



Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.

О связи разрывного метода
Галеркина и методов типа
Годунова высокого порядка
точности

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф. О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2014. № 49. 10 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-49>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

М.Е.Ладонкина, В.Ф.Тишкин

**О связи разрывного метода Галеркина
и методов типа Годунова
высокого порядка точности**

Москва — 2014

Ладонкина М.Е., Тишкин В.Ф.

О связи разрывного метода Галеркина и методов типа Годунова высокого порядка точности

В работе показано, что схемы разрывного метода Галеркина могут трактоваться как обобщение метода Годунова на кусочно-полиномиальные функции. На примере задачи о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением получены порядки точности, близкие ко вторым в следе за ударной волной.

Ключевые слова: метод Годунова высокого порядка точности, разрывный метод Галеркина

Marina Eugenievna Ladonkina, Vladimir Fedorovich Tishkin

On the connection of discontinuous Galerkin method and Godunov type methods of high order accuracy

It is shown that the schemes of discontinuous Galerkin method can be interpreted as a generalization of Godunov's method for piecewise polynomial functions. For the problem of interaction of a shock wave with entropy perturbation orders of accuracy close to second in the wake of the shock wave are obtained.

Key words: Godunov method of high accuracy, discontinuous Galerkin method

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект №14-01-00145.

Оглавление

Введение	3
Обобщение метода Годунова на кусочно-полиномиальные функции	3
Примеры расчетов	8
Выводы	10
Список литературы.....	10

Введение

Широко известный метод С.К.Годунова[1,2] численного решения уравнений газовой динамики в одномерном случае можно рассматривать как последовательное проектирование начальных данных на кусочно-постоянные функции, решения задачи Римана с начальными кусочно-постоянными данными и затем использование этого решения в качестве новых начальных данных на момент $t + \Delta t$. В настоящей работе получено обобщение этой процедуры, когда проектирование осуществляется на кусочно-полиномиальные функции. Показано, что получающиеся формулы совпадают со схемами разрывного метода Галеркина, если в последнем в качестве потоковых функций используются потоки Годунова. Приведены примеры расчетов, показывающие, что данный метод позволяет получить порядки точности, близкие ко вторым в следе за ударной волной, проходящей по непостоянному фону.

Авторы выражают искреннюю признательность Афендикову А.Л. за ценные замечания, сделанные во время обсуждения работы.

Обобщение метода Годунова на кусочно-полиномиальные функции

Рассмотрим одномерную начально-краевую задачу на отрезке $[a, b]$ для уравнений газовой динамики, которые можно записать в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0,$$

$$\text{где } U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$U(x, 0) = U_0(x).$$

Здесь величины ρ, u, ε, p соответствуют плотности, скорости, удельной внутренней энергии и давлению газа, а $E = \rho \left(\varepsilon + \frac{u^2}{2} \right)$ – полная энергия на единицу объема. Система замыкается уравнением состояния. На концах отрезка могут быть заданы граничные условия различных типов.

Под обобщенным решением задачи (1) будем понимать кусочно-гладкие функции $U(x, t)$, которые могут иметь разрывы или разрывные производные на конечном числе кусочно-гладких линий на плоскости (x, t) , удовлетворяющие начальным и краевым условиям задачи, для которых для любой области с кусочно-гладкой границей справедливо интегральное тождество

$$\oint U(x,t)dx - F(U(x,t))dt = 0$$

и удовлетворяющие энтропийному неравенству

$$\oint \rho \cdot S dx - \rho u \cdot S dt \geq 0,$$

где S —удельная энтропия.

Легко видеть, что для решения такого типа и для любой гладкой функции $\varphi(x)$ в областях данного типа выполнено соотношение:

$$\oint U(x,t)\varphi(x)dx - F(U(x,t))\varphi(x)dt - \int \frac{d\varphi(x)}{dx} F(U(x,t))dxdt = 0. \quad (2)$$

В самом деле, выражение (2) в областях, где $U(x,t)$ не имеет разрывов, очевидно. Разбивая исходную область на конечное число подобластей такого типа, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} & \oint U(x,t)\varphi(x)dx - F(U(x,t))\varphi(x)dt - \int \frac{d\varphi(x)}{dx} F(U(x,t))dxdt \\ & + \int_l \varphi(x) ([U(x,t)]dx - [F(U(x,t))]dt) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу соотношений Гюгонио $[U(x,t)]dx - [F(U(x,t))]dt \equiv 0$ мы приходим к соотношению (2).

Широко распространенный метод Годунова [1] для получения обобщенных решений (1) можно трактовать следующим образом.

Покроем отрезок $[a,b]$, на котором ищется решение, сеткой $a = x_{1/2} \leq x_{3/2} \leq \dots \leq x_{N+1/2} = b$ с шагом $\Delta x_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$. Центры интервалов обозначим $x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2}, i = 1, \dots, N$.

Рассмотрим пространство E_0 функций, принимающих постоянные значения на отрезках $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$. Спроецируем начальные данные на E_0 . В качестве проектора здесь и ниже будем использовать ортогональное проектирование в $L_2(ab)$. Для некоторого интервала времени Δt_0 известно точное решение задачи с получившимися кусочно-постоянными начальными данными [2]. Полученное решение на момент Δt_0 будем рассматривать как новые начальные данные для уравнений (1) и повторим процедуру. В результате получим схему

$$\frac{U_i(t^{n+1}) - U_i(t^n)}{\Delta t} + \frac{F(U_{i+1/2}^n) - F(U_{i-1/2}^n)}{\Delta x_i} = 0,$$

где $t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k$, $U_i(t^n)$ – значения кусочно-постоянной функции на интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$, $U_{i+1/2}^n$ – значение в точке $x_{i+1/2}$ решения задачи Римана с данными $U_i(t^n)$ и $U_{i+1}(t^n)$ слева и справа от разрыва. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим схему

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{F(U_{i+1/2}) - F(U_{i-1/2})}{\Delta x_i} = 0.$$

Не останавливаясь подробно на способах задания граничных условий в дискретном случае, отметим только, что большинство из них могут быть реализованы путем использования фиктивных ячеек, в которых нужным образом задаются значения искомых функций.

Получим обобщение этого метода. На каждом интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ рассмотрим пространство полиномов E_{p_i} степени не выше P . Базис данного пространства выберем в виде ортогональных полиномов Лежандра $\varphi_k(z) = \frac{1}{2^k k!} \frac{d^k}{dz^k} (z^2 - 1)^k$, $i \text{ дè } z = x - x_i, k = 0, \dots, p$. Пространство таких кусочно-полиномиальных функций обозначим через E_p . Спроецируем начальные данные на E_p .

$$U_p(x, 0) = \sum_{n=0}^p U_{ni}(0) \varphi_{ni}(x), \text{ для } x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2},$$

где

$$U_{ni}(0) = \frac{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U_0 \cdot \varphi_{ni}(x) dx}{\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_{ni}^2(x) dx}.$$

Рассмотрим задачу с начальными данными в виде получившейся разрывной функции $U_p(x, 0)$. Если в течение некоторого интервала времени Δt_0 известно точное решение этой задачи, то, получив его на момент времени

Δt_0 , снова спроецируем это решение на E_p , и так далее. Получим формулы для этой процедуры.

Рассмотрим на плоскости (x, t) прямоугольную область (рис. 1). Через $U(x, t)$ обозначим точное решение задачи (1) с начальными данными $U_p(x, 0)$.

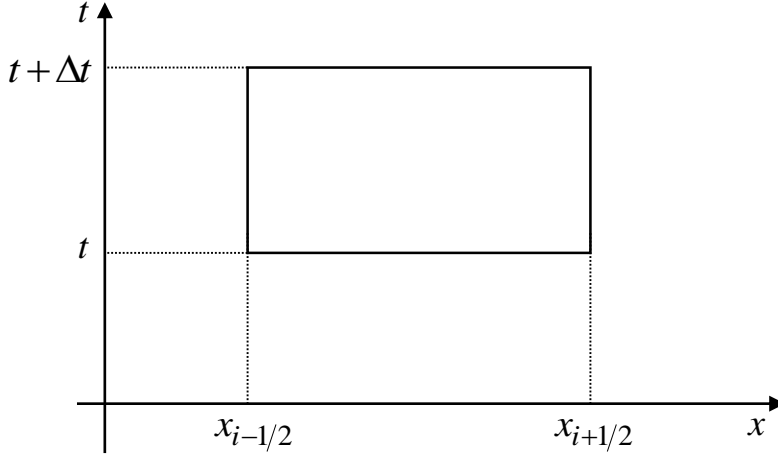


Рис.1

Выпишем для рассматриваемой области соотношения (2) для $\varphi = \varphi_{ni}(x)$, $n = 0, \dots, p$:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t) \varphi_{pi}(x) dx - \\ & - \varphi_{pi}(x_{i+1/2}) \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt + \varphi_{pi}(x_{i-1/2}) \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i-1/2}, t)) dt + \\ & + \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x, t + \Delta t) \varphi_{pi}(x) dx - \int_{ABCD} \frac{d\varphi_{pi}(x)}{dx} F(U(x, t)) dx dt = 0 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned} & (U_p(t + \Delta t) - U_p(t)) \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_{pi}^2(x) dx \\ & - \varphi_{pi}(x_{i+1/2}) \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i+1/2}, t)) dt + \varphi_{pi}(x_{i-1/2}) \int_t^{t+\Delta t} F(U(x_{i-1/2}, t)) dt + \quad (3) \\ & + \int_{ABCD} \frac{d\varphi_{pi}(x)}{dx} F(U(x, t)) dx dt = 0. \end{aligned}$$

Точное решение задачи с кусочно-полиномиальными данными для достаточно малых значений Δt может быть с точностью $O(\Delta t)$ получено как решение задачи о распаде произвольного разрыва с данными $U_i(x_{i+1/2}, t)$ и $U_{i+1}(x_{i+1/2}, t)$ слева и справа от разрыва [1,4]. Разделив равенство (3) на Δt , перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\left(\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \varphi_{pi}^2(x) dx \right) \cdot \frac{dU_p(t)}{dt} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \frac{d\varphi_{pi}(x)}{dx} F(U(x, t)) dx dt + \\ + \varphi_{pi}(x_{i+1/2}) F(U(x_{i+1/2}, t)) - \varphi_{pi}(x_{i-1/2}) F(U(x_{i-1/2}, t)) = 0. \quad (4)$$

Отметим, что (4) совпадает с формулами разрывного метода Галеркина с потоковой функцией $F_{i+1/2} = F(U(x_{i+1/2}, t))$ [3].

Выполнение энтропийного неравенства в данной схеме в отличие от классического метода Годунова [2] в общем случае неочевидно. Покажем, однако, что для одного уравнения

$$\frac{\partial u(x)}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

это неравенство выполнено, если в качестве энтропии рассмотреть функцию $s = -u^2$. Эта функция является вогнутой, и на гладких решениях выполнен закон сохранения

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(u)}{\partial x} = 0, \text{ где } \Phi(u) = \int_0^u v \cdot f'(v) dv. \quad (6)$$

Нам необходимо показать, что при проецировании на пространство кусочно-линейных полиномов интегральное значение энтропии возрастает, т.е. если $v(x)$ проекция функции $u(x)$, то

$$\int_a^b u^2(x) dx \geq \int_a^b v^2(x) dx. \quad (7)$$

В самом деле,

$$u(x) = v(x) + r(x),$$

где $v(x) \in E_p$ и $v(x)$ и $r(x)$ ортогональны, в силу определения проекции.

$$\int_a^b u^2(x) dx = \int_a^b \left(v^2(x) + 2v(x)r(x) + r^2(x) \right) dx =$$

$$\int_a^b \left(v^2(x) + r^2(x) \right) dx \geq \int_a^b v^2(x) dx. \quad (8)$$

Примеры расчетов

Рассмотрим задачу о взаимодействии ударной волны с энтропийным возмущением. Число Маха ударной волны, движущейся вдоль оси X , составляет величину $M=1,5$.

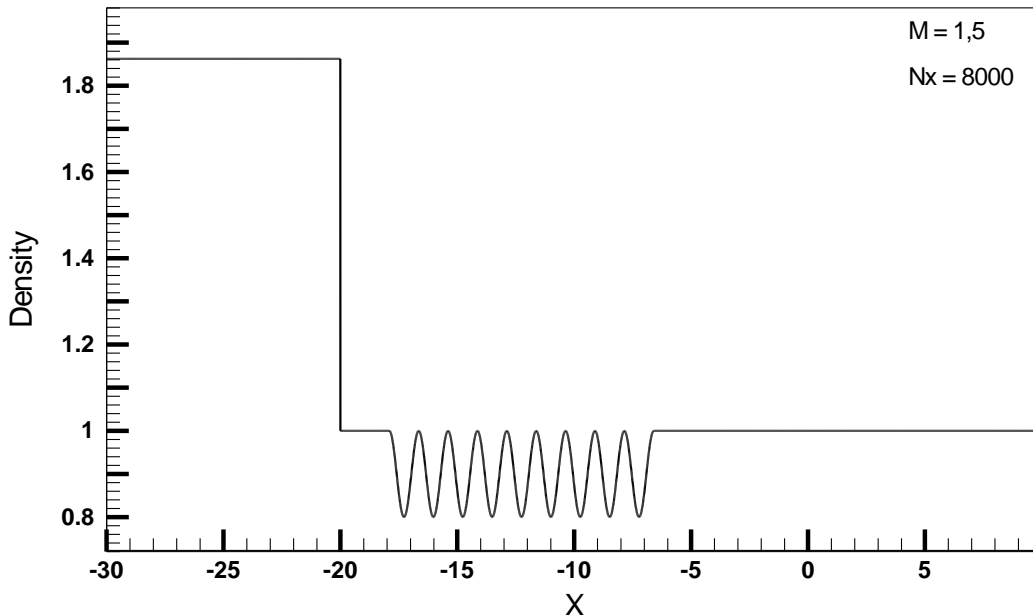


Рис.2. Начальное распределение плотности вещества.

Начальное распределение вещества в расчетной области: $-20 \leq x \leq 10$.

1. $L_1 \leq x \leq L_2$; $\rho_1=1$; $p_1=1$; $u_1=0$;
2. $L_2 \leq x \leq L_3$; $\rho_2=0.9 - 0.1 \cdot \sin(5 \cdot x)$; $p_2=p_1$; $u_2=0$;
3. $L_3 \leq x \leq L_4$; $\rho_3=1$; $p_3=p_1$; $u_3=0$.

$L_1 = -20,0$; $L_2 = -5,7\pi$; $L_3 = -2,1\pi$; $L_4 = 10,0$. На границе заданы условия отражения.

Вычислим порядки точности решения разрывным методом Галеркина в норме L_1 по формуле

$$r = \log_2 \frac{\|U_h - U_{h/2}\|_{L_1}}{\|U_{h/2} - U_{h/4}\|_{L_1}}, \quad \|U_h - U_{h/2}\|_{L_1} = \int_{\Omega} (U_h - U_{h/2}) dx, \quad \Omega \in R,$$

где $U_h, U_{h/2}, U_{h/4}$ – численные решения задачи с пространственными шагами $h, h/2$ и $h/4$ соответственно.

После прохождения ударной волны за фронтом формируется сложное течение (рис. 2), в котором со временем образуется серия ударных волн. На момент времени $T=8$ течение в области $[-21.5, -12.5]$ сохраняет гладкость. Серия расчетов выполнена разрывным методом Галеркина с линейными базисными функциями без использования лимитеров и с лимитером Кокбурна[3], с различными параметрами лимитирования α (см.[5,6]).

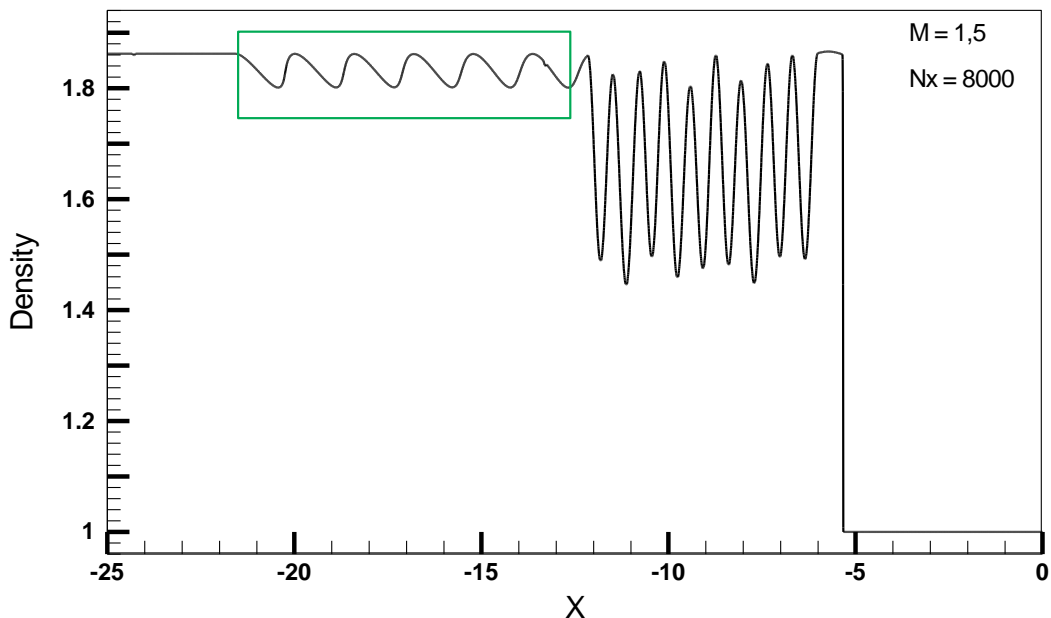


Рис.3. Распределение плотности вещества за фронтом ударной волны.

В таблице 1 приведены порядки точности метода.

Таблица 1

h	без лимитера	$\alpha=1$	$\alpha=0.5$
1000	1,956	1,741	1,758
2000	2,035	1,443	1,761

Выводы

Таким образом, схемы разрывного метода Галеркина могут рассматриваться как обобщение метода Годунова [1] на кусочно-полиномиальные функции. Применение описанного метода позволяет получить порядки точности, близкие ко вторым в следе за ударной волной, двигающейся по неравномерному фону.

Список литературы

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Мат. сборник, 1959. т. 47(89):3, С. 271-306.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. // Наука, 1976
3. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics), 1998, V. 1697, pp. 151-268.
4. Меньшов И.С. Повышение порядка аппроксимации схемы Годунова на основе решения обобщенной задачи Римана. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1990. Т.30. № 9, С.1357-1371
5. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2012. № 34. 31 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-34>
6. Ладонкина М.Е., Неклюдова О.А., Тишкин В.Ф. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина. // Матем. моделирование. 2012. № 24:12. С.124–128. URL:http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=mm&paperid=3234&option_lang=rus