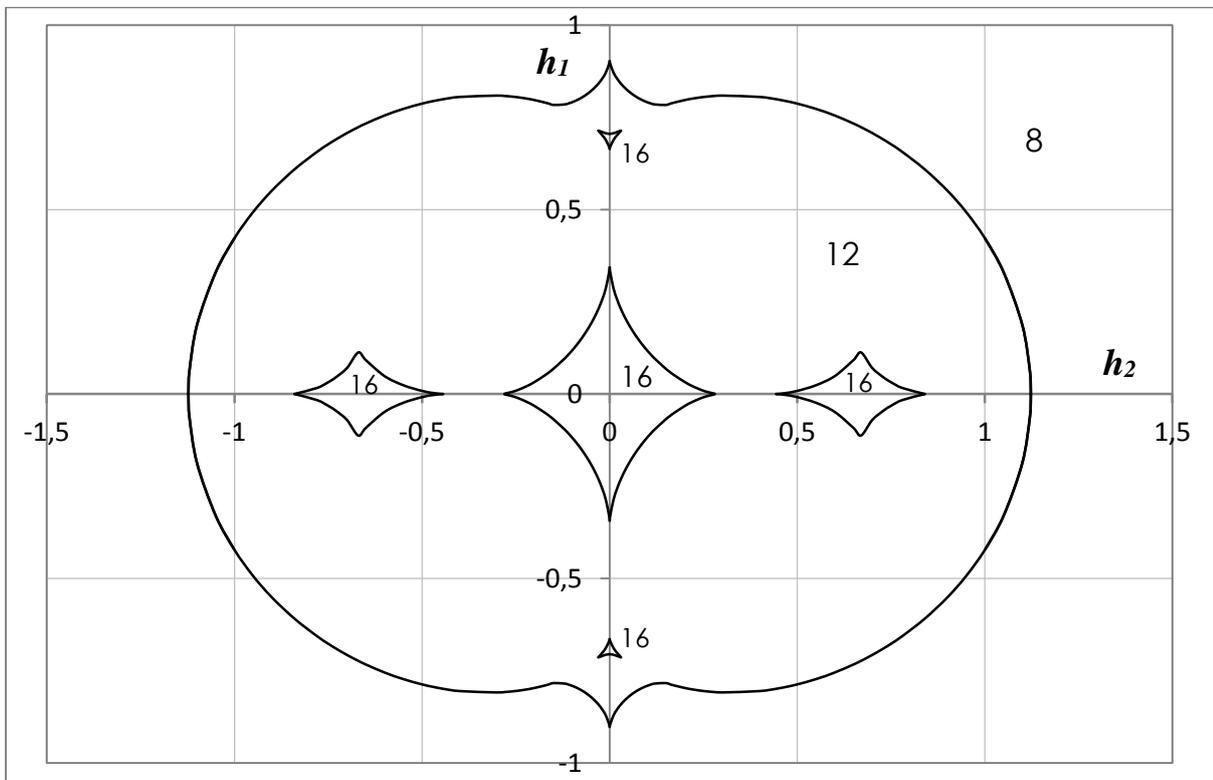
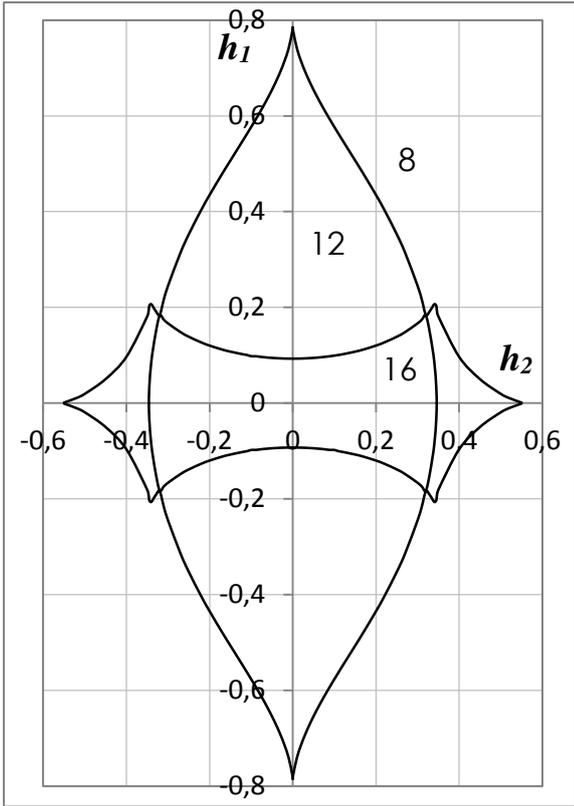
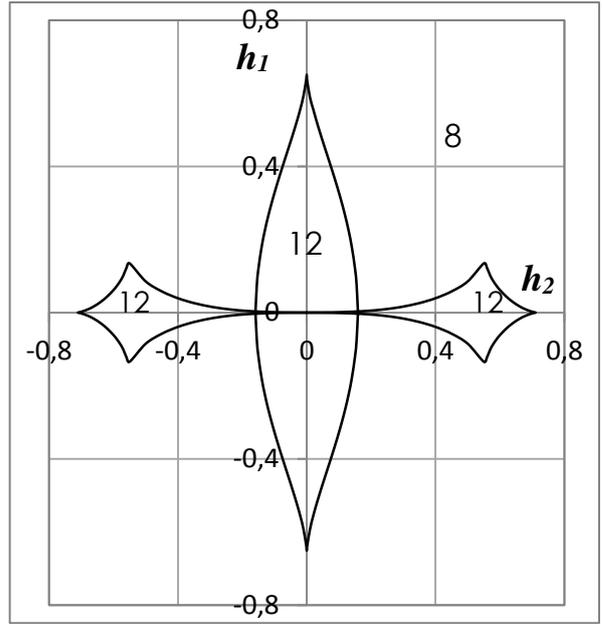


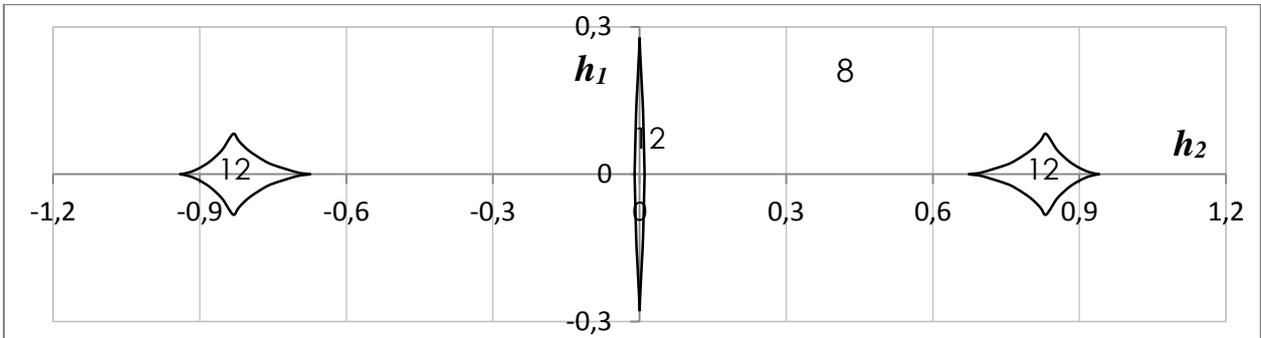
Рис. 12. $v=0.2, h_3 = 1.0$



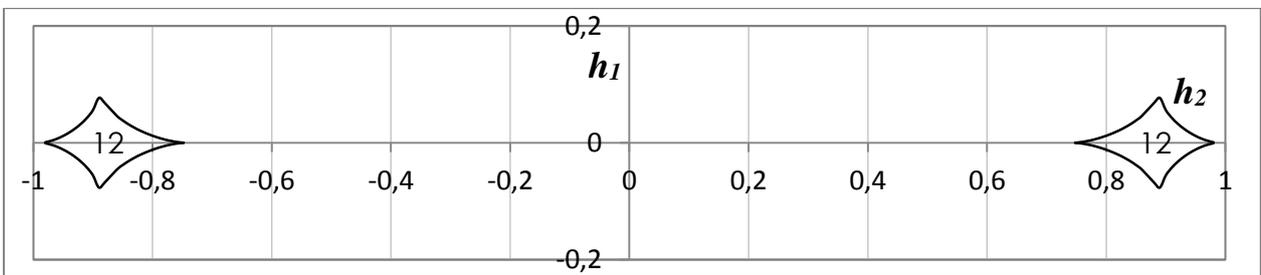
Puc. 13. $v=0.2, h_3 = 2.0$



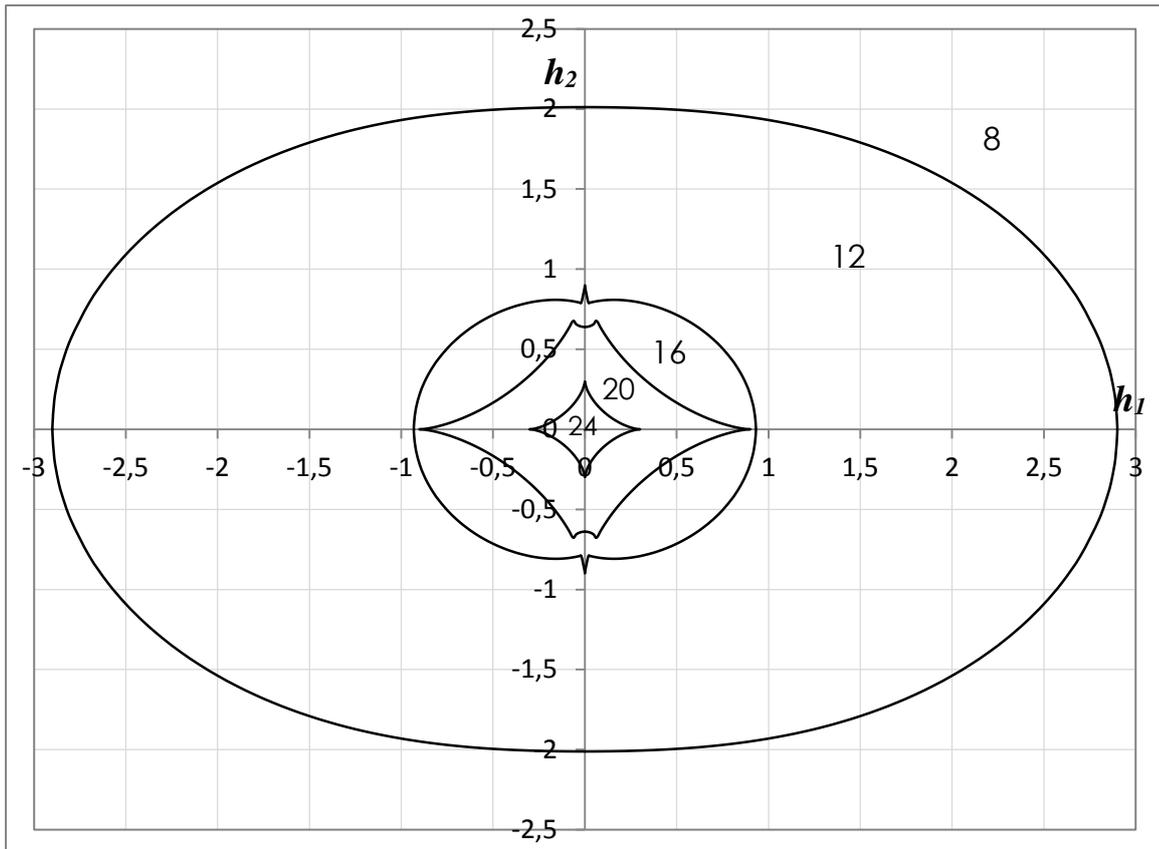
Puc. 14. $v=0.2, h_3 = 2.4$



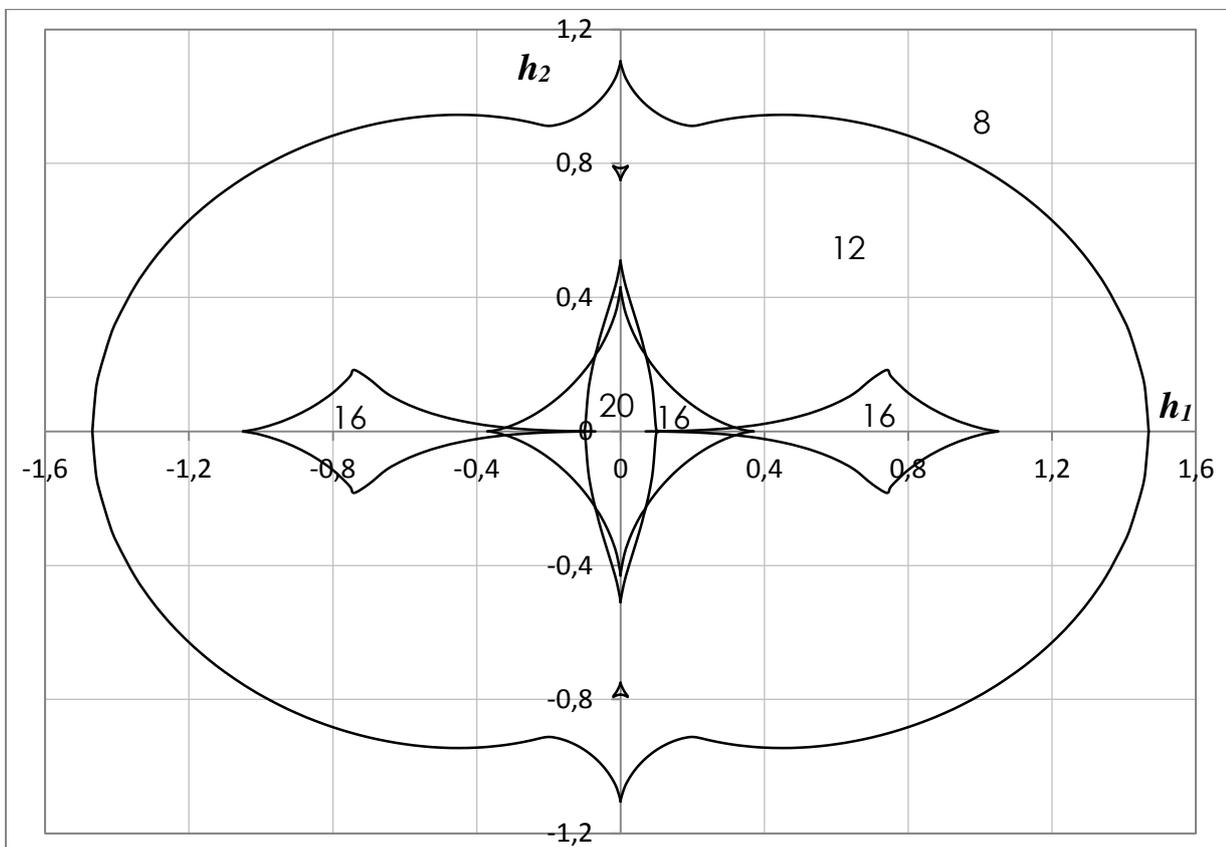
Puc. 15. $v=0.2, h_3 = 2.9$



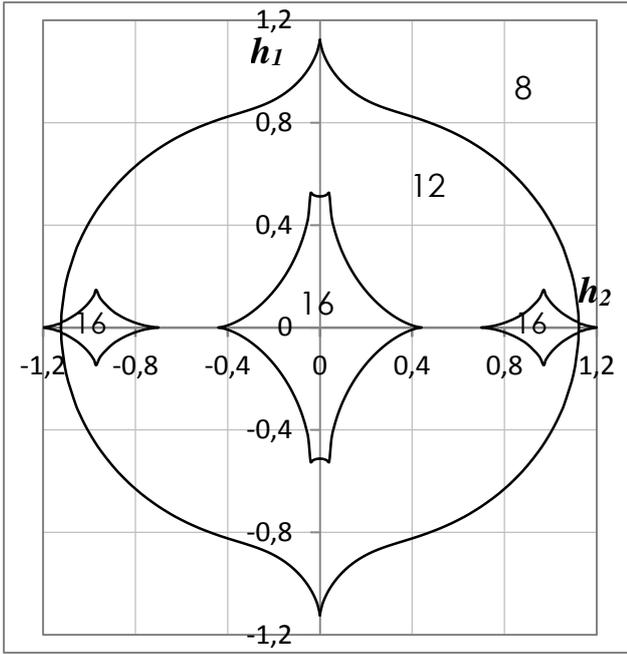
Puc. 16. $v=0.2, h_3 = 3.0$



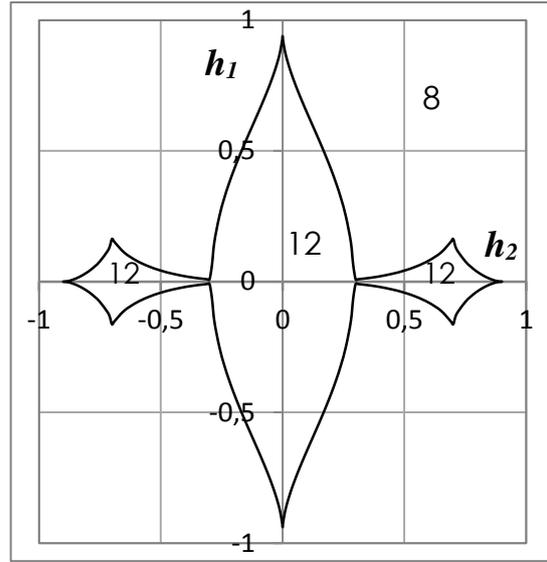
Puc.17. $v=0.3, h_3 = 0.01$



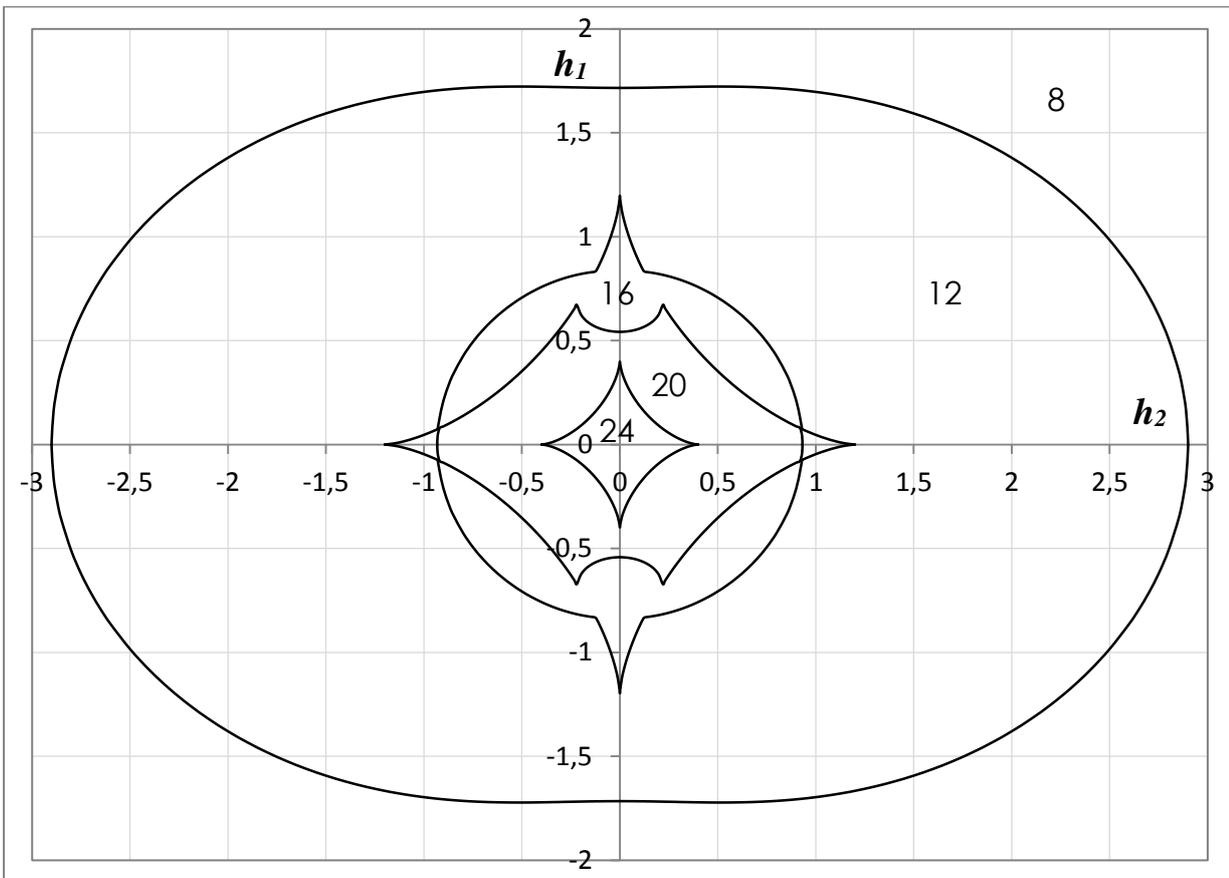
Puc.18. $v=0.3, h_3 = 0.7$



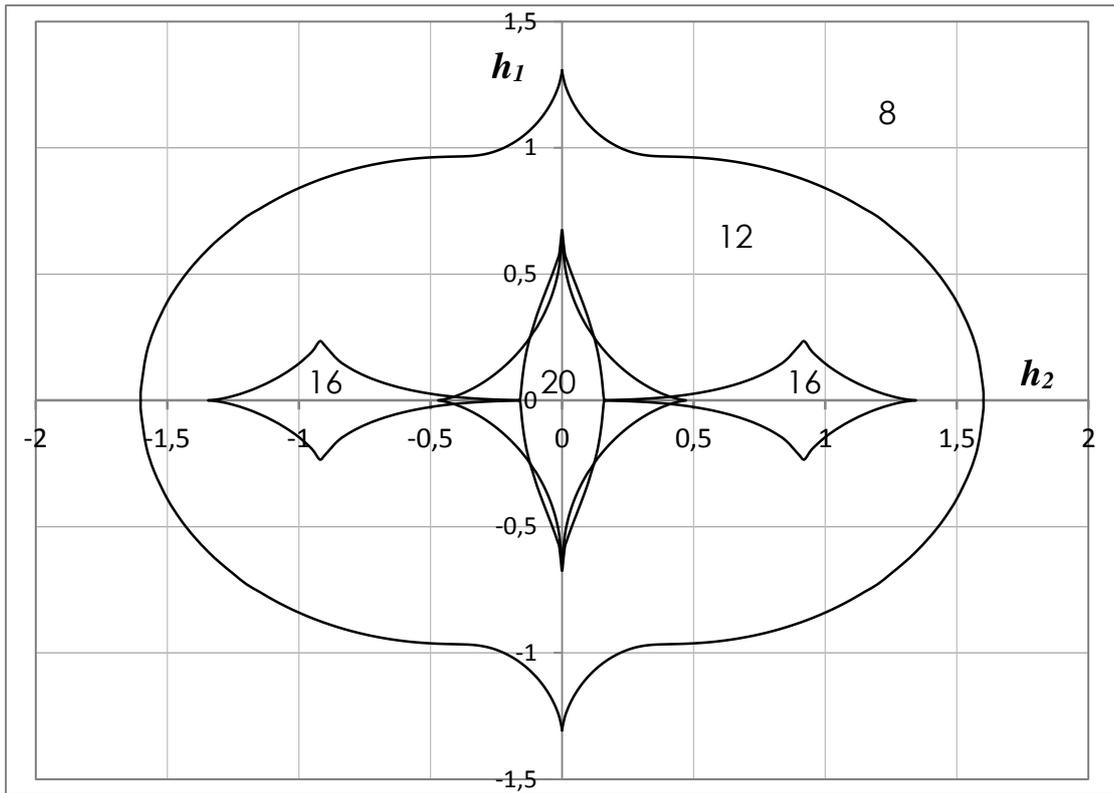
Puc.19. $v=0.3, h_3 = 1.0$



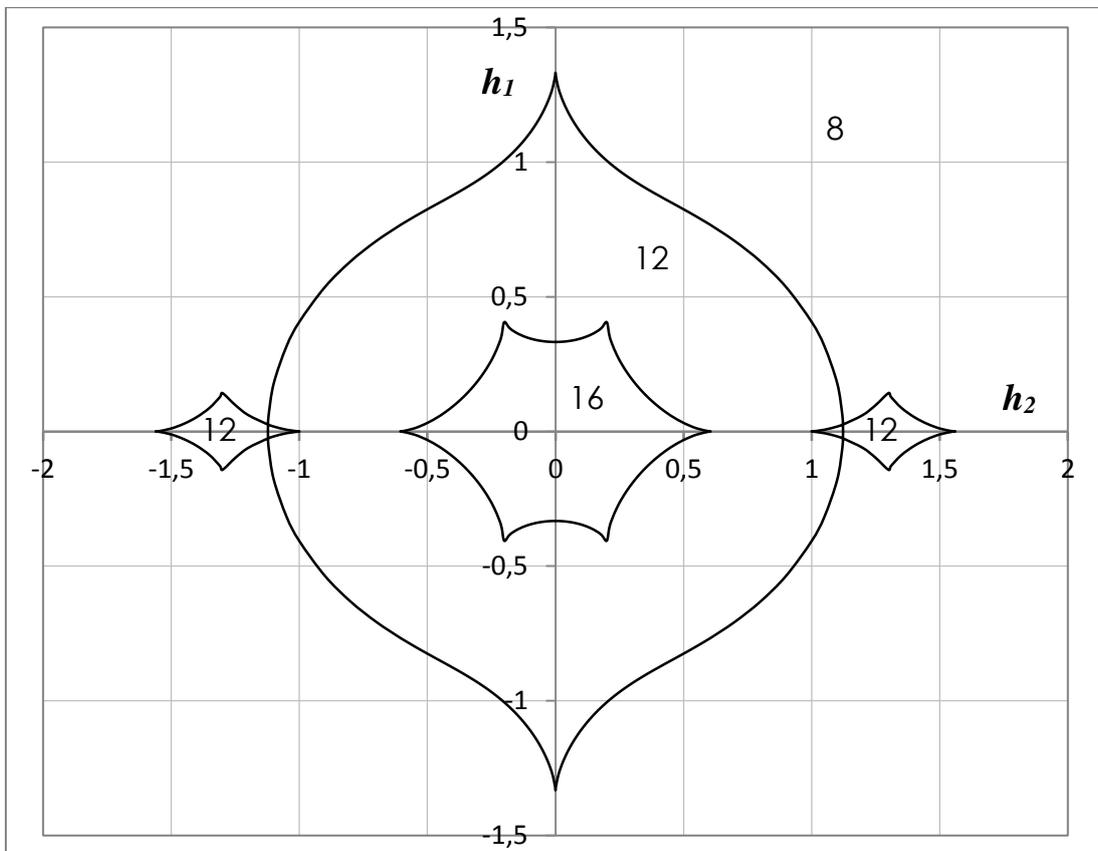
Puc.20. $v=0.3, h_3 = 2.1$



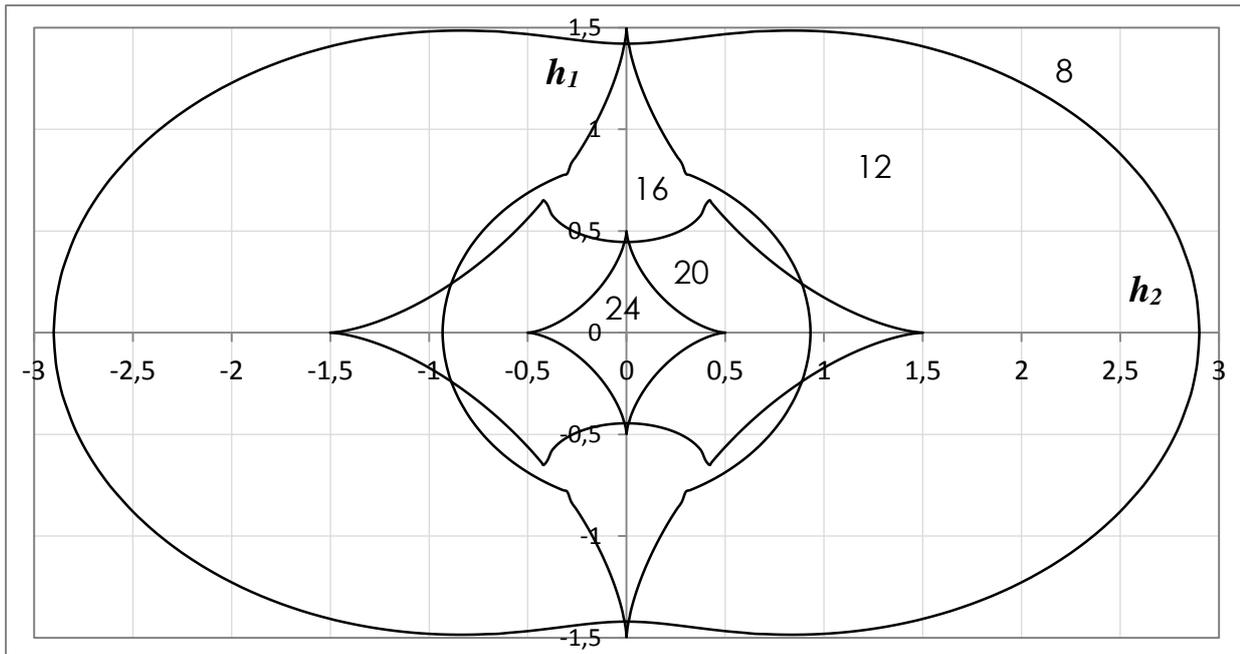
Puc.21. $v=0.4, h_3 = 0.01$



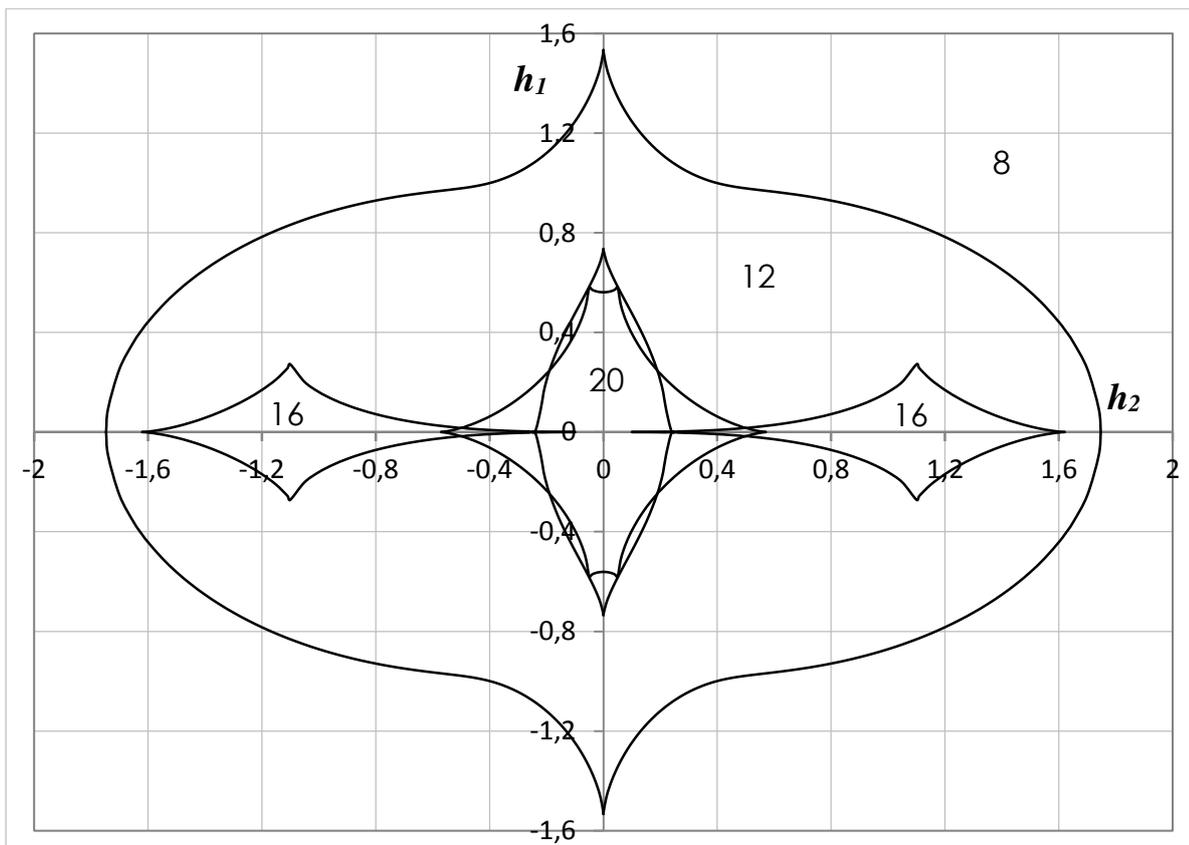
Puc.22. $v=0.4, h_3 = 0.6$



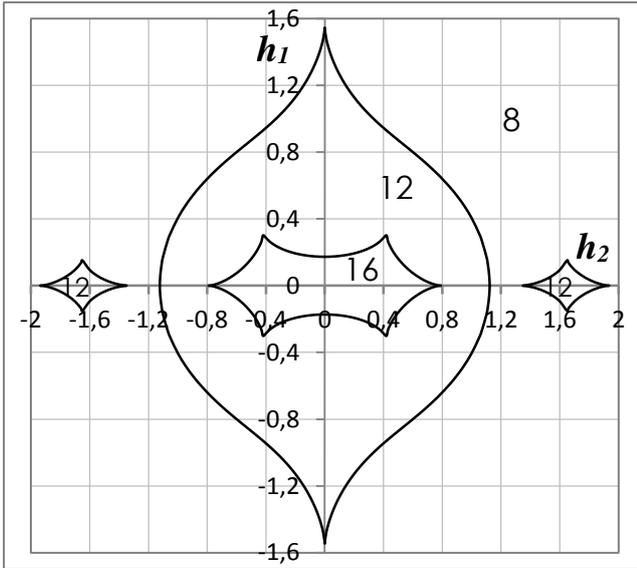
Puc.23. $v=0.4, h_3 = 1.0$



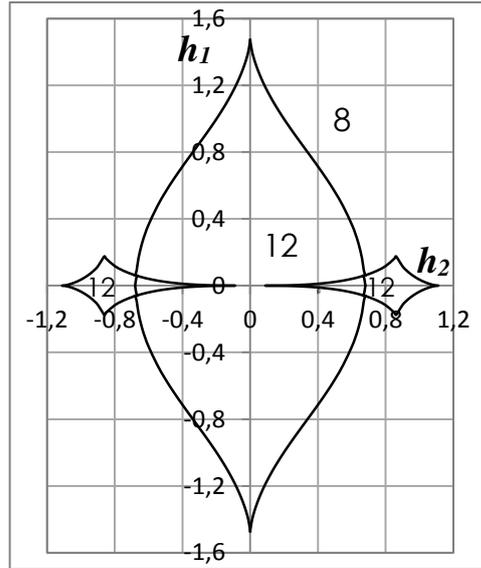
Puc.24. $v=0.5, h_3 = 0.01$



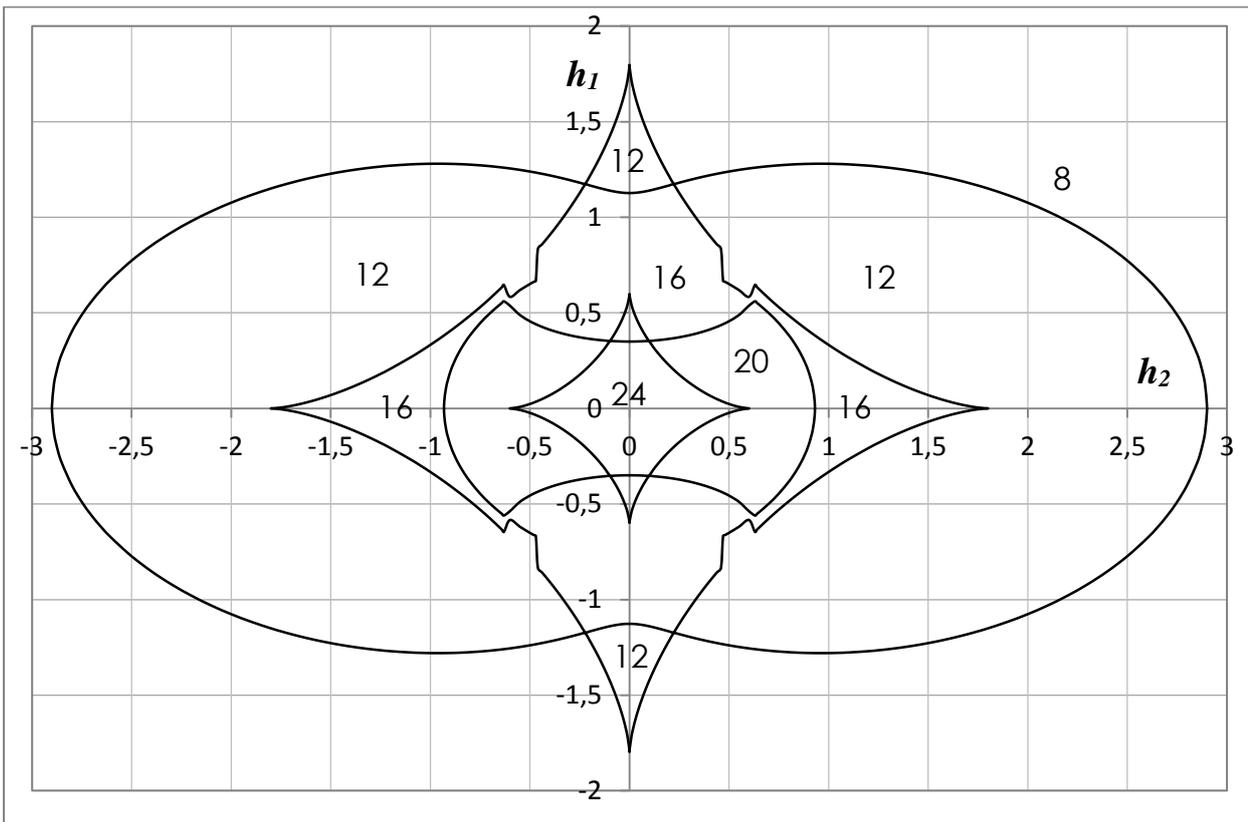
Puc.25. $v=0.5, h_3 = 0.5$



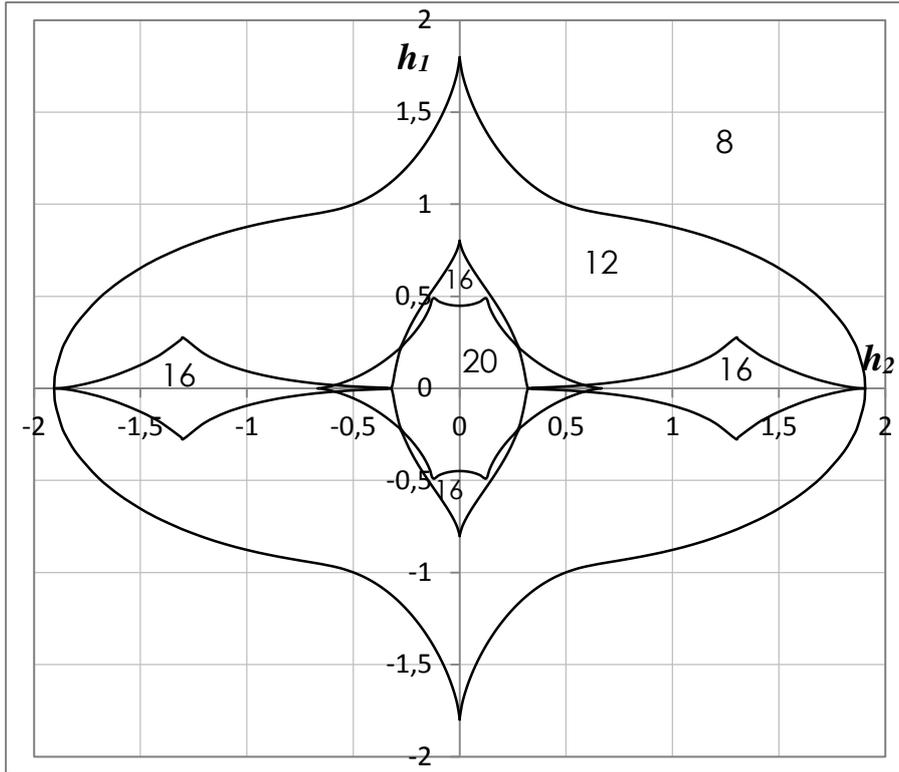
Puc.26. $v=0.5, h_3 = 1.$



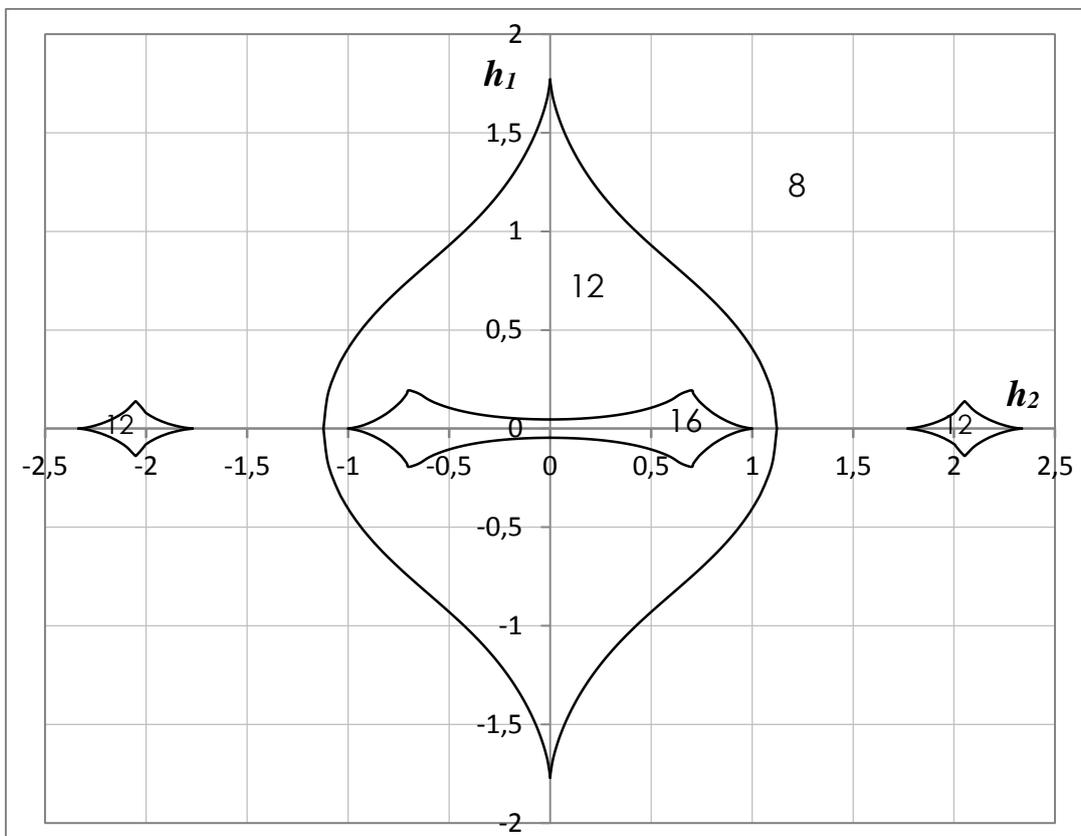
Puc.27. $v=0.5, h_3 = 1.5$



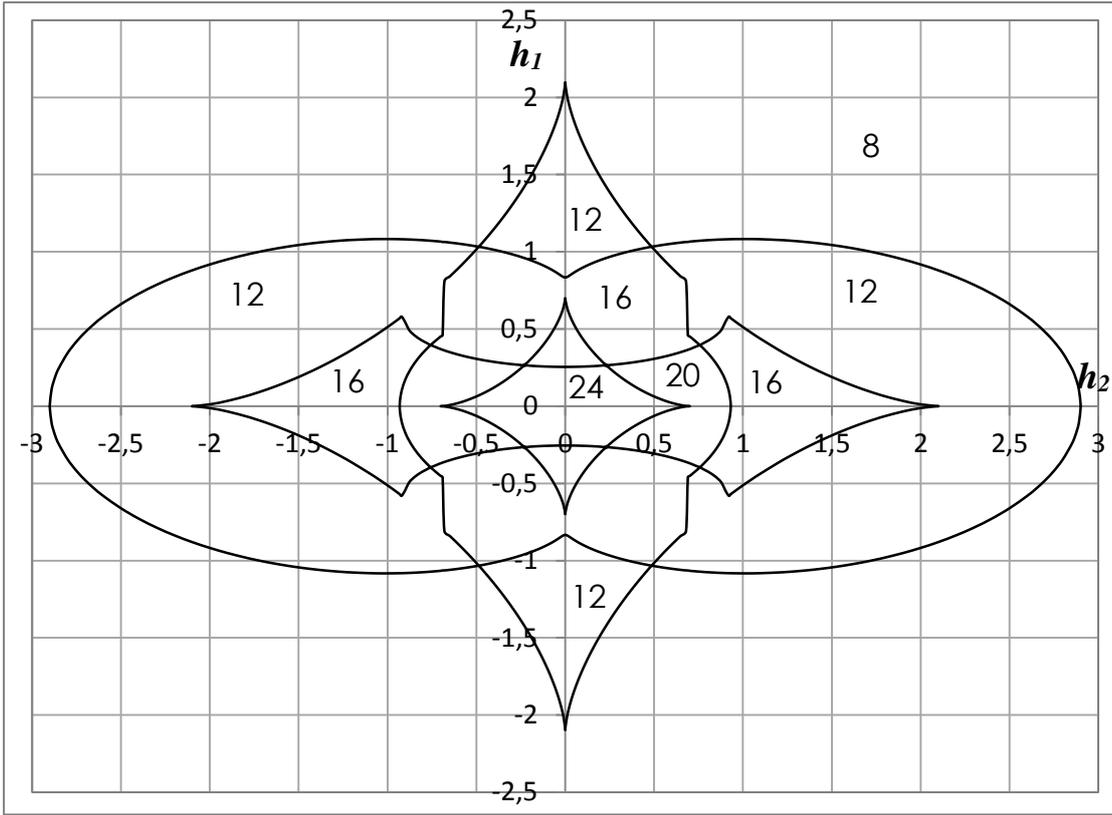
Puc.28. $v=0.6, h_3 = 0.01$



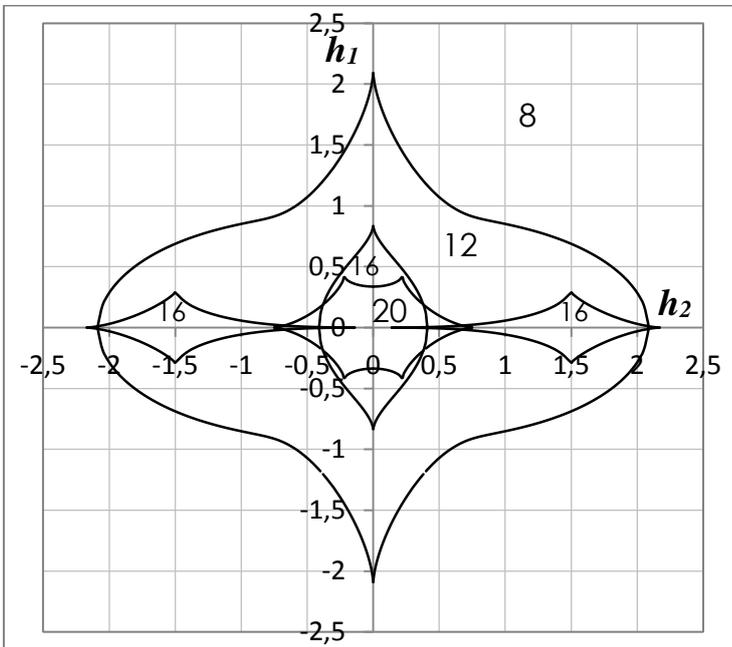
Puc.29. $v=0.6, h_3 = 0.4$



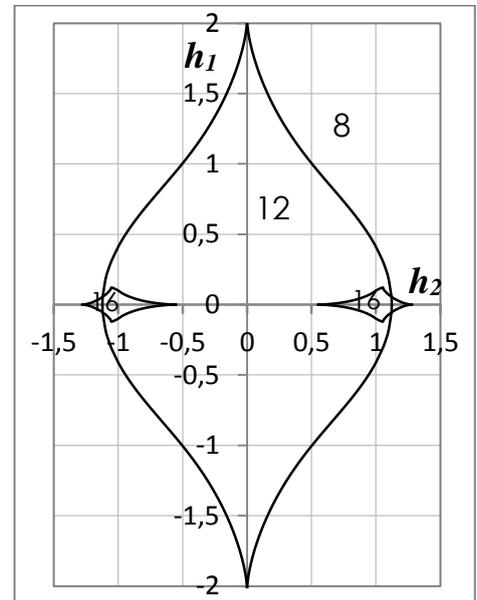
Puc.30. $v=0.6, h_3 = 1.0$



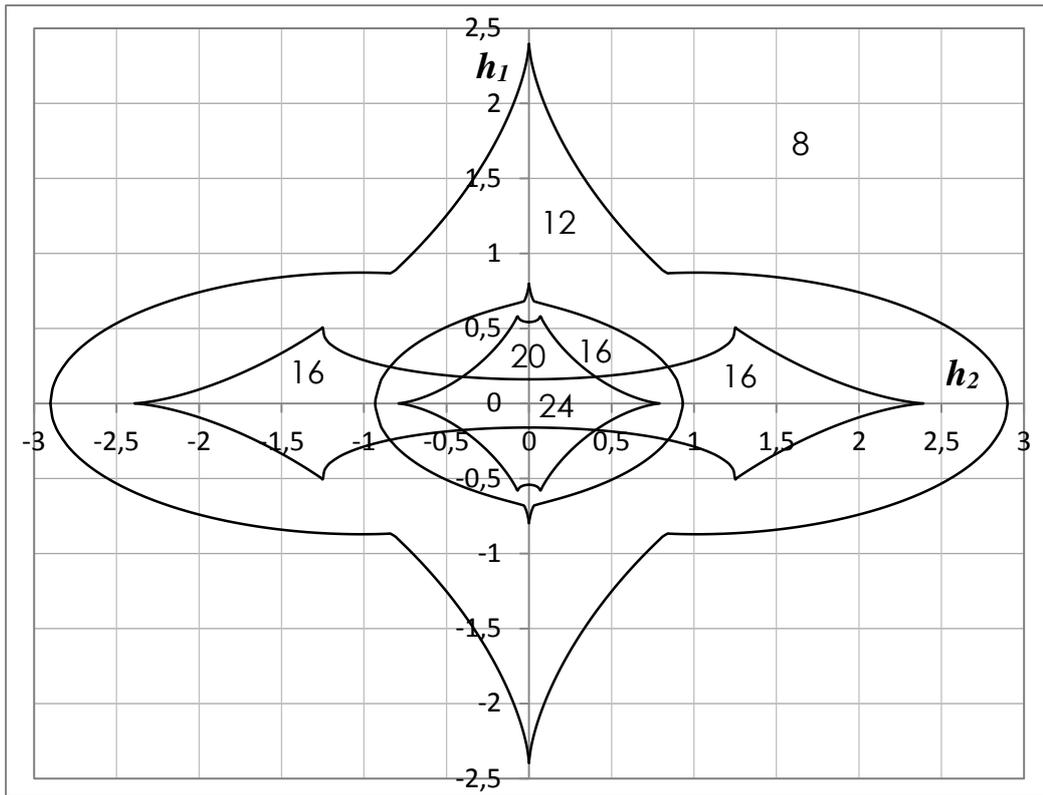
Puc.31. $v=0.7, h_3 = 0.01$



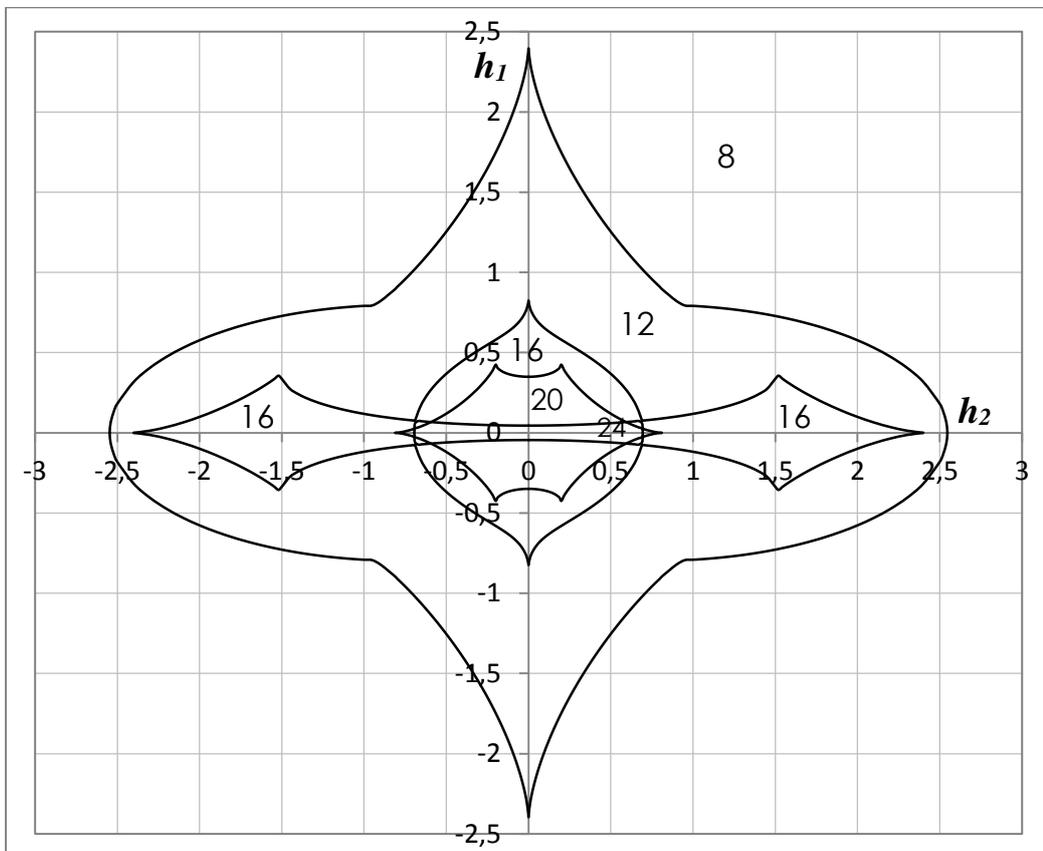
Puc.32. $v=0.7, h_3 = 0.3$



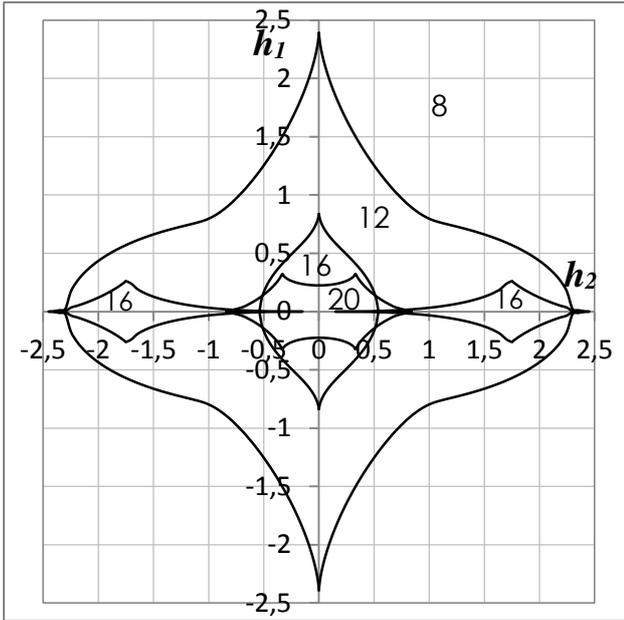
Puc.33. $v=0.7, h_3 = 1.0$



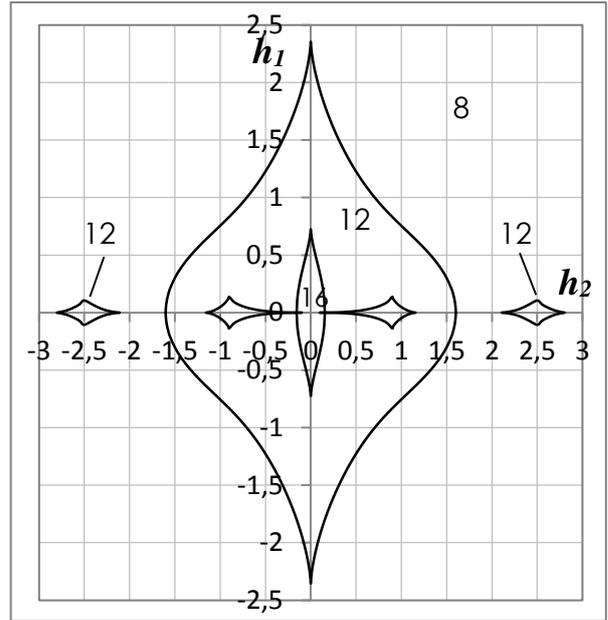
Puc.34. $v=0.8$, $h_3 = 0.01$



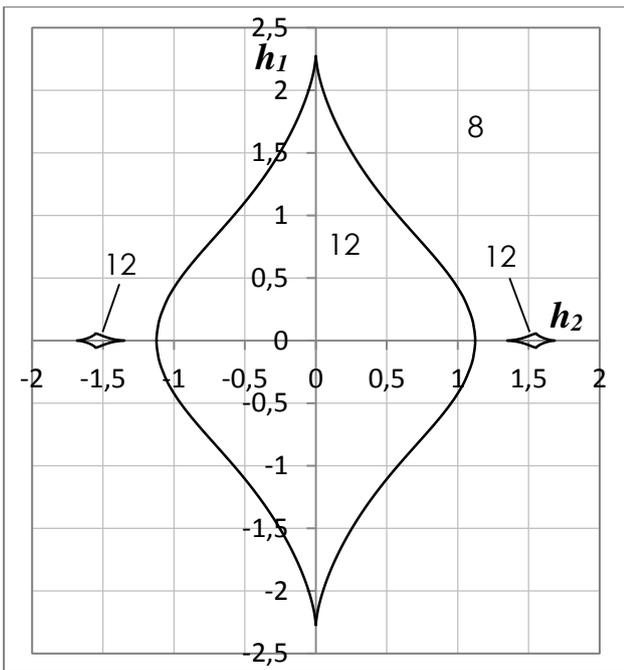
Puc.35. $v=0.8$, $h_3 = 0.1$



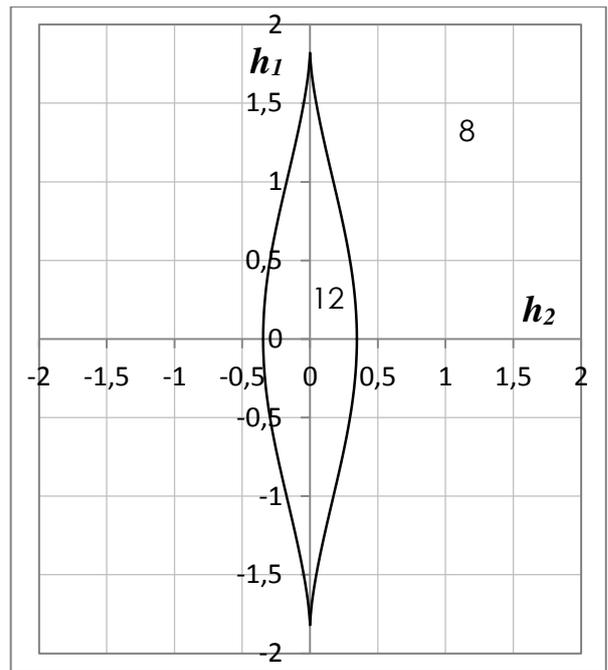
Puc.36. $v=0.8, h_3 = 0.2$



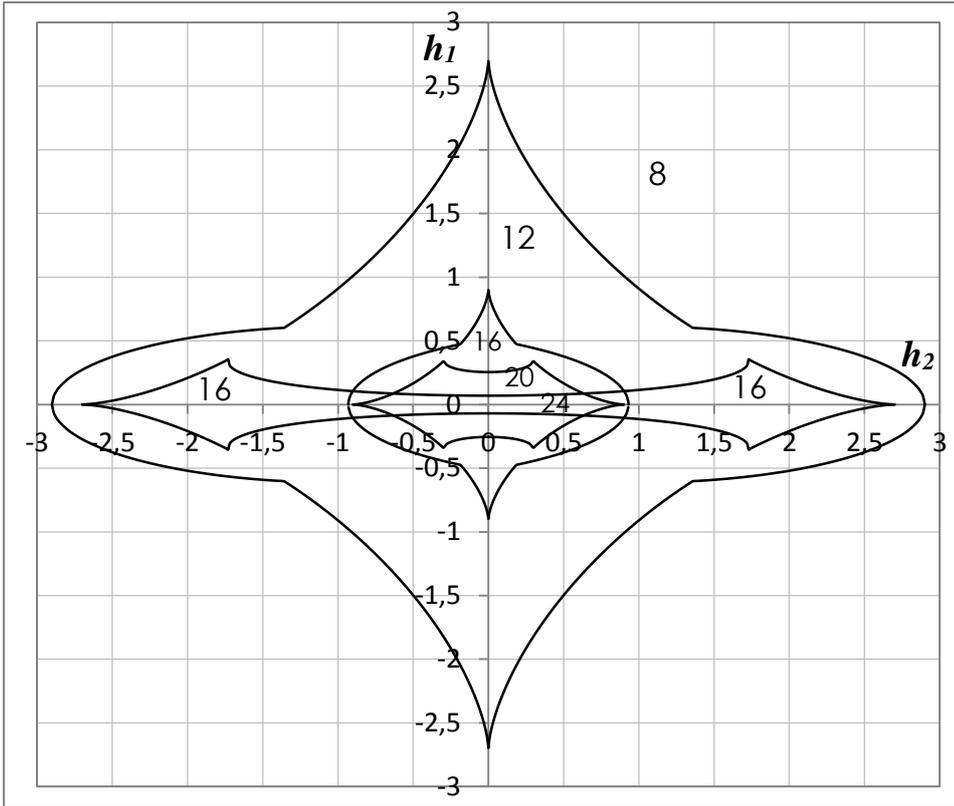
Puc.37. $v=0.8, h_3 = 0.6$



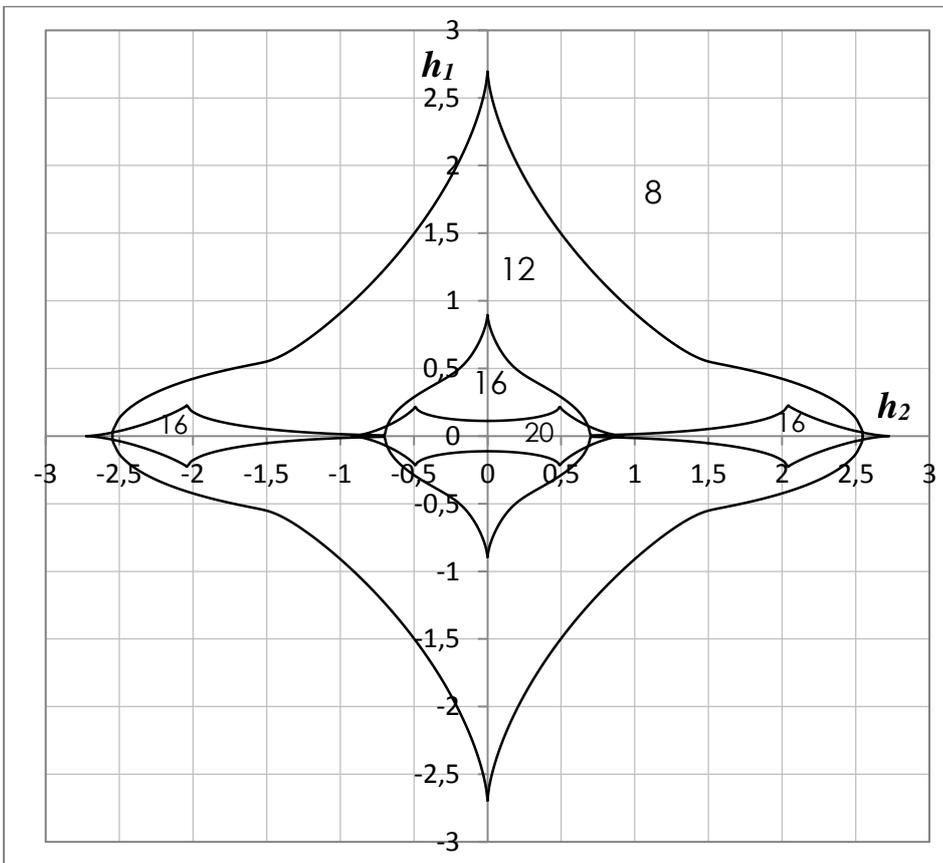
Puc.38. $v=0.8, h_3 = 1.0$



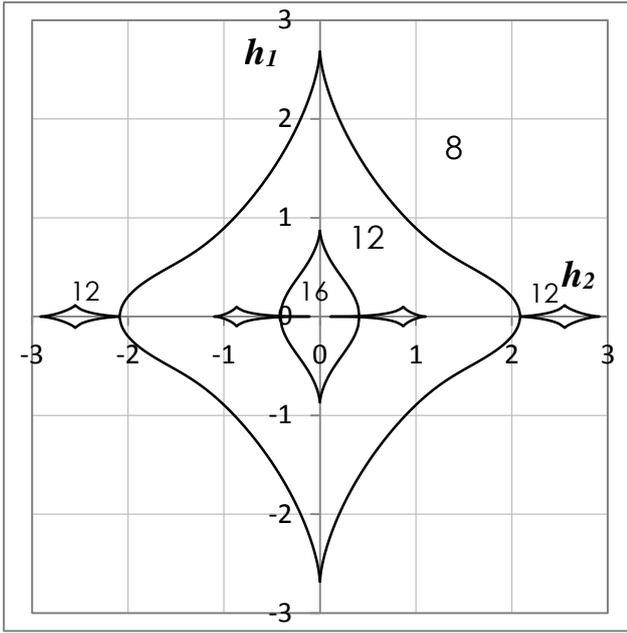
Puc.39. $v=0.8, h_3 = 2.0$



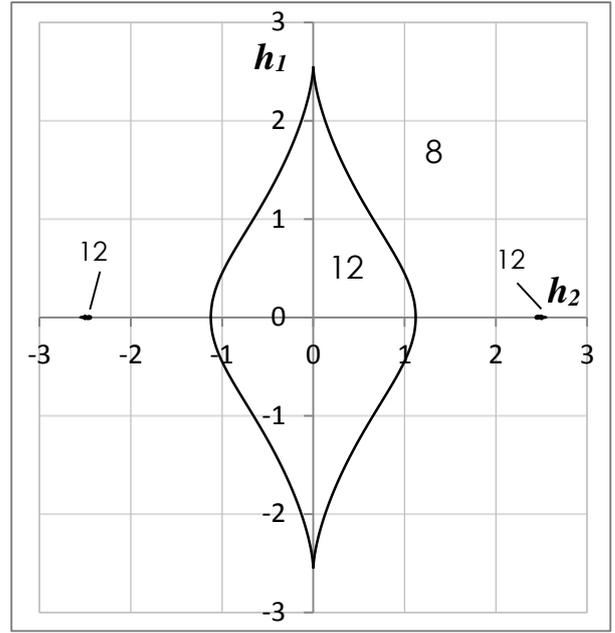
Puc.40. $v=0.9, h_3 = 0.01$



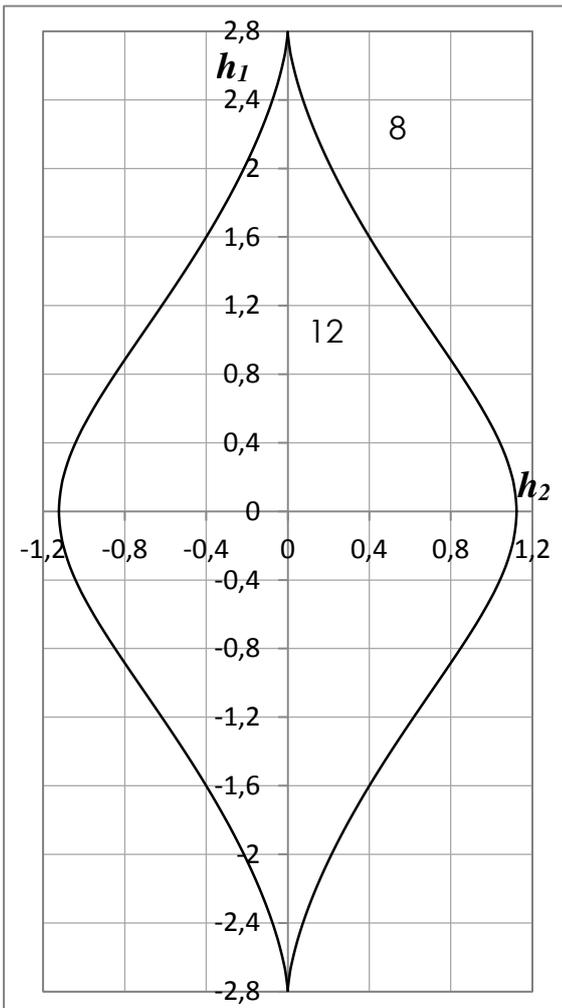
Puc.41. $v=0.9, h_3 = 0.1$



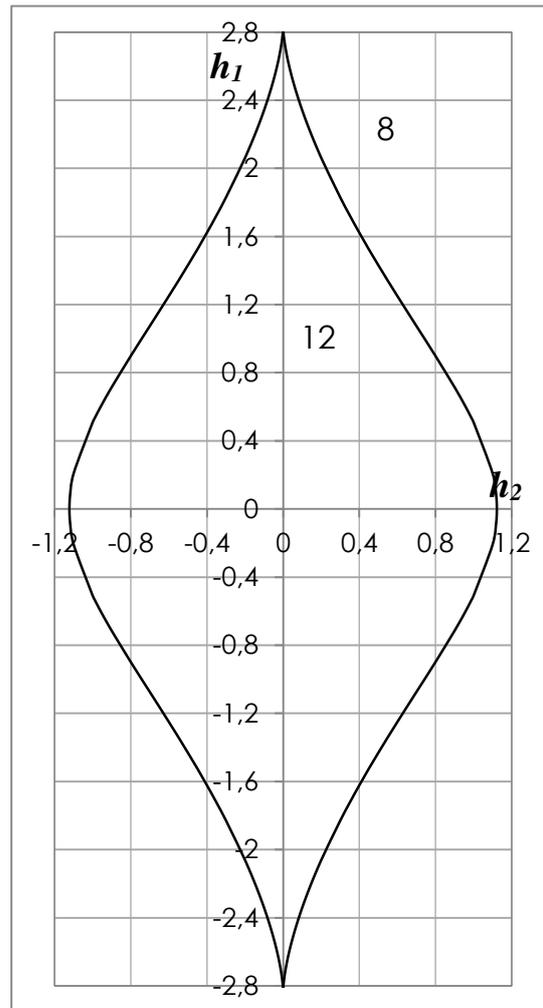
Puc.42. $v=0.9, h_3 = 0.3$



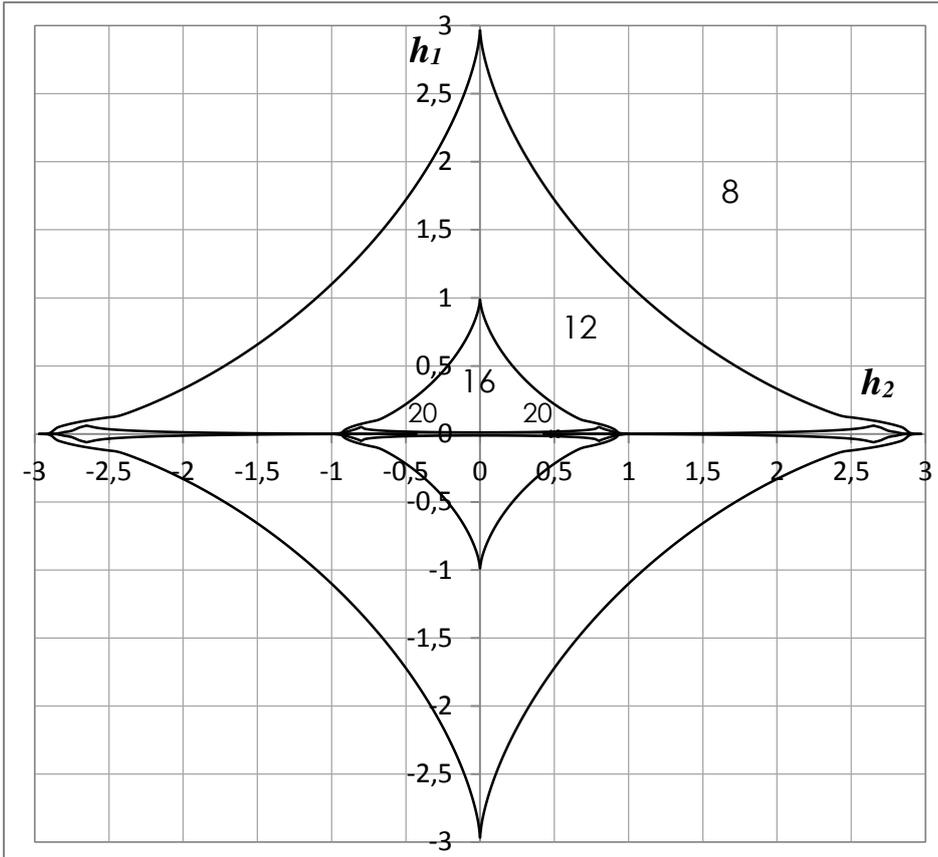
Puc.43. $v=0.9, h_3 = 1.0$



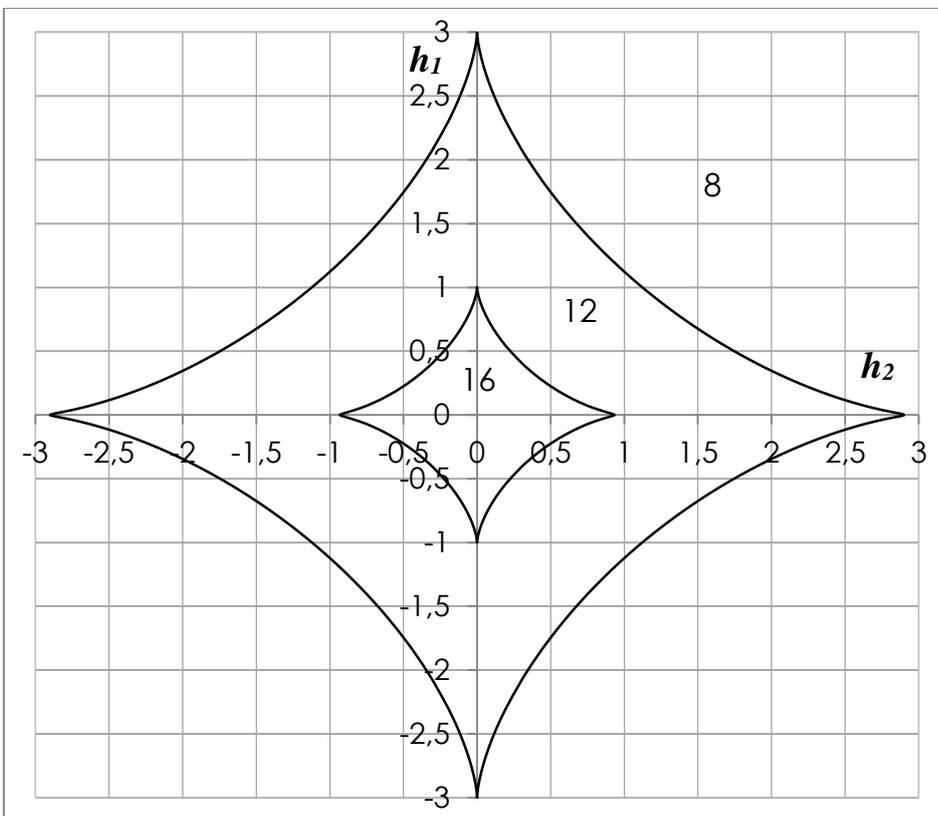
Puc.44. $v=0.99, h_3 = 1.0$



Puc.45. $v=1.0, h_3 = 1.0$



Puc.46. $v=0.99, h_3 = 0.01$



Puc.47. $v=1.0, h_3 = 0.01$